УДК 539.3

Н.О. ЯРЕЦЬКА, А.О. РАМСЬКИЙ
Хмельницький національний університет
В.В. МОРОЗ
Хмельницький кооперативний торговельно-економічний інститут

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КІЛЬЦЕВИХ ТІЛ

У статті представлено метод побудови розв'язків основних рівнянь лінеаризованої теорії пружності для тіл (штампів) кільцевої форми з довільним контуром поперечного перерізу. Розв'язки виписано в системі кругових циліндричних координат для пружного скінченного кільцевого штампа з початковими (залишковими) напруженнями в разі вісесиметричної деформації щодо геометричної осі тіла. Поданий метод побудови може застосовуватися під час дослідження просторових вісесиметричних статичних контактних задач лінеаризованої теорії пружності в координатах початкового деформованого стану для стисливих і нестисливих тіл у випадку однорідних початкових напружень. Це дасть змогу виявити вплив початкових напружень на контактні характеристики тіл і посприяти підвищенню надійності й довговічності інженерних споруд і конструкцій.

Важливо відмітити, що врахування початкових (залишкових) напружень у межах лінеаризованої теорії пружності істотно змінює постановку та значно ускладнює розв'язання класичних контактних задач. Тому результати, запропоновані в статті, можна використовувати під час різних постановок подібних задач, де є штампи кільцевої або навіть циліндричної форми. Отримані розв'язки можуть також суттєво допомогти в разі виведення аналітичних залежностей для компонентів напружено-деформованого стану скінченних кільцевих штампів із початковими (залишковими) напруженнями при задоволенні граничних умов конкретної контактної задачі.

Розв'язки отримано у вигляді гармонійних функцій, що задовольняють рівняння Лапласа. Вони виведені за допомогою методу розділення змінних (методу Фур'є) й адаптовані для задоволення граничних умов конкретних контактних задач.

Умовою існування єдиного розв'язку основного диференціального рівняння лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл є умова сильної еліптичності рівнянь. Ураховуючи це, загальні розв'язки кільцевих тіл представимо у двох можливих варіантах, а саме: 1) у випадку рівних коренів диференціального рівняння; 2) у випадку нерівних його коренів. Такий підхід побудови дав змогу використати отримані результати для числових досліджень контактної взаємодії пружних тіл у випадках довільної структури їх пружного потенціалу.

Ключові слова: кільцеві штампи, лінеаризована теорія пружності, контактні задачі, початкові напруження, залишкові напруження, рівняння Лапласа, метод розділення змінних.

N.O. YARETSKA, A.O. RAMSKYI
Khmelnytskyi National University
V.V. MOROZ
Khmelnytskyi Cooperative Trade and Economic Institute

CONSTRUCTION OF SOLUTIONS OF THE BASIC EQUATIONS OF THE LINEARIZED THEORY OF ELASTICITY FOR RING BODIES

A method of constructing solutions of the basic equations of the linearized theory of elasticity for bodies (stamps) of ring shape with an arbitrary cross-sectional contour is presented. The solutions are written in the system of circular cylindrical coordinates for an elastic finite ring stamp with initial (residual) stresses for the case of axisymmetric deformation relative to the geometric axis of the body. The presented method of construction can be used in the study of spatial axisymmetric static contact problems of the linearized theory of elasticity in the coordinates of the initial deformed state for compressible and incompressible bodies in the case of uniform initial stresses. This will reveal the influence of initial stresses on the contact characteristics of bodies and contribute to increasing the reliability and durability of engineering structures and structures.

It is important to note that taking into account the initial (residual) stresses within the linearized theory of elasticity significantly changes the formulation and significantly complicates the solution of classical contact problems. Therefore, the results proposed in the article can be used to solve similar problems where there are annular or even cylindrical stamps. The obtained solutions can also significantly help in the derivation of analytical dependencies for the components of the stress-strain state of finite ring dies with initial (residual) stresses when the boundary conditions of a specific contact problem are met.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-16

The solutions are obtained in the form of harmonic functions that satisfy the Laplace equation. They are derived using the method of separation of variables (Fourier method) and adapted to meet the boundary conditions of specific contact problems.

