УДК 629.73+629.78+666.97.033.16

Ю.В. ЧОВНЮК
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины
В.Т. КРАВЧУК
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ УПЛОТНЯЕМОЙ БЕТОННОЙ СМЕСИ В ВЕРТИКАЛЬНО ВИБРИРУЮЩЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ ПРИ ЕГО ИДЕАЛЬНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Обоснован метод моделирования и анализа пространственно-временной эволюции нелинейных поверхностных возмущений уплотняемой бетонной смеси в вертикально вибрирующем цилиндрическом баке при его идеальном возбуждении. В рамках предложенного метода и принятых допущений получено стандартное нелинейное эволюционное уравнение в частных производных, позволяющее осуществлять детальный анализ возникающих нелинейных волнообразований в рассматриваемой системе. В большинстве случаев этим уравнением является нелинейное уравнение Шредингера с диссипацией. Проведен всесторонний анализ полученных аналитических решений указанного уравнения для случаев: а) свободного без демпфирования движения бетонной смеси; б) свободного движения бетонной смеси с демпфированием; в) квазисолитонного движения бетонной смеси в условиях компенсации демпфирования и наличия пригруза на поверхности цилиндрического бака. Найденные аналитические решения нелинейного эволюционного уравнения периодического типа (т.н. кноидальные волны) описываются эллиптическими функциями Якоби или функциями Вейерштрасса. Квазисолитонные решения содержат в знаменателе типичную функцию для солитонных (уединённых) волн – гиперболический косинус, т.е. пропорциональны гиперболическому секансу. Применение пригруза специальной формы (радиально ребристой) при виброформовании изделий из бетонной смеси позволяет возбудить квазисолитон на поверхности уплотняемой жидкости/смеси и чётко определить все физические константы (амплитуду, скорость, начальную фазу колебаний), фигурирующие в решении эволюционного уравнения, возникающих квазисолитонных волнообразований. Результаты данного исследования могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта энергосиловых характеристик вибромашин для уплотнения бетонных и строительных смесей как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

Ключевые слова: пространственно-временная эволюция, нелинейность, поверхность, возмущение, уплотнение, бетонная смесь, вертикальная вибрация, цилиндрический бак, идеальное возбуждение.

Ю.В. ЧОВНЮК
Національний університет біоресурсів і природокористування України
В.Т. КРАВЧУК
Київський національний університет будівництва і архітектури

ПРОСТОРОВО-ЧАСОВА ЕВОЛЮЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ЗБУРЕНЬ УЩІЛЬНЮВАНОЇ БЕТОННОЇ СУМІШІ У ВЕРТИКАЛЬНО ВІБРУЮЧОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ БАКУ ПРИ ЙОГО ІДЕАЛЬНОМУ ЗБУДЖЕННІ

Обґрунтований метод моделювання та аналізу просторово-часової еволюції нелінійних поверхневих збуджень бетонної суміші, що ущільнюється, у вертикально

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

вібруючому циліндричному баку при його ідеальному збудженні. У межах запропонованого методу й прийнятих припущень отримане стандартне нелінійне еволюційне рівняння у частинних похідних, яке дозволяє здійснювати детальний аналіз виникаючих нелінійних хвиле утворень у досліджуваній системі. У більшості випадків цим рівнянням є нелінійне рівняння Шредінгера з дисипацією. Проведений всебічний аналіз отриманих аналітичних розв'язків вказаного рівняння для випадків: а) вільного без демпфування руху бетонної суміші; б) вільного руху бетонної суміші з демпфуванням; в) квазісолітонного руху бетонної суміші в умовах компенсації демпфування і наявності привантаження на поверхні циліндричного бака. Знайдені аналітичні розв'язки нелінійного еволюційного рівняння періодичного типу (т.з. кноїдальні хвилі) описуються еліптичними функціями Якобі чи функціями Вейєрштрасса. Квазісолітонні розв'язки мають у своєму знаменнику типову функцію для солітонних (уособлених) хвиль – гіперболічний косинус, тобто пропорціональні гіперболічному секансу. Застосування привантаження спеціальної форми (радіально ребристої) при віброформуванні виробів з бетонної суміші дозволяє збуджувати квазісолітон на поверхні рідини/суміші, що ущільнюється, й чітко визначити всі фізичні константи (амплітуду, швидкість, початкову фазу коливань), які фігурують у розв'язку еволюційного рівняння, виникаючих квазісолітонних хвилеутворень. Результати даного дослідження можуть бути у подальшому використані для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку енергосилових характеристик вібромашин для ущільнення бетонних і будівельних сумішей як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

Ключові слова: просторово-часова еволюція, не лінійність, поверхня, збурення, ущільнення, бетонна суміш, вертикальна вібрація, циліндричний бак, ідеальне збудження.

Y.V. CHOVNYUK
National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine
V.T. KRAVCHYUK
Kyiv National University of Construction and Architecture

SPACE-TIME EVOLUTION OF THE NONLINEAR SURFACE DISTRIBUTIONS OF THE SEALING CONCRETE MIXTURE IN THE VERTICAL VIBRATE CYLINDRICAL TANK DURING ITS IDEAL EXCITATION

The method of modeling and analysis of space-time evolution of nonlinear surface perturbations for the sealing concrete mixture at the vertical vibrate cylindrical tank with its ideal excitation is based. In the limits of proposed method and accepted assumptions, one may receive the standard nonlinear evolution equation with particular derivatives which gives the possibility to realize the detail analysis of the generating nonlinear wavelets at the researched system. For the larger part of cases, this equation is the nonlinear Shredinger's equation with dissipation. The all-around sides' analysis of the obtained analytical solutions of this equation is made for such cases: a) the free motion of the concrete mixture with the absence of dissipation; b) the free motion of the concrete mixture with the presence of dissipation; c) quasisolitary motion of the concrete mixture at the conditions of the compensation of the damping process and at the presence of the special weight at the surface of cylindrical tank. The analytical solutions of the nonlinear evolution equation are found in the form of the periodic type (so called cnoidal waves). They may be determined with a help of Yacobi's functions or Veirstrass's functions. The quasisolitary solutions have at their determination the typical function for the solitary waves – ch^{-1} or they are proportional to sech. One may use the weight of the special form (with radial ribs) for sealing of products from the concrete

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

mixture. This way gives the possibility to excite quasisoliton on the surface of sealing liquid/mixture and to determine precisely all physical constants (amplitude, velocity, the reference phase of oscillations) of quasisoliton wavelets which are usually present in the solution of evolution equation. The results of this investigation may be used at future for the improvement and refinement of the present engineering methods of calculation of the energy and force characteristics of the vibromachines for the sealing of the concrete and construction mixtures at the stages of their projection/design and at the regimes of real exploitation, as well.

Keywords: space-time evolution, nonlinearity, surface, perturbation, sealing, concrete mixture, vertical vibration, cylindrical tank, ideal excitation.

