

УДК 539.3

М.Л. МИРОНЕНКО

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України  
Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова

### **ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПАЛИВНИХ БАКІВ ПРИ РІЗНИХ ЧИСЛАХ БОНДА**

*Дослідження коливань рідини у резервуарах циліндричних, сферичних або більш складної форми з врахуванням технічних особливостей та математичне моделювання переважно здійснюють методами скінчених та граничних елементів. В даній роботі виконується аналіз форм та частот коливань рідини при перевантаженнях та за умови низької гравітації. Розглянуто різні параметри зовнішнього впливу. Вважається, що рідина є однорідною, нестисливою, а рух рідини безвихровий. Існує потенціал швидкості руху, що задовольняє рівнянню Лапласа. Співвідношення гравітаційних сил та сил поверхневого натягу визначаються числом Бонда. На вільній поверхні рідини виконуються динамічна та кінематична умови. Знайдені залежності зміни форми вільної поверхні за часом при різних частотах збурювальної сили. Розроблена методика дозволяє досліджувати поведінку рідини при різних числах Бонда.*

*Ключові слова: вимушені коливання, число Бонда, вільна поверхня рідини, поверхневий натяг, методи скінчених та граничних елементів.*

М.Л. МИРОНЕНКО

Інститут проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины  
Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова

### **ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОПЛИВНЫХ БАКОВ ПРИ РАЗНЫХ ЧИСЛАХ БОНДА**

*Исследование колебаний жидкости в резервуарах цилиндрических, сферических или более сложной формы с учетом технических особенностей и математическое моделирование преимущественно осуществляют методами конечных и граничных элементов. В данной работе выполняется анализ форм и частот колебаний жидкости при различных числах Бонда. Рассмотрены различные параметры внешнего воздействия. Считается, что жидкость является однородной, несжимаемой, а движение жидкости безвихревым. Существует потенциал скорости движения, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Соотношение гравитационных сил и сил поверхностного натяжения определяются числом Бонда. На свободной поверхности жидкости выполняются динамическое и кинематическое условия. Найденные зависимости изменения формы свободной поверхности по времени при различных частотах возмущающей силы. Разработанная методика позволяет исследовать поведение жидкости при различных числах Бонда.*

*Ключевые слова: вынужденные колебания, число Бонда, свободная поверхность жидкости, поверхностное натяжение, методы конечных и граничных элементов.*

M.L. MYRONENKO

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences  
O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv

### **FORCED VIBRATIONS OF FUEL TANKS AT DIFFERENT BOND'S NUMBERS**

*Fluid oscillations in cylindrical, spherical tanks or reservoirs with more complicated shapes, taking into account technical features and mathematical modelling are usually*

<https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.4>

performed by using finite and boundary element methods. It is possible to solve problems arising in science and technology by numerical methods. The development of electronic computers and the use of numerical methods allow to supplement or replace direct experimental research (modelling the stability of dams, launch vehicles, earthquakes). The oscillation parameters are determined by computer simulation. The technique of studying the behaviour of the free surface of a fluid in a cylindrical tank under the influence of horizontal harmonic loading is developed. Different parameters of external influence are considered. It is believed that the fluid that fills the shell is homogeneous, incompressible, and ideal and the fluid motion is vortex-free. The fluid is inviscid, so there is a potential for the velocity of motion that meets the conditions of the Laplace equation. The ratio of the gravitational and surface tension forces is determined by the Bond number. Dynamical and kinematical conditions are recorded for the free fluid surface. The dynamical condition consists in equality of the liquid pressure on the free surface to the atmospheric one. The kinematical condition supposes that particles initially belong to the free surface will remain on this surface during all consequent time. This paper analyzes the modes and frequencies of fluid fluctuations at overloads at low gravity. As an example, a cylindrical shell partially filled with liquid was considered. As a result of the numerical simulation, the lowest frequencies of the fluid oscillations are obtained, taking into account the surface tension at different Bond numbers. Changes in the shape of the free surface at different frequencies of the driving force are obtained. Thus, the application of this technique made it possible to perform a study of the behaviour of the liquid at changing the Bond number and under overloads.

