УДК 515.2:519.6

Ю.І. НІКОЛАЄНКО, В.Г. ІЛЬВОВСЬКИЙ
Фізико-технічний ліцей при ХНТУ та ДНУ
С.В. МОІСЕЄНКО
Херсонський національний технічний університет

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

В роботі побудована модель випадкових блукань у полярних координатах для областей, які містять координатний полюс. За допомогою даної моделі можна розв'язувати задачу Діріхле для рівняння Лапласа у крузі та в будь-яких областях, що є частиною круга. Для обчислення апріорних перехідних ймовірностей застосована ітераційна процедура, до того ж наявність полюсу в області не збільшує її похибку Побудувана однокрокова модель випадкових блукань для круга. Показано, що для області у формі круга однокрокова модель випадкових блукань забезпечує більшу точність розрахунків, порівняно з багатокроковою.

Ключові слова: метод Монте-Карло, випадкові блукання, однокрокова модель, ітераційна процедура, задача Діріхле для рівняння Лапласа, полярні координати.

Ю.И. НИКОЛАЕНКО, В.Г. ИЛЬВОВСЬКИЙ
Физико-технический лицей при ХНТУ и ДНУ
С.В. МОИСЕЕНКО
Херсонский национальный технический университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

В работе построена модель случайных блужданий в полярных координатах для областей, содержащих координатный полюс. С помощью данной модели можно решать задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге и в любых областях, являющимися частью круга. Для вычисления априорных переходных вероятностей применена итерационная процедура, причем наличие полюса в области не увеличивает ее погрешность. . Построена одношаговая модель случайных блужданий для круга. Показано, что для области в форме круга одношаговая модель случайных блужданий обеспечивает более высокую точность вычислений, по сравнению с многошаговой.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, случайные блуждания, одношаговая модель, итерационная процедура, задача Дирихле для уравнения Лапласа, полярные координаты.

Yu.I. NIKOLAYENKO, V.G. ILVOVSKY
Physics and Technical Lyceum at KhNTU and DNU
S.V. MOISEENKO
Kherson National Technical University

THE SOLUTION PROBLEM OF DIRIHLE FOR EQUATION OF LAPLACE IN POLAR COORDINATES BY METHOD MONTE CARLO

In this work, a model of random walks in polar coordinates for regions containing a coordinate pole is constructed. With this model, we can solve the problem Dirihle for equation of Laplace by method Monte-Carlo in a circle and in all areas that are part of the

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-114-122

circle. Transient probabilities, as a rule, are found by the method of statistical tests, but in this work implemented the iteration procedure for calculating the a priori transition probabilities. We also note that the probabilities of transition to the boundary nodes, symmetric with respect to the axis from which the particle started, exactly coincide, which is practically not observed in the application of the statistical test method. Problem Dirihle for equation of Laplace for the on circle can be solved by using integral formula of Poisson. In this paper, a one-dimensional model of random walks in a circle is constructed on the basis of the Poisson integral formula. For a circle, a formula is derived for calculating the probability of transition from any node inside the circle to the node at the boundary of the circular region. Comparative testing of transition probabilities, calculated using two different models, was carried out. The results showed that for a circle, the one-time model of random walks always provides greater accuracy than multi-stage, provided that the distance between the nodes at the edge of the circle is twice less than that of the circle. The test results showed that the pole presense does not increase the error of the calculations. As a result, this multi-stage model can be used for any areas that contain a coordinate pole, can to build a iterative procedure for a more complex area, having the experience of constructing it for a circle and a semicircle. To calculate the transition probabilities, we must apply the formulas obtained. However, do not forget that the one-way model of random walks runs only in the circle.

Keywords: method of Monte Carlo, random walks, one-step model, iteration procedure, problem Dirihle for equation of Laplace, polar coordinates.

Постановка проблеми

Велика кількість прикладних задач приводить до необхідності розв’язання крайових задач для рівнянь математичної фізики. При дослідженні стаціонарних процесів різної фізичної природи (теплопровідність, дифузія) зазвичай приводять до задач еліптичного типу.

