

УДК 519.6

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Г.Є. МАКСИМУК  
Херсонський національний технічний університет

### ПРО МЕЖИ ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ

*Метод точкових джерел (або метод фундаментальних розв'язків у англомовній літературі), який ввели у 1963 році грузинські математики М.О. Алексидзе та В.Д. Купрадзе, типовим застосуванням має розв'язання граничних задач різних типів, для диференціальних рівнянь яких відомі фундаментальні розв'язки. За час існування методу теоретично доведена його збіжність за певних умов в областях довільної геометричної форми. Проте огляд літературних джерел свідчить, що практичне застосування методу здійснювалося дослідниками методу виключно у задачах з областями простої геометричної форми. Здебільшого це пояснюється необхідністю мати аналітичний розв'язок задачі для проведення оцінок точності різноманітних модифікацій методу точкових джерел.*

*У даній роботі проведено порівняння обчислювальних можливостей методу точкових джерел і методу скінченних елементів на двох тестових задачах. Областю моделювання стаціонарного температурного поля в першій задачі є традиційний прямокутник. У другій задачі прямокутник на двох протилежних сторонах має вирізи різної геометричної форми. Граничні умови в обох задачах збережені однаковими. При розв'язанні основної системи лінійних алгебраїчних рівнянь у методі точкових джерел застосовуються регуляризація за А.М. Тихоновим та аналіз диференціальних властивостей  $L$ -кривої для знаходження значення параметра регуляризації.*

*Показано, що метод точкових джерел значно поступається в точності методу скінченних елементів в областях складної геометричної форми.*

*Ключові слова: метод точкових джерел, метод скінченних елементів, фундаментальні розв'язки.*

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, А.Е. МАКСИМУК  
Херсонский национальный технический университет

### О ГРАНИЦАХ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

*Метод точечных источников (или метод фундаментальных решений в англоязычной литературе), который ввели в 1963 году грузинские математики М.А. Алексидзе и В.Д. Купрадзе, типичным использованием имеет решение граничных задач различных типов для дифференциальных уравнений, для которых известны фундаментальные решения. За время существования метода теоретически доказана его сходимость при ряде ограничений в областях произвольной геометрической формы. Однако обзор литературных источников показывает, что практическое применение метода осуществлялось его исследователями исключительно в задачах с областями простой геометрической формы. В основном это объясняется необходимостью иметь аналитическое решение задачи для проведения оценок точности различных модификаций метода точечных источников.*

<https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-16>

*В данной работе проведено сравнение вычислительных возможностей метода точечных источников и метода конечных элементов. Областью моделирования стационарного температурного поля в первой задаче является традиционный прямоугольник. Во второй задаче прямоугольник на двух противоположных сторонах имеет вырезы разной геометрической формы. Граничные условия в обеих задачах сохранены одинаковыми. При решении основной системы линейных алгебраических уравнений в методе точечных источников используются регуляризация по А.Н. Тихонову и анализ дифференциальных свойств L-кривой для нахождения значения параметра регуляризации.*

*Показано, что метод точечных источников значительно уступает в точности методу конечных элементов в областях сложной геометрической формы.*

*Ключевые слова: метод точечных источников, метод конечных элементов, фундаментальные решения.*

H.Ya. TULUCHENKO, H.Ye. MAKSYMUK  
Kherson National Technical University

### ABOUT PRACTICAL APPLICATIONS FOR METHODS OF POINT SOURCES

*The method of point sources (or the method of fundamental solutions in the English-language literature), which was introduced in 1963 by Georgian mathematicians M.A. Aleksidze and V.D. Kupradze, in typical use, has a solution of various types of boundary problems for differential equations for which fundamental solutions are known. During the lifetime of the method, its convergence was theoretically proved under a series of restrictions in domains of arbitrary geometric shape. However, a review of literary sources shows that the practical application of the method was carried out by its researchers exclusively in problems with domains of simple geometric shape. This is mainly due to the need to have an analytical solution to the problem for assessing the accuracy of various modifications of the point source method.*