The condition for the existence of a single solution of the basic differential equation of the linearized theory of elasticity for compressible and incompressible bodies is the condition of strong ellipticity of the equations. Taking this into account, we will present the general solutions of ring bodies in two possible variants, namely: 1) in the case of equal roots of the differential equation; 2) in the case of unequal roots. This construction approach made it possible to use the obtained results for numerical studies of the contact interaction of elastic bodies in cases of arbitrary structure of their elastic potential.

Key words: ring dies, linearized theory of elasticity, contact problems, initial stresses, residual stresses, Laplace equation, method of separation of variables.

Постановка проблеми

У роботі представлено метод побудови розв’язків основних рівнянь лінеаризованої теорії пружності для тіл кільцевої форми з довільним контуром поперечного перерізу в загальному вигляді. Такі розв’язки використовують під час дослідження контактної взаємодії пружних стисливих або нестисливих кільцевих тіл із початковими напруженнями в межах теорії великих початкових (кінцевих) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу.

Важливо відмітити, що врахування початкових (залишкових) напружень у межах лінеаризованої теорії пружності істотно змінює постановку й значно ускладнює розв’язання класичних контактних задач. Тому результати, запропоновані в статті, можна використовувати під час різних постановок подібних задач, де є штампи кільцевої або навіть циліндричної форми. Отримані розв’язки можуть також суттєво допомогти в процесі виведення аналітичних залежностей для компонентів напружено-деформованого стану скінченних кільцевих штампів із початковими (залишковими) напруженнями при задоволенні граничних умов конкретних контактних задач.

Так, наприклад, необхідність у розв’язку цієї задачі може виникати під час розрахунків на міцність і визначення контактних напружень і переміщень для пружних колон будівель, димових труб, градирень, водонапірних веж та інших висотних споруд із підошвами з фундаментів на вітрове навантаження або навантаження від власної ваги.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Запропонований метод побудови розв’язків для кільцевих тіл застосовувався під час дослідження низки просторових вісесиметричних статичних контактних задач лінеаризованої теорії пружності в координатах початкового деформованого стану для стисливих і нестисливих тіл у випадку однорідних початкових деформацій [1–3]. Подібний метод побудови розв’язків, але для циліндричних тіл використано в працях [4; 5]. Залучення теорії рівнянь математичної фізики [6; 7] дало змогу отримати аналітичні та числові розв’язки вказаних контактних задач, а також виявити вплив початкових напружень на контактні характеристики тіл, що взаємодіють.

Загалом побудова аналітичних розв’язків для кільцевих (а в деяких випадках і для циліндричних) тіл є підґрунтям підвищення надійності й довговічності інженерних споруд і конструкцій, оскільки використовується в багатьох конкретних контактних задачах [4; 8–10], актуальність яких очевидна.

Мета дослідження

У загальному вигляді можна побудувати аналітичні розв’язки основного диференціального рівняння лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл (штампів) кільцевої форми з довільним контуром поперечного перерізу, ураховуючи при цьому умову існування єдиного розв’язку – умову сильної еліптичності диференціальних рівнянь [4].

Представити розв’язки кільцевих тіл у двох можливих варіантах: у випадку рівних коренів диференціального рівняння й у випадку нерівних його коренів.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-15

На прикладі числового розв'язку контактної задачі про тиск пружного кільцевого штампа на пружний півпростір із початковими (залишковими) напруженнями [1] провести чисельний аналіз і графічно представити в безрозмірних координатах напруження в кільцевому штампі та його контактні переміщення.

Виклад основного матеріалу дослідження

Побудова розв'язків в аналітичному вигляді

Представимо загальні розв'язки лінеаризованої теорії пружності щодо статичної задачі [1–5] для стисливих і нестисливих тіл у випадку вісесиметричної деформації.

Для дослідження будемо застосовувати координати деформованого стану Oy_i (i = 1, 2, 3), які пов'язані з лагранжевими координатами x_i (природного стану) співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$, (i = 1, 2, 3), де λ_i, (i = 1, 2, 3) – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового (залишкового) стану.

