УДК 519.64

А. Н. ХОМЧЕНКО
Чорноморський національний університет імені Петра Могили
Ю.М. БАРДАЧОВ, О.І ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТІОНЕНКО
Херсонський національний технічний університет

МЕТОД ІНТЕРПРЕТАЦІЙ ТА КВАДРАТУРИ ГАУССА

Будь-яка математична модель насправді є інтерпретацією природного, технологічного, розумового процесу математичною мовою. В наукових дослідженнях метод інтерпретацій зустрічається на кожному кроці. Достатньо нагадати про теорію графів, аналітичну геометрію, диференціальні рівняння, перетворення Лапласа, швидке перетворення Фур'є, теорію кодування тощо. В методі інтерпретацій, як правило, задача однієї області математики інтерпретується в іншій області, де вона або спрощується, або більше відповідає нашій інтуїції, або дозволяє використання інших підходів і т. ін. Ми звернули увагу на квадратури Гаусса не тільки тому, що саме вони використовуються в сучасних стандартних програмах інтегрування. Ми переконалися, що в квадратурах Гаусса є певний дидактичний потенціал, який може бути корисним для тих, хто вчиться і навчає математичному моделюванню. У роботі розглядається проста квадратурна формула Гаусса (два вузли інтегрування). Наведено приклади задач, в яких існує латентний зв'язок із квадратурою Гаусса. Ці задачі – своєрідна комбінація простоти і нетривіальності, в якій читач може знайти щось цікаве на свій смак. Природно, що кожна задача формулюється на двох "канонічних" інтервалах: $[-1, 1]$ *і* $[0, 1]$*, щоб охопити дві версії квадратури: Гаусса-Лежандра і Гаусса-Бернуллі.*

Ключові слова: інтерпретація, квадратура Гаусса, поліном Бернуллі, поліном Лежандра, інтерполяція за Ермітом, поліном Кунса, рівняння Пауссона.

А. Н. ХОМЧЕНКО
Черноморский национальный университет имени Петра Могилы
Ю.Н. БАРДАЧЕВ, Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО
Херсонский национальный технический университет

МЕТОД ИНТЕРПРЕТАЦИЙ И КВАДРАТУРЫ ГАУССА

Любая математическая модель на самом деле является интерпретацией природного, технологического, умственного процесса математическим языком. В научных исследованиях метод интерпретаций встречается на каждом шагу. Достаточно напомнить о теории графов, аналитическую геометрию, дифференциальные уравнения, преобразования Лапласа, быстрое преобразование Фурье, теорию кодирования и т.д. В методе интерпретаций, как правило, задача одной области математики интерпретируется в другой области, где она или упрощается, или больше соответствует нашей интуиции, или позволяет использование других подходов и тому подобное. Мы обратили внимание на квадратуры Гаусса не только потому, что именно они используются в современных стандартных программах интегрирования. Мы убедились, что в квадратурах Гаусса есть определенный дидактический потенциал, который может быть полезным для тех, кто учится и обучает математическому моделированию. В работе рассматривается простая квадратурная формула Гаусса (два узла интегрирования). Приведены примеры задач, в которых существует латентная связь с квадратурой Гаусса. Эти задачи – своеобразная комбинация простоты и нетривиальности, в

https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-13

которой читатель может найти что-то интересное на свой вкус. Естественно, что каждая задача формулируется на двух «канонических» интервалах: $[-1,\ 1]$ *і* $[0,\ 1]$, *чтобы охватить две версии квадратуры: Гаусса-Лежандра и Гаусса-Бернулли.*

Ключевые слова: интерпретация, квадратура Гаусса, полином Бернулли, полином Лежандра, интерполяция по Эрмиту, полином Кунса, уравнение Пауссона.