*This paper compares the computational capabilities of the point source method and the finite element method. The domain of simulation of the stationary temperature field in the first problem is the traditional rectangle. In the second problem, the rectangle on two opposite sides has cuts of different geometric shapes. The boundary conditions are kept the same. Convective heat exchange is observed at first boundary of the domain, the temperature of the second boundary is kept constant, and adiabaticity conditions are satisfied at the other boundaries of the domain. In solving the basic system of linear algebraic equations in the method of point sources, regularization according to A.N. Tikhonov and the analysis of the differential properties of the L-curve to find the value of the regularization parameter are used. Computational experiments have shown that even for a rectangular domain, the condition number of this system of equations varies non-monotonously depending on the radius of the circle on which fictitious sources are placed.*

*It is shown that the point source method is significantly inferior in accuracy to the finite element method in domains of complex geometric shape. The continuation of research is connected with the construction of approximate conformal mappings of a given domain onto domain which is bounded by the contour of fictitious sources.*

*Keywords: fundamental solution method, finite element method, fundamental solution.*

### Постановка проблеми

Метод точкових джерел (або метод фундаментальних розв'язків у англійській літературі) позиціонується своїми розробниками, як такий, що може скласти

конкуренцію методу скінченних елементів у областях складної геометричної форми [1]. Проте більшість прикладів його використання стосуються областей простої геометричної форми, зокрема, прямокутників [2–5]. Це пояснюється необхідністю мати точний розв’язок задачі для оцінювання точності розв’язка, який отримується методом точкових джерел.

У той же час залишаються неформалізованими процедури вибору точок колокації на границі досліджуваної області, форми контуру фіктивних джерел та розміщення точок на ньому. Питання їх оптимального вибору до цього часу є нерозв’язаним.

Також негативно впливає на точність та адекватність розв’язків, які отримані методом точкових джерел, погана обумовленість системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до розв’язання якої в цьому методі зводиться розв’язання граничної задачі. Очевидно, що в цьому випадку є необхідним застосування методу регуляризації за А.М. Тихоновим. Для встановлення значення параметра регуляризації, що, як відомо, є окремою задачею, досліджують диференціальні характеристики  $L$ -кривої, яка будується спеціальним чином [6–7]. Проте, як показують власні обчислювальні експерименти, вказана крива не завжди має описаний у літературі профіль, що робить її непридатною для знаходження значення параметра регуляризації.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Приклади застосування методу точкових джерел до розв’язання граничних задач різних типів можна знайти в роботах [1–5] та багатьох інших.

Позитивний вплив застосування методу регуляризації за А.М. Тихоновим на точність методу точкових джерел проілюстрований в роботах [6–7].

Тестова задача, що використовується в даному дослідженні, запозичена з книги [8], в якій вона розв’язується методом скінченних елементів.

#### Мета дослідження

Метою даної роботи є проведення порівняльного аналізу точності розв’язків тестової задачі, які отримані методом точкових джерел та методом скінченних елементів.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо задачу про стаціонарний теплообмін у двовимірній області, яка є перерізом (рис. 1) перфорованої сталеві плити значної довжини [8, С. 56–63].

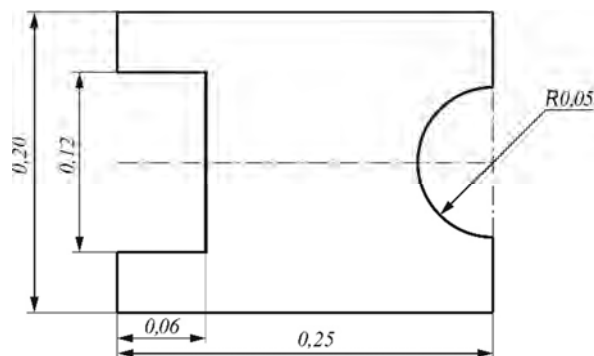


Рис. 1. Геометрична модель розрахункової області.

Введемо позначення:

$$D_{xx} = D_{yy} = 45 \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C} \text{ – коефіцієнти теплопровідності матеріалу плити;}$$

$h = 25 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$  – коефіцієнт конвективної тепловіддачі;

$T_\infty = 600^\circ C$  – температура середовища, яке гріє, над верхньою поверхнею плити;

$T_0 = 50^\circ C$  – температура нижньої поверхні плити;

$a=0,25$  м і  $b=0,20$  м – ширина і висота плити.