Спираючись на [4], основне диференціальне рівняння лінеаризованої теорії пружності запишемо у вигляді:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0, \tag{1}$$

де $L'_{m\alpha} = \begin{cases} \omega'_{ij\alpha\beta}\partial^2 \big/ \partial y_i \partial y_\beta - \text{для стисливих тіл,} \\ \kappa'_{ij\alpha\beta}\partial^2 \big/ \partial y_i \partial y_\beta - \text{для нестисливих тіл;} \end{cases}$

U_α – переміщення по нормалі та дотичній до контуру поперечного перерізу в площині $y_3 = const$, $\omega'_{ij\alpha\beta}$, $\kappa'_{ij\alpha\beta}$ – складники тензорів модулів пружності четвертого порядку, що мають властивість $\omega'_{ij\alpha\beta} = \omega'_{\beta\alpha ji}$, $\kappa'_{ij\alpha\beta} = \kappa'_{\beta\alpha ji}$.

Застосувавши операторний метод, розв'язок (1) матиме вигляд [4]:

$$u_i^{(k)} = \partial \det \left\| L'_{rs} \right\| \big/ \partial \left(L''_{ik} \right) \Phi'^k, \quad (k = \overline{1,3}), \tag{2}$$

де Φ'^k – функції, які визначаються з таких рівнянь:

$$\det \left\| L'_{rs} \right\| \Phi'^k = 0, \quad (k = \overline{1,3}). \tag{3}$$

Ураховуючи (2), загальний розв'язок просторових статичних задач для стисливих і нестисливих тіл виражаємо, як і в [4], через розв'язки диференціального рівняння:

$$\left(\Delta_1 + \xi_1'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta_1 + \xi_2'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta_1 + \xi_3'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \Phi'^k = 0, \tag{4}$$

де $\Delta_1 = \partial^2 / \partial y_1^2 + \partial^2 / \partial y_2^2$, $\xi_i'^2$ $(i = 1, 2, 3) -$ корені визначального рівняння (4), значення яких подані в працях [4; 5] для стисливих і нестисливих тіл.

Приймемо функцію Φ'^k у формі:

$$\Phi'^1 = \Phi'^2 = \Psi, \qquad \Phi'^3 = \tilde{\chi} \tag{5}$$

Причому для осесиметричних задач Ψ =0, з [4], (4), (5) отримаємо:

$$\left(\Delta_1 + \xi_2'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta_1 + \xi_3'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \tilde{\chi} = 0. \tag{6}$$

Відзначимо, що для всіх потенціалів найпростішої структури у випадку стисливих і нестисливих тіл [4] усі величини $\xi_i'^2$ $(i = 1, 2, 3)$ з (4) додатні (хоч це не є доказом загального положення). Одним із загальних обмежень на величини $\xi_i'^2$ $(i = 1, 2, 3)$ є вимога, щоб розв'язок лінеаризованої задачі був єдиним (одне з основних припущень механіки контактної взаємодії).

Академік О.М. Гузем [4; –10] показав, що умовою існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл є умова сильної еліптичності рівнянь (4):

$$\operatorname{Re} \xi_i'^2 > 0; \qquad \operatorname{Im} \xi_i'^2 = 0, \ i = 2, 3. \tag{7}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-16

Ураховуючи (7), можливі два варіанти представлення загального розв'язку (4) або (6):
1) випадок рівних коренів ($\xi_2^{'2} = \xi_3^{'2}$) [4]:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + y_3\tilde{\chi}_2, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2^{'2}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\tilde{\chi}_1 = 0, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2^{'2}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\tilde{\chi}_2 = 0; \tag{8}$$

2) випадок нерівних коренів ($\xi_2^{'2} \neq \xi_3^{'2}$) [4]:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2^{'2}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\tilde{\chi}_1 = 0, \quad \left(\Delta_1 + \xi_3^{'2}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\tilde{\chi}_2 = 0. \tag{9}$$

Уведемо змінні:

$$\xi_1^{'2} = n_3, \; \xi_2^{'2} = n_1, \; \xi_3^{'2} = n_2, \tag{10}$$

У системі кругових циліндричних координат (r,θ,z_i) $(i=1,2)$, де $z_i = v_i^{-1}y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i=1,2)$ випишемо загальні розв'язки в зручній формі для скінченного кільцевого тіла у випадку вісесиметричної його деформації відносно геометричної осі. Крім того, будемо вважати, що початкові (залишкові) напруження рівномірно діють уздовж координатних осей r, θ, виконується умова однорідності початкових напружень.

