УДК 517.928

Г.В. ДАНИЛІНА, М.О. РАШЕВСЬКИЙ
Криворізький фаховий коледж Національного авіаційного університету
П.Ф. САМУСЕНКО
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ СИСТЕМАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ

Сингулярно збурені системи оптимального керування, що містять змінні параметри, інтегруються асимптотичними методами. Асимптотичний розв'язок згаданої системи залежить від спектру головної матриці системи. Для систем лінійних алгебраїчно-диференціальних рівнянь асимптотичні розв'язки залежать від спектру граничної в'язки матриць. Оптимізаційні задачі керування системами сингулярно збурених алгебраїчно-диференціальних рівнянь почали досліджуватись у нинішньому столітті. Теорію асимптотичного інтегрування систем з виродженнями розроблено у працях А.М. Самойленка, М.І. Шкіля, Г.С. Жукової, В.П. Яковця наприкінці минулого століття. Розроблені методи дали можливість побудувати асимптотичні розв'язки систем з виродженнями для випадку стабільного спектру граничної в'язки матриць. Розв'язки згаданих систем керування побудовано у працях В.П. Яковця та О.В. Тарасенко.

Важливими у практичних застосуваннях є системи сингулярно збурених рівнянь із точками повороту. Для систем звичайних диференціальних рівнянь із точками повороту асимптотичні розв'язки побудовано у працях М. Івано, Я. Сибуйя, В. Вазова. Асимптотичні розв'язки систем із точками повороту є багатомасштабними. Двомасштабні асимптотичні розв'язки систем алгебраїчно-диференціальних рівнянь побудова-но А.М. Самойленком та П.Ф. Самусенком. Системи оптимального керування звичайними диференціальними рівняннями із нестабільним спектром досліджував В.М. Лейфура.

У цій статті отримані згаданими авторами результати застосовуються до розв'язування задачі оптимального керування системою сингулярно збурених алгебраїчно-диференціальних рівнянь із простою точкою повороту. Побудовано асимптотичне зображення матриці імпульсних перехідних функцій системи рівнянь із простою точкою повороту, дано асимптотичні оцінки побудованих наближень. У загальній постановці задача оптимального керування розглядається без отримання конкретних оцінок. На оцінку похибки впливає як кратність, так і тип точки повороту. Система, що утворюється застосуванням принципу максимуму Понтрягіна також матиме нестабільний спектр, але тип точки повороту може змінитися. Тому конкретні оцінки потребують окремого розгляду. Це буде задачею майбутніх досліджень.

Ключові слова: система оптимального керування, системи диференціальних рівнянь з виродженнями, асимптотичний розв'язок, точка повороту.

G.V. DANYLINA, M.O. RASHEVS'KYI
Kryvyi Rih Professional College of National Aviation University
P.F. SAMUSENKO
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATIONS

Singularly perturbed optimal control systems with variable parameters are integrated by asymptotic methods. The asymptotic solution of this system depends on the spectrum of the main matrix of the system. For systems of linear algebraic-differential equations, the asymptotic solutions depend on the spectrum of the main matrix pencil. Optimization problems of controlling systems of singularly perturbed algebraic-differential equations have been studied in the present century. The theory of asymptotic integration of systems with degeneracies was developed in the works of A.M. Samoilenko, M.I. Shkil, G.S. Zhukova, and V.P. Yakovets at the end of the last century. The developed methods made it possible to construct asymptotic solutions of systems with degeneracies for the case of a stable spectrum of the boundary value of matrices. The solutions of these control systems were constructed in the works of V.P. Yakovets and O.V. Tarasenko.

Systems of singularly perturbed equations with turning points are important in practical applications. For systems of ordinary differential equations with turning points, asymptotic solutions were constructed in the works of M. Iwano, Y. Shibuya, and W. Wasow. Asymptotic solutions of systems with turning points are multiscale. Two-scale asymptotic solutions of systems of algebraic-differential equations were constructed by A.M. Samoilenko and P.F. Samusenko. Optimal control systems for ordinary differential equations with unstable spectrum were studied by V.M. Leifura.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

In this article, the results obtained by the above-mentioned authors are applied to the problem of optimal control of a system of singularly perturbed algebraic-differential equations with a simple turning point. An asymptotic representation of the matrix of impulse transition functions of the system of equations with a simple turning point is constructed, and asymptotic estimates of the constructed approximations are given. In the general post, the optimal control problem is considered without obtaining specific estimates. The error estimate is affected by both the multiplicity and the type of pivot point. The system formed by applying the Pontryagins maximum principle will also have an unstable spectrum, but the type of turning point may change. Therefore, specific estimates need to be considered. This will be the task of future research.

Key words: system of automatic control, systems of differential equations with degenerations, asymptotic solution, turning point.