Постановка проблемы

Для создания вибрационных машин необходимо достаточно точно определить их основные параметры, при которых обеспечивается необходимый малоэнергоёмкий и эффективный режим вибрационного воздействия на уплотняемую среду в зависимости от физико-механических характеристик смеси, технологических и динамических процессов, протекающих при формировании структуры уплотняемой среды, конфигурации изделия, вида, направления и зоны вибрационного воздействия. К основным параметрам вибрационных машин относятся их масса, масса вибрационного рабочего органа и площадь его взаимодействия с уплотняемой средой, частота, амплитуда или размах вынужденных колебаний вибрационного рабочего органа, совершающего гармонические, суб- или супергармонические , а также, возможно, виброимпульсные колебания, частота собственных свободных колебаний вибрационной машины, геометрические и кинематические параметры вибрационной машины, скорость перемещения вибрационного рабочего органа или продолжительность вибрационного воздействия на уплотняемую среду, защита обслуживающего персонала и окружающей среды от вредного влияния шума и вибрации при работе. Определение приведенных параметров должно происходить с учётом физико-механических свойств бетонной смеси, её консистенции, размера и конфигурации изделия, места, направления и зоны приложения вибрационного возмущения (глубинное или поверхностное вибрирование, наружное вибрирование вертикально и горизонтально направленными колебаниями, объёмное вибрирование и вибрирование одночастотными и поличастотными колебаниями), требуемых прочностных показателей готового изделия, качества его поверхности, а также требуемых показателей эффективности, энергоёмкости, продолжительности вибрационного воздействия и прочности свежеотформованного изделия.

Установление качественных и количественных зависимостей между названными требованиями и определяемыми параметрами вибрационной машины возможно на основе теории вибрационного уплотнения бетонных смесей, которая должна быть сформулирована в ясной и непротиворечивой форме, выражена математическими зависимостями и экспериментально подтверждена.

Следует отметить, что при объёмном виброформовании бетонных смесей в сосудах цилиндрической формы без пригруза на их свободной поверхности могут возникать всевозможные поверхностные (в т.ч. нелинейные) возмущения, которые могут оказывать существенное влияние на качество формуемого таким способом изделия. К таким возмущениям можно отнести нелинейные периодические кноидальные волны и (квази-)солитонные волны. В связи с этим необходим анализ условий их возникновения, существования, устойчивости и распространения по поверхности таких смесей. Кроме того, существование такого рода режимов движения поверхности жидкостей не является (как это доказывается в ряде математических

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

работ) исключительным и редким фактором. Эти режимы реализуются гораздо чаще, чем регулярные, например, переходные и другого рода движения и волны. Мир многих физических систем «сплошь» погружён в режимы движения, которые поддерживают кноидальные (периодические) нелинейные волны и волны типа «солитон». Бурное исследование этих явлений продолжается и сегодня. Это объясняется не только тем, что они проявляются в большинстве физических систем, а значит, это необходимо с точки зрения практики (например, виброформования бетонных/строительных смесей), но также и тем, что **эти удивительные новые явления порождают и требуют искусных и своеобразных математических методов рассмотрения, которые создаются ныне и, наверное, будут создаваться в ближайшем будущем.**

Само по себе существование солитонного и кноидального периодического решений, т.е. точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, является поразительным фактом. Ведь вся теория нелинейных колебаний связана, по сути, с применением асимптотических методов Бубнова – Галёркина для распределённых систем и на их основании – с исследованием «укороченных» систем уравнений и их решений. А **это приводит к получению неполной информации о поведении системы.** С открытием солитонных и кноидальных (нелинейных периодических) волн родился иной путь анализа физической системы. Если apriori из эксперимента известно, что в данной физической системе реализуется уединённая волна (стоячая или бегущая), то изучение её динамики может базироваться не на применении классических понятий (собственная мода, частота, нормальные колебания и т.п.), а на **построении новой математической модели всей системы.** Таким образом, **математику корректируют физикой.** Так нынче поступают многие исследователи в области механики, гидромеханики, физики, химии, которые сначала решают вопрос: в каком классе структур следует искать описание данного явления?

Как показано ниже, оба эффекта (возбуждение солитонных и нелинейных периодических/кноидальных волн) могут иметь место в динамике исследуемого объекта – осесимметричных тел, содержащих вязкую жидкость. В данной работе изложены результаты подобных исследований, приводится пример возбуждения солитонной и кноидальной волн на поверхности вязкой жидкости, моделирующей виброуплотняемую в цилиндрическом баке методом объёмного формования бетонную (строительную) смесь.

Анализ последних исследований и публикаций

Возможные формы колебаний свободной поверхности (вязкой) жидкости, находящейся в жёстких контейнерах, интенсивно изучался с разных точек зрения [1-3]. Параметрически возбуждаемые уединённые волны типа «солитон» на поверхности вязкой жидкости в осесимметричном сосуде изучены в [4]. Следует отметить, что авторы последней работы не рассматривали возможность возбуждения на поверхности вязких жидкостей в сосудах подобной симметрии кноидальных (нелинейных периодических) волн. Переворот в понимании физики явлений, который инициировало открытие солитонных/кноидальных волновых решений и соответствующих режимов движения распределённых систем, заставляет по-новому взглянуть на результаты ранее проведенных исследований. Открытие таких специфических режимов движения систем изменило саму методику проведения исследований, обусловило отказ от прежних несостоятельных принципов. К последним, например, можно отнести известный и широко применяемый в научных исследованиях метод редукции, который заключается в том, что о поведении сложной системы с распределёнными параметрами судили по свойствам её (тоже распределённых) подсистем. **Новый взгляд в науке базируется на понимании того, что динамика сложной нелинейной системы с распределёнными параметрами в большей степени отражает свойства связей подсистем, чем их**

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

собственные свойства. К примеру, если собственные формы колебаний нелинейной распределённой системы являются взаимосвязанными и имеют равные (или близкие) частоты (как это наблюдается в случае возбуждения «сопряжённых» форм [4,5]), то регулярные установившиеся нелинейные режимы колебаний по каждой из них вследствие нелинейного взаимодействия (т.н. свойство нелинейности взаимодействия всей системы в целом) «перестраиваются» и могут перейти в особые нелинейные периодические (волны кноидального типа) или апериодические (волны солитонного типа) режимы движения/колебаний совокупной системы (т.н. свойство «перестроечной» нелинейности всей системы в целом). Подобный специфический режим движения системы при нелинейных колебаниях по одной из форм может быть рождён связью с внешним возбуждением. Именно такой связью является взаимодействие различных колебательных систем с устройствами возбуждения. Указанное взаимодействие всегда существует в силу выполнения закона сохранения энергии. Однако в случае большой мощности («неограниченной» [6]) механизма возбуждения или наличия компенсирующих устройств оно может быть пренебрежимо мало [4]. При сравнимости мощности механизма и мощности, потребляемой колебательной системой (т.е. при «ограниченном возбуждении» [6-8]), их взаимодействие принципиально изменяет динамику как самой нелинейной системы с распределёнными параметрами, так и источника возбуждения. В данном исследовании будем рассматривать именно такую ситуацию. Основные уравнения движения жидкости в цилиндрическом баке при возбуждении его колебаний электродвигателем ограниченной мощности [6] получены в [4]. В последней работе рассматривались и различные задачи о волновых формах движения свободной поверхности жидкости, содержащейся в осесимметричных телах. При этом волны на поверхности жидкости описывались с использованием собственных мод движения жидкости в баке, т.е. на основе предварительного решения задачи методом разделения переменных (методом Фурье). В большинстве случаев задачи в [4] носят нелинейный характер. Поэтому возникает естественная возможность описать бегущую в окружном направлении на поверхности жидкости волну на математическом языке кноидальных и уединённых волн-солитонов, теория которых позволяет объяснить ряд интересных явлений в динамике волн (в частности, их пространственно-временную эволюцию из начального возмущения). И солитон, и кноидальная волна существенно отличаются от гармонических волн на поверхности жидкости. Например, солитон геометрически представляет собой симметричный горб, возвышение (или впадину), и движется по поверхности, не расплываясь и не взаимодействуя со встречным солитоном. Кроме того, он может возникнуть от импульсного воздействия и энергию, переданную ему, переносить по поверхности жидкости [4]. Таким образом, по своим динамическим свойствам он более похож на квазичастицу, чем на волну в континууме. Солитон может существовать только в нелинейной среде и, как волна в нелинейной среде, обладает особым свойством: является точным решением нелинейного уравнения в частных производных. Поэтому нахождение солитонных (и кноидальных) волн, медленно движущихся в окружном направлении по поверхности жидкости, находящейся в цилиндрическом баке, с помощью нового математического языка, по мнению авторов данного исследования, позволит объяснить некоторые закономерности импульсного возбуждения волн в подобных нелинейных системах с распределёнными параметрами. Именно последние наиболее часто используются при моделировании процессов объёмного виброформования бетонных смесей без пригруза.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