Для випадків (8), (9) гармонічні функції $\tilde{\chi}_i$ (i=1,2) представимо у вигляді суми інших двох гармонічних функцій:

$$\tilde{\chi}_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \tag{11}$$

$$\tilde{\chi}_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}, \tag{12}$$

які є розв'язками диференціального рівняння Лапласа [6; 7]:

$$\nabla^2\Phi_{kj} = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + v_i^2\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}, \quad (k,j,i=1,2). \tag{13}$$

Часткові розв'язки (11)–(12) диференціальних рівнянь (13) будемо шукати методом розділення змінних (методом Фур'є) [6; 7] у вигляді добутку:

$$\Phi_{lj} = R_{lj}Z_{lj}, \quad (l,j=1,2). \tag{14}$$

Знайдемо розв'язок Φ_{11}:

$$\Phi_{11} = R_{11}(r)Z_{11}(y_3), \tag{15}$$

Підставимо (15) у (13) і поділимо на $v_i^2R_{11}Z_{11}$, знайдемо:

$$\frac{R_{11}'' + \frac{1}{r}R_{11}}{v_i^2R_{11}} = -\frac{Z_{11}''}{Z_{11}} = \gamma_k^2, \tag{16}$$

де γ_k^2 є власним значенням задачі (константою).

Одержимо такі рівняння:

$$R_{11}'' + r^{-1}R_{11} - v_i^2\gamma_k^2R_{11} = 0, \; Z_{11}'' + \gamma_k^2Z_{11} = 0, \tag{17}$$

Перше рівняння (17) є рівнянням Бесселя [6; 7], розв'язок якого запишемо у вигляді:

$$R_{11}(r) = A_k^{(1)}I_0(\gamma_kv_ir) + B_k^{(1)}K_0(\gamma_kv_ir), \quad (i=1,2), \tag{18}$$

де $I_v(\gamma_kv_ir)-$ функція Бесселя уявного аргументу, $K_v(x)-$ функція Макдональда, $A_k^{(1)}$, $B_k^{(1)}$ – сталі величини, що визначаються враховуючи граничні умови конкретної контактної задачі.

Для циліндричних тіл варто зробити зауваження, що розв'язок першого рівняння (13) повинен бути обмеженим при $r = 0$, тоді константу $B_k^{(1)}$ потрібно прирівняти до нуля, так як $K_0(0) = \infty$. Для кільцевих тіл цього робити не будемо.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-15

Друге рівняння (17) є звичайним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, розв'язок якого має вигляд:

$$Z_{11}(\gamma_k v_1 z_1) = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1), \tag{19}$$

де $C_k, D_k -$ сталі величини, що визначаються з граничних умов конкретної контактної задачі.

Щоб розв'язок (19) задовольняв конкретні граничні умови задач, розв'язують задачу Штурма-Ліувілля [6; 7] і знаходять γ_k^2. Звідси:

$$\Phi_{11} = (A_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_i r) + B_k^{(1)} K_0(\gamma_k v_i r)) S_1(\gamma_k v_i z_i), \quad (i = 1,2), \tag{20}$$

де $S_1(\gamma_k v_i z_i) = C_k \sin(\gamma_k v_i z_i) + D_k \cos(\gamma_k v_i z_i), \quad (i = 1,2)$.

Функцію Φ_{12} знаходимо аналогічно, як і для (15), лише (16) матиме вигляд:

$$\frac{R_{12}'' + \frac{1}{r} R_{12}}{v_i^2 R_{12}} = -\frac{Z_{12}''}{Z_{12}} = -\alpha_k^2, \tag{21}$$

де α_k^2 – ще одне власне значення задачі (стала величина).

Опускаючи викладки (17)–(19), одержимо:

$$\Phi_{12} = (T_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)) S_2(\alpha_k z_i), \quad (i = 1,2), \tag{22}$$

де $J_v(x) -$ функція Бесселя дійсного аргументу, $Y_v(x) -$ функція Неймана, $S_2(\alpha_k z_i) = E_k sh(\alpha_k z_i) + F_k ch(\alpha_k z_i), \quad (i = 1,2)$, $T_k^{(1)}, T_k^{(2)} -$ сталі величини, що визначаються з граничних умов конкретної контактної задачі.

Аналогічно знаходимо розв'язки для решти функцій (14).

Також для задоволення граничних умов контактних задач лінеаризованої теорії пружності необхідно підібрати ще простішу гармонійну функцію. Таку функцію підберемо у вигляді:

$$\tilde{\chi}_i = A_0(r^2 - 2z_i^2) + C_0 z_i (3r^2 - 2z_i^2). \tag{23}$$

де $A_0, C_0 -$ сталі величини, що визначаються з граничних умов конкретної контактної задачі, $i = 1$, для випадку рівних коренів (8), а для випадку нерівних коренів (9) $i = 1,2$.

