

УДК 519.65

А. Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили
О.І ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТІОНЕНКО
Херсонський національний технічний університет

ФІЗИЧНО АДЕКВАТНА КОНДЕНСАЦІЯ І МІШАНІ МОДЕЛІ СЕРЕНДИПОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У роботі розглядається серендипова версія квадратично-кубічної інтерполяції на канонічному квадраті ($|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$). У напрямку вісі $0x$ функція змінюється за законом кубічної параболі, у напрямку $0y$ – за законом квадратичної параболі. Лагранжевий прообраз такого елемента має 12 вузлів (два внутрішніх). Як відомо, небажані внутрішні вузли виключають, щоб отримати серендипову модель. Традиційна процедура конденсації (редукції) полягає у складанні і розв'язуванні СЛАР з матрицею 12×12 . Далі, щоб усунути внутрішні вузли, потрібно знайти "рецепт" конденсації, тобто побудувати лінійну залежність внутрішніх параметрів (двох) від граничних (десяти). Відомі приклади свідчать, що математично обґрунтований "рецепт" конденсації не гарантує фізичної адекватності спектра вузлових навантажень серендипових моделей. Так було з біквадратичним елементом ("рецепт" Джордана, 1970) і трикутником третього порядку ("рецепт" Сьярле-Равьяра, 1972). Щоб уникнути аномалій в спектрі вузлових навантажень, потрібно починати з побудови бажаного спектра. Це обернена задача, коли спочатку вибирають бажані інтегральні характеристики, а після цього визначають базис, який реалізує ці характеристики. Саме такий "нематричний" підхід запропоновано в роботі. Важлива властивість нематричної редукції полягає в тому, що вона виключає внутрішні вузли, але зберігає внутрішні параметри. Наявність "прихованих" параметрів дозволяє керувати формоутворенням альтернативних серендипових поверхонь.

Ключові слова: скінченний елемент, лагранжева модель, серендипова модель, мішана модель, квадратично-кубічна інтерполяція, нематричний метод побудови мішаної серендипової моделі (10 вузлів), конденсація.

А. Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили
Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО
Херсонский национальный технический университет

ФИЗИЧЕСКИ АДЕКВАТНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ И СМЕШАННЫЕ МОДЕЛИ СЕРЕНДИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе рассматривается серендиповая версия квадратично-кубической интерполяции на каноническом квадрате ($|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$). В направлении оси $0x$ функция изменяется по закону кубической параболы, в направлении $0y$ – по закону квадратичной параболы. Лагранжев прообраз такого элемента имеет 12 узлов (два внутренних). Как известно, нежелательные внутренние узлы исключают, чтобы получить серендипову модель. Традиционная процедура конденсации (редукции) состоит в составлении и решении СЛАУ с матрицей 12×12 . Далее, чтобы устранить внутренние узлы, необходимо найти "рецепт" конденсации, то есть построить линейную зависимость внутренних параметров (двоих) от граничных (десяти). Известные примеры показывают, что математически обоснованный "рецепт" конденсации не гарантирует физической адекватности спектра узловых нагрузок серендиповых моделей. Так было с биквадратичным элементом ("рецепт" Джордана, 1970) и

<https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-12>

треугольником третьего порядка ("рецепт" Сьярле-Равьяра, 1972). Чтобы избежать аномалий в спектре узловых нагрузок, необходимо начинать с построения желаемого спектра. Это обратная задача, когда вначале выбирают желательные интегральные характеристики, а после этого определяют базис, который реализует эти характеристики. Именно такой "нематричный" подход предложен в работе. Важное свойство нематричной редукции состоит в том, что она исключает внутренние узлы, но сохраняет внутренние параметры. Наличие "скрытых" параметров позволяет руководить формообразованием альтернативных серендиповых поверхностей.

Ключевые слова: конечный элемент, лагранжевая модель, серендиповая модель, смешанная модель, квадратично-кубическая интерполяция, нематричный метод построения смешанной серендиповой модели (10 узлов), конденсация.