**Тестова задача 1.** Розв’язати граничну задачу для рівняння Лапласа:

$$D_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

з граничними умовами:

$$D_{yy} \frac{dT}{dy} \Big|_{y=b} + h \left( T \Big|_{y=b} - T_\infty \right) = 0 \text{ – на верхній границі області;}$$

$$T(x; y) \Big|_{y=0} = T_0 \text{ – на нижній границі ;} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ – адіабатичні умови на всіх інших границях області.}$$

**Тестова задача 2.** Спочатку розв’яжемо спрощену задачу, яка відрізняється від задачі (1–2) тільки досліджуваною областю. В другій задачі область  $\Omega = [0; a] \times [0; b]$  є прямокутником, який містить весь переріз плити, включаючи вирізи.

**Розв’язання задачі 2.** Прямокутна область дозволяє застосувати до розв’язання задачі аналітичний метод відокремлення змінних – метод Фур’є.

Будемо шукати наближений розв’язок задачі (1–2) для прямокутної області у вигляді ряду:

$$\tilde{T}(x; y) = \frac{Y_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (3)$$

Очевидно, що при цьому задовольняються граничні умови на вертикальних сторонах, коли  $x = 0$  та  $x = a$ .

Нескладний якісний аналіз наближеного розв’язку  $\tilde{T}(x; y)$  показує, що всі функції  $Y_n(y) = 0$ , коли  $n = \overline{1; \infty}$ . Отже, ця задача має точний розв’язок, який не залежить від змінної  $x$ :

$$T(x; y) = A_0 y + B_0. \quad (4)$$

Підставивши (4) до граничних умов (2), отримуємо:

$$\begin{cases} A_0 = \frac{h(T_\infty - T_0)}{D_{yy} + hb} \\ B_0 = T_0 \end{cases} \quad (5)$$

Тоді точний розв'язок граничної задачі (1–2), має вигляд (рис. 2):

$$T(x; y) = \frac{h(T_\infty - T_0)}{D_{yy} + hb} \cdot y + T_0.$$

На верхній границі області, коли  $y = b$ , спостерігається температура:

$$T(x; b) = \frac{h \cdot (T_\infty - T_0)}{D_{yy} + hb} \cdot b + T_0. \quad (6)$$

Запишемо вираз (6) у більш зручній для якісного аналізу формі:

$$T(x; b) = T_\infty - \frac{D_{yy} \cdot (T_\infty - T_0)}{D_{yy} + hb}.$$

Тоді при заданих числових значеннях коефіцієнтів на верхній границі області спостерігається температура:  $T(x; b) = 105^\circ \text{C}$  (рис. 2).

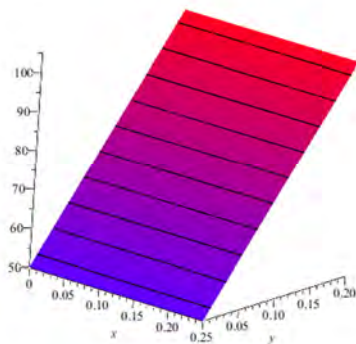


Рис. 2. Графік точного розв'язку (6) граничної задачі (1–2) для прямокутної області.

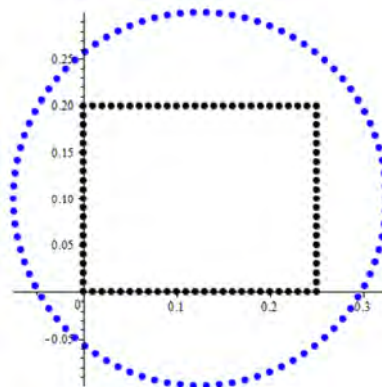


Рис. 3. Розміщення точок колокації та точок фіктивних джерел у методі точкових джерел.

Застосуємо до розв'язання досліджуваної задачі метод точкових джерел у традиційній його реалізації, тобто при рівномірному розміщенні точок колокації і точок фіктивних джерел та при використанні кола в якості контуру фіктивних джерел (рис. 3).