Отже, ураховуючи (23), можемо констатувати, що загальні розв'язки рівняння (6) для кільцевого тіла залежно від коренів (10) визначального рівняння (6) мають вигляд:

для рівних коренів $n_1 = n_2$:

$$\begin{gathered} \tilde{\chi}_1 = A_0(r^2 - 2z_1^2) + C_0 z_1(3r^2 - 2z_1^2) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [A_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + A_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r)] S_1(\gamma_k v_1 z_1) + [T_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] S_2(\alpha_k z_1) \right\}, \\ \tilde{\chi}_2 = A_0(r^2 - 2z_1^2) + C_0 z_1(3r^2 - 2z_1^2) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [B_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + B_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r)] S_1(\gamma_k v_1 z_1) + [W_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + W_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] S_3(\alpha_k z_1) \right\}, \end{gathered} \tag{24}$$

де $W_k^{(1)}, W_k^{(2)} -$ сталі величини, що визначаються з граничних умов конкретної контактної задачі, $S_3(\alpha_k z_1) = N_k sh(\alpha_k z_1) + M_k ch(\alpha_k z_1)$.

Загальний розв'язок (8) матиме вигляд:

$$\begin{gathered} \tilde{\chi} = (1 + v_1 z_1)[A_0(r^2 - 2z_1^2) + C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2)] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [(A_k^{(1)} + v_1 z_1 B_k^{(1)}) I_0(\gamma_k v_1 r) + (A_k^{(2)} + v_1 z_1 B_k^{(2)}) K_0(\gamma_k v_1 z_1)] S_1(\gamma_k v_1 z_1) + \right. \\ \left. + [T_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] S_2(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 [W_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + W_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] S_3(\alpha_k z_1) \right\}. \end{gathered} \tag{25}$$

де $W_k^{(1)}, W_k^{(2)} -$ сталі величини, що визначаються з граничних умов конкретної контактної задачі, $S_3(\alpha_k z_1) = N_k sh(\alpha_k z_1) + M_k ch(\alpha_k z_1)$.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-16

Для нерівних коренів $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{gathered}\tilde{\chi}_1 = A_0(r^2 - 2z_1^2) + C_0 z_1(3r^2 - 2z_1^2) + \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\left\{[A_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + A_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r)] S_1(\gamma_k v_1 z_1) + [T_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] S_2(\alpha_k z_1)\right\}, \\ \tilde{\chi}_2 = A_0(r^2 - 2z_i^2) + C_0 z_i(3r^2 - 2z_i^2) + \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\left\{[B_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_2 r) + B_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_2 r)] S_1(\gamma_k v_2 z_2) + [W_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + W_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] S_3(\alpha_k z_2)\right\}.\end{gathered} \tag{26}$$

Загальний розв'язок (9) матиме вигляд:

$$\begin{gathered}\tilde{\chi} = 2A_0(r^2 - z_1^2 - z_2^2) + C_0\left(z_1(3r^2 - 2z_1^2) + z_2(3r^2 - 2z_2^2)\right) + \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\left\{[A_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + A_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r)] S_1(\gamma_k v_1 z_1) + [B_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_2 r) + B_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_2 r)] S_1(\gamma_k v_2 z_2) + \right. \\ \left. +[T_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] S_2(\alpha_k z_1) + [W_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + W_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] S_3(\alpha_k z_2)\right\}.\end{gathered} \tag{27}$$

Отже, побудовано загальні аналітичні розв'язки основного диференціального рівняння лінеаризованої теорії пружності (6) для стисливих і нестисливих тіл кільцевої форми з довільним контуром поперечного перерізу.

Числовий розв'язок

На прикладі розв'язку контактної задачі про тиск пружного кільцевого штампа на півпростір із початковими (залишковими) напруженнями [1] проведено числовий аналіз для потенціалу Трелоара при наступних значеннях параметрів: $R_1 = 1\cdot 10^{-2}$ м, $R_2 = 2\cdot 10^{-2}$ м, $H = 1\cdot 10^{-1}$ м, $\lambda_1 = 0.7;\ 0.8;\ 0.9;\ 1; 1.1; 1.2; 1.3$, де $R_1 \le r \le R_2$, R_1 – внутрішній радіус кільцевого штампа, R_2 – зовнішній радіус кільцевого штампа, H – висота кільцевого штампа.