*Keywords:* forced vibrations, Bond number, surface tension, liquid free surface, boundary and finite element methods.

### Постановка проблеми

Ефективний розвиток промисловості вимагає появи сучасних технічних засобів та конструкцій, які володіють основними кількісними та якісними технічними характеристиками, надійністю, здатністю експлуатуватись у несприятливих умовах та водночас оптимальним проектуванням. На сьогоднішній день даним вимогам відповідають оболонкові конструкції, які зарекомендували себе у багатьох галузях, зокрема, літако- та суднобудуванні, при проектуванні гідротехнічних об'єктів та АЕС, зведенні мостів, дорожньому, підземному, промислового будівництві. В аерокосмічному будівництві паливні баки ракет-носіїв (РН) розглядаються як складні оболонки, що частково заповнені рідиною. Однією з основних задач вчених ракетно-космічної галузі є дослідження поздовжніх коливань конструкцій РН, що можуть призвести до значних навантажень на конструкцію, порушення її цілісності та, як наслідок, до поздовжньої нестійкості і аварійних ситуацій. Ось чому вивчення даного питання є актуальним та необхідним.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідження коливань рідини у баках ракетноносіїв циліндричної або сферичної форми, їх математичне моделювання виконувалось багатьма основоположними вченими за допомогою варіаційного метода [1–5]. Динамічна поведінка космічних ступенів, а також палива у баках в цих роботах не враховувала впливу мікрогравітації, а також збурень від виконавчих органів системи управління [6].

Дослідження конструкцій більш складних форм та врахування інших технічних особливостей дозволяють методи скінчених та граничних елементів. Сучасними засобами комп'ютерного проектування визначають характеристики рухомих об'єктів та параметри коливань [7–8].

Програма польоту ракети-носія включає активні, а також пасивні ділянки польоту. Під час короткочасних активних проміжків польоту виконує роботу маршовий двигун, що <https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.4>

призводить до появи силових факторів, які викликають рух та плескання палива та коливань конструкції. У підсумковому звіті Університету мікрогравітації [9] досліджено нестабільності вільної поверхні нев'язкої рідини під час переходу від гіпергравітації до мікрогравітації. Визначено, що поверхневі коливання під час переходів від 2-g до 0-g можуть призвести до значного зростання амплітуди та нестабільності конструкції.

У роботах вітчизняних дослідників подані результати математичного моделювання просторових коливань компонентів палива в паливному відсіку космічної ступені РН для умов мікрогравітації і малих рівнів рідких компонентів палива в баках [6]. Низка робіт охоплює ряд досліджень, пов'язаних з коливаннями: визначення характеристик сорбційних процесів на основі моделювання вимушених просторових коливань верхніх ступенів ракет-носіїв з використанням методу скінченних елементів [10], математичне моделювання взаємодії поздовжніх коливань корпусу ракети та динамічних процесів у маршовому двигуні [11], моделювання просторових коливань оболонкових резервуарів з рідиною за допомогою засобів комп'ютерного аналізу та проектування [8], наведено розрахункові залежності власних поздовжніх коливань корпусу ракети «Циклон-4» від часу польоту та урахуванням дисипації енергії при різних рівнях заповнення паливних баків [12], дослідження нелінійного поведіння вільної поверхні рідини у горизонтальному циліндричному резервуарі при гармонічних збудженнях конструкції [13], урахування складної конфігурації паливних баків при виконанні математичного моделювання поздовжніх коливань верхніх ступенів ракет-носіїв та інші.

### Мета дослідження

Метою дослідження є створення методики дослідження поведінки вільної поверхні при різних числах Бонда.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Дана робота присвячена розгляду коливань рідких компонентів у баках окислювача, що являють собою жорстку циліндричну оболонку висотою  $H$  та радіусом  $R$ , частково заповнену рідиною на висоту  $H_1$  зі змоченою поверхнею  $S_1$  та вільною поверхнею  $S_0$  (рис. 1).