Цель исследования

Цель работы – создание теоретических основ для моделирования и анализа пространственно-временной эволюции нелинейных поверхностных возмущений уплотняемой бетонной смеси в вертикально вибрирующем цилиндрическом баке при его идеальном возбуждении.

Изложение основного материала исследования

Бетонная смесь представляет собой сложную многокомпонентную систему, состоящую из заполнителя (песка и щебня), вяжущего и воды, а также новообразований, возникающих при воздействии вяжущего с водой и зёрнами заполнителя, и вовлечённого воздуха. В жёстких смесях объём воздуха достигает 20…25%, а в пластичных смесях до 10…15%. Вследствие взаимодействия сил поверхностного натяжения между жидкой фазой и частицами твёрдой фазы эта система приобретает связность и может рассматриваться как единое физическое тело.

Под воздействием внешних вибрационных сил в смеси возникает переменное напряжённо-деформированное состояние, происходит разрушение первоначальных структурных связей и ослабляются связи между её отдельными элементами, осуществляются конечные перемещения минеральных частиц с образованием более плотной упаковки.

1. Постановка задачи. Вывод основных уравнений. Пусть электродвигатель соединён через кривошипно-шатунный механизм с жёстким цилиндрическим баком, частично заполненным вязкой жидкостью (бетонной смесью). Вращение вала электродвигателя можно описать, зная закон изменения угла вращения $\psi(t)$. Когда шатун поворачивается на угол $\psi(t)$, бак получает перемещение в пространстве $u(t) = a \cdot \cos\psi(t)$, где a – длина шатуна. перемещение $u(t)$ имеет составляющие по осям Ox и Oz абсолютной системы координат, равные соответственно $u_x = a\sin\psi_0 \cos\psi(t)$ и $u_z = a\cos\psi_0 \cos\psi(t)$, где ψ_0 – пространственный угол, который образует плоскость платформы бака и горизонтальная плоскость yOz. При этом считаем, что ось вала двигателя параллельна оси Oy, т.е. горизонтальные перемещения бака имеют только составляющую u_z. Рассматривая электродвигатель ограниченной мощности, полагаем, что он имеет внутренний движущий момент $\Phi(\dot{\psi})$ и момент сил сопротивления вращению вала $H(\dot{\psi})$ [6,7].

Для описания колебаний свободной поверхности бетонной смеси в баке введём цилиндрическую систему координат $Oxr\theta$ с началом в точке пересечения оси оболочки и невозмущённой поверхности смеси. Тогда уравнение свободной поверхности жидкости Σ запишем в виде [4]:

$$\zeta = x - \xi(r,\theta,t) = 0, \tag{1}$$

Считаем вначале рассмотрения (для простоты) бетонную смесь невязкой и несжимаемой жидкостью с плотностью ρ, заполняющей цилиндрическую оболочку радиуса R и поперечного сечения B до глубины $x = -h$. Направление оси Oz считаем совпадающим с направлением полярной оси r при $\theta = 0$. (Подобная геометрия задачи используется в работе [4]).

Для описания движения жидкости в баке введём в рассмотрение потенциал скорости жидкости $\varphi(x,r,\theta,t)$, для которого граничная задача согласно работам Д. Майлса [9-11], формулируется следующим образом:

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

$$\nabla^2\varphi = 0 \ (-h < x < \xi;\ r,\theta \in B),\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=0} < \infty;\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0;\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=-h} = 0;$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \nabla\xi\cdot\nabla\varphi = \frac{\partial\xi}{\partial t} \ \ \text{при} \ x = \xi. \tag{2}$$

Заметим, что уравнение (2) и соответствующие граничные условия можно получить из требования постоянства интеграла $BI_1 = \frac{1}{2}\cdot\iiint\limits_Q (\nabla\varphi)^2 dBdx - \iint\limits_\Sigma (\varphi)\big|_{x=\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}dB$ по отношению к вариациям $\delta\varphi$ (принцип Дирихле). Здесь Q – объём, в котором находится бетонная смесь, а Σ – текущая (моментная) поверхность этой смеси в объёме Q.

Рассмотрение вибраций цилиндрического бака с бетонной смесью в данной работе проведено для **идеального возбуждения**, т.е. обратным воздействием колебаний бетонной смеси и бака на работу мощного устройства возбуждения (вибраций) пренебрегаем.

Далее будем рассматривать случай, когда бак подвержен только вертикальным перемещениям [4]:

$$u_x = a_0\cdot\cos 2\omega t, \tag{3}$$

где a_0 – амплитуда вертикальных перемещений цилиндрического бака со смесью, а ω аппроксимирует собственную частоту объёма жидкости:

$$\omega_1 = (g\cdot k\cdot thkh)^{1/2}, \tag{4}$$

при $k = \mu_{01}/R,\ \mu_{01},$ равном первому корню уравнения $J_0'(\mu_{01}) = \left.\frac{dJ_0\left(\frac{\mu_{01}r}{R}\right)}{dr}\right|_{r=R} = 0,$

g – ускорение свободного падения, $J_0(\tilde r)$ – функция Бесселя нулевого порядка действительного аргумента $\tilde r$.

Перемещение свободной поверхности жидкости для осесимметричной задачи представим в виде разложения Фурье по собственным модам $J_0(\mu_{0n}r/R)$:

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(t)\cdot\frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{R}\right)}{N_{0n}},\ \ N_{0n}{}^2 = J_0(\mu_{0n}),\ \ n = 1,2,3,... \tag{5}$$

Введём в рассмотрение безразмерную расстройку частот:

$$\nu = \frac{\omega-\omega_1}{\varepsilon_2\omega_1} \approx \frac{\omega^2-\omega_1{}^2}{2\varepsilon_2\omega_1{}^2}. \tag{6}$$

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

Здесь использован малый положительный параметр $\varepsilon_2 = \omega^2 \cdot a_0 / \gamma g$, подразумевающий малость амплитуды возбуждения; γ – постоянный коэффициент (т.н. коэффициент возбуждения [4]).

Амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости (бетонной смеси) $\xi_n(t)$ отыскиваем в виде:

$$\xi_n = \delta_{1n} \cdot \widetilde{a} \cdot [p(\tau)\cos\omega t + q(\tau)\sin\omega t] + \widetilde{a}^2 \cdot k \cdot thkh \cdot [F_n(\tau)\cos 2\omega t + B_n(\tau)\sin 2\omega t + H_n(\tau)], \tag{7}$$

где $\widetilde{a} = 2\varepsilon_2^{1/2} \cdot \lambda$; $\lambda = \dfrac{thkh}{k}$; δ_{1n} – символ Кронекера; τ – медленное безразмерное время: $\tau = \varepsilon_2 \omega t$; $p(\tau)$, $q(\tau)$, $F_n(\tau)$, $B_n(\tau)$, $H_n(\tau)$ – медленно изменяющиеся амплитуды колебаний.

Записывая амплитуды ξ_n в виде (7), выделяем резонансную первую амплитуду ξ_1, которая пропорциональна $\varepsilon_2^{1/2}$, остальные являются величинами $O(\varepsilon_2)$. (Медленное время τ введено для отражения того факта, что изменения переменных p и q вызваны нелинейными факторами, величина которых пропорциональна $\varepsilon_2^{1/2}$).

Лагранжиан $L = T - V$, где T – кинетическая, а V – потенциальная энергия рассматриваемой системы, строим по процедуре, развитой в [4]. После осреднения лагранжиана по быстрому времени $\psi = \omega t$ и применения для нахождения $F_n(\tau)$, $B_n(\tau)$, $H_n(\tau)$ через p и q вариационного принципа Гамильтона усреднённый по быстрому явно входящему времени $\psi = \omega t$ лагранжиан $\langle L \rangle$ оказывается функцией только $p(\tau)$ и $q(\tau)$, а именно:

$$\langle L \rangle = 4\varepsilon_2^2 \cdot g\lambda^2 \rho B \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dp}{d\tau} \cdot q - p \cdot \frac{dq}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot \left(p^2 + q^2\right) + \frac{\gamma}{2} \cdot \left(p^2 - q^2\right) + A_0 \cdot \left(p^2 + q^2\right)^2 \right]. \tag{8}$$

Параметр A_0, учитывающий нелинейные эффекты задачи, может быть посчитан по методике Майлса [9].

Предположим, что движение поверхности виброформуемой бетонной смеси слабо модулировано в окружном направлении θ (при этом масштаб модуляции равен $O\left(1/\varepsilon_2^{1/2} k\right)$), и потребуем, чтобы p и q были функциями медленного времени и «растянутой» окружной координаты:

$$\Theta = 2\left(\varepsilon_2 thkh\right)^{1/2} \cdot k\theta. \tag{9}$$

Используем теперь новый вариационный принцип и запишем лагранжиан системы несколько в иной форме, учитывающей зависимости от окружной координаты θ. Как показано в работах [4, 12], каноническими переменными по Гамильтону являются величины потенциала φ на поверхности бетонной смеси (когда $x = \xi(r,\theta,t)$) и параметры поверхности жидкости $\xi(r,\theta,t)$. При этом плотность функции Лагранжа в пространстве r,θ,t имеет вид [12]:

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

$$F = \varphi\big|_{x=\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-h}^{\xi} (\nabla \varphi)^2 dx - \frac{1}{2} \cdot (\ddot{u}_x + g) \cdot \xi^2. \tag{10}$$

Потенциал скорости φ допускает представление в виде ряда Фурье, аналогичное (5). Поэтому:

$$\varphi\big|_{x=\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n(t) \cdot \frac{J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{R}\right)}{N_{0n}}. \tag{11}$$

Применяя процедуру, приведенную в [4], можно получить полное представление для лагранжиана $\langle F \rangle$, усреднённого по быстрому явно входящему времени $\psi = \omega t$, в виде:

$$\langle F \rangle = 4\varepsilon_2{}^2 g \lambda^2 \rho B \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dp}{d\tau} \cdot q - p \cdot \frac{dq}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot \left(p^2 + q^2\right) + \frac{\gamma}{2} \cdot \left(p^2 - q^2\right) + \frac{D_0}{4} \cdot \left(p^2 + q^2\right)^2 - \\ &- \frac{D_1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \Theta} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} + \varepsilon_2{}^{5/2} \{\ldots\}, \tag{12}$$

где $D_0 = 4\left(A_0 + \frac{D_2{}^2}{2g^2} \cdot \lambda^2 \cdot \omega_1{}^4 \right)$; $D_1 = th(kh) + kh \sec h^2(kh)$; $D_2 = \frac{1}{2} \cdot k_{0101} \cdot \frac{cth(kh)}{k^2}$;

$$k_{0101} = \frac{1}{2B} \iint_B dB \int_{-h}^{\xi} (\nabla X_{01} \cdot \nabla X_{01}) dx, \quad X_{01} = \sec h\left(\frac{\mu_{01}}{R} h \right) \cdot ch\left[\frac{\mu_{01}}{R}(h + x) \right] \cdot \frac{J_0\left(\frac{\mu_{01}}{R} \cdot r \right)}{N_{01}}.$$

Следует подчеркнуть, что в $\langle F \rangle$ параметр $D_1 > 0$, а $D_0 > 0$ при глубине заполнения бака с бетонной смесью $h > 0{,}2R$ [10]. Поскольку исходные уравнения задачи (2) справедливы лишь при $h > 0{,}65R$, будем считать, что в рамках данной математической модели физической задачи $D_0 > 0$ и $D_1 > 0$.

Используя вариационный принцип и рассматривая p и q как канонические переменные, построим для лагранжиана $\langle F \rangle$ уравнения, описывающие пространственно-временную эволюцию p и q [4]:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial \tau} = D_2 \cdot \dfrac{\partial^2 q}{\partial \Theta^2} + \left[\nu - \gamma + D_0 \cdot \left(p^2 + q^2\right) \right] \cdot q; \\ \dfrac{\partial q}{\partial \tau} = D_2 \cdot \dfrac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} + \left[\nu + \gamma + D_0 \cdot \left(p^2 + q^2\right) \right] \cdot p. \end{cases} \tag{13}$$

Формально введём в уравнения системы (13) малое линейное демпфирование, присущее бетонной смеси, для чего заменим оператор $\frac{\partial}{\partial \tau}$ на $\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \alpha \right)$ (что эквивалентно учёту силы демпфирования в бетонной смеси, как диссипативной

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

жидкости, вида $2\varepsilon_2\lambda\omega_1\alpha\xi_1$). Далее, используем новую комплексную переменную [4] согласно формуле:

$$\kappa = p + i \cdot q, \; i^2 = -1. \tag{14}$$

Тогда эволюционные уравнения (13) позволят получить одно нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных вида:

$$i \cdot \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \tau} + \alpha\kappa \right) + D_2 \cdot \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \Theta^2} + \left(\nu + D_0 \left| \kappa^2 \right| \right) \cdot \kappa + \gamma\kappa^* = 0, \; \kappa^* = p - iq, \tag{15}$$

т.е. κ^* – величина, комплексно сопряжённая κ.