Алгоритм розв'язку реалізовано у вигляді програми у пакеті Maple 17.

На рис. 1 представлено розподіл контактного переміщення $-\dfrac{1}{\varepsilon R_2}\tilde{U}_r^{(1)}$ під кільцевим штампом на межі контакту в безрозмірних координатах, де пунктирна крива відповідає кільцевому циліндру без початкових напружень ($\lambda_1 = 1$), а суцільна – з початковими напруженнями. На рис. 2 представлено напруження $\dfrac{1}{P}\tilde{Q}_{3r}^{(1)}$ при різних значеннях z_1.

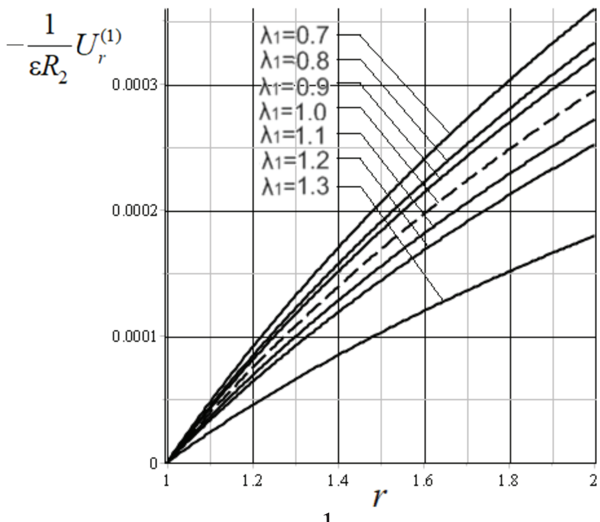

Рис. 1. Контактні переміщення $-\dfrac{1}{\varepsilon R_2}\tilde{U}_r^{(1)}$ **під кільцевим штампом**

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-15

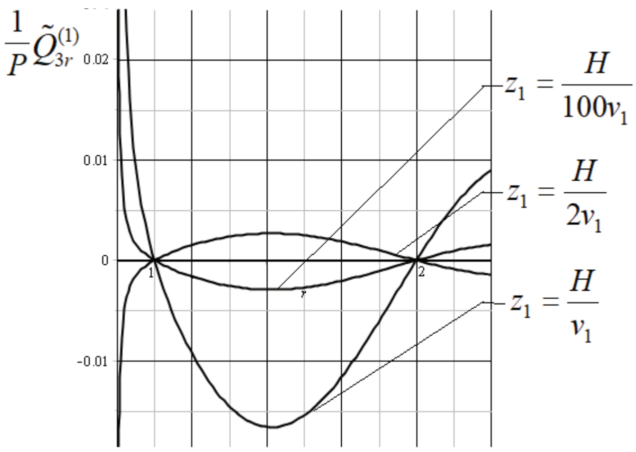

Рис. 2. Напруження $\frac{1}{P}\tilde{Q}_{3r}^{(1)}$ в кільцевому штампі

Висновки

У статті в загальному вигляді побудовано аналітичні розв'язки основного диференціального рівняння лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл кільцевої форми з довільним контуром поперечного перерізу з урахуванням при цьому умови існування єдиного розв'язку (7). Розв'язки кільцевих тіл представлено у двох випадках: 1) для рівних коренів рівняння (6); 2) для нерівних коренів рівняння (6).

На прикладі розв'язку контактної задачі про тиск пружного кільцевого штампа на пружний півпростір із початковими (залишковими) напруженнями [1] проведено чисельний аналіз, який представлений у вигляді графіків у безрозмірних координатах з метою ілюстрації напружень і контактних переміщень у кільцевому штампі.

З графіків видно, що при сталому зовнішньому навантаженні початкові напруження впливають на основні контактні характеристики кільцевого штампу. Таким чином, отримані результати можуть бути використані для дослідження низки інших контактних задач, у яких попередньо напружені кільцеві штампи взаємодіють із пружними або жорсткими тілами.

