УДК 535.36

О.С. МАЗМАНІШВІЛІ
Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут»

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ В НЕОДНОРІДНОМУ НЕПОГЛИНАЮЧОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У роботі представлено аналітичні рішення параболічного рівняння Ісімару для функції когерентності електромагнітного поля, що описують часові властивості імпульсу на виході неоднорідного недисипативного середовища. Знайдено явний вираз функції Гріна завдання. Показано, що часова частина функції Гріна має інваріантну форму. Наведено також результати чисельних розрахунків форми досліджуваних часових імпульсів на виході прогонової ділянки середовища. Показано, що підхід, використаний у моделі Ісімару для опису тимчасової еволюції огинаючої монохроматичного електромагнітного імпульсу в однорідних недисипативних середовищах, може бути розвинений для використання в неоднорідних недисипативних середовищах. Зроблено спробу врахувати вплив неоднорідності середовища на форму результуючого імпульсу. Для вирішення поставленого завдання потрібно подолати труднощі, пов'язані з обчисленням континуального інтеграла, що виникає, у просторі дифузійних траєкторій. Це дало можливість отримати явний вираз для функції Гріна завдання й побудувати обчислювальний алгоритм, на базі якого проведено низку чисельних експериментів. Аналіз результатів роботи проведено на підставі апарату квадратичних інтегральних функціоналів, що базуються на рішеннях стохастичних диференціальних рівнянь. Із теорії подібних функціоналів отримано, що всі полюси функції Гріна $G(t)$ прості, функція $G(t)$ тотожно дорівнює нулю при $t = 0$ (флуктуаційна ділянка), функція $G(t)$ має один максимум і дві точки перегину (основна ділянка), функція $G(t)$ має експонентну асимптотику при $t \to \infty$ (периферійна ділянка). Вивчено інваріантні часові властивості огинаючої монохроматичних електромагнітних імпульсів, що реєструються після проходження крізь плоский шар розсіювального неоднорідного середовища, тобто властивостей, які залишаються незмінними в разі варіації параметрів середовища, зокрема розподілу концентрації центрів, що розсіюють.

Ключові слова: функції Гріна, монохроматичні електромагнітні імпульси, розсіювальне неоднорідне середовище, рівняння Ісімару, функція когерентності, форма результуючого імпульсу, інваріантна лагеррівська форма, чисельні експерименти.

O.S. MAZMANISHVILI
National Science Center "Kharkiv Physical-Technical Institute"

SIMULATION OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN AN INHOMOGENEOUS NONABSORBING MEDIUM

The paper presents analytical solutions of the parabolic Ishimaru equation for the electromagnetic field coherence function, which describe the temporal properties of a pulse at the output of an inhomogeneous non-dissipative scattering medium. An explicit expression for the Green's function of the problem is found. It is shown that the time part of the Green's function has an invariant Laguerre form. The results of numerical calculations of the shape of the studied time pulses at the exit of the span of the medium are also presented. The paper shows that the approach used in the Ishimaru model to describe the temporal evolution of the envelope of a monochromatic electromagnetic pulse in homogeneous non-dissipative scattering media can be developed for use in inhomogeneous non-dissipative media. An attempt was made to take into account the influence of the inhomogeneity of the medium on the shape of the resulting pulse. To solve the stated problem, it was necessary to overcome the difficulties associated with the calculation of the resulting path integral in the space of diffusion trajectories. This made it possible to obtain an explicit expression for the Green's function of the problem and construct a computational algorithm, on the basis of which a number of numerical experiments were carried out. The analysis of the results of the work was carried out on the basis of the apparatus of quadratic integral functionals based on the solutions of stochastic differential equations. From the theory of similar functionals, it is obtained that all poles of the Green's function $G(t)$ are simple, the function $G(t)$ is identically equal to zero at $t = 0$ (fluctuation region), the function $G(t)$ has one maximum and two inflection points (main region), the function $G(t)$ has exponential asymptotics at $t \to \infty$ (peripheral region). The paper studies the invariant temporal properties of the envelope of monochromatic electromagnetic pulses recorded after passing through a flat layer of a scattering inhomogeneous medium, i. e. properties that remain unchanged when the parameters of the medium vary, in particular, the distribution of the concentration of scattering centers.