Найбільш поширеним рівнянням цього типу є рівняння Лапласа. Будь які обчислення, що виконуються при наближеному розв’язанні більшості задач, не можуть ігнорувати той факт, що сітка моделі побудована в певній системі координат. До найбільш поширених систем координат відносяться декартова, полярна та довільна (ортогональна і неортогональна). Якщо область має форму кола або сектора, то при застосуванні декартової системи виникають проблеми з описом функції на межі області. Тому для таких областей природно застосовувати полярну систему координат, в якій розрахункові вузли співпадають з граничними вузлами.

В ряді робіт [4-9] вже застосовувалася полярна система координат для розв’язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом Монте-Карло. Але при цьому розглядалася тільки область у вигляді кільцевого сектора. Тому залишається проблема розв’язання цієї задачі для областей, в яких міститься координатний полюс.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В полярних координатах задача Діріхле для рівняння Лапласа має вигляд [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \\ U\big|_{\Gamma} = f(r,\varphi), \end{cases} \tag{1}$$

де $f(r,\varphi)$ – задана функція на межі області Г.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-114-122

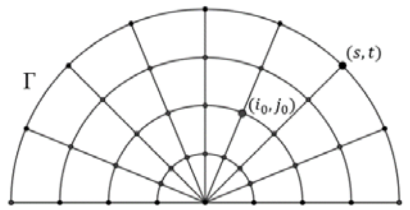


Рис. 1. Координатна сітка

При чисельному розв'язку задачі методом Монте-Карло область (рис. 1) покривають координатною сіткою, а значення шуканої функції у внутрішніх вузлах сітки розраховують за формулою (2)[2]:

$$\mathrm{U}\left(r_{i_0},\varphi_{j_0}\right)=\sum_{(s,t)}\mathrm{P}\left(i_0,\,j_0;s,t\right)\cdot f\left(r_s,\varphi_t\right), \tag{2}$$

де (r_s,φ_t) – координати вузлів на межі області, а $\mathrm{P}\left(i_0,\,j_0;s,t\right)$ – ймовірність для випадково блукаючої частинки перейти з внутрішнього вузла з координатами $\left(r_{i_0},\varphi_{j_0}\right)$ у вузол на межі області з координатами (r_s,φ_t).

Модель випадкових блукань для розрахунку перехідних ймовірностей в полярних координатах вже розглядалась в роботах [3], [4], але вона не пристосована для областей, які містять координатний полюс. У роботі [5] була запропонована двокрокова модель випадкових блукань, але тільки для 4-вузлового кільцевого сектора.

Мета дослідження

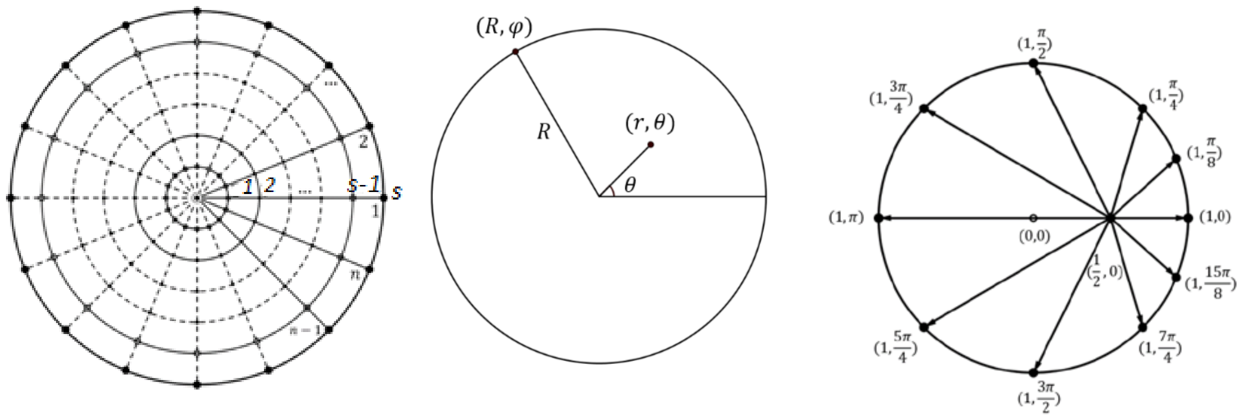
У даній роботі ставиться задача відрегулювати модель випадкових блукань у полярних координатах так, щоб її можна було застосовувати для областей, які містять координатний полюс, а також побудувати однокрокову модель випадкових блукань для області у формі кола.