Заметим, что выполняется соотношение [4] для доминантной моды ξ_1, а именно: $\xi_1 + \frac{i\omega}{g} \cdot \zeta_1 = 2\varepsilon_2{}^{1/2} \cdot \lambda \cdot \kappa(\Theta, \tau) \cdot \exp(-i\omega t)$.

Далее приступим к исследованию и решению полученного уравнения (15).

2. Анализ и решение уравнения (15).

2.1. Свободное и без демпфирования движение бетонной смеси.

Если $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$, тогда бетонная смесь движется свободно и без демпфирования. В этом случае уравнение (15) будет представлять собой кубическое нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) без диссипации, которое допускает при $D_0 D_1 > 0$ [13] решения в виде солитонов. Здесь мы найдём все решения НУШ без диссипации вида:

$$i \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \tau} + D_2 \cdot \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \Theta^2} + \left(\nu + D_0 \left| \kappa^2 \right| \right) \cdot k = 0. \tag{16}$$

Представим функцию $\kappa(\tau, \Theta)$ в виде:

$$\kappa(\tau, \Theta) = \kappa_0(\tau, \Theta) \cdot \exp(i\nu\tau). \tag{17}$$

Тогда уравнение (16) для $\kappa(\tau, \Theta)$ перейдёт в уравнение для $\kappa_0(\tau, \Theta)$, которое представляет собой НУШ без диссипации в классическом виде:

$$i \cdot \frac{\partial \kappa_0}{\partial \tau} + D_2 \cdot \frac{\partial^2 \kappa_0}{\partial \Theta^2} + D_0 \left| \kappa_0{}^2 \right| \cdot \kappa_0 = 0. \tag{18}$$

Очевидно, что (18) допускает решение в виде плоской волны:

$$\kappa_0 = b_0 \cdot \exp\{ i (d\Theta - \Delta\tau) \}, \tag{19}$$

где $\Delta = D_2 \cdot d^2 - D_0 \cdot b_0{}^2$, b_0 – вещественная постоянная, или:

$$(\kappa_0)_0 = b_0 \cdot \exp\{ i D_0 \cdot b_0{}^2 \cdot \tau \}, \; d = 0. \tag{20}$$

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

В исходных переменных уравнение (19) соответствует монохроматической волне постоянной амплитуды $\varepsilon_2^{1/2} \cdot b_0$ с волновым числом $\tilde{k} + \varepsilon_2^{1/2} \cdot d$, где $\tilde{k}$ – волновой вектор линейной волны, и частотой:

$$\Omega = \tilde{\omega}(\tilde{k}) + \varepsilon_2^{1/2} \cdot V_g \cdot d + \varepsilon_2 \cdot D_0 \cdot b_0^2, \tag{21}$$

где $\tilde{\omega}$ – частота линейной волны, а $\tilde{\omega}(\tilde{k})$ – закон дисперсии в линейном приближении, $V_g = \dfrac{d\tilde{\omega}(\tilde{k})}{d\tilde{k}}$ – групповая скорость распространения линейной волны.

Таким образом, уравнение (21) представляет собой нелинейное дисперсионное уравнение, включающее зависимость частоты $\tilde{\omega}$ от амплитуды нелинейной волны b_0. Коэффициент D_0 в уравнении (18) есть:

$$D_0 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial |\kappa_0|^2} \right) \Bigg|_{\kappa_0 = 0, d = 0}. \tag{22}$$

Подобные результаты получены в работе [14] при анализе пространственно-временной эволюции нелинейных волн в идеальной несжимаемой жидкости методом многомасштабных разложений (методом разложения производных).

Исследуем вопрос об устойчивости решения (20). Предположим, что в системе возбуждаются малые гармоники, волновые числа которых лежат в боковой по отношению к $\tilde{k}$ полосе, т.е. κ_0 имеет вид:

$$\kappa_0 = \left(b_0 + \kappa_{01}(\tau) \cdot \exp i\chi\Theta + \kappa_{02}(\tau) \cdot \exp(-i\chi\Theta)\right) \cdot \exp\left(iD_0 \cdot b_0^2 \cdot \tau\right). \tag{23}$$

Подставляя это выражение в уравнение (18) и производя линеаризацию его относительно κ_{01}, κ_{02}, получим:

$$\begin{cases} i \cdot \dfrac{\partial \kappa_{01}}{\partial \tau} + \left(D_0 \cdot b_0^2 - D_2 \cdot \chi^2\right) \cdot \kappa_{01} + D_0 \cdot b_0^2 \cdot \kappa_{02}^* = 0, \\ i \cdot \dfrac{\partial \kappa_{02}^*}{\partial \tau} - \left(D_0 \cdot b_0^2 - D_2 \cdot \chi^2\right) \cdot \kappa_{02}^* - D_0 \cdot b_0^2 \cdot \kappa_{01} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

(Здесь символ $(\ )^*$ над функцией означает комплексно сопряжённую величину). Решение системы (24) пропорционально $\exp(\bar{\lambda} \cdot \tau)$, где:

$$\bar{\lambda}^2 = D_2^2 \cdot \chi^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{D_0}{D_2} \cdot b_0^2 - \chi^2 \right). \tag{25}$$

Следовательно, при $D_2 \cdot D_0 > 0$ имеет место продольная неустойчивость по отношению к возмущениям с $\chi < \sqrt{2D_0 / D_2} \cdot b_0$, что совпадает с критерием Лайтхилла [15]. При $D_2 \cdot D_0 < 0$ имеет место нейтральная устойчивость по отношению к модуляции.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

Неустойчивость, возникающая при $D_2 \cdot D_0 > 0$, может быть стабилизирована дисперсионным расплыванием волнового пакета, что приводит к возможности существования стационарных волн огибающих. Найдём соответствующие стационарные решения уравнения (18). Такие решения в общем случае имеют вид:

$$\kappa_0 = \bar{a} \cdot \exp(i\varphi), \tag{26}$$

где $\bar{a} = \bar{a}(\bar{\zeta})$, $\varphi = \frac{w}{2D_2} \cdot \bar{\zeta} + \bar{\psi}(\bar{\zeta}) + \bar{\alpha} \cdot \tau$, $\bar{\zeta} = \Theta - w \cdot \tau$, $\bar{\alpha} = const$, $w = const$.

Подставляя (26) в (18), получим после разделения действительной и мнимой частей:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\bar{a}^2 \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\zeta}} \right) = 0; \\ D_2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \bar{\zeta}^2} - \bar{a} \cdot \left(\bar{\alpha} - \frac{w^2}{4D_2} \right) + D_0 \cdot \bar{a}^3 - \bar{a} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\zeta}} \right)^2 = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Из первого уравнения системы (27) следует, что:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{c}{\bar{a}^2(\bar{\zeta})}, \quad \bar{\psi}(\bar{\zeta}) = const + \int \frac{c d\bar{\zeta}}{\bar{a}^2(\bar{\zeta})}, \tag{28}$$

т.е. второе уравнение системы (27) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \bar{\zeta}^2} - \bar{a} \cdot \frac{1}{D_2} \cdot \left(\bar{\alpha} - \frac{w^2}{4D_2} \right) + \frac{D_0}{D_2} \cdot \bar{a}^3 - \frac{c^2}{\bar{a}^3} = 0, \quad c = const. \tag{29}$$

Первый интеграл уравнения (29) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{\zeta}} \right)^2 - \frac{1}{D_2} \cdot \left(\bar{\alpha} - \frac{w^2}{4D_2} \right) \cdot \bar{a}^2 + \frac{D_0}{2D_2} \cdot \bar{a}^4 + \frac{c^2}{\bar{a}^2} = E, \tag{30}$$

где $E = const$ определяется из начальных условий.