Key words: Green's functions, monochromatic electromagnetic pulses, scattering inhomogeneous medium, Ishimaru equation, coherence function, resulting pulse shape, invariant Laguerre form, numerical experiments.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-11

Постановка проблеми

Нижче поставлено й розглянуто завдання про форму імпульсу, що поширюється в неоднорідному й непоглинаючому середовищі типу, що розсіює. У роботі як вихідний використано електромагнітний імпульс у вигляді δ-функції щодо напряму поширення. Таким чином, ідеться, по суті, про функцію Гріна розглянутого завдання. Імпульси проходять крізь шар товщини L, що містить розсіювальні центри з довільним профілем концентрації $\rho(z)$ уздовж осі розповсюдження z, при цьому саме розсіювання вважається малокутовим [1; 2].

Під час розгляду прийнято такі припущення:

– вихідна (стартова хвиля) є плоскою;

– показники середовища, будучи змінними в просторі, є постійними в часі; ці характеристики покладатимуться відомими та заданими;

– просторові характеристики середовища азимутально симетричні щодо напрямку поширення випромінювання;

– розглянуте випромінювання являє собою монохроматичну хвилю з імпульсною огинаючою.

Третє припущення означає, що характеристики середовища змінюються шарами, паралельними до фронту вихідної плоскої хвилі. Нижче ми обмежимося цим припущенням, маючи на увазі отримання результатів принципового плану.

У роботі розглянуто часові властивості огинаючої монохроматичних електромагнітних імпульсів, що реєструються після проходження крізь плоский шар неоднорідного середовища, що розсіює. У цьому особливу увагу звернено на такі властивості, які можна назвати інваріантними, тобто на властивості, характерні для всіх аналізованих середовищ. Завдяки інформації про інваріантні властивості стає можливим додаткова перевірка відповідності досвідчених даних і їх інтерпретація, не пов’язана з конкретними параметрами середовища розповсюдження. Такі властивості передавальної функції, як позитивна визначеність, звернення в нуль на початку імпульсу та на його периферії, єдиність максимуму й наявність лише двох точок перегину, є якісними ознаками й легко ідентифікуються.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Задачу про функцію Гріна середовища, що містить центри, що розсіюють, можна зарахувати до класичних. Різні фізичні й обчислювальні аспекти цієї проблеми вже давно обговорюються в наукових фахових виданнях [1–6]. Рівняння, які описують поширення імпульсів, дуже складні, тому отримання повних аналітичних рішень поставленого завдання є питанням майбутнього. Як правило, у публікаціях наводяться точні вирази для перших статистичних моментів огинаючої імпульсу або деякі вирази, справедливі в рамках обраних наближень. Наявні ж точні аналітичні вирази представлені переважно у вигляді континуальних інтегралів і/або розкладів у нескінченні ряди. У тих роботах, де наведено аналітичне рішення завдання в явному вигляді, воно, як правило, належить до спрощених моделей. Для вирішення вихідних рівнянь використовують чисельні методи.