A. N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
Yu.M. BARDACHOV, O.I. LYTVYNENKO, I.O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

INTERPRETATIONS METHOD AND GAUSSIAN QUADRATURES

Any mathematical model is the interpretation of natural, technological, mental process in mathematical language. In scientific researches one faces interpretations method at every step. It is sufficient to mention the graph theory, analytic geometry, differential equations, Laplace transformation, Fourier transformation, encoding theory etc. As a rule in the interpretations method the problem of one branch of mathematics is interpreted in other branch, where it is either simplified or better responds to our intuition or allows usage of other approaches etc. We paid our attention to Gaussian quadratures not only because they are used in modern standard programs of integration. We made sure that there is certain didactic potential in Gaussian quadratures, which can be useful for those who study and teach mathematical modelling. We have selected problems in which nodes of Gaussian quadrature appear unexpectedly as a result of received solution. Traditionally the search of nodes and weighting factors of Gaussian quadrature involves making and solving the system of (non-linear!) algebraic equations, while simple mathematical folklore requires more 'trivial' proves which are good for simple understanding. Simple quadrature formula of Gauss (two nodes of integration) has been reviewed in the work. Examples of problems which contain latent connection to Gaussian quadrature are given. These problems are peculiar combination of simplicity and non-triviality in which a reader can find something interesting to his/her taste. It is natural that every problem is formulated on two 'canonic' intervals: $[-1,\ 1]$ *and* $[0,\ 1]$, *to cover two versions of quadrature: Gauss-Legendre and Gauss-Bernoulli ones. Reviewed examples give new subjects for reflections and observations. It is worth noting that approaches suggested in the work has been successfully tested for 'clearness + briefness + convenience' among students of higher education institutions. We agree with the point of view of Lithuanian mathematician R. Kashuba who thinks that interpolations method contributes to spread of democracy because it improves the ability to change point of view.*

Keywords: interpretation, Gaussian quadrature, Bernoulli polynomial, Legendre polynomial, Hermite interpolation, Koons polynomial, Poisson equations.

Постановка проблеми

Ми підібрали задачі, в яких вузли квадратури Гаусса з'являються несподівано, як наслідок отриманого розв'язку. Традиційно пошук вузлів і вагових коефіцієнтів квадратури Гаусса полягає у складанні та розв'язуванні системи (нелінійних!) алгебраїчних рівнянь, в той час як простий математичний фольклор вимагає більш "тривіальних" доведень, що придатні для простого розуміння.

Ми здійснюємо пошуки нетрадиційних шляхів визначення координат вузлів інтегрування x_1 та x_2 для наступних формул:

https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-13

квадратура Гаусса-Лежандра $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(x_1)+f(x_2)$. (1)

квадратура Гаусса-Бернуллі $\int_{0}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$. (2)

Тут вузли інтегрування співпадають з нулями полінома Лежандра (1) і полінома Бернуллі (2) другого порядку. Ці квадратури є суттєвим удосконаленням правила трапецій, яке відоме з часів Ньютона і Котеса. На відміну від формул Ньютона-Котеса, формули (1), (2) точно інтегрують мономи 1, x, x^2, x^3. Узагальнені формули Гаусса використовують чотири вузли на квадратному шаблоні і вісім вузлів на кубічному. Варто зауважити, що запропоновані в роботі підходи успішно пройшли тест на "зрозумілість + стислість + зручність" серед студентів вищої школи.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Про дидактичні можливості метода інтерпретацій просто, наочно і переконливо написали автори [1]. У роботі [2] наведено характерний приклад ймовірнісної інтерпретації кубічних поліномів Ерміта-Кунса. Видатний український математик академік А. В. Скороход завжди підкріплював визначну роль ймовірнісних інтерпретацій, особливо у неймовірнісних задачах [3]. Властивості поліномів Ерміта-Кунса і приклади їх практичного застосування наведені в [4, 5]. Автор книги [6] розглядає конкретну задачу конструювання квадратури Гаусса-Лежандра з двома вузлами. Він зауважує, що систему рівнянь 4×4 розв’язати можна, незважаючи на присутність в системі нелінійних рівнянь. Але, посилаючись на специфічні труднощі визначення координат вузлів інтегрування, він просто використовує відомі нулі полінома Лежандра другого порядку. Теореми, що задіяні в основній частині статті, можна знайти у будь-якому підручнику з математичного аналізу, наприклад, в [7].

