

УДК 621.9.08

С.А. РУСАНОВ, А.А. ОМЕЛЬЧУК, Д.Д. ФЕДОРЧУК  
Херсонський національний технічний університет

### **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І ПРОГРАМНІ ПРОДУКТИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ КІНЕМАТИКИ І АНАЛІЗУ СТРАТЕГІЙ ОБРОБКИ**

*Розглянуто математичні моделі та програмні продукти для забезпечення якості та експлуатації каркасних просторових компоновок багатокординатного обладнання машинобудівної і суміжних галузей. Використано феноменологічний підхід, що спирається на вхідні данні статичних показників компоновки-прототипу з подальшим теоретичним визначенням областей рішень і варіацією усіх змінних для створення інших нових компоновок обладнання із заданими технологічними властивостями. Розроблено програмне забезпечення для розрахунку оберненої задачі кінематики та напружено-деформованого стану для механізмів паралельної структури, яке в свою чергу може використовуватися як пост-процесор для визначення працездатності будь-якої нової компоновки верстатів. Наведено варіанти методів аналізу кінематики і розрахунку даних, отриманих в створених програмних системах.*

*Ключові слова: засоби проектування, обладнання з МПС, жорсткість каркасних компоновок, лінійка програм: "Tools Glide", "Tools Response", "Tools App", дружні відтискання, аналіз деформацій, корегування КП.*

С.А. РУСАНОВ, А.А. ОМЕЛЬЧУК, Д.Д. ФЕДОРЧУК  
Херсонский национальный технический университет

### **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ И АНАЛИЗА СТРАТЕГИЙ ОБРАБОТКИ**

*Рассмотрены математические модели и программные продукты для обеспечения качества и эксплуатации каркасных пространственных компоновок многокоординатного оборудования машиностроительной и смежных отраслей. Использован феноменологический подход, опирающийся на входные данные статических показателей компоновки-прототипа с последующим теоретическим определением областей решений и вариацией всех переменных для создания других компоновок оборудования с заданными технологическими свойствами. Разработано программное обеспечение для расчета обратной задачи кинематики и напряженно-деформированного состояния для механизмов параллельной структуры, которое, в свою очередь, может быть использоваться как пост-процессор для определения работоспособности любой новой компоновки станков. Приведены варианты методов анализа кинематики и расчета данных, полученных в созданных программных системах.*

*Ключевые слова: средства проектирования, оборудование с МПС, жесткость, каркасных компоновок, линейка программ: "Tools Glide", "Tools Response", "Tools App", упругие деформации, анализ деформаций, корректировка УП*

S.A. RUSANOV, A.A. OMELCHUK, D.D. FEDORCHUK  
Kherson National Technical University

## MATHEMATICAL MODELS AND SOFTWARE PRODUCTS FOR SOLVING THE PROBLEM OF CINEMATICS AND ANALYSIS OF STRATEGIES OF PROCESSING

*There is a variety of design tasks, especially the problems of choosing the optimal (under external constraints) solutions where it is necessary to analyse a large number of factors and process a large amount of information. In the engineering industry there are tasks of finding the optimal layout in the space of possible designs of modular structure equipment. The development of related auxiliary mathematical tools for solving similar problems for the layout space of the frame structure equipment with parallel actuators, focused on the implementation of technological operations for processing materials, is considered.*

*Today it is difficult to imagine the designing of products and designs without the use of certain CAD systems. The most crucial role among the variety of CAD / CAM / CAE programs is played by finite element analysis packages. The range of tasks solved by them covers almost all areas of engineering calculations: strength, oscillations, stability, dynamics, acoustics, hydrodynamics, aerodynamics, and the like.*

*A separate part of the program are geometric modelling systems that allow you to work with forms in three-dimensional space (changing the shape of a model, adding and removing parts of it, detailing the shape of a visual model, etc.). Modelling the work of frame processing equipment is possible, and often necessary, when searching for the optimal layout.*

*Mathematical models and software products for quality assurance of multi-coordinate equipment of machine-building and related industries are considered. A phenomenological approach based on the input data of the static prototype layout indicators with the subsequent theoretical determination of the decision areas and the variation of all variables for the creation of other new layouts of the equipment with given technological properties is used. Software has been developed for calculating the inverse kinematics problem for mechanisms of parallel structure, which in turn can be used as a post-processor to determine the performance of any new machine layout. Variants of methods for analyzing kinematics and calculating data obtained in computer mathematics systems are given.*

*Key words: design tools, equipment with MPS, rigidity of frame assemblies, programs: Tools Glide, Tools Response, Tools App, elastic squeezing, deformation analysis, NC correction.*

### **Постановка проблеми**

Існує різноманіття задач проектування, особливо задач вибору оптимальних (в умовах зовнішніх обмежень) рішень, де потрібно здійснювати аналіз великої кількості факторів та обробку великого обсягу інформації. В машинобудівній галузі можна виділити серед подібних задач – задачі пошуку оптимальної компоновки в просторі можливих конструкцій обладнання модульної структури – задачі компонентики [1–3]. Далі розглядається розробка супутніх допоміжних математичних засобів для вирішення подібних задач для простору компоновок обладнання каркасної структури з паралельними виконавчими ланками, орієнтованих на виконання матеріалооброблювальних технологічних операцій.

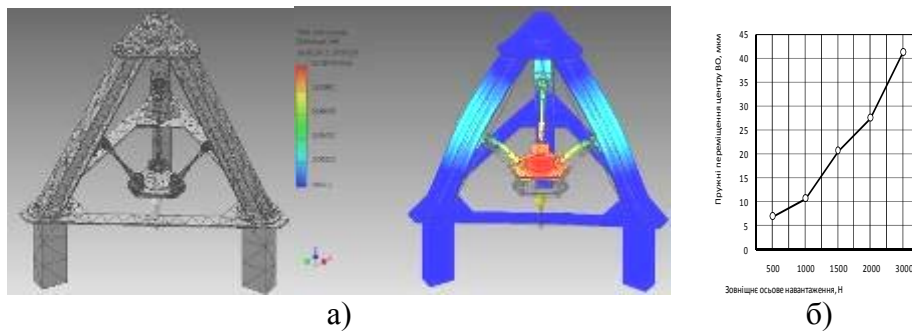
### **Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Сьогодні складно уявити проектування виробів і конструкцій без застосування тих чи інших САПР [4]. Найбільш відповідальну роль серед усього розмаїття CAD/CAM/CAE-програм грають пакети кінцево-елементного аналізу. Коло

розв'язуваних ними завдань охоплює майже всі сфери інженерних розрахунків: міцність, коливання, стійкість, динаміка, акустика, гідродинаміка, аеродинаміка тощо.