Мета дослідження

Мета роботи полягає у вивченні інваріантних тимчасових властивостей огинаючої монохроматичних електромагнітних імпульсів, що реєструються після проходження крізь плоский шар розсіювального неоднорідного середовища, тобто властивостей, які залишаються незмінними в разі варіації параметрів середовища, зокрема розподілу концентрації центрів, що розсіюють. Особливу увагу приділено поздовжнім (часовим) розмірам результуючого імпульсу, що визначає його властивості.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-11

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Вихідні положення

Нижче поставлено й розглянуто завдання про форму імпульсу, що поширюється в неоднорідному та непоглинаючому середовищі типу, що розсіює. Обговоримо зазначені вище припущення й обмеження, що випливають із них, на ділянку застосування результуючих виразів. У лінійному наближенні вихідний $I_{in}(t)$ та імпульс на виході із середовища $I(t)$ пов'язані відомим виразом [1]:

$$I(t) = \int G(t-t')\, I_{in}(t')\, dt' , \tag{1}$$

і за формою $I_{in}(t)$ можна визначити $I(t)$, якщо визначена функція Гріна $G(t-t')$.

Перейдемо до формулювання вихідних рівнянь. Шукана функція Гріна є Фур'є-образом двочастотної функції когерентності Γ:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int \Gamma(\omega_d)\exp(-i\omega_d t)\, d\omega_d . \tag{2}$$

Далі для функції Γ у фізичній ситуації, що розглядається, поширення плоскої електромагнітної хвилі в дифузійно-розсіювальному непоглинаючому середовищі маємо [1]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + b(z)\mathbf{r}^2\right)\Gamma(z,\mathbf{r};\omega_d) = 0. \tag{3}$$

Тут $a = k_d / 2k^2$; k – хвильове число монохроматичної хвилі, що поширюється; $k_d = \omega_d/c$; c – швидкість світла;

$$b(z) = (4\alpha_p)^{-1}\rho(z)\sigma_s(z)k^2 , \tag{4}$$

де $\rho(z)$ – концентрація розсіювальних центрів; $\sigma_s(z)$ – переріз розсіювання; α_p – кутовий параметр розсіювання, а як аргументи функції когерентності Γ вказані поздовжня координата поширення z й поперечний вектор $\mathbf{r}$.

Рівняння (3) є диференціальним рівнянням у часткових похідних параболічного типу з потенціалом квадратичного виду $U(z, \mathbf{r}) = b(z)\mathbf{r}^2$, крутість якого залежить від координати z, і початковою умовою $\Gamma(z = 0, \mathbf{r}) = 1$, що забезпечує властивість функції Гріна $G(t-t')|_{z=0} = \delta(t-t')$.

Рівняння (3) належить до класу рівнянь Хілла й у загальному випадку його аналітичних розв'язків потенціалу $U(z, \mathbf{r})$ довільного виду отримати не вдається. Істотним виявляється те, що з потенціалу квадратичного виду апроксимаційне рішення функції Гріна $G(t)$ побудувати можливо.

2. Рівняння для двочастотної функції когерентності

Розглянемо шар, що розсіює, товщина якого (уздовж осі z) дорівнює L. Розіб'ємо довжину L на N ділянок $\{\Delta_n\}$: $L = \sum_{n=1}^{N}\Delta_n$.

Нехай величини $\rho(z)$ та $\sigma_s(z)$ задані та є безперервними функціями z. Виберемо ділянки $\Delta_n = z_n - z_{n-1}$, $n = 1,...,N$ так, щоб передати всі істотні деталі потенціалу $U(z, \mathbf{r})$, і позначимо $b_n = b(z_n)$, $\rho_n = \rho(z_n)$ та $\sigma_n = \sigma(z_n)$. Маючи на увазі випадок $N >> 1$, замінимо в потенціалі $U(z, \mathbf{r})$ усі значення, що лежать усередині кожної n-ї ділянки, $1 \le n \le N$, на величину $U(z_n, \mathbf{r})$, де $z_n = \sum_{m=1}^{n}\Delta_m$ – права межа ділянки.