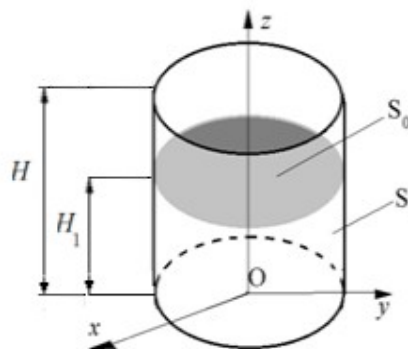


Рис. 1. Циліндрична оболонка з рідиною.

Вважаємо, що рідина знаходиться під дією гравітаційного поля, однорідна, нестислива, потік безвихровий з потенціалом швидкості  $V = \nabla\varphi$ . Сили поверхневого натягу на вільній поверхні рідини  $S_0$  та гравітаційні сили, що є переважними у даній задачі, виражені у співвідношенні, яке характеризується числом Бонда [6]:

$$B_0 = (\rho g R^2) / \sigma, \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина рідини;

<https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.4>

$g$  – прискорення сил гравітації;  
 $\sigma$  – поверхневий натяг;  
 $R$  – радіус циліндричної частини резервуара.

Потенціал швидкостей задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Нормальна складова швидкості  $V$  для оболонки, що має жорсткі стінки:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0. \quad (3)$$

Запишемо динамічну граничну умову на вільній поверхні рідини у вигляді:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho} \Delta_S \zeta \right|_{S_0} = 0. \quad (4)$$

Кінематична умова на вільній поверхні має вигляд:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \right|. \quad (5)$$

Оскільки вважається, що переважними є гравітаційні сили, тому динамічна умова записується таким чином:

$$\left. \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0} = 0. \quad (6)$$

Також врахуємо умову існування розв'язку

$$\iint_{S_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (7)$$

В даному дослідженні будемо аналізувати частоти та форми коливань рідини в умовах перевантаження, тобто коли гравітаційна сила має прискорення  $\alpha g$ , де коефіцієнт  $\alpha \geq 1$ . В роботі [14] отримані розв'язки крайової задачі.

### Аналіз числових результатів

Розглянемо коливання рідини в резервуарі під дією гармонічного горизонтального навантаження. Використовуємо динамічну умову у вигляді:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\xi - \frac{\sigma}{\rho} \Delta\xi + a_x(t)x = 0, \quad (8)$$

де  $a_x(t)$  – прискорення горизонтального навантаження.

У випадку гармонічного навантаження маємо

$$a_x(t) = a_0 \cos \Omega t.$$

Тут  $a_0, \Omega$  – амплітуда та частота навантаження.

В роботах [15–16] отримані такі розкладення невідомих функцій  $\varphi, \zeta$ :

$$\varphi(\rho, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(\rho, \theta, z), \quad (9)$$

$$\zeta(\rho, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, \theta, H_1)}{\partial \mathbf{n}}. \quad (10)$$

де  $c_k(t)$  – невідомі коефіцієнти, що залежать лише від часу;

$\varphi_k(\rho, \theta, z)$  – розв’язки спектральної задачі [15].

Оскільки розглядаються резервуари у вигляді оболонок обертання, тому

$$x = \rho \cos \theta. \quad (11)$$

В цьому випадку маємо

$$\varphi_k(\rho, \theta, z) = \cos \theta \varphi_k(\rho, z), \quad (12)$$

де  $\varphi_k(\rho, z)$  – форми вільних коливань рідини, що відповідають першій гармоніці та разом з власними частотами  $\chi_k$  є розв’язком спектральної задачі.

Найнижчу частоту коливань рідини визначаємо за формулами [4]:

$$\chi_1^2 = \frac{\mu_1}{R} \tanh\left(\frac{\mu_1 H}{R}\right), \quad \chi_1^2 = \frac{\omega_1^2}{g}. \quad (13)$$

Враховуючи поверхневий натяг рідини, маємо:

$$\omega_k = \omega_k^g \sqrt{1 + \mu_k^2 / B_0}, \quad (14)$$

де  $\omega_k^g$  – частота коливання рідини у резервуарі без врахування поверхневого натягу (відповідає лише дії гравітаційного поля);

$\mu_k$  є коренями рівняння

$$\frac{dJ_1(\rho\rho)}{d\rho} = 0, \quad (15)$$

в якому  $J_1(\rho)$  – функція Бесселя 1-го роду.