A. N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
O.I. LITVINENKO, I.O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

PHYSICALLY ADEQUATE CONDENSATION AND MIXED MODELS OF SERENDIPITY ELEMENTS

Mixed serendipity models are models of finite elements with interpolant, which is represented by polynomials of different degree on each of two coordinates. Usage of such elements allow to coordinate elements of lower order in spheres, where sharp change of characteristics is not envisaged with elements of higher order in other spheres. The serendipity version of quadratically-cubic interpolation on the canonical square ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$) is considered in the work. In the direction of Ox axis the function changes by the law of cubic parabola, in the direction of Oy it changes by the law of quadratic parabola. Lagrange prototype of such element has 12 nodes (two internal). As it is known internal nodes should be turned off in order to get serendipity model. The traditional procedure of condensation (reduction) involves making and solving the system of linear algebraic equations with 12×12 matrix. Then to eliminate internal nodes one should find the 'recipe' of condensation, that is to build linear dependence of internal parameters (two) on boundary ones. Known examples show that mathematically grounded 'recipe' of condensation does not guarantee physical adequateness of variety of nodal loads of serendipity models. It happened to biquadratic element (Jordan 'recipe', 1970) and triangle of third order (Ciarlet-Raviart 'recipe', 1972). In serendipity models loads of angular nodes are negative both on to biquadratic element and bicubic one. It is surprising that mathematically grounded and elegant Tailor method proves this peculiarity of standard serendipity models. To avoid anomalies in the spectrum of nodal loads, one should start with building of the desired spectrum. It is the inverse problem, when one chooses desired integral characteristics first and after that identifies the basis which implements these characteristics. This particular 'non-matrix' approach is given in the work. The important peculiarity of non-matrix reduction lies in the fact that it excludes internal nodes, but keeps internal parameters. Availability of 'hidden' parameters allows to direct the formation of alternative serendipity surfaces. Meaningful opportunities of suggested approach allow always to get natural (physically adequate) spectrum of nodal loads. It is relevant to serendipity models.

Keywords: finite element, Lagrange model, serendipity model, mixed model, quadratically-cubic interpolation, non-matrix method of building mixed serendipity model (10 nodes), condensation

Постановка проблеми

Мішаними моделями називають моделі скінченних елементів з інтерполянтном, що представлений поліномами різних степенів за кожною із двох координат. Використання таких елементів дозволяє узгодити елементи низького порядку в областях, де не передбачається різкої зміни характеристик, з елементами більш високого порядку в інших областях. В теорії методу скінченних елементів недостатньо приділяється увага серендиповим елементам мішаного порядку, хоча вони корисні та ефективні, особливо в комбінації з трикутними елементами в областях з криволінійними границями. Вважається, що оптимальним вибором є поліноми другого і третього порядку. Тому нижче ми розглядаємо модель квадратично-кубічної інтерполяції. Відповідний елемент має 10 вузлів інтерполяції і успадковує (що природно) деякі властивості класичних моделей: біквадратичної інтерполяції (8 вузлів) та бікубічної інтерполяції (12 вузлів). Цікаво, що при схрещуванні класичних моделей відбувається арифметичне усереднення кількості вузлів інтерполяції. На лагранжевих моделях (з внутрішніми вузлами) умова арифметичного усереднення не виконується. Як відомо, лагранжевий елемент біквадратичної інтерполяції має 9 вузлів, елемент бікубічної інтерполяції – 16 вузлів, а мішаний елемент квадратично-кубічної інтерполяції – 12 вузлів. Побудова базисів лагранжевих елементів полягає в узагальненні одновимірної моделі інтерполяції (шляхом прямого перемноження поліномів). На серендипових елементах не все так просто. Серендипові елементи не мають одновимірних аналогів. На нашу думку, це одна із причин того, що інформація про серендипові елементи дуже обмежена. Сьогодні ми знаємо декілька способів конструювання базисів серендипових елементів. У цій роботі ми покажемо один із способів побудови базису (10 поліномів) квадратично-кубічної інтерполяції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Перші моделі серендипових скінченних елементів Q_8 і Q_{12} були отримані підбором і мали рівномірний розподіл вузлів інтерполяції по границі носія [1]. Через 4 роки Тейлор [2] запропонував свій метод конструювання серендипових елементів, який охоплює також і мішані моделі (з нерівномірним розподілом вузлів по границі). Модифіковані (мішані) елементи більш ефективні з обчислювальної точки зору, ніж лагранжеві. Приклад лінійно-квадратичної інтерполяції можна знайти у Сегерлінда [3]. У роботі [4] розглядається лінійно-кубічний серендипів елемент. Квадратично-кубічний елемент є в книзі [5], але він належить до лагранжевого класу (12 вузлів, 2 внутрішніх). Квадратично-кубічний базис серендипового елемента (10 вузлів) можна отримати методом прямого геометричного конструювання [6] або методом Тейлора [2]. На жаль, при цьому ми отримаємо фізично неадекватний спектр вузлових навантажень. Такий результат неважко передбачити, тому що неадекватні спектри ми спостерігаємо і на біквадратичному серендиповому елементі (8 вузлів), і на бікубічному серендиповому елементі (12 вузлів). Нижче запропонована процедура, яка дозволяє отримати фізично адекватну серендипову мішану модель. Процедура передбачає перетворення лагранжевої мішаної моделі (12 вузлів, 2 внутрішніх) у серендипову мішану модель (10 вузлів, без внутрішніх). Це своєрідна конденсація (редукція), яка гарантує додатні навантаження в усіх вузлах. Таким чином, спектр вузлових навантажень можна замовляти.