Отриманий таким чином потенціал $U(z, \mathbf{r})$, що є кусково-постійною функцією від z, використовуватимемо нижче в апроксимаційному рівнянні (6). Тепер наблизимо рішення рівняння (3) функцією $\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d)$, що є рішенням апроксимаційного рівняння зі шматково-постійним за z виразом $U_N(z_n, \mathbf{r})$ для потенціалу $U(z, \mathbf{r})$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U_N(z,\mathbf{r})\right)\Gamma_N(z,\mathbf{r};\omega_d) = 0, \tag{5}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-11

з умовою $\Gamma_N(0, \mathbf{r}; \omega_d) = 1$. Якщо буде знайдено рішення рівняння (5) для Γ_N, то потрібна функція когерентності буде випливати з нього в межі при $N \to \infty$. Рівнянню (5) еквівалентна послідовність рівнянь:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U_N(z_n, \mathbf{r})\right)\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d) = 0, \quad n = 1, ..., N, \tag{6}$$

рішення яких визначаються початковою умовою $\Gamma_N(z = 0, \mathbf{r}; \omega_d) = 1$ і ланцюжком граничних умов:

$$y_{n+1}(z_n) = y_n(z_n), \quad n = 1, ..., N, \tag{7}$$

де $y_n(z)$ – функція $\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d)$ на n-й ділянці.

Перейдемо до вирішення розгорнутої системи рівнянь (6). Розглянемо із цією метою довільну n-у ділянку:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U_N(z_n, \mathbf{r})\right)\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d) = 0. \tag{8}$$

На цій ділянці потенціал U_N залежить від координати z_n як від параметра, $U_N(z, \mathbf{r}) = b(z)\mathbf{r}^2 \equiv b_n\mathbf{r}^2$, де $b_n = (4\alpha_p)^{-1}\rho(z_n)\sigma_s(z_n)k^2$. Таким чином, кожне з рівнянь (8) є параболічним рівнянням у часткових похідних зі шматково-постійним за z потенціалом. Шукатимемо розв'язок n-го рівняння на інтервалі (z_{n-1}, z_n) у вигляді:

$$\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d) = \frac{1}{f(z)}\exp\left[g(z)\mathbf{r}^2\right]. \tag{9}$$

Ця форма шуканого розв'язка обумовлена параболічною властивістю потенціалу за $\mathbf{r}$. Із (8) і (9) випливають такі рівняння для введених функцій $f(z)$ та $g(z)$:

$$-\frac{1}{f(z)}\frac{df(z)}{dz} + 4iag(z) = 0, \quad \frac{dg(z)}{dz} + 4iag^2(z) + b_n = 0. \tag{10}$$

Розглянемо спочатку друге рівняння із системи (10), що є стандартним рівнянням Ріккаті. Нехай $g = g(z_n)$, тоді для всіх n розв'язання цього рівняння з початковою умовою $g(z_{n-1}) = g_{n-1}$, що випливає з (7), таке:

$$g(z) = \frac{g_{n-1} - (4ia/b_n)^{-1/2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1}))}{1 + (4ia/b_n)^{1/2} g_{n-1}\,\mathrm{tg}(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1}))}, \tag{11}$$

а на його правому кінці:

$$g_n = \frac{g_{n-1} - (4ia/b_n)^{-1/2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{4iab_n}\Delta_n)}{1 + (4ia/b_n)^{1/2} g_{n-1}\,\mathrm{tg}(\sqrt{4iab_n}\Delta_n)}. \tag{12}$$

У свою чергу, функція $f(z)$ знаходиться з (9) за допомогою квадратури з початковою умовою $f(z_{n-1}) = f_{n-1}$, де f_{n-1} – значення функції на правому кінці попередньої $(n-1)$-ї ділянки: $\frac{f(z)}{f_{n-1}} = \cos\left(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1})\right) + \sqrt{4ia/b_n}\,g_{n-1}\sin\left(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1})\right)$, а на його правому кінці:

$$f_n = \left[\cos\left(\sqrt{4iab_n}\Delta_n\right) + \sqrt{4ia/b_n}\,g_{n-1}\sin\left(\sqrt{4iab_n}\Delta_n\right)\right]f_{n-1}. \tag{13}$$

