УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, В.М. НЕСВІДОМІН, В.М. БАБКА
Національний університет біоресурсів і природокористування України
М.Б. КЛЕНДІЙ
Бережанський агротехнічний інститут НУБіП України

РУХ ЧАСТИНКИ ПО СТАЦІОНАРНІЙ ГВИНТОВІЙ ПОВЕРХНІ ІЗ ЗАДАНОЮ КРИВОЮ ОСЬОВОГО ПЕРЕРІЗУ

Розглянуто рух частинки по гвинтовій поверхні під дією сили власної ваги. Крива осьового перерізу гвинтової поверхні задана параметричними рівняннями. Складено рівняння руху частинки після його стабілізації, тобто для випадку, коли частинка рухається із сталою швидкістю. Рівняння складені в проекціях на орти рухомого тригранника Дарбу. Розглянуто окремий випадок, коли осьовим перерізом поверхні є пряма лінія, тобто гвинтовою поверхнею є косий гелікоїд. В цьому випадку розв'язком є аналітичний вираз. Для деяких кривих осьового перерізу поверхні розв'язання рівнянь потребує застосування чисельних методів. Розглянуто приклади, побудовано поверхні із нанесеними на них траєкторіями руху частинки.

Ключові слова: гвинтова поверхня, рух частинки, сила ваги, траєкторія, швидкість, тригранник Дарбу, рівняння руху.

С.Ф. ПИЛИПАКА, В.Н. НЕСВИДОМИН, В.Н. БАБКА
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины
Н.Б. КЛЕНДИЙ
Бережанский агротехнический институт НУБиП Украины

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ПО СТАЦИОНАРНОЙ ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННОЙ КРИВОЙ ОСЕВОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрено движение частицы по винтовой поверхности под действием силы собственного веса. Кривая осевого сечения винтовой поверхности задана параметрическими уравнениями. Составлены уравнения движения частицы после его стабилизации, то есть для случая, когда частица движется с постоянной скоростью. Уравнения составлены в проекциях на орты подвижного трехгранника Дарбу. Рассмотрен отдельный случай, когда осевым сечением поверхности является прямая линия, то есть винтовой поверхностью является косой геликоид. В этом случае решение имеет аналитическое выражение. Некоторые кривые осевого сечения поверхности требуют применения численных методов для решения уравнений. Рассмотрены примеры, построены поверхности с нанесенными на них траекториями движения частицы.

Ключевые слова: винтовая поверхность, движение частицы, сила веса, траектория, скорость, трехгранник Дарбу, уравнения движения.

S.F. PYLYPAKA, V.M. NESVIDOMIN, V.M. BABKA
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine
M.B. KLENDIY
IS NULES of Ukraine "Berezhany Agrotechnical Institute"

PARTICLE MOTION ON A STATIONARY SCREW SURFACE WITH A SET AXIAL CURVE

The movement of a particle along a helical surface under the action of its own weight is considered. The axial section curve of the helical surface is given by parametric equations.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132

The equations of motion of the particle after its stabilization are compiled, that is, for the case when the particle moves at a constant speed. The equations are compiled in projections onto the orths of the Darboux rolling trihedron. One of them is directed tangentially to the trajectory of the particle, the second is normal to the surface, and the third is perpendicular to the first two. The first and third orths form a tangent plane to the surface. The particle is at the top of the trihedron. When it moves together with a trihedron at a constant speed, all forces acting on the particle are balanced. The curvature of the trajectory, which creates centrifugal force, and the surface roughness are taken into account. By eliminating the system is reduced to one equation with one unknown, allowing you to find the distance from helix points to its axis. After that you can find the speed of the particle.

A separate case is considered when the axial section of the surface is a straight line, that is, the helical surface is an oblique helicoid. In this case, the equation is simplified and the solution has an analytical expression. Some curves of the axial section of the surface require the use of numerical methods for solving equations. The examples are considered, the surfaces with trajectories of the particle motion are plotted are built.

The influence of the structural parameters of the surface on the nature of the particle motion is investigated. The pitch of the helical surface is essential. The movement of particles of technological material with different friction coefficient was studied. The trajectories of their motion are constructed, allowing to visually assess the distribution of particles with different coefficients of friction over the surface during movement.

Keywords: screw surface, particle motion, weight force, trajectory, speed, Darboux trihedron, equations of motion.