Мета дослідження

Мета – підібрати задачі (на зразок [2]), у розв’язках яких прихована інформація про квадратуру Гаусса-Лежандра і Гаусса-Бернуллі (два вузли). На наш погляд, ці задачі спрощують пошук вузлів інтегрування і збагачують перелік різноманітних інтерпретацій. Розглянуті приклади дають нові теми для роздумів і спостережень.

Викладення основного матеріалу дослідження

У цій роботі ми розглядаємо квадратуру Гаусса (1–2), що спирається на поліноми Бернуллі (Лежандра) другого порядку.

Поліном Бернуллі $B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$, [0,1], з нулями в точках $x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$, $x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$; поліном Лежандра $P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$, [−1, 1], з нулями в точках $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Таким чином, маємо першу інтерпретацію: вузли інтегрування формул Гаусса-Бернуллі (Лежандра) інтерпретуються як нулі відповідного полінома і навпаки. Інші інтерпретації народжуються в наступних задачах. Всі формулювання спрямовані на версію Бернуллі. Між нулями полінома Лежандра $\overline{x_i}$ і полінома Бернуллі існує проста залежність: $\overline{x_i}=2x_i-1$.

https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-13

Задача 1. На кривій $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-4x+2}$, $0 \le x \le 1$, знайти точки, в яких дотична утворює з віссю Ox найбільший за абсолютною величиною кут.

Графік $f(x)$ показано на рис. 1.

Когнітивно-графічний аналіз поведінки дотичної дає відповідь $f''(x)=0$, тобто $x_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $x_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Друга інтерпретація: абсциси точок перегину кривої $f(x)$ (рис. 1) інтерпретуються як нулі полінома Бернуллі і навпаки.

Задача 2. На кубічній параболі Кунса (рис. 2) знайти точки, в яких виконується теорема Лагранжа.

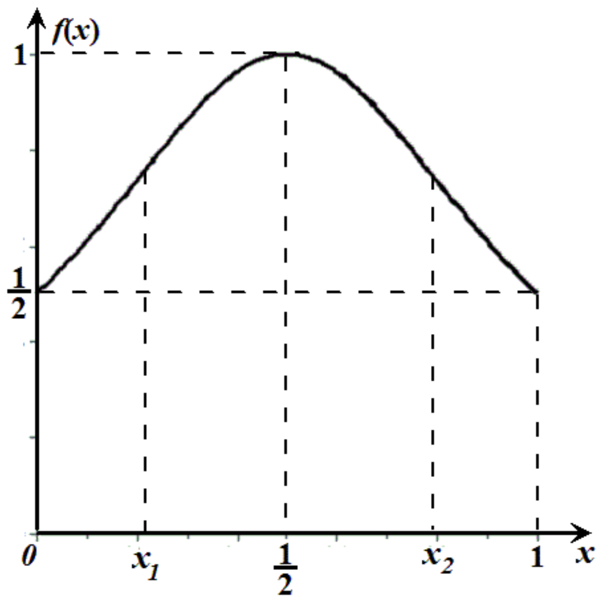

Рис. 1.

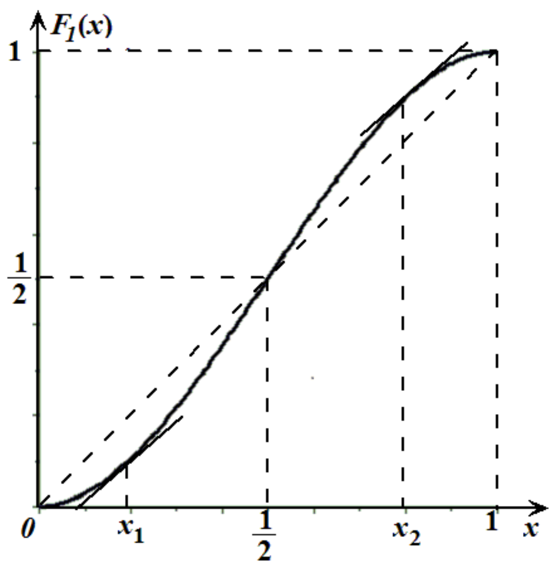

Рис. 2.