Викладення основного матеріалу дослідження

Перехідні ймовірності в формулі (2), як правило, знаходять методом статистичних випробувань, але в роботах [8–9] запропонована ітераційна процедура обчислення перехідних ймовірностей. Суть даної процедури полягає в тому, що розглядається не траєкторія випадково блукаючої частинки, а ймовірність перебування частинки в кожному вузлі області на кожному кроці. До початку блукання ймовірність перебування частинки в точці старту дорівнює одиниці, а в усіх інших вузлах дорівнює нулю. На кожному кроці у всіх внутрішніх вузлах області ймовірність перебування частинки розраховується за формулою повної ймовірності. При потраплянні в вузол на межі частинка блукання припиняє, а ймовірності перебування частинки в цих вузлах на кожному кроці накопичуються. Процедура повторюється до тих пір, доки сума ймовірностей перебування частинки в вузлах на межі області буде відрізнятися від 1 на величину, не більше заданої похибки, при цьому накопичені ймовірності в вузлах на межі якраз дорівнюють ймовірностям переходу в ці вузли.

В якості прикладу покажемо як реалізується ітераційна процедура на області, що має форму *кола* (рис.2), в якому координатний полюс суміщений з центром кола.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-114-122



а) б) в)

Рис. 2. Розрахункова область:
а) для ітераційної процедури; б) для однокрокових блукань; в) для тестового прикладу

За допомогою ітераційної процедури знайдемо апріорні перехідні ймовірності $\mathrm{P}(i, j; s, t)$ потрапляння частинки у граничні вузли (s ,t). Будемо розраховувати ймовірність перебування частинки у вузлі (i, j) на (k+1)-ому кроці, який не належить межі області, не є сусіднім з межею або полюсом і не є полюсом полярної системи координат. Ця ймовірність відповідна до формули повної ймовірності, має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} P^{(k+1)}(i, j) = P_1(r_i + h)\cdot P^{(k)}(i+1, j) + P_3(r_i - h)\cdot P^{(k)}(i-1, j) + P_2(r_i)\cdot P^{(k)}(i, j-1) + \\ + P_4(r_i)\cdot P^{(k)}(i, j+1), \end{aligned} \tag{3}$$

де $P_1(r_i) = \dfrac{r_i\alpha^2(2r_i - h)}{4\left(r_i^2\alpha^2 + h^2\right)}$, $P_3(r_i) = \dfrac{r_i\alpha^2(2r_i + h)}{4\left(r_i^2\alpha^2 + h^2\right)}$ – ймовірності переходу в сусідній вузол в радіальному напрямі в бік полюсу і від полюсу відповідно;

$P_2(r_i) = P_4(r_i) = \dfrac{h^2}{2\left(r_i^2\alpha^2 + h^2\right)}$ – ймовірність переходу в сусідні вузли в азимутальному напрямі,

α – крок в азимутальному напрямі, h – в радіальному напрямі.

Для вузла сусіднього з межею області в формулі (3) необхідно покласти $P_1(r_s) = 0$, оскільки на межі області блукання припиняються.

Для обчислення ймовірності виходу частинки з полюсу системи координат застосуємо теорему про середнє значення гармонічної функції [6], відповідно до якої:

$$U(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(h, \varphi)\, d\varphi, \tag{4}$$

де M_0 – співпадає з полюсом і є центром круга радіусом h. Якщо у формулі замінити інтеграл інтегральною сумою, то отримаємо:

$$U(M_0) \approx \sum_j U(h,\varphi_j)\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \approx \frac{1}{n}\sum_j U(h,\varphi_j), \tag{5}$$

де $\Delta\varphi = \alpha = \dfrac{2\pi}{n}$.

Подібним чином формула (5) обґрунтовується в роботі [7]. Ця формула має вигляд формули (2), де $\dfrac{1}{n}$ дорівнює ймовірності виходу з центрального вузла в будь який із сусідніх вузлів. При n=4 отримана формула перетворюється в відому формулу усереднення гармонічної функції по "прямому хресту", похибка якої дорівнює $O(h^4)$. При збільшенні n точність формули збільшується. Отже, дана формула не погіршує похибку процедури, тому що похибка коефіцієнтів формули (3) має порядок $O(h^4)$.