Окремою частиною програм є системи геометричного моделювання, які дозволяють працювати з формами в тривимірному просторі (зміна форми моделі, додавання і видалення її частини, деталізація форми візуальної моделі та ін.). Моделювання роботи каркасного оброблювального устаткування можливо, а часто й необхідне при проведенні пошуку його оптимальної компоновки. В якості прикладу на рис. 1 вказана кінцево-елементна та розрахункова модель напружено-деформованого стану каркасного оброблювального обладнання з паралельними приводами [5–7].

Але подібна модель, що виконана в загальних САПР, потребує значного часу на підготовчі процедури, значного машинного часу для розрахунків, не має можливостей для перекомпоновки (якщо компоновальна схема визнана за результатами розрахунків невдалою), не має можливостей для генерування траєкторій робочих рухів інструмента та відповідного зворотнього зв'язку з оброблювальним середовищем, не має можливостей для завдання адекватних зусиль взаємодії (сил різання) та ін. Тому є актуальним створення цільових програмних засобів, в яких безпосередньо були б враховані потреби швидкої перекомпоновки, знижений час для підготовчих процедур та час розрахунків.



**Рис. 1. Результати моделювання відтискань центру рухомої платформи від навантажувальної сили: а – наочне зображення моделювання; б – залежність пружних переміщень центру рухомої платформи від значення навантажувальної сили (за даними [5–7])**

### **Мета дослідження**

Метою дослідження є побудова математичних моделей для прикладної оцінки жорсткості обладнання просторових компонок із механізмами паралельної структури та точності відтворення траєкторії робочого органу в умовах силового навантаження (сил різання загального вигляду), що в свою чергу дозволить оцінити можливість використання такого обладнання для обробки складно-профільних деталей з можливістю швидкої перекомпоновки моделі. Проведення теоретичного аналізу типових стратегій обробки на каркасному глайд-обладнанні поверхонь обертання з визначенням пружних відтискань шарнірно-стрижневої системи з робочим органом.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Сучасні складні системи різноманітної природи представляють собою комплекс різних підсистем, що виконують певні технологічні функції і пов'язані між собою процесами інтенсивної динамічної взаємодії. Зазначені системи часто є нелінійними, багатовимірними і багатозв'язними.

В "великих" і "надвеликих" системах особливо гостро стоять проблеми оперативного перекомпоновування, швидкого декомпоновування на ієрархічно зв'язані елементи тощо. До великих систем доцільно відносити складні системи, фундаментальні властивості яких змінюються при подальшому збільшенні розмірності

системи. При цьому відбувається якісна зміна їх поведінки, що викликає проблеми в управлінні такими системами і може призвести до припинення їх функціонування. Математична модель такої великої системи складається з математичних моделей елементів і математичних моделей взаємодії елементів. Взаємодія елементів розглядається звичайно як результат сукупності впливів кожного елемента на інші.

Математичні моделі синтезованих структур, що входять до методики інженерних розрахунків повинні складатися з [8–9]:

– вхідних даних, що представлені у вигляді відповідних числових масивів, та задають геометрію обладнання, початкове (відлікове) положення ланок (напрямних, штанг, платформи, шарнірів, інструмента), потрібні траєкторії руху робочої ланки та напрямного вектора інструмента;

– розрахункових залежностей, що пов’язують орієнтацію рухомої платформи в довільний момент машинного часу за поточним положенням робочої ланки та напрямним вектором інструмента та з відповідним положенням в попередній та/або початковий момент часу;

– розрахункових залежностей, що знаходять необхідне для реалізації заданих траєкторій положення рухомих кареток на напрямних.

Для реалізації математичної моделі в якості вхідних даних необхідно сформулювати масиви, які задають геометрію обладнання у вигляді координатних трійок вузлів ланок для початкового (відлікового) положення та задати масиви, які описують потрібну для реалізації траєкторію у вигляді координатних трійок для кожного кроку за машинним часом, та масиви, які описують потрібні для реалізації напрямні вектори інструменту у вигляді проєкцій на відповідні координатні вісі.

Для розрахунку кінематики для кожного кроку за машинним часом розраховуються просторові кути повороту рухомої платформи, координати центру платформи та координати усіх шарнірів платформи. Аналогічно для кожного кроку за машинним часом на основі отриманих координат усіх шарнірів рухомої платформи розраховуються координати рухомих кареток на напрямних. Кінематичні моделі є основою для відповідного програмного модуля кінематики.

Розглянемо орієнтацію базових елементів (рис. 2).

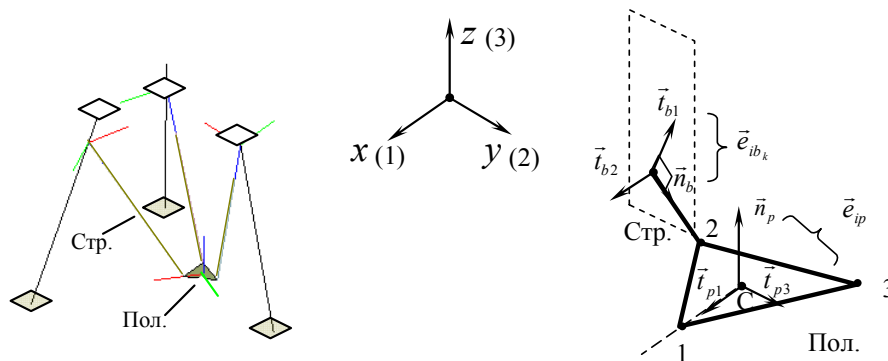


Рис. 2. Орієнтація базових елементів (стрижні та полігони).

✓ *Орієнтація стрижнів.*

Позначимо: базис  $k$ -ого стрижня  $\{\vec{e}_{ib_k}\}$ , базис платформи (полігона)  $\{\vec{e}_{ip}\}$ .

Вертикальна площина, що включає стрижень (на рис. 2 позначена пунктиром) задається як  $(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2)(\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$  – що є рівнянням площини, яка проходить через  $\vec{r}_2$  та  $\vec{S}_1$  і  $\vec{S}_2$ , де  $\vec{S}_1 = \vec{n}_b$  – напрямний вектор стрижня (він є одним з елементів базису  $\{\vec{e}_{ib_k}\}$ ),  $\vec{S}_2 = \vec{k}$  – вектор вертикалі в глобальній системі.

$$\vec{S}_1 = \vec{n}_b = \frac{1}{\|\cdot\|} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix},$$

де  $\|\cdot\|$  – норма вектора.

Таким чином для випадку, що розглядається (глобальна координатна система)

$$\vec{S}_2 = \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{1b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{2b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \text{– координати початкового та кінцевого шарнірів}$$

стрижня.