Постановка проблеми

Існує багато пристроїв, у яких робочий процес пов'язаний із контактуванням технологічного матеріалу із поверхнями робочих органів. В процесі такої взаємодії матеріал певним чином рухається по поверхні. Такий рух може бути вимушеним під дією зовнішніх чинників, а також може бути спричинений силою власної ваги елементу матеріалу. В такому випадку прикладеною силою є також сила тертя, спричинена шорсткістю поверхні. Аналітичний опис елементу матеріалу по поверхні є надзвичайно складним, тому для невеликих розмірів такого елемента прийнято вважати його матеріальною частинкою. І навіть в такому випадку аналітичний опис руху частинки по поверхні зводиться до розв’язування нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Якщо робочою поверхнею є гвинтова, то рух частинки по ній з часом стабілізується і кінематичні характеристики стають сталими. В такому випадку замість диференціальних рівнянь потрібно розв’язувати звичайні, але це не означає, що задача перетворюється на елементарну. В матеріалі статті це показано на конкретних прикладах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В минулому гвинтові поверхні використовувалися для розділення окремих фракцій зернових сумішей. Це спричинило пошук аналітичного опису процесу переміщення частинок по гвинтових поверхнях. Аналіз робіт в цьому напрямі зроблено в монографії [1]. Там зазначено, що елементарний розв’язок даної задачі в застосуванні до проектування спіральних сепараторів розробив проф. Л.Б. Левенсон. Рух матеріальної частинки по косому (нерозгортному) гелікоїду досить ґрунтовно розглянуто в працях проф. М.І. Акимова. М.І. Сисоєв розглянув рух частинки по розгортному і косому гелікоїдах [2]. Ці задачі розв’язані в циліндричній системі координат. Великий вклад в розвиток цього напрямку досліджень вніс акад. Заїка П.М. [3]. Він почав застосовувати програмні продукти для чисельного розв’язування диференціальних рівнянь. Дослідження руху частинок по гвинтових лінійчатих

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132

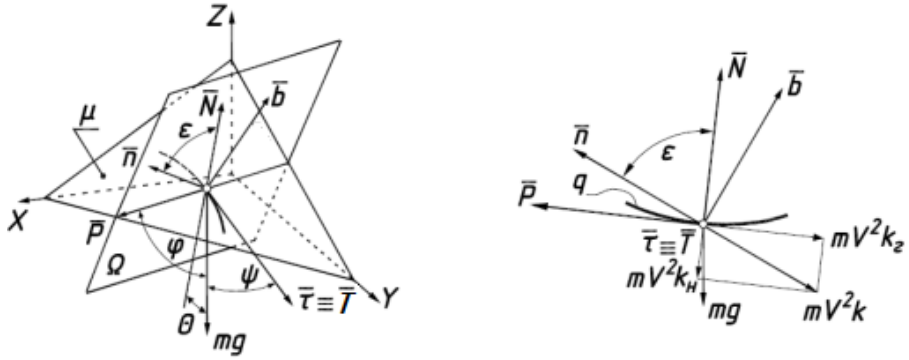
поверхнях розглянуто в працях [4, 5]. Рух технологічного матеріалу по гвинтових поверхнях має місце в гвинтових спусках і спіральних сепараторах для збагачення руд. Теоретичні основи цих процесів висвітлено в працях [6–8].

Мета дослідження

Скласти рівняння руху частинки по гвинтовій поверхні під дією сили власної ваги в проекціях на орти рухомого тригранника Дарбу після стабілізації руху.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо розташування тригранників Френе і Дарбу в загальному випадку. Супровідний тригранник Френе напрямної просторової кривої в кожній її точці займає визначене положення, яке визначається її диференціальними характеристиками. Одиничний орт $\bar{\tau}$ є дотичним до кривої, орт головної нормалі $\bar{n}$ спрямований до центра кривини, орт бінормалі $\bar{b}$ перпендикулярний двом попереднім. Супровідний тригранник Дарбу може бути побудований в точці кривої на поверхні, причому його орт $\bar{T}$ збігається із ортом $\bar{\tau}$ тригранника Френе. Орт $\bar{N}$ спрямований по нормалі до поверхні, отже третій орт $\bar{P}$ лежить в дотичній до поверхні площині. В спільній для обох тригранників нормальній площині між ортами $\bar{n}$ і $\bar{N}$ існує кут ε. На рис. 1,а дотична до поверхні площина μ для наочності показана трикутником з вершинами на осях декартової системи *OXYZ*. Крива лежить на поверхні і є траєкторією руху спільної вершини тригранників, у якій знаходиться частинка. Сама поверхня на рис. 1,а не показана, оскільки рух по ній в околі точки на траєкторії можна розглядати як рух по дотичній площині.