Отже, функція когерентності $\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d)$ при $z = z_N = L$ дорівнює:

$$\Gamma_N(z_N, \mathbf{r}; \omega_d) = \frac{1}{f_N}\exp(g_N\mathbf{r}^2), \tag{14}$$

при цьому послідовності $\{f_n\}$ і $\{g_n\}$ визначаються з рекурентних співвідношень (11) і (12), а також початкових умов $f_0(0) = 1$ і $g_0(0) = 0$. Зокрема, у точці прийому, коли $\mathbf{r} = 0$ і $z = L$, маємо:

$$\Gamma_N(L, \mathbf{r}; \omega_d) = \frac{1}{f_N(z_N)}. \tag{15}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-11

3. Функція Гріна

Нехай T_1 – час поширення початкової точки імпульсу. Тоді функція імпульсного відгуку (функція Гріна) така:

$$G_N(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\omega_d\left(t - T_1\right)\right)}{f_N\left(\omega, \omega_d\right)} d\omega_d\,, \tag{16}$$

при цьому у функції $f_N = f_N(\omega, \omega_d)$ зазначена залежність як від різницевої частоти ω_d (змінної інтегрування), так і від частоти ω монохроматичного імпульсу. З рекурентного співвідношення (13) випливає:

$$f_N = \prod_{n=1}^{N-1}\left[\cos\left(\sqrt{4iab_n}\Delta_n\right) + \sqrt{4ia/b_n}\, g_{n-1}\sin\left(\sqrt{4iab_n}\Delta_n\right)\right]. \tag{17}$$

Припустимо далі, що функція $b(z)$ – гладка (різкі межі концентрації відсутні), тоді $\mathrm{tg}(\phi_n) = \left(\mathrm{tg}\left(\phi_{n-1}\right) - \mathrm{tg}\left(\sqrt{4iab_n}\Delta_n\right)\right)\left(1 + \mathrm{tg}\left(\phi_{n-1}\right)\mathrm{tg}\left(\sqrt{4iab_n}\Delta_n\right)\right)^{-1}$, де $\mathrm{tg}(\varphi_n) = \sqrt{4ia/b_n}\, g_n$. Це дає $\varphi_{n+1} = \varphi_n - \sqrt{4ia/b_n}\Delta_n$, що призводить до рівності $\phi_N = -\sum_{n=1}^{N}\sqrt{4iab_n}\Delta_n$, тому $g_n = -\frac{1}{\sqrt{4ia/b_n}}\mathrm{tg}\left(\sum_{j=1}^{N}\sqrt{4iab_j}\Delta_j\right)$. Підставляючи цей вираз у співвідношення (14), послідовно знайдемо:

$$f_N = \cos\left(\sum_{n=1}^{N}\sqrt{4iab_n}\Delta_n\right). \tag{18}$$

Оскільки $ab_n = (\rho_n\sigma_n\omega_d)(8\alpha_p c)^{-1}$, де $\rho_n = \rho(z_n)$ і $\sigma_n = \sigma_s(z_n)$, то для шуканої функції Гріна отримаємо:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\omega_d(t - T_1)\right)}{\cos\left(\sqrt{i\omega_d}\sum_{n=1}^{N}\Delta_n\sqrt{(\rho_n\sigma_n)/(2\alpha_p c)}\right)} d\omega_d\,. \tag{19}$$

Розглянемо вираз $\tau^{1/2} = \sum_{n=1}^{N}\Delta_n\,(\rho_n\sigma_n)/(2\alpha_p c)$. Сума в його правій частині в межі $N \to \infty$ перетворюється на інтеграл:

$$\tau^{1/2} = (2\alpha_p c)^{-1/2}\int_0^L \sqrt{\rho(z)\sigma_s(z)}dz\,, \tag{20}$$