В случае $c = 0$ решениями уравнения (30) являются:
при $E < 0$

$$\bar{a} = \bar{A}_0 \cdot an \left[\bar{A}_0 \sqrt{\frac{D_0}{2D_2}} \cdot \bar{\zeta}; s \right], \tag{31}$$

где $an(u;s)$ – эллиптическая функция Якоби с модулем $s^2 = 2 - \frac{2}{\bar{A}_0 \cdot D_0} \cdot \left(\bar{\alpha} - \frac{w^2}{4D_2} \right)$;

при $E > 0$

$$\overline{a} = \overline{A}_0 \cdot cn\left[\overline{A}_0 \sqrt{\frac{D_0}{2D_2}} / s; s\right], \tag{32}$$

с модулем $s^2 = \dfrac{\overline{A}_0^{\,2} \cdot D_0}{2 \cdot \left(\overline{A}_0^{\,2} \cdot D_0 - \overline{\alpha} + w^2 / 4D_2\right)}$.

При $E = 0$ получим решение в виде уединённой волны (солитон):

$$s = 1,\ \ \overline{A}_0 = \sqrt{2 \cdot \left(\overline{\alpha} - w^2 / 4D_2\right)},\ \ \overline{a} = \overline{A}_0 \cdot \operatorname{sec}h\left[\overline{A}_0 \cdot \sqrt{\frac{D_0}{2D_2}} \cdot \overline{\zeta}\right]. \tag{33}$$

Отметим, что решения такого типа имеют место только в случае неустойчивости монохроматической волны. В случае $c \neq 0$ уравнение (29) подстановкой $\overline{a} = \sqrt{\dfrac{D_0}{6D_2^{\,2}} \cdot \left(\overline{\alpha} - \dfrac{w^2}{4D_2}\right) - \dfrac{D_0}{2D_2} \cdot \overline{b}}$ приводится к уравнению Вейерштрасса:

$$\left(\frac{\partial \overline{b}}{\partial \overline{\zeta}}\right)^2 - 4 \cdot \overline{b}^{\,3} + g_1 \cdot \overline{b} + g_2 = 0, \tag{34}$$

где $g_1 = \dfrac{1}{3D_2^{\,2}} \cdot \left(\overline{\alpha} - \dfrac{w^2}{4D_2}\right)^2 + \dfrac{2D_2 \cdot E}{D_0}$, $g_2 = c^2 \dfrac{4D_2^{\,2}}{D_0^{\,2}} - \dfrac{4}{27D_2^{\,3}}\left(\overline{\alpha} - \dfrac{w^2}{4D_2}\right)^3 - \dfrac{2E}{D_0}\left(\overline{\alpha} - \dfrac{w^2}{4D_2}\right)$, т.е.

$$\overline{a} = \sqrt{P\left(\overline{\zeta}, g_1, g_2\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\overline{\alpha} - \frac{w^2}{4D_2}\right)}, \tag{35}$$

где $P(\overline{\zeta}, g_1, g_2)$ – функция Вейерштрасса с инвариантами g_1, g_2.

2.2. <u>Свободное движение бетонной смеси с демпфированием.</u>

В этом случае решение задачи сводится к исследованию уравнения:

$$i \cdot \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \tau} + \alpha\kappa\right) + D_2 \cdot \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \Theta^2} + \left(\nu + D_0 \cdot \left|\kappa^2\right|\right) \cdot \kappa = 0. \tag{36}$$

Введём следующее определение искомой функции $\kappa(\tau, \Theta)$:

$$\kappa(\tau, \Theta) = \overline{\kappa}_0(\tau, \Theta) \cdot \exp\{(-\alpha + i\nu) \cdot \tau\}. \tag{37}$$

Тогда для $\overline{\kappa}_0(\tau, \Theta)$ получим уравнение, совпадающее с (18) для $\kappa_0(\tau, \Theta)$. Таким образом, и в этом случае следует выполнять анализ, идентичный проведенному в п. 2.1.

2.3. <u>Квазисолитонные движения бетонной смеси в условиях компенсации демпфирования и наличия пригруза на поверхности цилиндрического бака.</u>

Рассмотрим далее ситуацию, когда на поверхности цилиндрического бака с бетонной смесью находится пригруз и выполняется следующее условие (названное в [4] условием компенсации демпфирования, т.е. в ситуации, когда

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

диссипативные/демпфирующие свойства бетонной смеси компенсируются возбуждением извне источником колебаний днища бака по закону (3)):

$$i\alpha\kappa + \gamma\kappa = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha^2 = \gamma^2. \tag{38}$$

(Следует отметить, что авторы [4] ошибочно принимают за условие компенсации демпфирования лишь соотношение $\alpha = \gamma$). Условие (38) является естественным с точки зрения закона сохранения энергии и легко выполнимым с помощью выбора амплитуды вибраций бака a_0 :

$$\gamma = \frac{\omega^2 a_0}{g\varepsilon_2} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{\omega^4 a_0{}^2}{g^2 \varepsilon_2{}^2}. \tag{39}$$

Тогда уравнение (15) сведётся к уравнению (16), детально исследованному в п. 2.1.

Квазисолитонное решение (15) в этом случае примет следующий вид [4]:

$$\kappa(\tau,\Theta) = C_0 \cdot \frac{\exp\beta_2}{ch\beta_1}. \tag{40}$$

Здесь

$$\beta_1 = \left(\frac{D_0}{2D_1}\right)^{1/2} \cdot C_0 \cdot \left(\Theta - V\tau - \Theta_0\right);\; \beta_2 = i \cdot \left[\left(\frac{D_0}{2} \cdot C_0{}^2 + \nu\right) \cdot \tau + \frac{V}{2D_1} \cdot \left(\Theta - \frac{V \cdot \tau}{2} - \Theta_0 - \widetilde{\psi}_0\right)\right],$$

C_0 – постоянная амплитуда; V – постоянная скорость; Θ_0 – начальная координата; $\widetilde{\psi}_0$ – начальная фаза, которые должны определяться из начальных условий задачи.

Некоторые физические свойства решения (40) сводятся к следующим. Это решение отвечает стационарной волне с модулированной амплитудой, распространяющейся в медленном времени τ с постоянной скоростью V, а именно решение (40) можно рассматривать как гармонические волны $\exp\beta_2$ с модулированной амплитудой $C_0 / ch\beta_1$. Решение представляет собой квазисолитон (уединённую волну, внутри «заполненную» гармоническими волнами, движущимися со скоростью v_2, в то время как колоколообразная огибающая этой волны – горб волны – движется со скоростью v_1).