Мета дослідження

Мета статті – побудувати базис (10 поліномів) квадратично-кубічної інтерполяції шляхом перетворення лагранжевої моделі у серендипову.

Викладення основного матеріалу дослідження

Квадратично-кубічну інтерполяцію будемо розглядати на канонічному квадраті ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$). На рис. 1 показані лагранжева і серендипова схеми розташування вузлів інтерполяції.

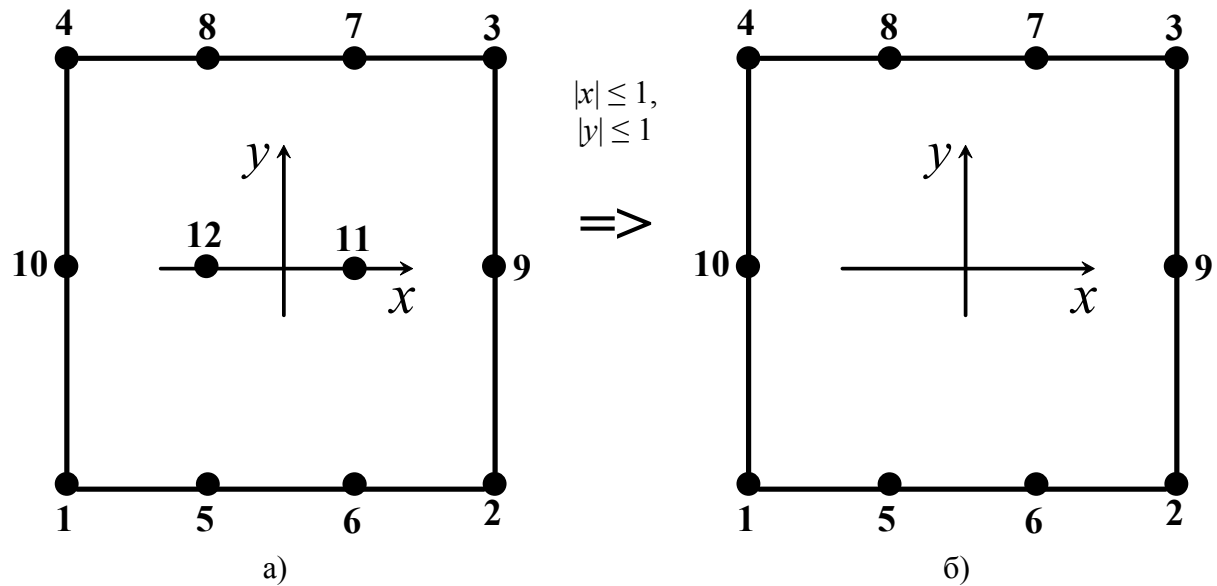


Рис. 1. Елементи квадратично-кубічної інтерполяції:
 а) лагранжева модель; б) серендипова модель.