Ймовірність перебування частинки у вузлах, які є сусідніми з полюсом має вигляд:

$$P^{(k+1)}(1,j) = P_1(2h)\cdot P^{(k)}(2,j) + P_2(h)\cdot P^{(k)}(1,j-1) + P_4(h)\cdot P^{(k)}(1,j+1) + \frac{1}{n}\cdot P^{(k)}(0), \tag{6}$$

де $P^{(k)}(0)$ – ймовірність перебування частинки в центральному вузлі на k-ому кроці.

Для полюсу формулу (3) треба замінити наступною формулою:

$$P^{(k+1)}(0) = P_1(h)\cdot\sum_{j=1}^{n} P^{(k)}(1,j). \tag{7}$$

Для вузла (s ,t) на межі області:

$$P^{(k+1)}(s,t) = P^{(k)}(s,t) + P_3(r_{s-1})\cdot P^{(k)}(s-1,t). \tag{8}$$

Для випробування процедури використаємо круг з радіусом R=1, сітку з s = 25, n =96, а за стартову позицію частинки візьмемо точку з полярними координатами (1/2;0).

Відмітимо, що ймовірності переходу у граничні вузли, симетричні відносно осі, з якої стартувала частинка, точно співпадають, що практично не спостерігається при застосуванні методу статистичних випробувань. Також за допомогою процедури за досить невеликий час можна розрахувати ймовірності потрапляння в усі вузли на межі області з будь-якою точністю (похибка<δ), що в методі статистичних випробувань практично не досяжне. Розв'язок задачі (1) слід очікувати з точністю до $O(h^4)$, внаслідок сіткових похибок.

Задачу Діріхле для рівняння Лапласа у круговій області (рис.2б) можна розв'язати за допомогою інтегральної формули Пуассона (1) [1]:

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} U(\varphi)d\varphi, \tag{9}$$

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-114-122

де вираз $\dfrac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}$ має назву ядро Пуассона.

Таблиця 1

Ймовірності потрапляння в окремі вузли на межі круга радіуса 1 через k ітерацій при старті з точки (1/2;0)

φ	Кількість ітерацій				
	$k = 6000$	$k = 12000$	$k = 18000$	$k = 24000$	$k = 60000$
0	0.03474	0.035127	0.0351724	0.03517777	0.035178482
π/8	0.02467	0.025059	0.0251043	0.02510960	0.025110311
π/2	0.00526	0.005640	0.0056858	0.00569111	0.005691827
π	0.00266	0.003045	0.0030907	0.00309602	0.003096732
5π/4	0.00314	0.003523	0.0035681	0.00357341	0.003574119
3π/2	0.00526	0.005640	0.0056858	0.00569111	0.0056918267
15π/8	0.02467	0.025059	0.0251043	0.02510960	0.025110311
$\delta = 1 - \sum_{s,t} P(s,t)$	0.042	0.0049	0.00058	0.000068	0.0000000002
Час (с)	2.13	4.30	6.34	8.42	21.12

Наближено замінимо інтеграл Пуассона (9) його інтегральною сумою, в якій $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} U(\varphi)d\varphi \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi_j) + r^2} U(R, \varphi_j)\frac{\Delta\varphi}{2\pi},$$

Звідси отримаємо:

$$U(r,\theta) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{R^2 - r^2}{n\cdot(R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi_j) + r^2)} U(R, \varphi_j). \tag{10}$$

Зазначимо, що дана інтегральна сума не застосовується для відстаней нескінченно близьких до границі, тобто. $r \in [0; R)$.

Формула (8) має вигляд формули (2), в якій перехідні ймовірності $P(r,\theta; R, \varphi_j)$ розраховуються за формулою:

$$P(r,\theta; R, \varphi_j) = \frac{R^2 - r^2}{n\cdot(R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi_j) + r^2)}. \qquad 11)$$

У табл. 2 наведено результати знаходження перехідних ймовірностей за допомогою формули (11) та ітераційної процедури. Для розрахунків використовуємо сітку з s = 25, n = 96 із стартовою позицією частинки в точці з координатами (1/2, 0) (рис. 2 в).

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-114-122

Ми бачимо, що значення ймовірностей, розрахованих двома методами дещо відрізняються, при чому найбільші розбіжності спостерігаються для точки (1,0), яка є найближчою до точки старту. Перевіримо, який з цих способів точніший.