а б

Рис. 1. Супровідні тригранники Френе та Дарбу кривої – траєкторії руху частинки по поверхні: а) загальний випадок розташування тригранників в конкретній точці траєкторії; б) розкладання відцентрової сили на орти тригранника Дарбу у спільній нормальній площині обох тригранників

Розглянемо діючі на точку сили. Відцентрова сила, яка виникає внаслідок руху точки по криволінійній траєкторії, завжди направлена вздовж головної нормалі $\bar{n}$ в протилежну сторону від центра кривини. Оскільки орт $\bar{n}$ знаходиться в нормальній площині Ω, то і відцентрова сила mV^2k, де m – маса частинки, V – швидкість її руху і k – кривина траєкторії в даній точці теж буде діяти в даній площині перпендикулярно до траєкторії руху. На рис. 1,б нормальна площина траєкторії Ω показана без спотворення, тобто напрям погляду на неї вибраний так, що орти $\bar{\tau}\equiv\bar{T}$ проекціюються в точку, а дотична площина μ - в пряму лінію. Перетин двох перпендикулярних площин Ω і μ дає пряму лінію, вздовж якої направлений орт $\bar{P}$ перпендикулярно до $\bar{N}$ і $\bar{\tau}$. Ця ж лінія буде дотичною до кривої q – лінії перерізу поверхні нормальною площиною Ω. Три взаємно перпендикулярних вектори $\bar{\tau}\bar{N}\bar{P}$ утворюють другий супровідний тригранник траєкторії – тригранник Дарбу. Між ортами $\bar{N}$ і $\bar{n}$ та $\bar{b}$ і $\bar{P}$ попарно існує кут ε, який при русі частинки змінюється і залежить від її положення на

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132

траєкторії, тобто в загальному випадку є змінним. Для нашого випадку після стабілізації руху, коли тригранники будуть рухатися по гвинтовій лінії, він буде сталим. При русі частинки по поверхні тільки сила ваги mg ($g=9{,}81$ *м/с*^{2}) має змінний напрям в натуральній системі координат, решта ж сил строго орієнтована вздовж осей супровідних тригранників.

Після стабілізації руху швидкість V частинки буде сталою і всі прикладені до неї сили будуть врівноважені. Запишемо рівновагу діючих сил в проекції на орти рухомого тригранника Дарбу. На орт $\overline{\tau}$ спроекціюється сила ваги mg і в протилежну сторону сила тертя fR, де f – коефіцієнт тертя, R – реакція поверхні. Вектор дії відцентрової сили знаходиться у нормальній площині, тому на орт $\overline{\tau}$ не проекціюється. Враховуючи вищесказане, запишемо:

$$mg\cos\psi - fR = 0, \tag{1}$$

де ψ – кут між ортом $\overline{\tau}$ і вектором сили ваги mg (рис. 1,а).

Реакція поверхні R направлена вздовж нормалі до поверхні $\overline{N}$ і є сумою двох складових: сили ваги в проекції на орт $\overline{N}$ $mg\cdot\cos\theta$ (рис. 1,а) і відцентрової сили в проекції на орт $\overline{N}$ $mV^2k\cdot\cos\varepsilon$. Складова кривини $k\cdot\cos\varepsilon$ в проекції на орт $\overline{N}$ носить назву нормальної кривини: $k_н=k\cdot\cos\varepsilon$. Отже складову відцентрової сили можна записати через нормальну кривину у вигляді $mV^2k_н$ (рис. 1,б).· Кут θ є кутом між вертикальним напрямом дії сили ваги і ортом $\overline{N}$, кут ε є кутом між ортами тригранників $\overline{N}$ і $\overline{n}$. Отже, рівновага сил в проекції на орт $\overline{N}$ запишеться:

$$R = mg\cos\theta + mV^2k_н. \tag{2}$$

Тепер запишемо рівновагу сил в проекції на орт $\overline{P}$. Проекція відцентрової сили на орт $\overline{P}$ запишеться: $mV^2k\cdot\sin\varepsilon$. Зважаючи на те, що добуток $k\cdot\sin\varepsilon$ носить назву геодезичної кривини $k_г$, тобто $k_г=k\cdot\sin\varepsilon$, можна записати вираз проекції відцентрової сили на орт $\overline{P}$: $mV^2k_г$ (рис. 1,б). Складова сили ваги $mg\cdot\cos\varphi$, де φ - кут між вектором сили ваги і ортом $\overline{P}$, врівноважує складову відцентрової сили. Отже, рівняння рівноваги сил в проекції на орт $\overline{P}$ запишеться:

$$mV^2k_г = mg\cos\varphi. \tag{3}$$

Підставимо (2) в (1) і скоротимо отримане рівняння на масу m. Рівняння (3) теж скоротимо на масу m. Після цього запишемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} g\cos\psi - f(g\cos\theta + V^2k_н) = 0; \\ V^2k_г = g\cos\varphi. \end{cases} \tag{4}$$

Систему (4) можна звести до одного рівняння виключенням із неї швидкість V. Із (3) знаходимо:

$$V^2 = \frac{g}{k_г}\cos\varphi. \tag{5}$$

Після підстановки виразу (5) у перше рівняння системи отримаємо співвідношення нормальної і геодезичної кривини $k_н/k_г$. Зважаючи на те, що $k_н/k_г=\mathrm{ctg}\varepsilon$, а також після скорочення на сталу g, отримаємо:

$$\cos\psi - f\left(\cos\theta + \mathrm{ctg}\varepsilon\cos\varphi\right) = 0. \tag{6}$$

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132

Розглянемо приклади. Лінію осьового перерізу гвинтової поверхні задамо параметричними рівняннями в плоскій системі координат параметричними рівняннями у функції незалежної змінної u:

$$\rho = \rho(u); \qquad h = h(u). \tag{7}$$

Крива (7) може бути зміщена від осі на сталу d (рис. 2,а). Наприклад, якщо за криву взяти дугу кола радіуса r, яке зміщене на сталу d, то рівняння (7) набувають вигляду:

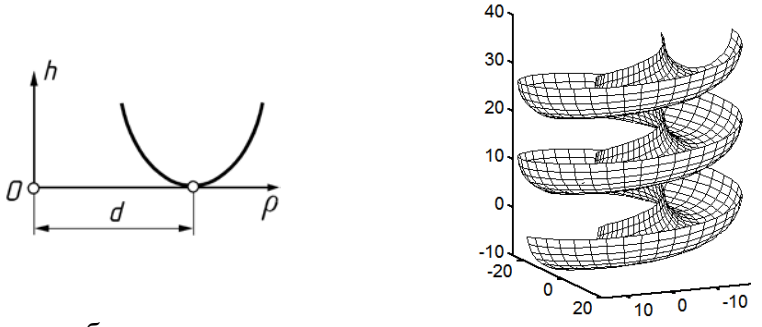
$$\rho = r\sin u + d; \qquad h = r\cos u. \tag{8}$$

Для утворення гвинтової поверхні дугу кола (8) потрібно рівномірно обертати навколо осі Oh і одночасно рухати вздовж неї, тобто надати цій кривій гвинтового переміщення. Такий спосіб утворення поверхні описується параметричними рівняннями:

$$X = \rho\cos\alpha; \qquad Y = \rho\sin\alpha; \qquad Z = h + b\alpha, \tag{9}$$

де α – друга незалежна змінна поверхні (кут повороту кривої перерізу поверхні навколо вертикальної осі), b – гвинтовий параметр – стала величина.

Гвинтова поверхня (9) з кривою осьового перерізу (8) зображена на рис. 2,б.



а б

Рис. 2. Схема утворення поверхні за заданою кривою осьового перерізу:
а) розташування кривої в плоскій системі координат;
б) поверхня, утворена гвинтовим рухом заданої кривої

Щоб розписати рівняння (6), потрібно знати вирази всіх кутів, що до нього входять, отже потрібно знати напрям векторів, що утворюють ці кути.