Лагранжева схема відрізняється від аналогічної в [5] порядком нумерації. Так зручніше зберегти 10 перших вузлів після усунення внутрішніх. Покажемо базис лагранжевої версії:

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{1}{32}(1 + x_i x) y_i y (1 + y_i y) (9x^2 - 1), & i = 1, 2, 3, 4, & \quad x_i = \pm 1, \quad y_i = \pm 1; \\
 N_i &= \frac{9}{32}(1 - x^2) (1 + 9x_i x) y_i y (1 + y_i y), & i = 5, 6, 7, 8, & \quad x_i = \pm \frac{1}{3}, \quad y_i = \pm 1; \\
 N_i &= \frac{1}{16}(1 + x_i x) (9x^2 - 1) (1 - y^2), & i = 9, 10, & \quad x_i = \pm 1, \quad y_i = 0; \\
 N_i &= \frac{9}{16}(1 - x^2) (1 - y^2) (1 + 9x_i x), & i = 11, 12, & \quad x_i = \pm \frac{1}{3}, \quad y_i = \pm 1.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Спектр вузлових навантажень визначається за формулою інтегрального середнього (Ньютона-Котеса):

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dx dy,
 \tag{2}$$

де S – площа області D .

Інтегрування базисних функцій (1) за формулою (2) дає наступний спектр:

$$\gamma_i = \frac{1}{48}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{3}{48}, \quad i = 5, 6, 7, 8; \quad \gamma_i = \frac{4}{48}, \quad i = 9, 10; \quad \gamma_i = \frac{12}{48}, \quad i = 11, 12.$$

Зауважимо, що цей спектр можна визначити інакше, користуючись правилом Сімпсона у напрямку осі ординат і правилом "3/8" у напрямку осі абсцис.

Конденсація (редукція) полягає у правильному розподілі внутрішнього навантаження $\frac{24}{48}$ між граничними вузлами. Неважко зрозуміти, що "рецептів" розподілу безліч. Важливий висновок: задача інтерполяції на серендиповому елементі має нескінченну множину розв'язків. На лагранжевому елементі ця задача розв'язується однозначно (1). Лагранжеві поліноми (1) і серендипові поліноми, що будуть отримані нижче шляхом конденсації, мають однакові властивості (гіпотеза Лагранжа):

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, \quad \sum_{i=1}^{12} N_i(x, y) = 1, \quad (3)$$

де δ_{ik} – символ Кронекера, i – номер функції, k – номер вузла.

Щоб отримати серендипову версію мішаної моделі (10 поліномів) достатньо сконструювати лише три поліноми: кутовий, наприклад $\bar{N}_1(x, y)$, проміжний $\bar{N}_5(x, y)$ і проміжний $\bar{N}_{10}(x, y)$. При цьому внутрішній вузол 12 поповнює граничні вузли 1, 4, 5, 8, 10. Решту граничних вузлів поповнює вузол 11 (рис. 1). Корекція базисних поліномів відбувається за однаковою формулою, наприклад,

$$\bar{N}_1(x, y) = N_1(x, y) + \alpha_i N_{12}(x, y), \quad (4)$$

де $N_1(x, y)$ і $N_{12}(x, y)$ – лагранжеві поліноми, $\bar{N}_1(x, y)$ – серендипів поліном, α_i – частка навантаження, яку передає внутрішній вузол кутовому вузлу. Тепер покажемо три моделі квадратично-кубічної інтерполяції, які отримані шляхом природної конденсації за формулами типу (4).

Перша модель.

Кутовий поліном $N_1(x, y)$ лишаємо у формі Лагранжа, тобто $\alpha_1 = 0$, а $\bar{N}_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y) \cdot y \cdot (1-9x^2)$, аналогічно $\bar{N}_i(x, y)$ для $i = 2, 3, 4$.