Аналогічним чином знаходимо інші елементи базису  $\{\vec{e}_{ib_k}\}$   $\vec{t}_{b_1}$  та  $\vec{t}_{b_2}$ :

$$\vec{t}_{b_2} = \frac{\vec{n}_b \times \vec{S}_2}{|\vec{n}_b \times \vec{k}|}, \quad \vec{t}_{b_1} = \frac{\vec{t}_{b_2} \times \vec{n}_b}{|\vec{t}_{b_2} \times \vec{n}_b|}.$$

✓ *Орієнтація платформи.*

Позначимо:  $\vec{n}_p$  – вектор орієнтації платформи/інструменту (зчитується з MPN-файлу, що задає необхідні траєкторії обробки – по суті, переформатований файл САМ-систем CLData),  $\vec{r}_{b_1}$  – радіус-вектор положення першого шарніру на платформі (співпадає з відповідним вузлом стрижня),  $\vec{r}_C$  – радіус-вектор центру платформи, що визначається як  $\vec{r}_C = \vec{r}_{tr} - \vec{n}_p l_{Tool}$ ,  $\vec{r}_{tr}$  – радіус-вектор траєкторії інструменту (зчитується з MPN-файлу),  $l_{Tool}$  – виліт інструменту.

Таким чином, додатково до  $\vec{n}_p$  визначаємо:

$$\vec{t}_{p_1} = \frac{1}{\|\cdot\|} \begin{bmatrix} x_{b_1} - x_C \\ y_{b_1} - y_C \\ z_{b_1} - z_C \end{bmatrix}, \quad \vec{t}_{p_2} = \frac{\vec{t}_{p_1} \times \vec{n}_p}{|\vec{t}_{p_1} \times \vec{n}_p|}.$$

Зв'язок між базисами задає матриця переходу, така, що:  $\vec{e}_{ip} = \alpha_{ij} \vec{e}_{jb}$ ,  $\hat{\alpha}^{-1} = \hat{\alpha}^T$  – матриця ортогональна.

✓ *Розв'язання оберненої кінематичної задачі.*

Для рішення оберненої задачі розроблено два алгоритмічних варіанта: Simple Matrix Scenario та Virtual Potential Scenario.

• *Simple Matrix Scenario.*

Реалізує просту трансляцію з поворотом на кут  $\varphi$  навколо осі  $\vec{v}$ , перпендикулярній площині, що містить вектори  $\vec{n}_p$  – нормалі до поверхні деталі в поточній точці (що зчитується з MPN-файлу) та деяку попередню нормаль  $\vec{n}_{old}$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}^r &= [\text{Rot}] \cdot \Delta \vec{r}_{old}^r + \vec{T}, \\ \vec{v} &= \frac{\vec{n}_p \times \vec{n}_{old}}{|\vec{n}_p \times \vec{n}_{old}|}, \\ \cos \varphi &= \vec{n}_p \cdot \vec{n}_{old}, \end{aligned}$$

де  $[\text{Rot}]$  – матриця повороту навколо осі  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$  на кут  $\varphi$ ,

$$[\text{Rot}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi + v_x^2(1-\cos\varphi) & v_x v_y(1-\cos\varphi) - v_z^2 \sin\varphi & v_x v_z(1-\cos\varphi) + v_y \sin\varphi \\ v_y v_x(1-\cos\varphi) + v_z \sin\varphi & \cos\varphi + v_y^2(1-\cos\varphi) & v_y v_z(1-\cos\varphi) - v_x \sin\varphi \\ v_z v_x(1-\cos\varphi) - v_y \sin\varphi & v_z v_y(1-\cos\varphi) + v_x \sin\varphi & \cos\varphi + v_z^2(1-\cos\varphi) \end{bmatrix},$$

$\vec{T}$  – вектор трансляції.

Вказаний варіант не враховує обмеження, що можуть бути накладені шарнірами в кінематичних парах, тому передбачає адекватне врахування цих обмежень ще на стадії формування MPN-файлу. З іншого боку Simple Matrix Scenario є більш швидкодіючим алгоритмом розрахунку оберненої кінематики.

- *Virtual Potential Scenario* [10].

Може враховувати вказані обмеження за рахунок введення віртуального потенціалу  $V$ , що для голономних в'язей повинен мати мінімум (більш загально – приймати стаціонарне значення) у дозволених в'язях точках простору, а при відхиленні від них дельтоподібно зростати:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{\delta(f(\vec{r}, t))},$$

де  $f(\vec{r}, t)$  – ліва частина рівняння для допустимої поверхні  $f(\vec{r}_s, t) = 0$ ,  $\delta(x)$  – дельта-функція.

Таким чином вводячи замість геометричного енергетичний опис в'язів, вони включаються їх безпосередньо у функцію Лагранжа, яка буде визначатися як

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - (V(x, y, z, t) + U(x, y, z, t)),$$

де  $U(x, y, z, t)$  являє собою сумарну потенціальну енергію системи в полі потенціальних сил, а кінцева система диференціальних рівнянь, що описує кінематику просторового механізму, отримується підстановкою функції Лагранжа у рівняння Лагранжа 2-го роду, що складені по всім  $N$  ступеням вільності:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

✓ *Кінцево-елементний аналіз.*

- *Кінцевий елемент "абсолютно жорсткий полігон (платформа)".*

Зміщення довільної точки платформи як абсолютно жорсткого об'єкту в системі координат платформи (рис. 3) за рахунок деформації несучих штанг визначаємо як лінійну систему:

$$u_{p_i}^{\{p\}} = \vec{n}_{p u_i} \cdot \vec{r}^{\{p\}} + u_{C_i}^{\{p\}} = \vec{n}_{p u_i} \cdot \begin{bmatrix} x^{\{p\}} \\ y^{\{p\}} \\ 0 \end{bmatrix} + u_{C_i}^{\{p\}} = a_{p_i} x^{\{p\}} + b_{p_i} y^{\{p\}} + u_{C_i}^{\{p\}},$$

де  $\vec{n}_{p u_i}$  – напрямки зміщення вузлів полігону,  $a_{p_i}$ ,  $b_{p_i}$  – коефіцієнти, що потребують визначення,  $u_{C_i}^{\{p\}}$  –  $i$ -та проекція вектору зміщення центру платформи в системі координат платформи,  $x^{\{p\}}$ ,  $y^{\{p\}}$  – координати довільної точки платформи в системі координат платформи.

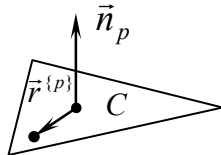


Рис. 3. Система координат платформи (полігона).

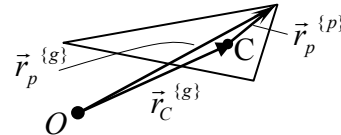


Рис. 4. Вектори центру платформи та шарніра в глобальному базисі  $\{g\}$  та в базисі платформи (полігона)  $\{p\}$ .