Криві Кунса – це окремий випадок інтерполяції за Ермітом. На інтервалі [0;1] існують дві симетричні криві $F_0(x)$ і $F_1(x)$ [4–5]. Загальна форма функції $F_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$. Конкретизація параметрів a_i здійснюється за допомогою граничних умов: $F_1(0)=0$, $F_1(1)=1$, $F_1'(0)=0$, $F_1'(1)=0$. Розв'язок СЛАР 4×4 дає параболу:

$$F_1(x)=-2x^3+3x^2.$$

Теорема Лагранжа $\dfrac{F_1(b)-F_1(a)}{b-a}=F_1'(c)$, де $a<c<b$, дає відповідь $c_1=x_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $c_2=x_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Третя інтерпретація: абсциси точок кривої Кунса, в яких виконується теорема Лагранжа, інтерпретуються як нулі полінома Бернуллі і навпаки (рис. 2).

Зауваження. $F_1(x)$ можна розглядати як закон розподілу ймовірностей [8-9].

https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-13

Задача 3. Знайти точки перетину графіка щільності рівномірного розподілу ймовірностей з графіком щільності $\varphi_1(x) = F_1'(x)$ (рис. 3). Для версії Бернуллі достатньо розв'язати рівняння: $-6x^2 + 6x = 1$. Як бачимо, це стандартне рівняння $B_2(x) = 0$, тому $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Четверта інтерпретація: абсциси точок перетину графіка щільності рівномірного розподілу ймовірностей з графіком щільності "закону Кунса" інтерпретуються як нулі полінома Бернуллі.

Задача 4. Тут розглядається гранична задача для одновимірного рівняння Пуассона із спеціальною правою частиною і нульовими граничними умовами:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -1, \text{ Г.У. } f(0) = 0, \; f(1) = 0.$$

Якщо проінтегрувати двічі диференціальне рівняння і скористатися Г.У., отримаємо $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - x^2\right)$ (рис. 4). Читач може впізнати діаметральний переріз круглої мембрани із експериментів Прандтля, або хронометричну криву із задачі Дуба про одновимірні випадкові блукання. В цих задачах важливу роль відіграє середнє інтегральне: $\overline{f} = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{12}$. Вершина параболи знаходиться у точці $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$.

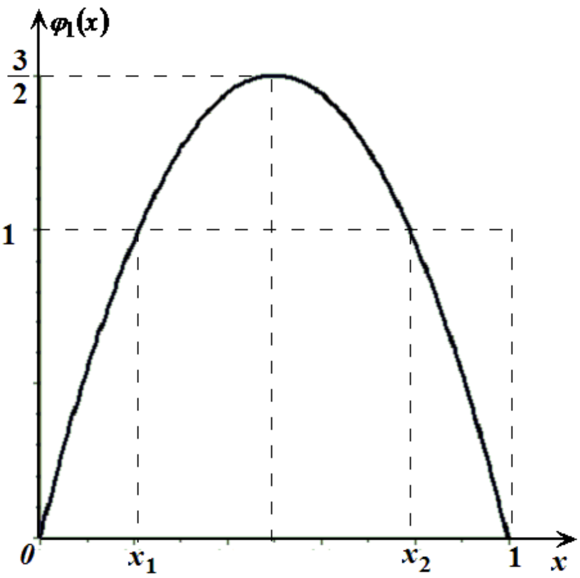

Рис. 3.

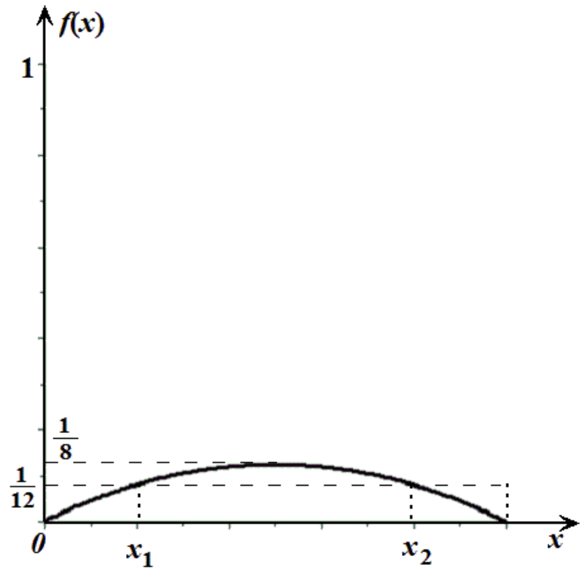

Рис. 4.