Розмістимо рівномірно на периметрі прямокутної області  $N$  точок колокації  $r_i(x_i^C; y_i^C)$ ,  $i = \overline{1; N}$ . На колі радіусу  $R$  розмістимо таку ж кількість точок фіктивних джерел  $(x_j^R; y_j^R)$ ,  $j = \overline{1; N}$ . Розв'язок задачі (1–2) будемо шукати у вигляді частинної суми ряду:

$$\tilde{T}(x; y) \approx \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x; y), \quad (7)$$

де  $\varphi_j(x; y) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_j^R)^2 + (y - y_j^R)^2}}$  – фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа (1), який асоційований з фіктивним джерелом, яке розміщене в точці з координатами  $R_j(x_j^R; y_j^R)$ ,  $j = \overline{1; N}$ .

Для знаходження невідомих коефіцієнтів  $a_j$  з розвинення (7) складемо систему рівнянь [1]:

$$\sum_{j=1}^N a_j l\varphi_j(r_i; R_j) = \psi(r_i), \quad i = \overline{1; N}, \quad (8)$$

де оператор  $lT(x; y) \Big|_{\partial\Omega} = \psi(x; y)$  описує задані граничні умови (2).

Матрицю системи (8) позначимо  $G$ . Число обумовленості матриці  $G$  за нормою метрики  $L_2$  позначимо  $\text{Cond } G$ .

Для оцінки точності отримуваних розв’язків використаємо норму:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{S_\Omega} \cdot \iint_{\Omega} (T(x; y) - \tilde{T}(x; y))^2 dx dy}$$

для вимірних на компакт  $\Omega = [0; a] \times [0; b]$  функцій з простору  $L_2(\Omega)$ , для яких підінтегральна функція з (7) є інтегрованою за Лебегом та іншу норму:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\max_{\Omega} (T(x; y) - \tilde{T}(x; y))^2}$$

для неперервних на компакт  $\Omega = [0; a] \times [0; b]$  функцій простору  $C(\Omega)$ .

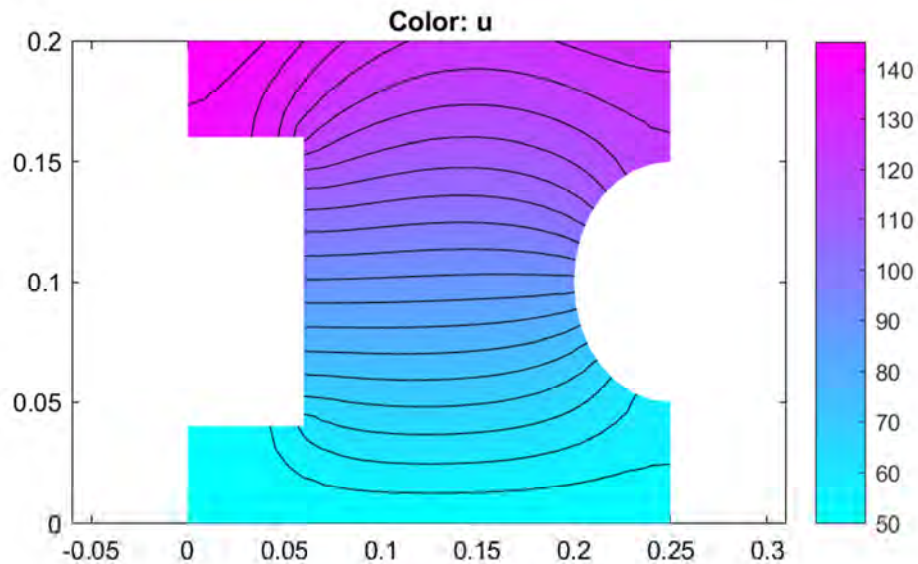
Таблиця 1

Характеристики розв’язку задачі 2 для прямокутної області

Радіус, $R$ , м	40 вузлів колокації			90 вузлів колокації		
	Cond $G$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	Cond $G$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
0.20	$4,7 \cdot 10^7$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{14}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-6}$
0.25	$1,3 \cdot 10^9$	$9,0 \cdot 10^{-8}$	$5,7 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{14}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$
0.30	$2,5 \cdot 10^{10}$	$1,8 \cdot 10^{-9}$	$3,1 \cdot 10^{-8}$	$6,8 \cdot 10^{14}$	$4,4 \cdot 10^{-8}$	$5,7 \cdot 10^{-7}$
0.35	$3,4 \cdot 10^{11}$	$8,8 \cdot 10^{-8}$	$9,1 \cdot 10^{-8}$	$8,9 \cdot 10^{13}$	$4,0 \cdot 10^{-9}$	$5,2 \cdot 10^{-8}$
0.40	$9,6 \cdot 10^{12}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{14}$	$3,2 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$
0.45	$4,1 \cdot 10^{12}$	$9,9 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{14}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-8}$
0.50	$1,6 \cdot 10^{13}$	$5,0 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$6,3 \cdot 10^{14}$	$4,9 \cdot 10^{-8}$	$5,2 \cdot 10^{-8}$