Зв'язок між базисами (глобальним  $\{g\}$  та платформи  $\{p\}$ ) задає матриця переходу, така, що:

$$\vec{e}_i^{\{p\}} \cdot \vec{e}_l^{\{g\}} = \hat{\beta}_{li} = \begin{bmatrix} e_{1px} & e_{1py} & e_{1pz} \\ e_{2px} & e_{2py} & e_{2pz} \\ e_{3px} & e_{3py} & e_{3pz} \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти  $a_{p_i}$ ,  $b_{p_i}$ ,  $c_{p_i}(=u_{C_i})$  знаходяться як розв'язок лінійної системи для довільно вибраних трьох шарнірів, що не знаходяться на одній прямій (рис. 5):

$$\begin{cases} a_{p_i} x_{p1}^{\{p\}} + b_{p_i} y_{p1}^{\{p\}} + c_{p_i} = u_{p1}^{\{p\}} \\ a_{p_i} x_{p2}^{\{p\}} + b_{p_i} y_{p2}^{\{p\}} + c_{p_i} = u_{p2}^{\{p\}}, \forall i = 1..3, (x, y, z), \\ a_{p_i} x_{p3}^{\{p\}} + b_{p_i} y_{p3}^{\{p\}} + c_{p_i} = u_{p3}^{\{p\}} \end{cases}$$

де  $x_{pk}^{\{p\}}$ ,  $y_{pk}^{\{p\}}$  – координати вузлів полігону в системі координат платформи.

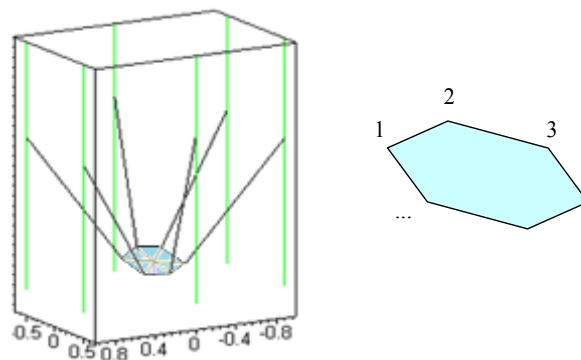


Рис. 5. Розрахунок зміщень платформи виконується як розв'язок лінійної системи для довільно вибраних трьох шарнірів, що не знаходяться на одній прямій.

Таким чином,  $\vec{u}_{pk} = \vec{a}_p x_{pk}^{\{p\}} + \vec{b}_p y_{pk}^{\{p\}} + \vec{c}_p = \vec{u}^{rel} + u_C^{\{p\}}$ , де позначено  $\vec{u}^{rel} = \vec{a}_p x_{pk}^{\{p\}} + \vec{b}_p y_{pk}^{\{p\}}$ .

Для малих зміщень платформи маємо:

$$\vec{u}^{rel} = \vec{\theta} \times r^{\{p\}} = -\vec{i} \theta_z y^{\{p\}} + \vec{j} \theta_z x^{\{p\}} + \vec{k} (\theta_x y^{\{p\}} - \theta_y x^{\{p\}}),$$

де  $\vec{\theta}$  – кут повороту полігону як цілого.

Надалі для розрахунків в системі координат полігона  $\{\vec{e}_{ip}\}$  верхній індекс  $\{p\}$  не пишемо. Тоді:

$$\begin{aligned} a_{px} x_p + b_{px} y_p &= -\theta_z y_p \Rightarrow a_{px} = c_{px} = 0, b_{px} = -\theta_z, \\ a_{py} x_p + b_{py} y_p &= \theta_z x_p \Rightarrow b_{py} = c_{py} = 0, a_{py} = \theta_z, a_{py} = -b_{px}, \\ a_{pz} x_p + b_{pz} y_p &= \theta_x y_p - \theta_y x_p \Rightarrow c_{pz} = 0, a_{pz} = -\theta_y, b_{pz} = \theta_x. \end{aligned}$$

Оскільки  $\vec{u} = \vec{u}^{rel} + \vec{u}^c$ , тоді для вузлів маємо

$$\begin{cases} u_{px1} = -a_{py} y_{p1} + u_{Cx}, \\ u_{py1} = a_{py} x_{p1} + u_{Cy}, \\ u_{pz1} = a_{pz} x_{p1} + b_{pz} y_{p1} + u_{Cz}, \\ \\ u_{px2} = -a_{py} y_{p2} + u_{Cx}, \\ u_{py2} = a_{py} x_{p2} + u_{Cy}, \\ u_{pz2} = a_{pz} x_{p2} + b_{pz} y_{p2} + u_{Cz}, \\ \\ \dots \end{cases}$$

Але визначити одночасно  $a_{pi}$ ,  $b_{pi}$  та  $u_{Ci}$  неможливо, тому що матриця такої системи для довільно вибраних пар вузлів сингулярна:

$$\begin{bmatrix} u_{px1} \\ u_{py1} \\ u_{pz1} \\ u_{px2} \\ u_{py2} \\ u_{pz2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{p1} & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ x_{p1} & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_{p1} & y_{p1} & | & 0 & 0 & 1 \\ \hline -y_{p2} & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ x_{p2} & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_{p2} & y_{p2} & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{py} \\ a_{pz} \\ b_{pz} \\ u_{Cx} \\ u_{Cy} \\ u_{Cz} \end{bmatrix}.$$

Тому розв'язок шукаємо, віднімаючи послідовно рівняння для другого вузла з першого:

$$-\frac{u_{px2} - u_{px1}}{y_{p2} - y_{p1}} = a_{py} = \theta_z.$$

Якщо  $y_{p2} = y_{p1}$ , то береться 3-ій вузол (або 4-ий, якщо 1-ий, 2-ий и 3-ій – на одній координаті  $y$  и т.д.).

Тоді

$$\begin{aligned} u_{Cx} &= u_{px1} + \theta_z y_{p1}, \\ u_{Cy} &= u_{py1} - \theta_z x_{p1}, \end{aligned}$$

$a_{pz}$ ,  $b_{pz}$  і  $u_{Cz}$  знаходимо з розв'язку для трьох останніх рівнянь системи:



$$a_{pz} = -\theta_y = \frac{1}{\Delta} [(y_{p2} - y_{p3})u_{pz1} - (y_{p1} - y_{p3})u_{pz2} + (y_{p1} - y_{p2})u_{pz3}],$$

$$b_{pz} = \theta_x = -\frac{1}{\Delta} [(x_{p2} - x_{p3})u_{pz1} - (x_{p1} - x_{p3})u_{pz2} + (x_{p1} - x_{p2})u_{pz3}],$$

$$u_{Cz} = \frac{1}{\Delta} [(x_{p2}y_{p3} - x_{p3}y_{p2})u_{pz1} - (x_{p1}y_{p3} - x_{p3}y_{p1})u_{pz2} + (x_{p1}y_{p2} - x_{p2}y_{p1})u_{pz3}],$$

де  $\Delta = x_{p1}y_{p2} - x_{p1}y_{p3} - y_{p1}x_{p2} + x_{p2}y_{p3} + x_{p3}y_{p1} - x_{p3}y_{p2}$  – визначник системи (якщо 3 шарніра перебувають на одній лінії, то потрібно вибрати інші шарніри, як вказувалось вище).