Список використаної літератури

1. Babych S.Y., Yarets'ka N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics.* 2021. Vol. 57. № 3. P. 297–305. doi: 10.1007/s10778-021-01081-7
2. Yaretskaya N.A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54. № 5. P. 539–543. doi: 10.1007/s10778-018-0906-y
3. Габрусєва І.Ю., Шелестовський Б.Г. Контактна взаємодія кільцевого штампа з попередньо напруженим ізотропним шаром. *Вісник Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2011. Том 54. № 3. С. 138–146.
4. Guz A.N., Rudnitsky V.B. Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses : монографія. Хмельницький : Вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
5. Yaretska N.O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. *Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences* : collective monograph. Riga, Latvia : Baltija Publishing, 2022. P. 261–295. doi: 10.30525/978-9934-26-200-5-10
6. Бобик О.І., Бобик І.О., Литвин В.В. Рівняння математичної фізики : навчальний посібник. Львів : Новий світ-2000, 2010. 256 с.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-16

7. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики: підручник. Київ : Либідь, 2006. 424 с.
8. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitskii V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Int. Appl. Mech. Rew*. 1998. Vol. 51. № 5. P. 343–371. doi: 10.1115/1.3099009
9. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями : навчальний посібник. Київ : Вища школа, 1995. 304 с.
10. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. № 4. P. 343–415. doi: 10.1007/s10778-019-00960-4

References

1. Babych, S.Y. & Yarets'ka, N.O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics.* Vol. 3. P. 297–305. doi: 10.1007/s10778-021-01081-7 [in English]
2. Yaretskaya, N.A. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. Vol. 5. P. 539–543. doi: 10.1007/s10778-018-0906-y [in English]
3. Habrusieva, I.Yu. & Shelestovskyi, B.H. (2011). Kontaktna vzaiemodiia kiltsevoho shtampa z poperedno napruzhenym izotropnym sharom – [Contact interaction of a ring die with a prestressed isotropic layer]. *Visnyk Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia*. Vol. 3. P. 138–146. [in Ukrainian]
4. Guz, A.N. & Rudnitsky, V.B. (2006). Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytskyi : Vyd. PP Melnyk. [in English]
5. Yaretska, N.O. (2022). Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. *Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences.* Riga, Latvia : "Baltija Publishing". P. 261–295. doi:10.30525/978-9934-26-200-5-10 [in English]
6. Bobyk, O.I., Bobyk, I.O. & Lytvyn, V.V. (2010). Rivniannia matematychnoi fizyky – [Equations of mathematical physics]. Lviv : Novyi svit-2000. [in Ukrainian]
7. Perestiuk M.O. & Marynets V.V. (2006). Teoriia rivnian matematychnoi fizyky – [Theory of mathematical physics equations]. Kyiv : Lybid. [in Ukrainian]
8. Guz A.N., Babich S.Y. & Rudnitskii V.B. (1998). Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Int. Appl. Mech. Rew*. Vol. 5. P. 343–371. doi: 10.1115/1.3099009 [in English]
9. Huz, O.M., Babych S.Iu. & Rudnytskyi V.B. (1995). Kontaktna vzaiemodiia til z pochatkovymy napruzhenniamy – [Contact interaction of bodies with initial stresses]. Kyiv : Vyshcha shkola. [in Ukrainian]
10. Guz. A.N. (2019). Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). *International Applied Mechanics*. Vol. 4. P. 343–415. doi: 10.1007/s10778-019-00960-4 [in English]

Ярецька Наталія Олександрівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету, e-mail: massacran2@ukr.net, yaretskano@khmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-3726-2878.

Рамський Андрій Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету, e-mail: ramsky@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9624-5018.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-15

Мороз Володимир Вікторович – старший викладач кафедри соціально-гуманітарної підготовки Хмельницького кооперативного торговельно-економічного інституту, e-mail: morozvv2008@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4511-1084.

Yaretska Nataliia Oleksandrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.), Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Computer Applications of the Khmelnytskyi National University, e-mail: massacran2@ukr.net, yaretskano@khmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Ramskyi Andrii Oleksandrovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.), Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics and Computer Applications of the Khmelnytskyi National University, e-mail: ramsky@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9624-5018.

Moroz Volodymyr Viktorovych – Senior Lecturer at the Department of Social and Humanitarian Training of Khmelnytskyi Cooperative Trade and Economic Institute, e-mail: morozvv2008@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4511-1084.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-1-16