Найнижчим коренем вказаного рівняння є  $\mu_1 \approx 1.84$ .

Зауважимо, що  $\omega_k^g = \sqrt{g} \chi_k$ . З цього випливає, що з ростом перевантаження частоти коливань рідини зростають пропорційно  $\sqrt{g}$ . Частоти коливань рідини з врахуванням поверхневого натягу при різних значеннях числа Бонда наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Частоти коливань з урахуванням поверхневого натягу

$\omega_k$	1.837	3.848	3.015	2.681	2.497	2.379	15.23	10.84	7.781	7.007	6.441	5.653	5.122
$B_0$	$\infty$	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50

Амплітуди коливань вільної поверхні рідини в залежності від частоти збурювальної сили зображено на рис. 1–2.

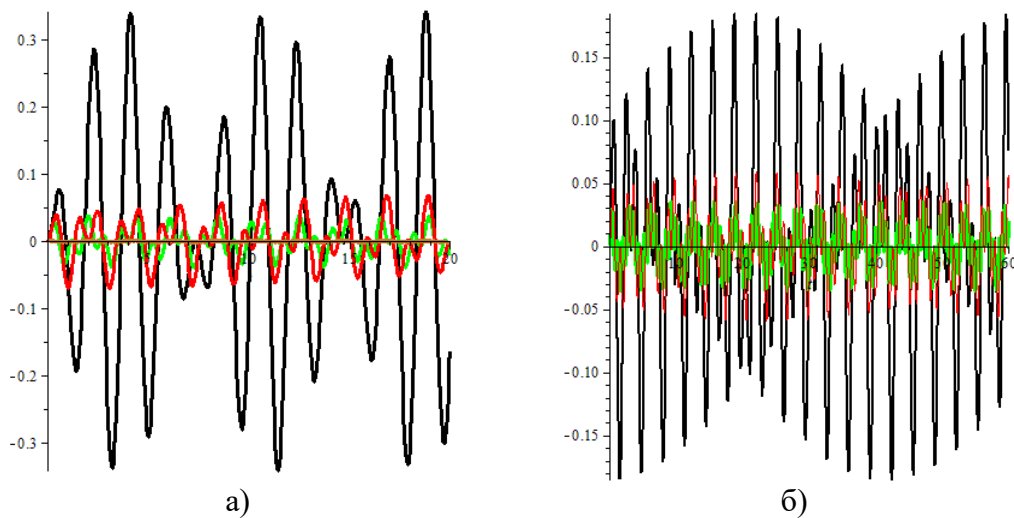


Рис. 2. Зміна рівня вільної поверхні у точці з циліндричними координатами (1, 0, 1).

На рис. 1а зображено функцію  $\zeta$  при  $a_0 = 1H$ ,  $\Omega = 2.77 \text{ Hz}$ , на рис. 1 б) зображено цю функцію при  $a_0 = 1H$ ,  $\Omega = 7.78 \text{ Hz}$ . На рис. 1а та 1б червоні лінії відповідають  $B_0 = 3$ , зелені – числу Бонда  $B_0 = 5$  та чорні –  $B_0 = 0$ .

Режим биття на частоті  $\Omega = 7.70 \text{ Hz}$  показаний на рис. 3.

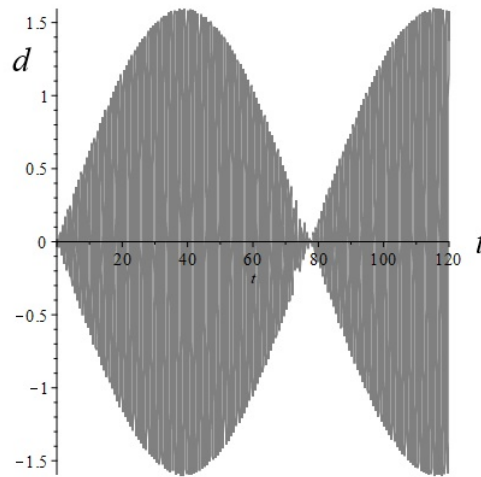


Рис. 3. Режим биття.