- Елемент "шарнір".

Кожний шарнір має 12 невідомих:  $3M$ ,  $3Q$ ,  $3u$  и  $3\varphi$  – відповідно моменти, зусилля, переміщення, та повороти.

Робота шарніра може бути описана як:

$$\vec{\varphi}_k^{\{J\}} - \vec{\theta}_p^{\{J\}} = \hat{K}_J^\theta \vec{M}_k^{\{J\}},$$

$$\vec{\Delta}_k^{\{J\}} - \vec{u}_p^{\{J\}} = \hat{K}_J^u \vec{M}_k^{\{J\}},$$

де  $\hat{K}_J$  – матриці податливостей шарніра (крутильна та трансляційна).

Якщо  $\hat{K}_J = \hat{0}$ , то  $\vec{\varphi}_k^{\{J\}} = \vec{\theta}_p^{\{J\}}$  та  $\vec{\Delta}_k^{\{J\}} = \vec{u}_p^{\{J\}}$  (податливість шарніра нульова – заморожений шарнір).

- Кінцевий елемент "консоль" (рис. 6).

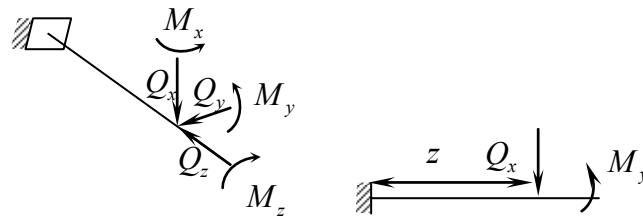


Рис. 6. Консольний елемент.

Для консолі маємо (в системі координат консолі, основні позначення ті ж, що й для шарнірів):

$$u_x = \frac{Q_x L^3}{3EJ_y} + \frac{M_y L^2}{2EJ_y}; \varphi_y = -\frac{Q_x L^2}{2EJ_y} - \frac{M_y L}{EJ_y}; u_y = \frac{Q_y L^3}{3EJ_x} + \frac{M_x L^2}{2EJ_x}; \varphi_x = -\frac{Q_y L^2}{2EJ_x} - \frac{M_x L}{EJ_x};$$

$$u_z = \frac{Q_z L}{EF}; \varphi_z = \frac{M_z L}{GJ_r}.$$

де  $E$  – модуль пружності (Юнга),  $J_i$  – статичні моменти інерції перерізу,  $F$  – площа перерізу,  $G$  – модуль зсуву.

Таким чином, маємо:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EJ_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EJ_y} & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EJ_x} & 0 & \frac{L^2}{2EJ_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EF} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EJ_x} & 0 & \frac{L}{EJ_x} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{2EJ_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EJ_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Або

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{\varphi} \end{bmatrix} = \hat{M}_{rig} \begin{bmatrix} \vec{Q} \\ \vec{M} \end{bmatrix},$$

де  $\hat{M}_{rig} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{gu}^Q & \hat{M}_{gu}^M \\ \hat{M}_{g\varphi}^Q & \hat{M}_{g\varphi}^M \end{bmatrix}$  – блочна матриця, що враховує перехресні впливи.

Таким чином:

$$\vec{u}^{\{b\}} = \hat{M}_{gu}^Q \vec{Q}^{\{b\}} + \hat{M}_{gu}^M \vec{M}^{\{b\}}; \quad \vec{\varphi}^{\{b\}} = \hat{M}_{g\varphi}^Q \vec{Q}^{\{b\}} + \hat{M}_{g\varphi}^M \vec{M}^{\{b\}}.$$

Для переходу в глобальну систему координат (ГСК) маємо (матриця переходу  $\hat{\gamma}$ ):  
 $\alpha_{ij} u_j^{\{g\}} = \hat{M}_{gu_{ij}}^Q \alpha_{jk} Q_k^{\{g\}} + \hat{M}_{gu_{ij}}^M \alpha_{jk} M_k^{\{g\}}$  (проводимо підсумовування за повторюваними індексами):

$$\vec{u}^{\{g\}} = (\hat{\gamma}^T M_{gu}^Q \hat{\gamma}) \vec{Q}^{\{g\}} + (\hat{\gamma}^T M_{gu}^M \hat{\gamma}) \vec{M}^{\{g\}}$$

або

$$\vec{U}^{\{g\}} = (\hat{\gamma}^T \hat{M}_g \hat{\gamma}) \vec{P}^{\{g\}};$$

$$\text{де } \hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma} & 0 \\ 0 & \hat{\gamma} \end{bmatrix}, \quad \vec{U}^{\{g\}} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}^{\{g\}}, \quad \vec{P}^{\{g\}} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}^{\{g\}}.$$

- Кінцевий елемент "балка".

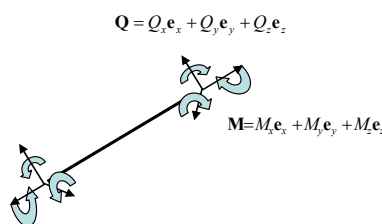


Рис. 7. Балковий елемент.

Для балки маємо:

$$u_{1x} = \frac{Q_{1x}L^3}{3EJ_y} + \frac{M_{1y}L^2}{2EJ_y} + \varphi_{0y}L + u_{0x}, \quad \varphi_{1x} = \frac{Q_{1y}L^2}{2EJ_x} + \frac{M_{1x}L}{EJ_x} + \varphi_{0x},$$

$$u_{1y} = \frac{Q_{1y}L^3}{3EJ_x} + \frac{M_{1x}L^2}{2EJ_x} + \varphi_{0x}L + u_{0y}, \quad \varphi_{1y} = \frac{Q_{1x}L^2}{2EJ_y} + \frac{M_{1y}L}{EJ_y} + \varphi_{0y},$$

$$u_{1z} = \frac{Q_{1z}L}{EF} + u_{0z}, \quad \varphi_{1z} = \frac{M_{1z}L}{GJ_p} + \varphi_{0z},$$

$$\vec{u}_1^{\{c\}} = \hat{C}_Q^u \vec{Q}_1 + \hat{C}_M^u \vec{M}_1 + \vec{\varphi}_0 \times \vec{L} + \vec{u}_0, \quad \vec{\varphi}_1^{\{c\}} = \hat{C}_Q^\varphi \vec{Q}_1 + \hat{C}_M^\varphi \vec{M}_1 + \vec{\varphi}_0,$$

де

$$\varphi_0 \times L = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_{0x} & \varphi_{0y} & \varphi_{0z} \\ 0 & 0 & L \end{vmatrix} = \vec{i} \varphi_{0y}L - \vec{j} \varphi_{0x}L,$$

$L$  – довжина стрижня, індекс "0" відноситься до початкового вузла.