що дає $G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-i\omega_d(t - T_1)\right)}{\cos\sqrt{i\omega_d\tau}}d\omega_d$. Використовуючи заміну $\omega_d = is$, отримаємо остаточно шуканий вираз для функції Гріна, що формально збігається з відомим рішенням рівняння Ісімару [1; 2] для однорідних розсіювальних середовищ:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\exp\left[s(t - T_1)\right]}{\mathrm{ch}\sqrt{s\tau}}ds\,. \tag{21}$$

Цей вираз залежить від двох параметрів T_1 і τ. Перший відповідає за час приходу імпульсу як цілого й дорівнює відношенню довжини шляху до швидкості світла c. Другий визначає розширення імпульсу. Наведемо ще одне представлення для функції Гріна:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i\tau}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\exp\left[\eta(t - T_1)/\tau\right]}{\mathrm{ch}\sqrt{\eta}}d\eta\,. \tag{22}$$

Тут:

$$T_1 = L/c\,, \quad \tau = \frac{1}{2\alpha_p c}\left(\int_0^L\sqrt{\rho(z)\sigma(z)}dz\right)^2. \tag{23}$$

Отримані формули (22–23) відрізняються від відомого результату Ісімару [1; 2] тим, що вони справедливі для неоднорідних середовищ.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-11

4. Фізична інтерпретація

Імпульсу із заданою часовою залежністю $I_i(t)$ відповідатиме імпульс на виході із середовища, що описується виразом:

$$I(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}I_{in}(t')\,dt'\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\exp\left[s(t-t'-T_1)\right]}{\operatorname{ch}\sqrt{s\tau}}ds\,. \tag{24}$$

Нехай площину $z = 0$ стартовий імпульс досяг у момент часу $t = 0$. Поширюючись у середовищі, що розсіює, він досягне площини $z = L$ і в цьому місці матиме форму $I(t)$. Проаналізуємо параметри цього імпульсу. Із цією метою визначимо значення перших трьох моментів $\left\langle t^n\right\rangle=\int_0^\infty t^n I(t)dt$, $n=0,1,2$. При цьому приймемо, не обмежуючи спільності, що стартовий імпульс має запасену енергію за величиною чисельно рівну одиниці. Цікаві моменти будемо відраховувати від T_1:

$$\left\langle (t-t'-T_1)^n\right\rangle=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{s\tau}}\bigg|_{s=0}\,. \tag{25}$$

З урахуванням припущення про одиничну енергію стартового імпульсу при $n = 0$ для нульовому моменту знайдемо $\left\langle 1\right\rangle_L=1$, що відповідає прийнятій моделі поширення випромінювання без поглинання. Далі з (25) отримаємо:

$$\left\langle (t-T_1)\right\rangle_L=\frac{1}{2}\tau+\left\langle t'\right\rangle_0, \tag{26}$$

звідки випливає, що середній за імпульсом момент його приходу дорівнює $T_1 + \tau/2$ (з урахуванням першого моменту стартового імпульсу $\left\langle t'\right\rangle_0$).

Зрештою, при $n = 2$ знайдемо для середньої тривалості імпульсу $\sqrt{D_L}$

$$D_L=\left\langle (t-T_1)^2\right\rangle_L=\frac{1}{6}\tau^2+D_0, \tag{27}$$

де $\sqrt{D_0}$ – середня тривалість вихідного імпульсу. Таким чином, до дисперсії D_0 додається величина $\tau^2/6$. Якщо вихідний імпульс як функція часу є δ-функцією, $I_i(t') = \delta(t')$, то в результаті поширення в розсіювальному середовищі його середня тривалість становитиме:

$$\sqrt{D_L}=\tau/\sqrt{6}=\frac{1}{\sqrt{24}\alpha_p c}\left(\int_0^L\sqrt{\rho(z)\sigma_s(z)}\,dz\right)^2. \tag{28}$$

Отже, тривалість імпульсу відображає поздовжні варіації концентрації середовища, що розсіює. В окремому випадку однорідного вздовж осі z середовища, коли $\rho(z)$ і $\sigma(z)$ постійні, отримаємо:

$$\sqrt{D_L}=(\rho\sigma_s L^2)(\sqrt{24}\alpha_p c)^{-1}, \tag{29}$$

тобто тут середня тривалість імпульсу зростає пропорційно квадрату прогонової відстані [1].