Дані табл. 1, з одного боку, показують, що методом точкових джерел можуть бути отримані розв'язки високої точності. З іншого боку, залежності числа обумовленості матриці системи рівнянь методу точкових джерел, середньоквадратична похибка та максимальна похибка від радіуса кола фіктивних джерел не є монотонними. Очевидно, що метод точкових джерел потребує подальшої формалізації та обґрунтування.

**Розв'язання задачі 1.** Для розв'язання тестової задачі 1 методом скінченних елементів використаємо пакет PDETool з системи комп'ютерної математики MATLAB (рис. 4).



**Рис. 4.** Графік розв'язку граничної задачі (1–2) для перерізу плити за допомогою PDETool MATLAB.

Максимальна температура спостерігається у верхньому лівому куті  $T(0;b) = 146,0^\circ C$ .

Для реалізації методу точкових джерел розмістимо рівномірно на границі перерізу плити (рис. 1) рівномірно  $N=108$  точок колокації (на прямолінійних ділянках границі області з кроком 0,01 м) і таку ж кількість точок фіктивних джерел, на колі радіусу  $R=2$  м, яке охоплює досліджувану область. Початкове (без регуляризації) розв'язання системи, яка аналогічна системі (8), приводить до неадекватного фізичному змісту задачі наближеного розв'язку (рис. 5а).

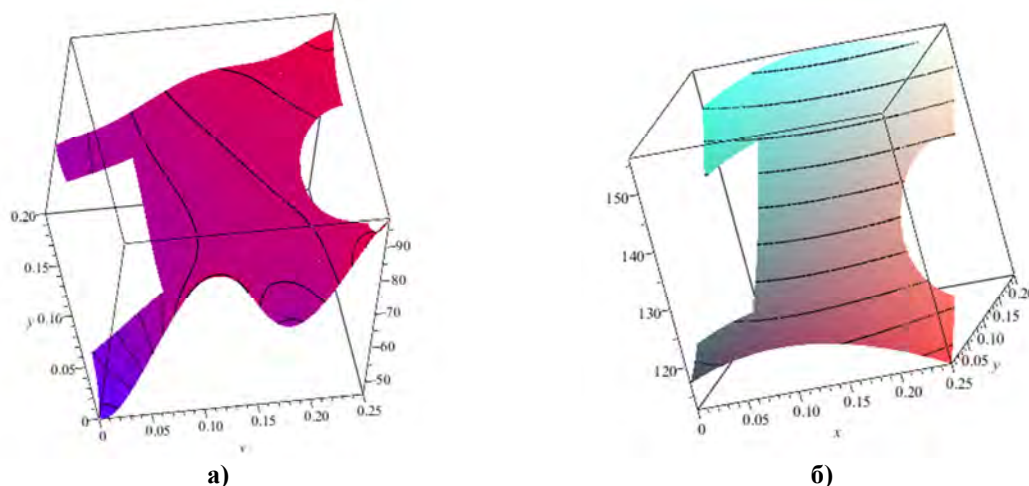


Рис. 5. Графік розв'язку граничної задачі (1–2) для перерізу плити методом точкових джерел: а) до регуляризації; б) після регуляризації.

Регуляризацію системи виду (8) виконаємо за методом А.М. Тихонова:

$$(G + \lambda E)\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (9)$$

де  $G$  – матриця системи виду (8);  $E$  – одинична матриця відповідної вимірності;  $\mathbf{a}$  – вектор шуканих коефіцієнтів  $a_j$ ;  $\mathbf{b}$  – вектор значень відомих функцій  $\psi(r_i)$  з правих частин граничних умов у точках колокації.