Таким чином, розроблена методика дозволяє вивчити поведінку вільної поверхні рідини при різних параметрах горизонтального гармонічного навантаження.

### Висновки

Розроблено методику дослідження поведінки вільної поверхні рідини у циліндричному резервуарі, що знаходиться під дією горизонтального гармонічного навантаження. Методика дозволяє дослідити поведінку вільної поверхні при різних числах Бонда, як за умови перевантажень, так і при низькій гравітації. У подальшому передбачається дослідити поведінку рідини в резервуарах іншої форми.

### Список використаної літератури

1. Abramson H. N. Dynamic behavior of liquid in moving containers. *Appl. Mech. Reviews*. 1963. Vol. 16. № 7. P. 501–506.
2. Braslow A. L., Bhuta P. G., Hutton R. E., Abramson H. N., Stephens D. G. Propellant Slosh Loads : report : SP 8009 / NASA. Washington, 1968. 25 p.
3. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М. : Наука, 1965. 440 с.
4. Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. К. : Наук. думка, 1984. 228 с.
5. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М. : Машиностроение, 1971. 564 с.
6. Николаев А. Д., Башлий И. Д. Определение параметров колебаний топлива в баках космических ступеней ракет-носителей перед повторными запусками маршевого двигателя при малых уровнях заполнения. *Техническая механика*. 2013. № 3. С. 10–20.
7. Николаев А. Д., Башлий И. Д. Математическое моделирование пространственных колебаний жидкости в цилиндрическом баке при продольных вибрациях его конструкции. *Техническая механика*. 2012. № 2. С. 14–22.
8. Башлий И. Д., Николаев А. Д. Математическое моделирование пространственных колебаний оболочечных конструкций с жидкостью с использованием современных средств компьютерного проектирования и анализа. *Техническая механика*. 2013. № 2. С. 18–25.
9. Investigation of Propellant Sloshing and Zero Gravity Equilibrium for the Orion Service Module Propellant Tanks : Final report / Microgravity University, Systems Engineering <https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.4>

- Educational Discovery. Kenosha, 2009. 22 p.
10. Башлий И. Д., Николаев А. Д., Свириденко Н. Ф. Влияние полетных вибраций верхних ступеней ракет-носителей на характеристики сорбционных процессов в жидком газонасыщенном топливе в баках сложной пространственной конфигурации. *Техническая механика*. 2011. № 2. С. 13–22.
  11. Хоряк Н. В., Николаев А. Д. Математическое моделирование взаимодействия продольных колебаний корпуса жидкостной ракеты как многосвязной упруго-диссипативной системы и динамических процессов в двигательной установке. *Техническая механика*. 2010. № 3. С. 27–37.
  12. Николаев А. Д., Хоряк Н. В., Башлий И. Д., Пирог В. А., Ходоренко В. Ф. Математическое моделирование свободных продольных колебаний конструкции третьей ступени и корпуса ракеты космического назначения "Циклон-4". *Техническая механика*. 2011. № 4. С. 37–44.
  13. Науменко Н. Е., Соболевская М. Б., Сирота С. А., Николаев А. Д., Башлий И. Д. Нелинейные колебания свободной поверхности жидкости в горизонтально расположенном цилиндрическом баке. *Техническая механика*. 2015. № 4. С. 92–102.
  14. Мироненко М. Л., Гнітько В. І., Дегтярьов К. Г. Метод дискретних особливостей у задачах коливань заповнювача паливних баків при перевантаженнях та в умовах низької гравітації. Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2019. Вип. 41. № 41. С. 20–26.
  15. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. № 22 (4). P. 867–881.
  16. Еселева Е. В., Гнітько В. І., Стрельникова Е. А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. Т. 9. №1. С. 105–118.