Проекції вектора нормалі $\overline{N}$ до поверхні (9) знаходимо, як векторний добуток двох векторів, дотичних до координатних ліній. Проекціями цих векторів є частинні похідні першого порядку поверхні (9):

$$\begin{aligned} X_u &= \rho'_u\cos\alpha; & Y_u &= \rho'_u\sin\alpha; & Z_u &= h'_u; \\ X_\alpha &= -\rho\sin\alpha; & Y_\alpha &= \rho\cos\alpha; & Z_\alpha &= b. \end{aligned} \tag{10}$$

Нижнім індексом позначена змінна, по якій відбувається диференціювання. Знаходимо векторний добуток векторів (10):

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132

$$\overline{N}=\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\alpha & Y_\alpha & X_\alpha \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} b\rho'_u\sin v-\rho h'_u\cos v; \\ -b\rho'_u\cos\alpha-\rho h'_u\sin\alpha; \\ \rho\rho'_u. \end{Bmatrix} \tag{11}$$

Після приведення вектора нормалі $\overline{N}$ (11) до одиничного його проекції запишуться:

$$\overline{N}=\left\{\frac{b\rho'_u\sin\alpha-\rho h'_u\cos\alpha}{\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u+h'^2_u\right)+b^2\rho'^2_u}};\quad -\frac{b\rho'_u\cos\alpha+\rho h'_u\sin\alpha}{\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u+h'^2_u\right)+b^2\rho'^2_u}};\quad \frac{\rho\rho'_u}{\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u+h'^2_u\right)+b^2\rho'^2_u}}\right\}. \tag{12}$$

Спільний орт для двох тригранників $\overline{\tau}\equiv\overline{T}$ спрямований по дотичній до траєкторії руху частини. Оскільки траєкторією руху є гвинтова лінія, то проекції дотичної ми знайдемо диференціюванням рівнянь (9) по змінній α при $\rho=const$:

$$x'=-\rho\sin\alpha;\qquad y'=\rho\cos\alpha;\qquad z'=b. \tag{13}$$

В рівняннях (13) похідні позначені малими літерами, оскільки при $\rho=const$ рівняння описують не поверхню, а лінію на ній. Рівняння (9) можуть описувати як поверхню, так і лінію на ній. Щоб розрізняти рівняння поверхні від рівнянь лінії, в першому випадку будемо застосовувати великі літери, в другому – малі. Привівши вектор (13) до одиничного, запишемо його проекції:

$$\overline{T}=\left\{-\frac{\rho\sin\alpha}{\sqrt{\rho^2+b^2}};\qquad \frac{\rho\cos\alpha}{\sqrt{\rho^2+b^2}};\qquad \frac{b}{\sqrt{\rho^2+b^2}}\right\}. \tag{14}$$

Третій орт $\overline{P}$ тригранника Дарбу перпендикулярний до векторів $\overline{N}$ і $\overline{T}$, тобто його можна знайти із векторного добутку вказаних векторів. Оскільки вектори $\overline{N}$ (12) і $\overline{T}$ (14) є одиничними, то при розкритті визначника теж отримаємо одиничний вектор:

$$\overline{P}=\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ T_x & T_y & T_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{b\rho h'_u\sin\alpha+\rho'_u\left(\rho^2+b^2\right)\cos\alpha}{\sqrt{\rho^2+b^2}\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u+h'^2_u\right)+b^2\rho'^2_u}}; \\ -\dfrac{b\rho h'_u\cos\alpha-\rho'_u\left(\rho^2+b^2\right)\sin\alpha}{\sqrt{\rho^2+b^2}\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u+h'^2_u\right)+b^2\rho'^2_u}}; \\ \dfrac{h'_u\rho^2}{\sqrt{\rho^2+b^2}\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u+h'^2_u\right)+b^2\rho'^2_u}}. \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Слід мати на увазі, що напрям вектора $\overline{P}$, отриманого в результаті векторного добутку (15), може мінятися на протилежний, якщо поміняти місцями другий і третій рядки у визначнику. Для того, щоб отримана система тригранника Дарбу була правою, в другому рядку визначника мають бути проекції вектора $\overline{T}$, а в третьому – вектора $\overline{N}$.

Нам ще потрібні проекції одиничного вектора $\overline{n}$ головної нормалі траєкторії, щоб можна було знайти кут ε між ним і нормаллю $\overline{N}$ до поверхні. Його знаходять за відомими формулами через перші і другі похідні напрямної кривої (для нашого випадку – гвинтової лінії). Ми візьмемо готовий результат із праці [9], в якій вони наведені для гвинтової лінії:

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132

$$\bar{n} = \{-\cos\alpha; \quad -\sin\alpha; \quad 0\}. \tag{16}$$

Останній вектор – напрям дії сили ваги *mg*. Позначимо його літерою $\bar{j}$ і запишемо його проекції із врахуванням того, що він спрямований вниз:

$$\bar{j} = \{0; \quad 0; \quad -1\}. \tag{17}$$

Кути між парами векторів $\bar{L}$ і $\bar{M}$ будемо знаходити за відомою формулою. Оскільки всі вектори в нас одиничні, вона запишеться:

$$\cos\left(\bar{L}, \bar{M}\right) = L_x M_x + L_y M_y + L_z M_z. \tag{18}$$

Застосувавши формулу (18), знаходимо косинуси потрібних кутів.