Таким чином

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_0 - \vec{\varphi}_0 \times \vec{L} = \hat{C}_{rig}^u \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{M}_1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_0 = \hat{C}_{rig}^\varphi \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{M}_1 \end{bmatrix},$$

або

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_1 - \vec{u}_0 - \vec{\varphi}_0 \times \vec{L} \\ \vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{rig}^u \\ \hat{C}_{rig}^\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{M}_1 \end{bmatrix}.$$

✓ *Спеціалізоване програмне забезпечення.*

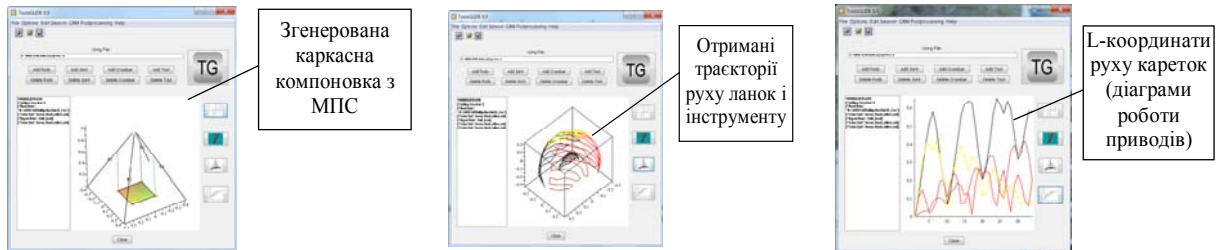
Для розрахунку за наведеними формулами створено спеціалізоване програмне забезпечення Tools Glide [11], яке дозволяє виконувати формування компоновки Glide-обладнання та розрахунки кінематики з підтримкою зворотного зв'язку з модулем відклику "Tools Response" для врахування роботи шарнірів різних типів. Отримані дані надалі передаються в модуль Tools App [12], де властивості технологічної системи описуються функцією динамічної податливості, яка характеризує відгук технологічної системи у вигляді переміщень на задане силове збудження. Модель динаміки програми "Tools App" побудовано на основі рівнянь Лагранжа другого роду. Для  $n$ -ступеневого механізму математична модель в Лагранжевій формі перетворюється до матричної форми просторової конструкції обладнання, що проектується.

В якості базової компоновки обрано верстат з паралельною кінематикою СФВПК-4 пірамідальної форми по патенту України № 86533, для якої проведено відповідне генерування зворотної задачі кінематики в Tools Glide з отриманням відповідних  $L$ -координат та зон обробки (рис. 8, б).

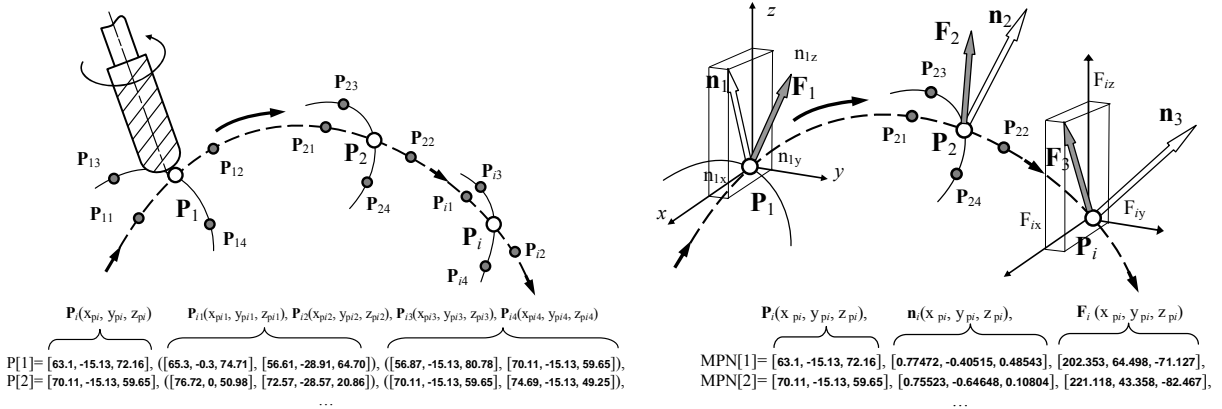
Масив даних, що описує геометрію та результати рішення задачі зворотної кінематики надалі було імпортовано в блок Tools Response. Сила різання задавалась уздовж вектору дотичної для всієї довжини обробки (орієнтація осі інструмента – за

нормаллю до поверхні в опорних точках траєкторії). В результаті було отримано анімацію обробок для всіх сценаріїв з накладанням деформованого та недеформованого станів, висвітленням зусиль у вузлах елементів та прорисовкою заданої та істинної траєкторії інструменту (рис. 9, а-д).

На рис. 9 наведено різні стратегії обробки: "зигзаг" – довільний (а), по меридіанам (б), по паралелям (в), контурний (г); петля контурна (д); 1 – запланована траєкторія інструменту; 2 – прогнозована траєкторія інструменту після моделювання пружних відтискань каркасного компонування.