Если вернуться к физически содержательным переменным, тогда амплитуда колебаний свободной поверхности бетонной смеси по доминантной моде ξ_1 имеет (с точностью до $O(\varepsilon_2{}^{1/2})$) вид:

$$\xi_1 = \mathrm{Re}\left[\widetilde{a} \cdot C_0 \cdot \frac{\exp(\beta_2 - i\omega t)}{ch\beta_1}\right] = \frac{\widetilde{a} \cdot C_0}{ch\left\{\left(\frac{D_0}{2D_1}\right)^{1/2} \cdot C_0 \cdot (\Theta - V\tau - \Theta_0\right\}} \cdot \cos\widetilde{\gamma},$$

$$\widetilde{\gamma} = \left[\left(\frac{D_0}{2} \cdot C_0{}^2 + \nu\right) \cdot \tau + \frac{V}{2D_1} \cdot \left(\Theta - \frac{V\tau}{2} - \Theta_0 - \widetilde{\psi}_0\right) - \omega t\right]. \tag{41}$$

Таким образом, рельеф свободной поверхности бетонной смеси в переменных t и θ согласно (7) имеет вид:

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

$$\xi \approx \xi_1 \cdot \frac{J_0(kr)}{N_{01}} = \frac{\tilde{a} C_0 J_0(kr)}{N_{01} \cdot ch\left\{ \left(\frac{D_0}{2D_1} \right)^{1/2} \cdot C_0 \cdot \frac{\tilde{a} k^2}{T^{1/2}} \cdot (\theta - \theta_0 - v_1 t) \right\}} \cdot \cos\varphi,$$

$$\varphi = \frac{V \tilde{a} k^2}{2D_1 \cdot T^{1/2}} \cdot \left(\theta - v_2 t - \theta_0 - \psi_0 \right). \tag{42}$$

Здесь, в (42), имеем:

$$v_1 = \frac{V \omega \tilde{a}}{4T^{3/2}};\ v_2 = \frac{2D_1 T^{1/2} \cdot \left[\omega + \left(\frac{V^2}{4D_1} - \frac{D_0 \cdot C_0^2}{2} - \nu \right) \cdot \omega \cdot \frac{\tilde{a}^2 k^2}{4T^2} \right]}{V \tilde{a} k^2};\ \theta_0 = \frac{T^{1/2}}{\tilde{a} k^2} \Theta_0; \tag{43}$$
$$\psi_0 = \frac{T^{1/2}}{\tilde{a} k^2} \cdot \tilde{\psi}_0;\ T = th(kh).$$

Тем самым квазисолитон представляет собой длинноволновые, бегущие в окружном направлении θ волны $\cos\varphi$, их скорость равна v_2, а длина волны $2\pi \cdot \left(2D_1 T^{1/2} \right) \cdot \left(V \tilde{a} k^2 \right)^{-1}$. Эти волны имеют модулированные квазисолитоном амплитуды вида $\tilde{a} C_0 \cdot \frac{J_0(kr)}{N_{01}} \cdot \mathrm{sech}\left\{ \left(\frac{D_0}{2D_1} \right)^{1/2} \cdot C_0 \cdot \frac{\tilde{a} k^2}{T^{1/2}} \cdot \left(\theta - v_1 t - \theta_0 \right) \right\}$. Горб квазисолитона движется с постоянной скоростью $v_1 << v_2$. Следует отметить, что скорость квазисолитона не зависит от его амплитуды C_0, в то время как скорость движения волн v_2 содержит составляющую, зависящую от C_0. Относительно начальных условий задачи можно отметить следующее. Квазисолитоны, как и солитоны, тем и отличаются от обычных волн, что способны нести (и несут в случае их возбуждения) сгустки энергии, переданной системе в начальный момент времени. Особенно удачным является использование квазисолитонов/солитонов при импульсных воздействиях на систему. Чтобы в виброформуемой бетонной смеси зародился квазисолитон, необходимо в каком-либо одном сечении $\theta = \theta_0$ создать деформацию поверхности смеси $\xi(r, \theta, t)$, чтобы $\xi_1(0, \theta_0) = u_1$, $\frac{\partial \xi_1(0, \theta_0)}{\partial t} = u_2$; $\frac{\partial \xi_1(0, \theta_0)}{\partial \theta} = u_3$. Такие начальные условия можно создать путём погружения или поднятия пригруза (с радиально ребристой поверхностью контакта с жидкостью) в бетонной смеси. Этот инструмент часто используется при объёмном/поверхностном виброформовании бетонных (и строительных) смесей. Пусть $\theta_0 = 0$ и $\xi_1(0,0) = u_1$; $\frac{\partial \xi_1(0,0)}{\partial t} = u_2$; $\frac{\partial \xi_1(0,0)}{\partial \theta} = u_3$; тогда V определяется (например, методом Феррари) из алгебраического уравнения четвёртой степени вида:

$$\left[\frac{V^4}{4D_1} - \frac{D_0}{2} \cdot V^2 \cdot \left(\frac{u_1}{\tilde{a}} \right)^2 - \frac{D_0}{2} \cdot \left(\frac{u_3 \cdot 2D_1 \cdot T^{1/2}}{\tilde{a}^2 k^2} \right)^2 - \nu V^2 \right] \cdot \omega \cdot \frac{\tilde{a}^2 k^2}{4T^2} + \omega V^2 + \frac{u_2}{u_3} \cdot \frac{\tilde{a} k^2}{2D_1 T^{1/2}} \cdot V^3 = 0. \tag{44}$$

Амплитуда C_0 при известном V находится из соотношения:

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

$$C_0 = \left(\frac{u_1}{\tilde{a}}\right)^2 + \left[\frac{u_3 2D_1 \cdot T^{1/2}}{V\tilde{a}k^2}\right]^2, \tag{45}$$

и, наконец, фаза ψ_0 – из условия:

$$\psi_0 = \frac{2D_1 T^{1/2}}{V\tilde{a}k^2} \cdot \arccos\left(\frac{u_1}{\tilde{a}C_0}\right). \tag{46}$$

Таким образом, на свободной поверхности бетонной смеси, содержащейся в цилиндрическом баке, при вертикальных его вибрациях (т.н. объёмное виброформование) можно с помощью пригруза специальной формы (радиально ребристой) возбудить квазисолитонный сгусток волн. Условием существования такого решения является условие компенсации демпфирования (38).