Для векторів $\bar{T}$ (14) і $\bar{j}$ (17):

$$\cos\psi = -\frac{b}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}. \tag{19}$$

Для векторів $\bar{N}$ (12) і $\bar{j}$ (17):

$$\cos\theta = -\frac{\rho\rho'_u}{\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u + h'^2_u\right) + b^2\rho'^2_u}}. \tag{20}$$

Для векторів $\bar{P}$ (15) і $\bar{j}$ (17):

$$\cos\varphi = -\frac{h'_u\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + b^2}\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u + h'^2_u\right) + b^2\rho'^2_u}}. \tag{21}$$

Для векторів $\bar{N}$ (12) і $\bar{n}$ (16):

$$\cos\varepsilon = \frac{\rho h'_u}{\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u + h'^2_u\right) + b^2\rho'^2_u}}. \tag{22}$$

Підставимо отримані кути (19), (20), (21) і (22) в рівняння (6) і після спрощень отримаємо:

$$b\rho'_u\sqrt{\rho^2 + b^2} = f\rho\sqrt{\rho^2\left(\rho'^2_u + h'^2_u\right) + b^2\rho'^2_u}. \tag{23}$$

З рівняння (23) можна знайти відстань ρ від осі гвинтової поверхні то точок гвинтової лінії – траєкторії руху частинки. Для знаходження швидкості руху скористаємося формулою (5), до якої входить вираз геодезичної кривини траєкторії. Вона визначається із добутку $k_g = k\cdot\sin\varepsilon$. Кривина *k* гвинтової лінії відома. Вона є сталою і визначається із формули:

$$k = \frac{\rho}{\rho^2 + b^2}. \tag{24}$$

Синус кута ε знаходимо із виразу (22). Після підстановки цих даних у (5) отримаємо:

$$V^2 = -g\rho\frac{h'_u}{\rho'_u}. \tag{25}$$

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132

Щоб розв'язати рівняння (23) і знайти швидкість (25), необхідно задати форму лінії осьового перерізу поверхні. Нехай нею буде дуга кола (8) на відстані d від осі обертання. Знаходимо похідні рівнянь (8):

$$\rho'_u = r\cos u; \qquad h'_u = -r\sin u.. \tag{26}$$

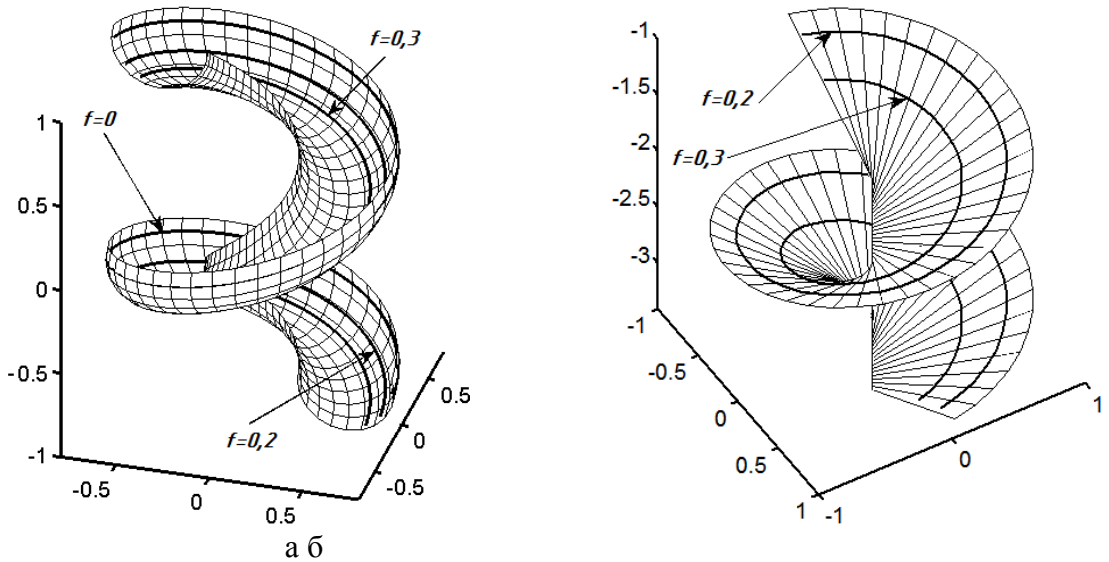
Після підстановки (8) і (26) в (23) і (25) одержимо:

$$b\cos u\sqrt{(r\sin u+d)^2+b^2} = f(r\sin u+d)\sqrt{(r\sin u+d)^2+b^2\cos^2 u}. \tag{27}$$

$$V^2 = g(r\sin u+d)\mathrm{tg}u. \tag{28}$$

Рівняння (27) потрібно розв'язати відносно невідомого кута u. В аналітичному вигляді цього зробити не вдається, тому потрібно застосовувати чисельні методи. Візьмемо поверхню із заданими конструктивними параметрами: *r=0,25, d=0,5, b=0,2*. Чисельне розв'язання рівняння (27) дає наступні значення кута u для різних значень коефіцієнта тертя f: *u=0,4443* при *f=0,3*; *u=0,8359* при *f=0,2*; *u=1,5708* при *f=0*. По мірі зменшення сили тертя частинка піднімається від дна жолоба вгору. При відсутності тертя вона повертається по дузі кола на 90^0, тобто до верхньої точки півкола. Відповідно росте швидкість руху: *V=1,68 м/с* при *f=0,3*; *V=2,73 м/с* при *f=0,2*; $V=\infty$ при *f=0*. При відсутності тертя частинка розганяється до нескінченності, але це за умови, що не існує опору повітря.

На рис. 3,а побудовано гвинтову поверхню за заданими конструктивними параметрами і нанесено на неї траєкторії руху частинки з різними коефіцієнтами тертя.



а б

Рис. 3. Траєкторії руху частинки по гвинтових поверхнях:
а) по поверхні, утвореній гвинтовим рухом дуги кола;
б) по поверхні, утвореній гвинтовим рухом прямої лінії

Розглянемо найпростіший випадок, коли лінією осьового перерізу є пряма, проведена під кутом β до горизонтальної площини. Гвинтова поверхня є лінійчатою і носить назву косого гелікоїда. Параметричні рівняння лінії осьового перерізу запишуться:

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132

$$\rho = u\cos\beta; \qquad h = u\sin\beta\ . \tag{29}$$

Підставимо рівняння (29) і їх похідні $\rho'_u = \cos\beta,\ h'_u = \sin\beta$ у (23) і після спрощень отримаємо:

$$b\sqrt{u^2\cos^2\beta + b^2} = fu\cos\beta\sqrt{u^2 + b^2}. \tag{30}$$

Розв'яжемо рівняння (30) відносно параметра *u*, який носить фізичний зміст і є довжиною прямолінійної твірної поверхні від осі до точки на гвинтовій лінії:

$$u = \frac{b}{\sqrt{2}f}\sqrt{1 - f^2 + \sqrt{\frac{4f^2}{\cos^2\beta} + \left(1 - f^2\right)^2}}\ . \tag{31}$$

Із (31) видно, що відстань *u* зростає пропорціонально гвинтовому параметру *b* поверхні. При підстановці в (25) першого вразу (29) і похідних отримаємо вираз швидкості:

$$V = \sqrt{-gu\sin\beta}. \tag{32}$$

Для гелікоїда із кутом нахилу прямолінійних твірних $\beta=-45^0$ (при $\beta=45^0$ буде одна і та ж поверхня, однак при від'ємному значенні кута не виникне недоречностей у формулі (32)) і гвинтовому параметрі *b*= отримаємо наступні значення відстані *u* для різних значень коефіцієнта тертя *f*: *u=0,4443* при *f=0,3*; *u=0,8359* при *f=0,2*; $u=\infty$ при *f=0*. За відсутності сил тертя і опору повітря частинка віддаляється від осі гелікоїда на нескінченну відстань. Зі зменшенням коефіцієнта тертя росте швидкість руху частинки : *V=1,8 м/с* при *f=0,3*; *V=2,2 м/с* при *f=0,2*. Поверхню гелікоїда і траєкторії руху частинки на ній показано на рис. 3,б.