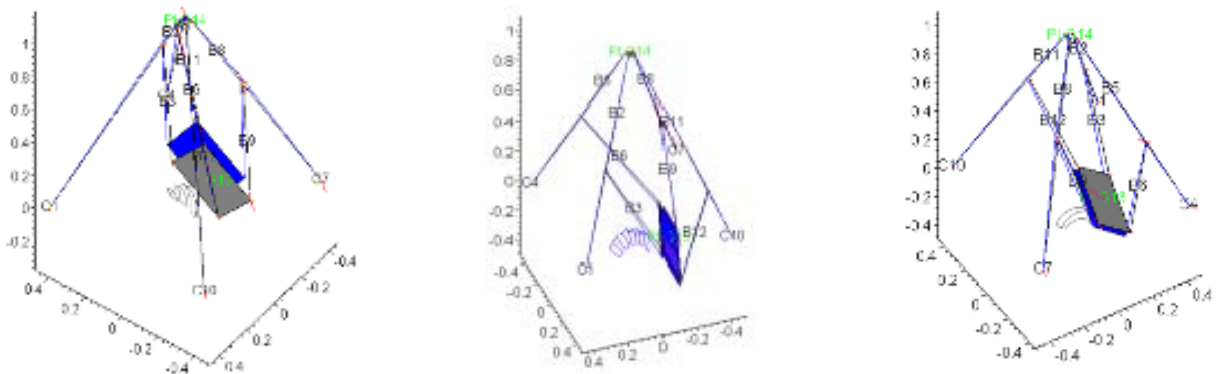


а)



б)

Рис. 8. Елементи інтерфейсу та розрахунки L-координат в Tools Glide (а), структура вхідного MPN-файлу, що описує траєкторію і режими обробки, та використовується для імпорту в Tools Glide (б)



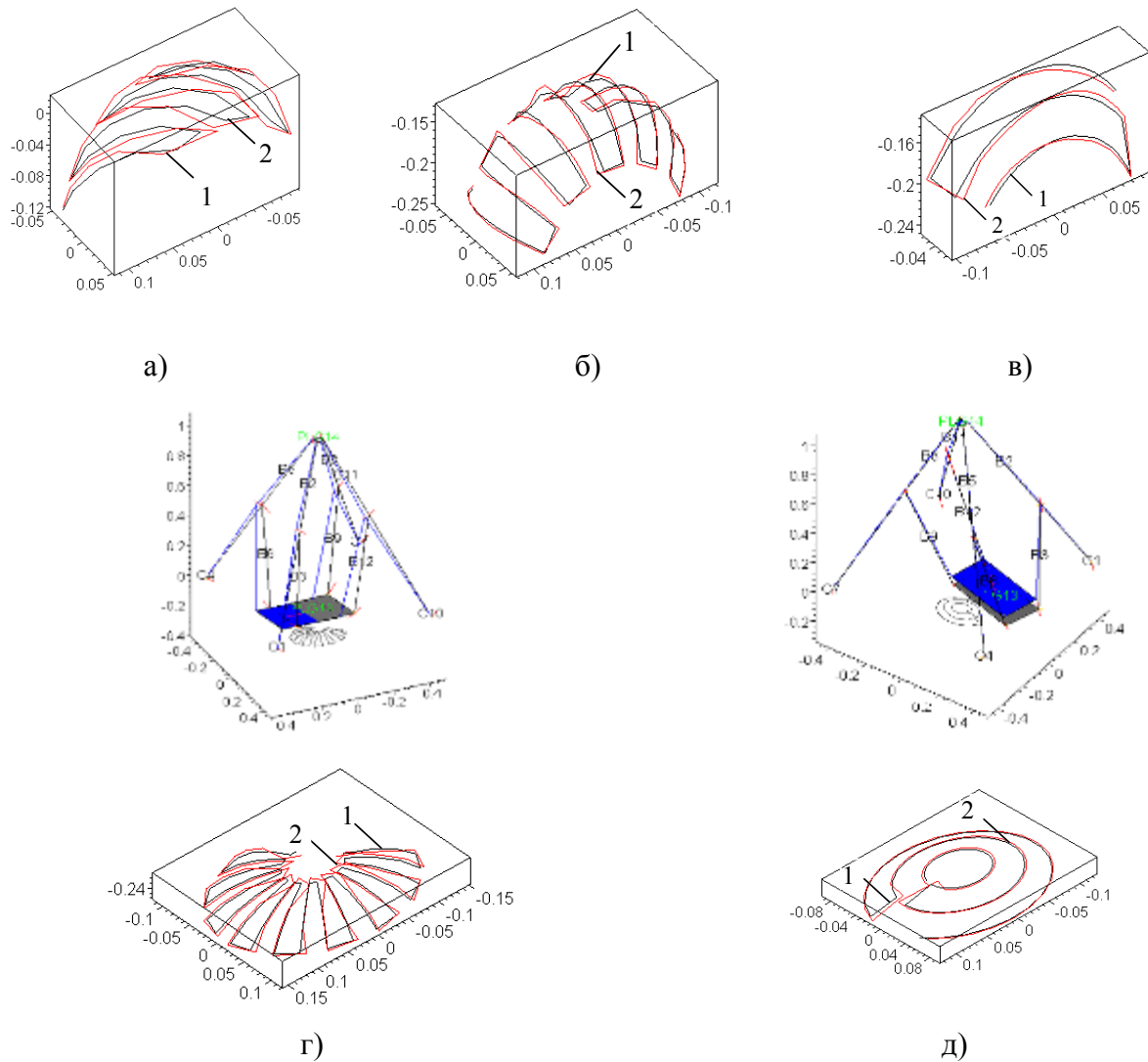


Рис. 9. Відклики каркасної конструкції на робочі та зовнішні навантаження (кадр анімації та траєкторії інструменту Tools Response) при різних стратегіях обробки області еліпсоїду для різних траєкторій.

### Висновки

Розроблені математичні моделі для прикладної оцінки жорсткості обладнання просторових компоновок із механізмами паралельної структури та точності відтворення траєкторії робочого органу в умовах силового навантаження дозволяють оцінити можливість використання такого обладнання для обробки складно-профільних деталей. Вказана алгоритмічна послідовність оцінки дозволяє провести кількісні порівняльні розрахунки відклику різних просторових структур за моделями та алгоритмами лінійки програмних продуктів Tools Glide, Tools Response та Tools Apps без обмежень на форму зовнішніх навантажень, що можуть бути задані як довільні функції часу та внутрішніх параметрів системи з підтримкою зворотнього зв'язку.

Проведено теоретичний аналіз типових стратегій обробки на глайд-обладнанні поверхонь обертання з визначенням у програмі "Tools Response" пружних відтискань шарнірно-стрижневої системи з робочим органом. Показано можливість вибору стратегій обробки поверхонь другого порядку обробки за критеріями точності, що розраховуються за наведеними формулами.