Для знаходження значення параметра регуляризації  $\lambda$  протабулюємо координати точок  $L$ -кривої, яка параметрично задається формулами [6–7]:

$$\begin{cases} x = \ln\|(G + \lambda E)\mathbf{a} - \mathbf{b}\|; \\ y = \ln\|\mathbf{a}\|; \end{cases} \quad (10)$$

де  $\|\cdot\|$  – дискретний аналог норми метрики простору  $L_2(\Omega)$ ,

З вказаними числовими даними задачі 1 графік  $L$ -кривої (10) наведено на рис. 6. Графік кривини  $L$ -кривої (10) наведено на рис. 7. При цьому для знаходження значень похідних в точках табуляції використані їх кінцеві аналоги. Кривина  $L$ -кривої досягає максимуму, коли параметр регуляризації  $\lambda = 4,5 \cdot 10^{-3}$ . Графік розв'язку задачі (1–2) після регуляризації системи виду (8) із вказаним значенням параметра наведений на рис. 5 б.



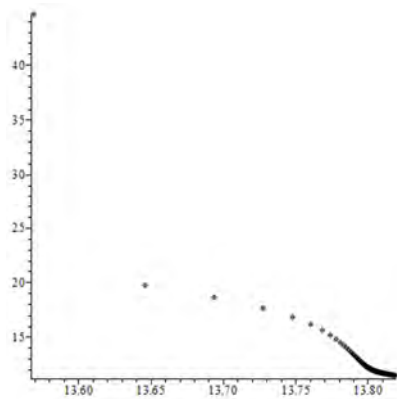


Рис. 6. Графік  $L$ -кривої.

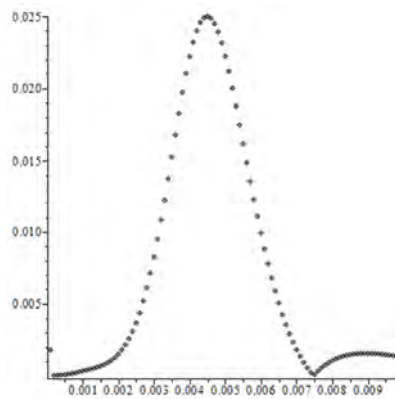


Рис. 7. Графік кривини  $L$ -кривої.

Очевидно, що розв'язок задачі (1–2) методом точкових джерел із застосуванням регуляризації не можна визнати адекватним. Звернемо увагу на той факт, що на сторонах вирізів не виконується умова адіабатичності. У зв'язку з цим обчислювальні експерименти були продовжені з залученням додаткових фіктивних джерел біля границь вирізів (рис. 8) та з контуром фіктивних джерел, який повторює контур досліджуваної області (рис. 9).

Відзначимо, що в цих випадках кількість точок колокації і точок фіктивних джерел є різною, і, як наслідок, матриця  $G$  системи (8) є прямокутною. Тому регуляризація виконувалася для системи виду:

$$(G^T G + \lambda E) \cdot \mathbf{a} = G^T \mathbf{b}.$$

Для обох способів розміщення точок фіктивних джерел також були побудовані графіки  $L$ -кривої та встановлені за їх допомогою значення параметрів регуляризації, але цього виявилось замало для знаходження фізично адекватного розв'язку задачі (1–2) методом точкових джерел для області з геометрією, яка складніша за прямокутник.

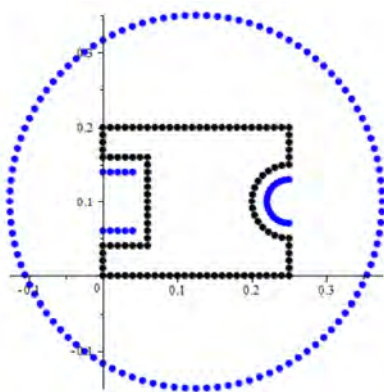


Рис. 8. Перший варіант розміщення додаткових фіктивних джерел.

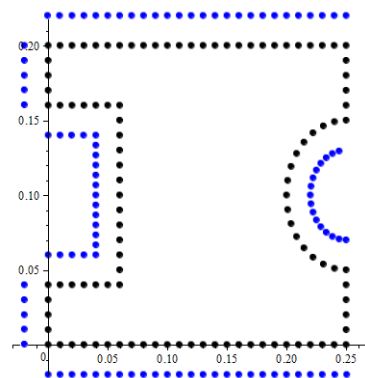


Рис. 9. Другий варіант розміщення додаткових фіктивних джерел.