Зважаючи на значне різноманіття варіантів параметрів середовища, що розсіює, чисельне моделювання проведемо, використовуючи відносні значення. Як робочу формулу використовуємо таку:

$$I(t,L)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}I_{in}(t')\,dt'\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\exp\left[iu(t-t'-L/v)\right]}{\operatorname{ch}\sqrt{iu\tau}}du, \tag{30}$$

де L – довжина пройденого шляху фронту зондуючого імпульсу до моменту t, v – швидкість імпульсу, а сам імпульс виберемо з гаусівської форми:

$$I_{in}(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2\tau^2}\right), \tag{31}$$

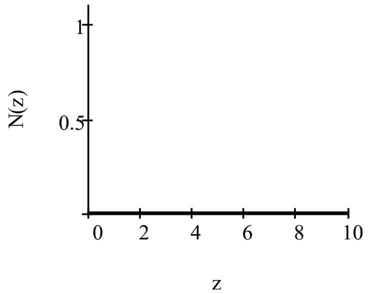
з дисперсією

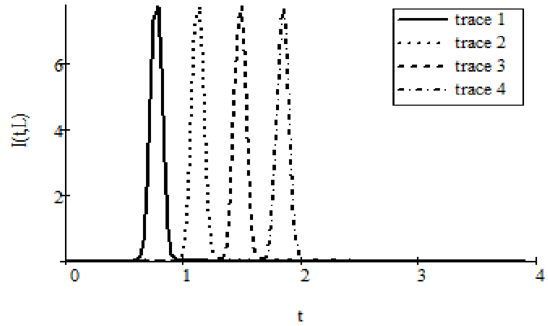
$$\tau=\left(\int_0^L N(z)\,dz\right)^2, \tag{32}$$

де $N(z)$ – ефективна щільність центрів розсіювання середовища.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-11

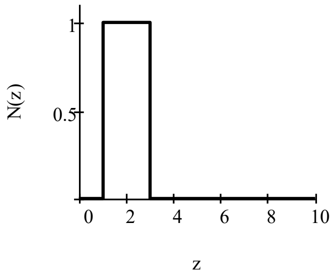
Виберемо форму зондуючого імпульсу гаусівською (31), що має дисперсію $\tau = 0{,}05$ і поширюється зі швидкістю $v = 0{,}09$. На рис. 1 на інтервалі $1 \le z \le 4$ показано приклад утворення 4 шлейфів розсіяної хвилі на вибраних відстанях (L = 0,9, 2,1, 3,3, 4,5) у разі відсутності розсіювальних центрів (згори) й у разі їх наявності на відстанях (L = 1,5, 1,8, 2,1, 2,4) (знизу). У другому випадку видно динаміку формування шлейфів розсіяної хвилі, у яких хвостова частина розташована в периферійній ділянці часу t.

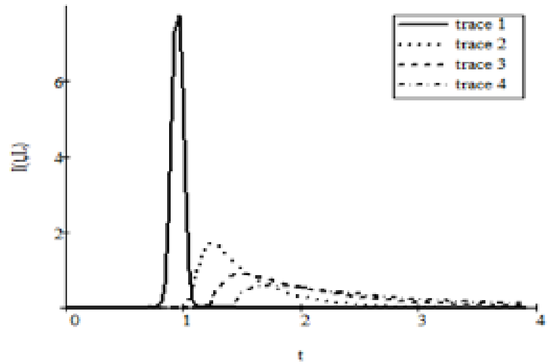




Профіль зони розсіювання

Сімейство тимчасових імпульсів *I(t,L)*; *L*=0,9 (лінія), *L*=2,1 (крапки), *L*=3,3 (тире), *L*=4,5 (пунктир)