Точки середнього значення кривої Прандтля-Дуба знаходимо із рівняння $-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = \frac{1}{12}$. Звідси $B_2(x) = 0$, $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

П'ята інтерпретація: абсциси точок середнього інтегрального значення $f(x)$ інтерпретуються як нулі полінома Бернуллі.

https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-13

Висновки

Математика, як правило, дає більше, ніж від неї очікують. Ми погоджуємося з думкою литовського математика Р. Кашуби [1], який вважає, що метод інтерпретацій сприяє розповсюдженню демократії, тому що розвиває здібність міняти точку зору. Розглянуті задачі дають нові теми для роздумів і спостережень. В квадратурах Гаусса є певний дидактичний потенціал, який може бути корисним для тих, хто вчиться і навчає математичному моделюванню.

Список використаної літератури

1. Анджанс А., Бонка Д. Метод интрепретаций. *Квант*. М.: Бюро Квантум, 2009. № 1. С. 15–18.
2. Хомченко А. Н., Козуб Н. А. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность. *Проблеми інформаційних технологій*. Херсон: ХНТУ, 2009. Вип. 5. С. 145–148.
3. Скороход А. В. Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках. *У світі математики.* К.: ТВіМС, 1997. Т. 3. Вип. 2. С. 2–4.
4. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций: монография. Л. : Судостроение, 1997. 279 с.
5. Жермен-Лакур П., Жорж Л., Пистр Ф., Безье П. Математика и САПР: монография. М.: Мир, 1989. Кн. 2. 264 с.
6. Shoup T. E. A Practical Guide to Computer Methods for Engineers. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1979. 235 p.
7. Шипачев В. С. Высшая математика: учебн. пособ. М.: Высшая школа, 1985. 471 с.
8. Хомченко А. Н. Интерполяционные функции Кунса и распределения вероятностей. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2013. Вип. 2 (47). С. 363–366.
9. Хомченко А. Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Коноїди Ерміта-Кунса та їх властивості. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. Вип. 3 (66). Т.1. С.193-198.

References

1. Andzhans, A., & Bonka, D. (2009) Metod intrepretatsiy. *Kvant*. M.: Byuro Kvantum. **1**, 15–18.
2. Khomchenko, A. N., & Kozub, N. A. (2009) Interpolyatsiya po Kunsu i Geometricheskaya Veroyatnost. *Problemi Informatsiynyh Tehnologiy*. Kherson: KhNTU, **5**, 145–148.
3. Skorokhod, A. V. (1997) Osoblyvyi Kharakter Teorii Ymovirnostei v Matematychnykh Naukakh. *U Sviti Matematyky*. K.: TViMS. **3**, 2, 2–4.
4. Postnov, V. A. (1997) Chislennyie Metodyi Rascheta Sudovyih Konstruktsiy: Monografiya. L.: Sudostroenie.
5. Zhermen-Lakur, P., Zhorzh, L., Pistr, F., & Beze, P. (1989) Matematika i SAPR: Monografiya. M.: Mir. Kn. 2.
6. Shoup, T. E. (1979) A Practical Guide to Computer Methods for Engineers. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.
7. Shipachev, V. S. (1985) Vyisshaya Matematika: uchebn. posob. M.: Vyisshaya shkola.
8. Khomchenko, A. N. (2013) Interpolyatsionnyie Funktsii Kunsa i Raspredeleniya Veroyatnostey. *Visnyk Khersonskoho Natsionalnoho Tekhnichnoho Universytetu*. **2** (47), 363–366.
9. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O. I., & Astionenko, I.O. (2018) Konoidy Ermita-Kunsa ta yikh vlastyvosti. *Visnyk Khersonskoho Natsionalnoho Tekhnichnoho Universytetu*. 3 (66), T. 1, 193–198.

https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-13