Вузли 5, 8 і 10 отримують по $\frac{4}{48}$ від інтегрального середнього вузла 12, тобто

$$\alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_{10} = \frac{1}{3}. \text{ Тепер}$$

$$\bar{N}_5(x, y) = \frac{3}{32}(1-x^2)(1-3x)(1-y)(2-y), \text{ аналогічно } \bar{N}_i(x, y) \text{ для } i = 5, 7, 8;$$

$$\bar{N}_{10}(x, y) = \frac{1}{8}(1-x)(1-3x)(1-y^2), \text{ аналогічно } \bar{N}_9(x, y).$$

Спектр вузлових навантажень має вигляд:

$$\bar{\gamma}_i = \frac{1}{48}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \bar{\gamma}_i = \frac{7}{48}, \quad i = 5, 6, 7, 8; \quad \bar{\gamma}_i = \frac{1}{6}, \quad i = 9, 10.$$

Друга модель. Кутові вузли 1, 4 і проміжний вузол 10 отримують по $\frac{2}{48}$, а проміжні вузли 5 і 8 по $\frac{3}{48}$ від інтегрального середнього вузла 12. В цьому випадку серендипові поліноми мають вигляд:

$$\bar{N}_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-3x)(1-y)(3+3x+4y+6xy), \text{ аналогічно } \bar{N}_i(x, y) \text{ для } i = 2, 3, 4;$$

$$\bar{N}_5(x, y) = \frac{9}{64}(1-x^2)(1-3x)(1-y)^2, \text{ аналогічно } \bar{N}_i(x, y) \text{ для } i = 6, 7, 8;$$

$$\bar{N}_{10}(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-3x)^2(1-y^2), \text{ аналогічно } \bar{N}_9(x, y).$$

Спектр вузлових навантажень:

$$\bar{\gamma}_i = \frac{1}{16}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \bar{\gamma}_i = \frac{1}{8}, \quad i = 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Третя модель. Вузол 10 отримує $\frac{4}{48}$, а вузли 1, 4, 5, 8 отримують по $\frac{2}{48}$ від інтегрального середнього вузла 12. Серендипові поліноми мають вигляд:

$\bar{N}_1(x, y)$ не відрізняється від полінома другої моделі;

$$\bar{N}_5(x, y) = \frac{3}{32}(1-x^2)(1-3x)(1-y)(1-2y), \text{ аналогічно } \bar{N}_i(x, y) \text{ для } i = 6, 7, 8;$$

$$\bar{N}_{10}(x, y) = \frac{1}{64}(1-x)(1-3x)(5-3x)(1-y^2), \text{ аналогічно } \bar{N}_9(x, y).$$

Спектр вузлових навантажень набуває вигляду:

$$\bar{\gamma}_i = \frac{1}{16}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \bar{\gamma}_i = \frac{5}{48}, \quad i = 5, 6, 7, 8; \quad \bar{\gamma}_i = \frac{1}{6}, \quad i = 9, 10.$$

Інтерполянт має вигляд $f(x, y) = \sum_{i=1}^{10} \bar{N}_i(x, y) \cdot f_i$, де f_i – вузлові аплікати.

Варто звернути увагу на конструктивні можливості запропонованого підходу. Тут завжди можна отримати природний (фізично адекватний) спектр вузлових навантажень. Для серендипових моделей це актуально. Нагадаємо, що на серендипових елементах вищих порядків завжди виникають парадоксальні від'ємні "навантаження". Наприклад [1], кутові навантаження від'ємні як на біквдратичному елементі, так і на бікубічному. Дивно, що математично обґрунтований і елегантний метод Тейлора [2] підтверджує цю особливість стандартних серендипових моделей. Ось чому необхідно конструювати альтернативні моделі [7-9].