### References

1. Abramson H. N. (1963). Dynamic behavior of liquid in moving containers. *Appl. Mech. Reviews*. **16**, 7, 501–506.
2. Braslow, A. L., Bhuta, P. G., Hutton, R. E., Abramson, H. N., & Stephens, D. G. (1968). Stephens Propellant Slosh Loads. *Report : SP 8009 / NASA*. Washington.
3. Moiseev, N. N. & Rumjancev, V. V. (1965). *Dinamika tela s polostyami, soderzhaschimi zhidkost*. Moscow: Nauka.
4. Lukovskij, I. A. Barnjak, M. Ja. & Komarenko, A. N. (1984). *Priblizhennyie metodyi resheniya zadach dinamiki ogranichenogo ob'ema zhidkosti*. Kyiv: Nauk. Dumka.
5. Mikishev, G. N. & Rabinovich, B. I. (1971). *Dinamika tonkostennyih konstruktsiy s otsekami, soderzhaschimi zhidkost*. Moscow, Mashinostroenie.
6. Nikolaev, A. D., & Bashlij, I. D. (2013). Opredelenie parametrov kolebaniy topliva v bakah kosmicheskikh stupeney raket-nositeley pered povtornymi zapuskami marshevogo dvigatelya pri mal'nykh urovnyah zapolneniya. *Tehnicheskaya mehanika*. **3**, 10–20.
7. Nikolaev, A. D. & Bashlij, I. D. (2012). Matematicheskoe modelirovanie prostranstvennyih kolebaniy zhidkosti v tsilindricheskom bake pri prodolnyih vibratsiyah ego konstruktsii. *Tehnicheskaya mehanika*. **2**, 14–22.
8. Bashlij, I. D. & Nikolaev, A. D. (2013). Matematicheskoe modelirovanie prostranstvennyih kolebaniy obolocheknyih konstruktsiy s zhidkostyu s ispolzovaniem sovremennyih sredstv kompyuternogo proektirovaniya i analiza. *Tehnicheskaya mehanika*. **2**, 18–25.
9. Investigation of Propellant Sloshing and Zero Gravity Equilibrium for the Orion Service



- Module Propellant Tanks : Final report / Microgravity University, Systems Engineering Educational Discovery. Kenosha, 2009. 22 p.
10. Bashlij, I. D. & Nikolaev, A. D. (2011). Vliyanie poletnykh vibratsiy verkhnikh stupeney raket-nositelej na kharakteristiki sorbcionnykh processov v zhidkom gazonasyshennom toplive v bakakh slozhnoj prostranstvennoj konfiguraczii. *Tekhnicheskaya mehanika*. **2**, 13–22.
  11. Khoryak, N. V. & Nikolaev, A. D. (2010). Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya prodolnykh kolebaniy korpusa zhidkostnoy raketyi kak mnogosvyaznoy uprugodissipativnoy sistemyi i dinamicheskikh protsessov v dvigatelnoy ustanovke. *Tekhnicheskaya mehanika*. **3**, 27–37.
  12. Nikolaev, A. D., Khoryak, N. V., Bashlij, I. D., Pirog, V. A., & Khodorenko, V. F. (2011). Matematicheskoe modelirovanie svobodnykh prodolnykh kolebaniy konstruksii tretej stupeni i korpusa raketyi kosmicheskogo naznacheniya "Tsiklon-4". *Tekhnicheskaya mehanika*. **4**, 37–44.
  13. Naumenko, N. E., Sobolevskaya, M. B., Sirota, S. A., Nikolaev, A. D. & Bashlij, I. D. (2015). Nelinejnykh kolebaniya svobodnoj poverkhnosti zhidkosti v gorizontallyno raspolozhenom cilindricheskom bace. *Tekhnicheskaya mehanika*. **4**, 92–102.
  14. Myronenko, M. L., Hnitko, V. I., & Dehtiarov, K. H. (2019). Metod dyskretnykh osoblyvostei u zadachakh kolyvan zapovniuvacha palyvnykh bakiv pry perevantazhenniakh ta v umovakh nyzkoi hravitatsii. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetutu. Seria: Matematychni modeliuvannia. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*. **41**, 20–26.
  15. Gnitko, V., Naumenko, Y., & Strelnikova E. (2017). Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. **22 (4)**, 867–881.
  16. Eseleva, E. V., Gnitko, V. I., & Strelnikova, E. A. (2006). Sobstvennykh kolebaniya sosudov vyssokogo davleniya pri vzaimodejstvii s zhidkostyu. *Problemy Mashinostroeniya*. **9(1)**, 105–118.