Проведемо тестування (табл. 3) отриманих результатів за допомогою гармонічної функції $f(r,\varphi)$: $f(r,\varphi) = r^2 cos2\varphi + 2$.

Таблиця 2

Перехідні ймовірності, розраховані за формулою (11) (в чисельнику) і за допомогою ітераційної процедури (в знаменнику), при старті з точки (r, θ) в вузли на границі (1,φ)

Фініш / Старт	(1,0)	(1,π/8)	(1,π/4)	(1,π/2)
(1/8, 0)	$\frac{0.0133929}{0.0133963}$	$\frac{0.0130680}{0.0130699}$	$\frac{0.0122238}{0.0122233}$	$\frac{0.0100966}{0.0100956}$
(1/4, 0)	$\frac{0.0173611}{0.0173729}$	$\frac{0.0162609}{0.0162638}$	$\frac{0.0137748}{0.0137705}$	$\frac{0.0091912}{0.0091904}$
(1/2, 0)	$\frac{0.0312500}{0.0313466}$	$\frac{0.0239559}{0.0239241}$	$\frac{0.0143905}{0.0143762}$	$\frac{0.0062500}{0.0062509}$

Таблиця 3

Наближені значення $\bar{f}_1(r,\theta)$, $\bar{f}_2(r,\theta)$ функції $f(r,\theta)$, розраховані за формулою (10) та за допомогою ітераційної процедури відповідно, та їх відносні похибки

r	$f(r,\theta)$	$\bar{f}_1(r,\theta)$	ε_1	$\bar{f}_2(r,\theta)$	ε_2
1/24	2.001736111	2.001736111	0 %	2.001743914	0.00039%
1/4	2.062500000	2.062500000	$2.2\cdot 10^{-14}$ %	2.062623717	0.0060%
1/2	2.250000000	2.250000000	$3.9\cdot 10^{-14}$%	2.250247427	0.011%
5/8	2.390625000	2.390625000	$1.3\cdot 10^{-13}$ %	2.390887123	0.011%
3/4	2.562500000	2.562500000	$2.5\cdot 10^{-10}$%	2.562731016	0.0090%
7/8	2.765625000	2.765641447	0.00059 %	2.765770939	0.0053%

У табл. 3 бачимо, що точність результатів при застосуванні одномаршрутної моделі випадкових блукань набагато вища, ніж при застосуванні багатомаршрутної при r <7/8 . Проте біля межі круга точність суми (11) набагато зменшується.

У ході експерименту ми порівнюватимемо відстань між вузлами $l=2\pi(R-h)/n$ і відстань до межі (у нашому випадку d=1/24). З`ясуємо, при якому їх відношенні ω=l/d забезпечується необхідна нам точність.

Результати обчислення наведені в табл. 4.

Для порівняння нагадаємо, що точне значення функції в даній точці f(0,23/24)=2,9184027778. При n = 96, відносна похибка при застосуванні ітераційної процедури становить 0.0019%.

Точність обчислення значення функції за одномаршрутною моделлю зрівнюється з точністю розрахунків за допомогою ітераційної процедури, коли відстань між вузлами на межі в два рази менша, ніж відстань до межі, а при l = d/4 точність одно маршрутної схеми стає на порядки вище.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-114-122

Таблиця 4

Наближені значення функції $\bar{f}_1(r,\theta)$ в точці з координатами (23/24;0),розраховані за допомогою суми (10) при різних кількостях вузлів n

n	96	144	192	288	576
$\bar{f}_1\left(\frac{23}{24},0\right)$	3.021	2.932	2.920101	2.9184313	2.9184027779
ω	1.571	1.047	0.785	0.524	0.262
ε_1	3.5 %	0.451%	0.058%	0.00098 %	$4.6\cdot 10^{-9}$%

Висновки

В роботі удосконалена процедура розрахунку апріорних ймовірностей, що дозволяє розв’язати задачу Діріхле для областей, що містять полюс за досить короткий час та з достатньо високою точністю. Для області у формі круга запропонована однокрокова модель випадкових блукань, яка дозволяє розв’язувати задачу (1) значно точніше, якщо досліджувана точка находиться від межі круга на відстані принаймні вдвічі більшій ніж відстань між вузлами.