Профіль зони розсіювання

Сімейство тимчасових імпульсів *I(t,L)*; *L*=1,5 (лінія), *L*=1,8 (крапки), *L*=2,1 (тире), *L*=2,4 (пунктир)

Рис. 1. Зверху – випадок відсутності центрів, що розсіюють, знизу – розсіювальне середовище на інтервалі $1 \le z \le 4$

З сімейства кривих $I(t, L)$, наведених унизу на рис. 1, видно, що вони мають лагерівську властивість [6; 7], а саме: функція $I(t, L)$ тотожно дорівнює нулю при $t = 0$ (флуктуаційна ділянка), функція $I(t, L)$ має один максимум і дві точки перегину (основна ділянка), функція $I(t, L)$ має експонентну асимптотику при $t \to \infty$ (периферійна ділянка).

З формул (22) – (23) видно, що можливий розгляд різних видів залежності концентрації та перерізу розсіювання від поточної координати z.

Висновки

На закінчення відзначимо, що розвитком запропонованого апроксимаційного підходу стосовно процесів, які впливають на часове затягування електромагнітних імпульсів, може бути врахування згасання випромінювання в разі його поширення в неоднорідному поглинаючому

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-11

середовищі [4]. Математичною основою при цьому послугує врахування в параболічному рівнянні (3) доданка, пов'язаного з поглинанням, при цьому коефіцієнти рівняння можуть залежати від поздовжньої координати. Зазначимо також, що аналіз еволюції форми тимчасового імпульсу в разі його поширення дає можливість судити про просторовий розподіл характеристик розсіювального середовища вздовж осі розповсюдження.

Список використаної літератури

1. Ishimaru A. Theory and Application of Wave Propagation and Scattering in Random Media. *Proc. IEEE*. 1977. Vol. 65. P. 1030–106.
2. Ishimaru A. Propagation and scattering of waves in randomly inhomogeneous media. 1997. Vol. 2.
3. Flatte S.M. Wave Propagation Through Random Media: Contributions from Ocean Acoustics. 1983. *Proc. IEEE*. Vol. 71. P. 1267–1294.
4. Галуза А.А., Мазманишвили А.С. Форма импульса, распространяющегося в неоднородной непоглощающей среде. *Радиофизика и Радиоастрономия*. 1997. Vol. 2. P. 353–358.
5. Helstrom K. Quantum Theory of Hypothesis Testing and Estimation. 1979. 344 p.
6. Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. N-Y. : John Wiley & Sons, 1970.

References

1. Ishimaru, A. (1977). Theory and Application of Wave Propagation and Scattering in Random Media. *Proc. IEEE*. Vol. 65. P. 1030–1061.
2. Ishimaru, A. (1997). Propagation and scattering of waves in randomly inhomogeneous media. *IEEE Press, Piscataway.* Vol. 2.
3. Flatte, S.M. (1983). Wave Propagation Through Random Media: Contributions from Ocean Acoustics. *Proc. IEEE*. Vol. 71. P. 1267–1294.
4. Galuza, A.A. & Mazmanishvili, A.S. (1997). Shape of a pulse propagating from an inhomogeneous non-absorbing medium. *Radiophysics and Radioastronomy*. Vol. 2. P. 353–358.
5. Helstrom, K. (1979). Quantum Theory of Hypothesis Testing and Estimation. 344 p.
6. Feller, W. (1970). An Introduction to Probability Theory and its Applications. N-Y. : John Wiley & Sons.

Мазманішвілі Олександр Сергійович – д.ф.-м.н., професор, старший науковий співробітник Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут», e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

Mazmanishvili Oleksandr Serhiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Senior Researcher at the National Science Center "Kharkiv Physical-Technical Institute", e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-11