Висновки

При русі частинки по гвинтовій поверхні її кінематичні параметри стабілізуються і стають сталими. Їх можна знайти, склавши рівняння рівноваги діючих на частинку сил в проекціях на орти рухомого тригранника Дарбу. Три отриманих рівняння можна звести до одного, із якого можна знайти відстань від осі гвинтової поверхні до точок траєкторії руху частинки, яка теж є сталою. Для розв'язання рівняння потрібно застосовувати чисельні методи. Тільки в окремих випадках (наприклад, коли перерізом поверхні є пряма лінія), існує аналітичний розв'язок. За відсутності сил тертя і опору повітря швидкість руху частинки прямує в нескінченність.

Список використаної літератури

1. Василенко П. М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. Киев: УАСХН, 1960. 283 с.
2. Сысоев Н. И. Теоретические основы и расчет сортировки "Змейка". *Сельхозмашина*.1949. № 8. С. 5-8.
3. Заика П. М. Избранные задачи земледельческой механіки. Киев: УСХА, 1992. 507 с.
4. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Знаходження траєкторії руху матеріальної точки по гравітаційній розгортній поверхні на прикладі розгортного гелікоїда. *Механізація і енергетика сільського господарства*: матеріали IV міжнародна науково-технічна конференція MOTROL-2003. Т. 6. (Харків, 17-19 жовтня 2003 р.). Київ: НАУ, 2003. С. 113-126.
5. Войтюк Д. Г., Лінник М. К., Пилипака С. Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по поверхні косого гелікоїда під дією сили власної ваги. *Техніка АПК*. 2006. № 12. С 17-22.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132

6. Аникин М. Ф., Иванов В. Д., Певзнер Л. М. Винтовые сепараторы для обогащения руд. Москва: Недра, 1970. 184 с.
7. Черненко В. Д. Расчет средств непрерывного транспорта. Санкт-Петербург: Политехника, 2011. 386 с.
8. Галкин В. И., Шешко Е. Е. Транспортные машины. Москва: Горная книга, 2010. 588 с.
9. Пилипака С. Ф. Абсолютна траєкторія точки, яка рухається в системі супровідного тригранника Френе при переміщенні його по просторовій кривій. *Електротехніка і механіка*. 2007. № 1. С. 43-51.

References

1. Vasilenko, P. M. (1960) Teoriya dvizheniya chastitsyi po sherohovatyim poverhnostyam selskohozyaystvennyih mashin. Kiev: UASHN.
2. Syisoev, N. I. (1949) Teoreticheskie osnovyi i raschet sortirovki "Zmeyka". *Selhozmashina*. **8**, 5-8.
3. Zaika, P. M. (1992) Izbrannyie zadachi zemledelcheskoy mehaniki. Kiev: USHA.
4. Voitiuk, D. H., & Pylypaka, S. F. (2003) Znakhodzhennia traiektorii rukhu materialnoi tochky po hravitatsiinii rozghortnii poverkhni na prykladi rozghortnoho helikoida. Proceedings of the *Mekhanizatsiia i enerhetyka silskoho hospodarstva*: materialy IV mizhnarodna naukovo-tekhnichna konferentsiia MOTROL-2003. V. 6. (Ukraine, Kharkiv, October 17-19, 2003), Kyev: NAU, pp. 113-126.
5. Voitiuk, D. H., Linnyk, M. K., & Pylypaka, S. F. (2006) Doslidzhennia rukhu materialnoi chastynky po poverkhni kosoho helikoida pid diieiu syly vlasnoi vahy. *Tekhnika APK*. **12**, 17-22.
6. Anikin, M. F., Ivanov, V. D., & Pevzner, L. M. (1970) Vintovyie separatoryi dlya obogascheniya rud. Moscow: Nedra.
7. Chernenko, V. D. (2011) Raschet sredstv nepreryivnogo transporta. Sankt-Peterburg: Politehnika.
8. Galkin, V. I., Sheshko, E. E. (2010) Transportnyie mashinyi. Moscow: Gornaya kniga.
9. Pylypaka, S. F. (2007) Absoliutna traiektoriia tochky, yaka rukhaietsia v systemi suprovidnoho tryhrannyka Frene pry peremishchenni yoho po prostorovii kryvii. *Elektrotekhnika i mekhanika*. **1**, 43-51.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-123-132