Відмітимо також, що точність розрахунків за допомогою ітераційної процедури залишається високою і для точок, які знаходяться на відстані одного кроку числової сітки від межі круга.

Список використаної літератури

1. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. Москва: Мир, 1985. 384 с.
2. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Е. З. Численные методы анализа. Москва: Наука, 1967. 368 с.
3. Хомченко А. Н., Гучек П. И., Хомченко Б. А. Геометрия блужданий по контрольным объёмам в полярных координатах. *Сучасні проблеми геометричного моделювання*: збірка праць Міжнародної науково-практичної конференції. Частина 2. Харків: ХІПІБ МВС України, 1998. 2-13 с.
4. Николаенко Ю. И., Сергиенко Д. А., Моисеенко С. В. Моделирование случайных блужданий в полярных координатах. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2012. № 2 (45). С. 276-281.
5. Ляхович Т. П. Двумерные решётки в полярных координатах для маршрутизации случайных блужданий. *Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности*: Сборник научных трудов. С.-Пб.: Санкт-Петербургское отделение НАН В.Ш., 2000. 119-122 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука. ГРФМЛ, 1972. 735 с.
7. Хомченко А. Н., Валько Н. В. Дискретные аналоги интегрального условия гармоничности функции. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2004. № 1(19). С.17-19.
8. Николаенко Ю. И., Моисеенко С. В. Итерационная процедура вычисления переходных вероятностей случайных блужданий и её альтернативы. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2009. № 2 (35). С. 323-327.
9. Николаенко Ю. И., Моисеенко С. В., Зуб П. М. Расчёт априорных вероятностей при решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом Монте-Карло. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2010. № 3(39). С. 345-349.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-114-122

References

1. Farlou, S. (1985) Uravneniya s chastnyimi proizvodnyimi dlya nauchnyih rabotnikov i inzhenerov. Moscow: Mir.
2. Demidovich, B. P., Maron, I. A., & Shuvalova, E. Z. (1967) Chislennyie metodyi analiza. Moscow: Nauka.
3. Khomchenko, A. N., Guchek, P. I., & Khomchenko, B. A. (1998) Geometriya bluzhdaniy po kontrolnyim ob'yomam v polyarnyih koordinatah. Proceedings of the *Suchasni problemy heometrychnoho modeliuvannia,* Chastyna 2. Kharkiv: KhIPIB MVS Ukrainy, pp. 2-13.
4. Nikolaenko, Yu. I., Sergienko, D. A., & Moiseenko, S. V. (2012) Modelirovanie sluchaynyih bluzhdaniy v polyarnyih koordinatah. *Vestnik Hersonskogo natsionalnogo tehnicheskogo universiteta*. **2** (45), 276-281.
5. Lyahovich, T. P. (2000) Dvumernyie reshyotki v polyarnyih koordinatah dlya marshrutizatsii sluchaynyih bluzhdaniy. *Matematicheskoe modelirovanie v obrazovanii, nauke i promyishlennosti*. S.-Pb.: Sankt-Peterburgskoe otdelenie NAN V.Sh., pp. 119-122.
6. Tihonov, A. N., & Samarskiy, A. A. (1972) Uravneniya matematicheskoy fiziki. Moscow: Nauka. GRFML.
7. Khomchenko, A. N., & Valko, N. V. (2004) Diskretnyie analogi integralnogo usloviya garmonichnosti funktsii. *Vestnik Khersonskogo natsionalnogo tehnicheskogo universiteta*. **1** (19), 17-19.
8. Nikolaenko, Yu. I., & Moiseenko, S. V. (2009) Iteratsionnaya protsedura vyichisleniya perehodnyih veroyatnostey sluchaynyih bluzhdaniy i eygo alternativyi. *Vestnik Khersonskogo natsionalnogo tehnicheskogo universiteta*. 2 (35), 323-327.
9. Nikolaenko, Yu. I., Moiseenko, S. V., & Zub, P. M. (2010) Raschyot apriornyih veroyatnostey pri reshenii zadachi Dirihle dlya uravneniya Puassona metodom Monte-Karlo. *Vestnik Khersonskogo natsionalnogo tehnicheskogo universiteta*. **3** (39), 345-349.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-114-122