### Висновки

Проведені обчислювальні експерименти показали, що в області складної геометричної форми за допомогою методу точкових джерел не вдається побудувати

фізично адекватний розв'язок граничної задачі для рівняння Лапласа. На відміну від теоретичних передбачень [1] регуляризація основної системи алгебраїчних рівнянь не приводить до суттєвого покращення точності отримуваних розв'язків.

Логічним продовженням досліджень є вивчення впливу розміщення точок фіктивних джерел на точність розв'язання граничних задач. Зокрема, проведення обчислювальних експериментів для граничних задач із рівняннями Лапласа і Пуассона, коли фіктивні джерела розміщуються в образах точок колокації при конформних відображеннях досліджуваної області на коло або на контур, який повторює геометрію заданої області.

### Список використаної літератури

1. Алексидзе, М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. Москва. Наука, 1991. 352 с.
2. Alves Carlos J. S., Martins Nuno F. M. (2009) The Direct Method of Fundamental Solutions and the Inverse Kirsch-Kress Method for the Reconstruction of Elastic Inclusions or Cavities. *Journal of Integral Equations and Applications*. **21**, 153–178.
3. Fairweather Graeme, Karageorghis Andreas (1998) The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advances in Computational Mathematics*. **9**, 69–95.
4. Kołodziej J.A., Grabski J.K. (2014) Application of the Method of Fundamental Solutions and the Radial Basis Functions for Laminar Flow and Heat Transfer in Internally Corrugated Tubes. *Proceedings of the 10th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*. (USA, Florida, Orlando, July 14–16, 2014), pp. 456–465.
5. Golberg M.A. (1994) The method of fundamental solutions for Poisson's equation. *Transactions on Modelling and Simulation*. **8**, 299–307.
6. Karageorghis Marin L, Lesnic A. D. et al. (2017) The method of fundamental solutions for problems in static thermo-elasticity with incomplete boundary data. *Inverse Problems in Science and Engineering*. **25** (5), 652–673.
7. Vogel C. R. (1997) Non-convergence of the *L*-curve regularization parameter selection method. *Inverse Problems*. **12**, 4, 16 p.
8. Денисов М.А. Математическое моделирование теплофизических процессов. ANSYS и CAE-проектирование. Екатеринбург: УрФУ, 2011. 149 с.

### References

1. Aleksidze, M. A. (1991) Fundamentalnyie funktsii v priblizhennyih resheniyah granichnyih zadach. Moskva. Nauka.
2. Alves, Carlos J. S., & Martins Nuno, F. M. (2009) The Direct Method of Fundamental Solutions and the Inverse Kirsch-Kress Method for the Reconstruction of Elastic Inclusions or Cavities. *Journal of Integral Equations and Applications*. **21**, 153–178.
3. Fairweather, Graeme, & Karageorghis Andreas. (1998) The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advances in Computational Mathematics*. **9**, 69–95.
4. Kołodziej, J. A., & Grabski, J. K. (2014) Application of the Method of Fundamental Solutions and the Radial Basis Functions for Laminar Flow and Heat Transfer in Internally Corrugated Tubes. *Proceedings of the 10th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*. (USA, Florida, Orlando, July 14–16, 2014), pp. 456–465.
5. Golberg, M. A. (1994) The method of fundamental solutions for Poisson's equation. *Transactions on Modelling and Simulation*. **8**, 299–307.

6. Karageorghis, Marin L., & Lesnic, A. D. et al. (2017) The method of fundamental solutions for problems in static thermo-elasticity with incomplete boundary data. *Inverse Problems in Science and Engineering*. **25** (5), 652–673.
7. Vogel, C. R. (1997) Non-convergence of the *L*-curve regularization parameter selection method. *Inverse Problems*. **12**, 4, 16 p.
8. Denisov, M. A. (2011) *Matematicheskoe modelirovanie teplofizicheskikh protsessov. ANSYS i CAE-proektirovanie*. Ekaterinburg: UrFU.