Следует особо остановиться на выполнении условий периодичности в случае возбуждения квазисолитона. В импульсных задачах обычно исследователей интересует динамика начального возмущения переменных, т.е. «история» процесса, а также пространственно-временная эволюция начального возмущения. Поэтому значения окружной координаты θ, равные, к примеру, 0 или 2π, не являются тождественными, так как $\theta = 0$ соответствует началу процесса, а $\theta = 2\pi$ – состоянию, когда возмущение пройдёт полный круг по поверхности. Таким образом, чтобы получить описание рельефа свободной поверхности в каком-либо сечении цилиндра $\theta^* (0 \le \theta^* < 2\pi)$ в момент времени t, сначала необходимо для скоростей v_1 и v_2 найти числа $n_1 = \left[\frac{v_1 t}{2\pi}\right]_0$ (где $[\;]_0$ – символ целой части числа, «антье от числа»), и $n_2 = \left[\frac{v_2 t}{2\pi}\right]_0$. Затем уравнение колебаний свободной поверхности бетонной смеси по доминантной моде записывается в виде:

$$\xi \approx \xi_1 \cdot \frac{J_0(kr)}{N_{01}} = \frac{\tilde{a}C_0 J_0(kr) \cdot \cos\left\{\frac{V\tilde{a}k^2}{2D_1 T^{1/2}} \cdot \left(\theta^* + n_2 \cdot 2\pi - v_2 t - \theta_0 - \psi_0\right)\right\}}{N_{01} \cdot ch\left\{\left(\frac{D_0}{2D_1}\right)^{1/2} \cdot C_0 \cdot \frac{\tilde{a}k^2}{T^{1/2}} \cdot \left(\theta^* + n_1 \cdot 2\pi - v_1 t - \theta_0\right)\right\}}. \tag{47}$$

Такое представление квазисолитонного решения возможно вследствие того, что квазисолитоны обладают свойством сохранения формы даже в случае встречи с аналогичным по виду возмущением свободной поверхности (бетонной смеси) (т.е. ведут себя как квазичастицы или абсолютно упругие шарики, восстанавливающие все свои кинематические характеристики после столкновения с себе подобными квазичастицами) [13].

Выводы

1. Обоснован метод моделирования и анализа пространственно-временной эволюции нелинейных поверхностных возмущений уплотняемой бетонной смеси в вертикально вибрирующем цилиндрическом баке при его идеальном возбуждении.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

2. В рамках предложенного метода и принятых допущений получено стандартное нелинейное эволюционное уравнение в частных производных, позволяющее осуществлять детальный анализ возникающих нелинейных волнообразований в рассматриваемой системе. В большинстве случаев этим уравнением является нелинейное уравнение Шредингера с диссипацией.
3. Проведен всесторонний анализ полученных аналитических решений указанного уравнения для случаев: а) свободного без демпфирования движения бетонной смеси; б) свободного движения бетонной смеси с демпфированием; в) квазисолитонного движения бетонной смеси в условиях компенсации демпфирования и наличия пригруза на поверхности цилиндрического бака.
4. Найденные аналитические решения нелинейного эволюционного уравнения периодического типа (т.н. кноидальные волны) описываются эллиптическими функциями Якоби или функциями Вейерштрасса. Квазисолитонные решения содержат в знаменателе типичную функцию для солитонных (уединённых) волн – гиперболический косинус, т.е. пропорциональны гиперболическому секансу.
5. Применение пригруза специальной формы (радиально ребристой) при виброформовании изделий из бетонной смеси позволяет возбудить квазисолитон на поверхности уплотняемой жидкости/смеси и чётко определить все физические константы (амплитуду, скорость, начальную фазу колебаний), фигурирующие в решении эволюционного уравнения, возникающих квазисолитонных волнообразований.
6. Результаты данного исследования могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта энергосиловых характеристик вибромашин для уплотнения бетонных и строительных смесей как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

Список использованной литературы

1. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. Москва: Машиностроение, 1978. 248 с.
2. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. Москва: Машиностроение, 1971. 563 с.
3. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. Москва: Машиностроение, 1977. 206 с.
4. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Бояршина Л. Г. и др. Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость. Киев: Наукова думка, 1992. 184 с.
5. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наукова думка, 1984. 220 с.
6. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. Москва: Наука, 1964. 254 с.
7. Краснопольская Т. С., Лавров К. А. Нелинейные колебания цилиндрической оболочки с жидкостью при ограниченном возбуждении. *Прикладная механика*. 1988. Т. 24. №11. С. 67-72.
8. Фролов К. В., Краснопольская Т. С. Эффект Зоммерфельда в системах без внутреннего демпфирования. *Прикладная механика*. 1987. Т. 23. № 12. С. 19-24.
9. Miles J. W. Nonlinear surface waves in closed basins. *J. Fluid. Mech*. 1976. V. 75. №. 3. P. 419-448.
10. Miles J. W. Internally resonant surface waves in circular cylinder. *J. Fluid. Mech*. 1984. V. 149. P. 1-14.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190

11. Miles J. W. Resonantly forced surface waves in circular cylinder. *J. Fluid. Mech*. 1984. V. 149. P. 15-31.
12. Miles J. W. Parametrically excited solitary waves. *J. Fluid. Mech*. 1984. V. 148. P. 451-460.
13. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. Москва: Мир, 1989. 326 с.
14. Nayfeh A. H. Perturbation methods. New York: Wiley, 1973. 455 p.
15. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Москва: Наука, 1973. 350 с.

References

1. Mikishev, G. N. (1978) Eksperimentalnyie metodyi v dinamike kosmicheskih apparatov. Moscow: Mashinostroenie.
2. Mikishev, G. N., & Rabinovich, B. I. (1971) Dinamika tonkostennyih konstruktsiy s otsekami, soderzhaschimi zhidkost. Moscow: Mashinostroenie.
3. Narimanov, G. S., Dokuchaev, L. V., & Lukovskiy, I. A. (1977) Nelineynaya dinamika letatelnogo apparata s zhidkostyu.Moscow: Mashinostroenie.
4. Kubenko, V. D., Kovalchuk, P. S., & Boyarshina L. G. at al. (1992) Nelineynaya dinamika osesimmetrichnyih tel, nesuschih zhidkost. Kiev: Naukova dumka.
5. Kubenko, V. D., Kovalchuk, P. S., & Krasnopolskaya T. S. (1984) Nelineynoe vzaimodeystvie form izgibnyih kolebaniy tsilindricheskih obolochek. Kiev: Naukova dumka.
6. Kononenko, V. O. (1964) Kolebatelnyie sistemyi s ogranichennyim vozbuzhdeniem. Moscow: Nauka.
7. Krasnopolskaya, T. S., & Lavrov, K. A. (1988) Nelineynyie kolebaniya tsilindricheskoy obolochki s zhidkostyu pri ogranichennom vozbuzhdenii. *Prikladnaya mehanika*, **24**, 11, 67-72.
8. Frolov, K. V., & Krasnopolskaya, T. S. (1987) Effekt Zommerfelda v sistemah bez vnutrennego dempfirovaniya. *Prikladnaya mehanika*, **23**, 12, 19-24.
9. Miles, J. W. (1976) Nonlinear Surface Waves In Closed Basins. *J. Fluid. Mech.,* **75**, 3, 419-448.
10. Miles, J. W. (1984) Internally Resonant Surface Waves in Circular Cylinder. *J. Fluid. Mech.,* **149**, 1-14.
11. Miles, J. W. (1984) Resonantly Forced Surface Waves in Circular Cylinder. *J. Fluid. Mech*., **149**, 15-31.
12. Miles, J.W. (1984) Parametrically Excited Solitary Waves. *J. Fluid. Mech*., **148**, 451-460.
13. Newell, A. C. (1989) Solitons in Mathematics and Physics. Moscow: Mir.
14. Nayfeh, A. H. (1973) Perturbation methods. New York: Wiley.
15. Karpman, V. I. (1973) Nelineynyie volnyi v dispergiruyuschih sredah. Moscow: Nauka.

DOI 10.32782/2618-0340-2018-2-173-190