Висновки

Кожна серендипова модель, у тому числі і мішана, має прообраз у вигляді лагранжевої моделі відповідного порядку. Лагранжева модель, як правило, має фізично адекватний спектр вузлових навантажень. Прихильники класичної конденсації не звертають уваги на цей факт. Класична процедура передбачає складання і розв'язування СЛАР. У даному випадку з матрицею 12×12 . Щоб виключити внутрішні вузли, потрібно знайти лінійну залежність внутрішніх параметрів від граничних. Це зменшує матрицю до 10×10 . Якщо визначник матриці не дорівнює нулю, маємо єдиний розв'язок (жорстка модель) – 10 серендипових поліномів. Альтернативи немає, навіть якщо цей базис реалізує фізично неадекватний спектр. Один із авторів статті [1] професор О. Зенкевич радить змиритися з цим фактом. Ми пропонуємо відмовитися від матричних перетворень. Для серендипових моделей потрібна специфічна конденсація, яка усуває небажані внутрішні вузли, але зберігає внутрішні параметри – мономи алгебраїчного трикутника Паскаля.

Наведені вище приклади переконують, що є простий і надійний спосіб збереження фізичної адекватності спектрів вузлових навантажень. При цьому з'являється можливість підбирати такий спектр, який найкращим чином відповідає умовам задачі, що розв'язується. А це призводить до суттєвого зменшення похибки апроксимації.

Список використаної літератури

1. Ergatoudis I., Irons B. M., Zienkiewich O. C. Curved isoparametric, "quadralateral" elements for finite element analysis. *Int. J. Solids Struct.* 1968. № 4. P. 31–42.
2. Teylor R. L. On completeness of shape functions for finite element analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 1972. Vol. 4. Issue 1. P. 17–22.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: монография. М.: Мир, 1979. 392 с.
4. Александров А. В., Лашеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: монография. М.: Стройиздат, 1983. 488 с.
5. Немчинов Ю. И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов): монография. К.: Будівельник, 1980. 231 с.
6. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ. *Деп. в ВИНТИ*, № 1213. Ивано-Франковск: Ив.-Франк. институт нефти и газа, 1982. 6 с.
7. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. О серендиповых элементах с естественным спектром узловых нагрузок. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2007. Вип.17. С. 97–102 .
8. Astionenko I. O, Litvinenko O. I., Osipova N. V., Tuluchenko G. Ya., Khomchenko A. N. Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *AIP Conference Proceedings Report*. 2016. Vol. 1773. Issue 1. P. 040002-1– 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
9. Литвиненко О. І. Модифікована процедура генерування СЕ змішаного типу. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2013. Вип.2 (47). С. 202–210.

References

1. Ergatoudis, I., Irons, B. M., & Zienkiewich, O. C. (1968) Curved isoparametric, "quadralateral" elements for finite element analysis. *Int. J. Solids Struct.* 4, 31–42.
2. Teylor, R. L. (1972) On completeness of shape functions for finite element analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 4, 1, 17–22.
3. Segerlind, L. (1979) Primenenie metoda konechnyih elementov: monografiya. M.: Mir.

4. Aleksandrov, A. V., Laschenikov, B. Ya., & Shaposhnikov, N. N. (1983) *Stroitel'naya mehanika. Tonkostennyye prostranstvennyye sistemy: monografiya*. M.: Stroyizdat.
5. Nemchinov, Yu. I. (1980) *Raschet prostranstvennykh konstruktsiy (metod konechnykh elementov): monografiya*. K.: BudIvelnik.
6. Homchenko A. N. (1982) *Nekotorye veroyatnostnyye aspekty MKE. Dep. v VINITI, № 1213*. Ivano-Frankovsk: Iv.-Frank. institut nefi i gaza. 6 p.
7. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I., & Homchenko, A. N. (2007) *O serendipoviykh elementah s estestvennyim spektrom uzlovykh nagruzok. Heometrychne ta kompiuterne modeliuvannia*. **17**, 97–102.
8. Astionenko, I. O., Litvinenko, O. I., Osipova, N. V., Tuluchenko, G. Ya., & Khomchenko, A. N. (2016) *Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element*. AIP Conference Proceedings Report. 1773, 1, 040002-1– 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
9. Lytvynenko, O. I. (2013) *Modyfikovana protsedura heneruvannia SE zmishanoho typu. Visnyk Khersonskoho Natsionalnoho Tekhnichnoho Universytetu*. **2** (47), 202–210.