**Список використаної літератури**

1. Кузнецов Ю. М., Дмитрієв Д. О., Діневич Г. Ю. Компонувки верстатів з механізмами паралельної структури: монографія / Під ред. Ю.М. Кузнецова. Херсон: ПП Вишемирський В.С., 2009. 456 с.
2. Афонин В. Л., Крайнев А. Ф., Ковалев В. Е. и др. Обработывающее оборудование нового поколения. Концепция проектирования / Под ред. В.Л. Афонина. Москва: Машиностроение, 2001. 256 с.
3. Kuznetsov Yu. N., AL-Refo I. F. S., Dmitriev D. A. Construction and Research of Pyramidal Arrangement Milling Machine-Tool of "Triglide" Type. *International Journals of Engineering & Sciences – International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering (IJMME-IJENS)*. 2013. Vol. 13, I. 04. P. 24-28. URL: <http://www.ijens.org/IJMME%20Vol%2013%20Issue%2004.html>
4. Куньву Ли. Основы САПР CAD/CAM/CAE. СПб.: Питер, 2004. 560 с.
5. Кузнецов Ю. Н., Кеба П., Неделчева П. М. Упруго-напряженное состояние несущей системы станка пирамидальной компоновки. *Международная научно-практическая конференция UNITECH'13*. (Болгария, г. Габрово, 2013), Габрово, 2013. С. 66-69.
6. Кузнецов Ю. Н., Неделчева П. М., Степаненко А. А., Манжола М. Ю. Исследование влияния угла наклона граней каркаса на его упруго-напряженное состояние. *Международная научно-практическая конференция UNITECH'13*. (Болгария, г. Габрово, 2013), Габрово, 2013. С. 82-87.
7. Kuznetsov Yu. N., Dmitriev D. A., Keba P. V. Kinetic-Static analysis and inflexibility of drilling-milling machine-tool of pyramidal arrangement (DMMPA) with mechanisms of parallel structure (MPS). *12-th Anniversary International scientific Conference "UNITECH-12"* (Bulgaria, Gabrovo, November 19-20, 2012). Габрово, 2012. Vol.2,
8. Дмитрієв Д. О., Русанов С. А., Федорчук Д. Д. Методологія синтезу технологічного обладнання з МПС за критеріями точності, жорсткості і функціональності. *Вібрації в техніці та технологіях: збірник тез доповідей XVI Міжнародна науково-технічна конференція*. Вінниця: ВНТУ, 2017. С. 26-29.
9. Дмитрієв Д. О., Русанов С. А., Омельчук А. А., Федорчук Д. Д. Розробка технічних засобів проектування технологічного і верстатного обладнання каркасних просторових компоновок. *Вісник НТУУ "КПІ ім. І. Сікорського". Серія машинобудування*. 2017. Вип. 3 (81). С. 34-40.
10. Баганов Є. О., Бардачов Ю. М., Русанов С. А. Застосування віртуального потенціалу для моделювання просторових механізмів із в'язями. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016. № 1(56). С. 25-31.
11. Комп'ютерна програма "ToolsGLIDE". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 66227. / С. А. Русанов, Д. О. Дмитрієв, П. В. Кеба, Ю. М. Кузнецов. Заявл. 03.11.2016; Опубл. 21.06.2016.
12. Комп'ютерна програма "ToolsApp". Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №57913. / С. А. Русанов, Д. О. Дмитрієв, М. І. Подольський, Ю. М. Кузнецов. Заявл. 03.11.2014; Опубл. 29.12.2014.

**References**

1. Kuznietsov, Yu. M., Dmytriiev, D. O., & Dinevych, H. Yu. (2009) Komponovky verstativ z mekhanizmaty paralelnoi struktury: monohrafiia. In Yu. M. Kuznietsova (Ed.). Kherson: PP Vyshemyrskiy V.S.
2. Afonin, V. L., Kraynev, A. F., & Kovalev, V. E. at al. (2001) Obrabatyivayushee oborudovanie novogo pokoleniya. Kontseptsiya proektirovaniya. In V.L. Afonina (Ed.). Moscow: Mashinostroenie.

3. Kuznetsov, Yu. N., AL-Refo, I. F. S., & Dmitriev, D. A. (2013) Construction and Research of Pyramidal Arrangement Milling Machine-Tool of "Triglide" Type. *International Journals of Engineering & Sciences – International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering (IJMME–IJENS)*. **13**, 04, 24-28. Retrieved from <http://www.ijens.org/IJMME%20Vol%2013%20Issue%2004.html>
4. Kunvu, Li. (2004) *Osnovy SAPR CAD/CAM/CAE*. SPb.: Piter.
5. Kuznetsov, Yu. N., Keba, P., & Nedelcheva, P. M. (2013) Uprugo-napryazhennoe sostoyanie nesuschey sistemy stanka piramidalnoy komponovki. *Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya UNITECH'13*. (Bolgariya, g. Gabrovo, 2013), Gabrovo, pp. 66-69.
6. Kuznetsov, Yu. N., Nedelcheva, P. M., Stepanenko, A. A., & Manzhola, M. Yu. (2013) Issledovanie vliyaniya ugla naklona graney karkasa na ego uprugo-napryazhennoe sostoyanie. *Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya UNITECH'13*. (Bolgariya, g. Gabrovo, 2013), Gabrovo, pp. 82-87.
7. Kuznetsov, Yu. N., Dmitriev, D. A., & Keba, P. V. (2012) Kinetic-Static analysis and inflexibility of drilling-milling machine-tool of pyramidal arrangement (DMMPA) with mechanisms of parallel structure (MPS). *12-th Anniversary International scientific Conference "UNITECH -12"* (Bulgaria, Gabrovo, November 19-20, 2012). Vol. 2. Gabrovo.
8. Dmytriiev, D. O., Rusanov, S. A., & Fedorchuk, D. D. (2017) Metodolohiia syntezy tekhnolohichnoho obladnannia z MPS za kryteriiamy tochnosti, zhorstkosti i funktsionalnosti. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh: zbirnyk tez dopovidei KhVI Mizhnarodna naukovo-tekhnichna konferentsiia*. (Ukraine, Vinnytsia, 2017), Vinnytsia, pp. 26-29.
9. Dmytriiev, D. O., Rusanov, S. A., Omelchuk, A. A., & Fedorchuk, D. D. (2017) Rozrobka tekhnichnykh zasobiv proektuvannia tekhnolohichnoho i verstatnoho obladnannia karkasnykh prostorovykh komponovok. *Visnyk NTUU "KPI im. I. Sikorskoho". Serii mashynobuduvannia*. **3** (81), 34-40.
10. Bahanov, Ye. O., Bardachov, Yu. M., & Rusanov, S. A. (2016) Zastosuvannia virtualnoho potentsialu dlia modeliuвання prostorovykh mekhanizmiv iz viaziamy. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **1** (56), 25-31.
11. Kompiuterna prohrama "ToolsGLIDE". Svidotstvo pro reiestratsiiu avtorskoho prava na tvir № 66227. / S. A. Rusanov, D. O. Dmytriiev, P. V. Keba, Yu. M. Kuznetsov. Zaiavl. 03.11.2016; Opubl. 21.06.2016.
12. Kompiuterna prohrama "ToolsApp". Svidotstvo pro reiestratsiiu avtorskoho prava na tvir №57913. / S. A. Rusanov, D. O. Dmytriiev, M. I. Podolskyi, Yu. M. Kuznetsov. Zaiavl. 03.11.2014; Opubl. 29.12.2014.