Постановка проблеми

Процеси, що описуються системою диференціально-алгебричних рівнянь (ДАР)

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\vec{x} + C(t,\varepsilon)\vec{u}\,, \tag{1}$$

привертали увагу дослідників у зв'язку із широкими практичними застосуваннями. Тут $A(t, \varepsilon)$ та $B(t, \varepsilon)$ – квадратні матриці n-го порядку, $C(t, \varepsilon)$ – $(n \times m)$-матриця, $\vec{x}(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор стану, $\vec{u}(t,\varepsilon)$ – m-вимірний вектор керування, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, h – натуральне число, $t \in [0; T]$. Задачу про знаходження керування, під дією якого система (1) переходить зі стану

$$\vec{x}(0,\varepsilon) = \vec{x}_1(\varepsilon) \tag{2}$$

до стану

$$\vec{x}(T,\varepsilon) = \vec{x}_2(\varepsilon)\,, \tag{3}$$

надаючи мінімуму функціоналу $\frac{1}{2\varepsilon^h}\int_0^T (D(t,\varepsilon)u, u)dt \to \min_u$, де $D(t,\varepsilon)$ – симетрична $(m \times m)$-матриця, розв'язано [1; 10; 11] у різних припущеннях про спектр в'язки матриць

$$A(t, 0) - \lambda B(t, 0)\,. \tag{4}$$

Принциповою умовою, що накладалась у згаданих роботах на спектр, була його стабільність.

Для застосування методу малого параметра стандартними є таку вимоги:

1) Матриці $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$, $C(t, \varepsilon)$ та $D(t, \varepsilon)$ зображуються збіжними степеневими рядами вигляду

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t);\; B(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k B_k(t), \ldots \tag{5}$$

2) Коефіцієнти $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$ та $D_k(t)$ розвинень (5) відповідних матриць є нескінченно диференційовними на відрізку [0; T].

3) Вектори початкового та кінцевого станів мають зображення, аналогічні зображенням (5):

$$\overrightarrow{x_1}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \vec{x}_k^{(1)};\; \overrightarrow{x_2}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \vec{x}_k^{(2)}\,. \tag{6}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

4) Матриця $D(t, \varepsilon)$ неособлива на досліджуваному проміжку.

5) Область допустимих значень для керування $u(t, \varepsilon)$ збігається з усім заданим m-вимірним простором.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Сформульована задача (1)–(3) поєднує в собі дван напрямки досліджень у сучасній теорії асимптотичного аналізу систем диференціальних рівнянь. Система (1) є диференціально-алгебричною, теорія таких систем у математиці розвивалася у зв'язку з їхнім широким використанням як у задачах власне теорії диференціальних рівнянь, так і в інших розділах: теорії оптимального керування, теорії електричних кіл, хімічній кінетиці тощо [1; 5; 6; 7]. Рівняння системи мають змінні коефіцієнти, і тому, як правило, не інтегруються у квадратурах. Здебільшого досліджуються такі системи асимптотичними методами. Асимптотичні методи принципово залежать від характеру спектру граничного оператора (4). Для стабільного спектру розвинення за степенями малого параметра записуються на всьому проміжку зміни незалежної змінної. Нестабільність у спектрі граничного оператора, і, зокрема, наявність так званих точок повороту (ТП) [1–4, 12] призводить до необмеженості розв'язку при прямуванні до нуля малого параметра, на що вперше було вказано у дослідженнях С.А. Ломова. Згадана необмеженість у реальних технічних системах може призвести до нестійкості роботи або до аварійних ситуацій. Наявність точок повороту часто лежить в основі явищ, що вивчаються у конкретних системах. Так, у гідродинаміці ТП – це момент переходу ламінарної течії до турбулентної, у теорії механізмів – зникнення центробіжної сили у крайньому розтині лопасті.

Системи керування із нестабільним спектром почали вивчатися також нещодавно, уперше в роботі [1]. Основним методом розв'язування таких систем є багатомасштабний метод [1; 3; 6; 7; 12]. Тільки в окремих випадках можна побудувати розв'язок системи єдиним виразом [3].

Застосування до описаної задачі принципу максимуму Понтрягіна, для чого вводиться до розгляду функція Гамільтона

$$H(t,x,p,u)=\varepsilon^{-h}\left(A(t,\varepsilon)\vec{x},\vec{p}\right)+\varepsilon^{-h}\left(B(t,\varepsilon)\vec{u},\vec{p}\right)-\varepsilon^{-2h}\left(D(t,\varepsilon)\vec{u},\vec{u}\right)$$

та подальші міркування згідно з [8, 10], зводять сформульовану задачу до такої системи рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon^h B(t,\varepsilon)\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A(t,\varepsilon)\vec{x}+C(t,\varepsilon)\vec{u}; \\ \varepsilon^h \dfrac{d}{dt}\left(B^*(t,\varepsilon)\cdot\vec{p}\right)=-A^*(t,\varepsilon)\cdot\vec{p}+C^*(t,\varepsilon)\cdot\vec{p}; \\ 0=C^*(t,\varepsilon)\cdot\vec{p}-D(t,\varepsilon)\vec{u}. \end{cases} \tag{7}$$

У позначеннях $\vec{y}(t,\varepsilon)=colon\left(\vec{x}(t,\varepsilon),\ \vec{p}(t,\varepsilon),\ \vec{u}(t,\varepsilon)\right)$ остання система запишеться так:

$$\varepsilon^h\tilde{B}(t,\varepsilon)\frac{d\vec{y}}{dt}=\tilde{A}(t,\varepsilon)\vec{y}\,. \tag{8}$$

Тут $\tilde{B}(t,\varepsilon)=diag\left\{B(t,\varepsilon),\ B^*(t,\varepsilon),\ 0\right\}$, Надалі дотримуватимемося позначень [5, 11].

$$\tilde{A}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} A(t,\varepsilon) & 0 & C(t,\varepsilon) \\ 0 & -A^*(t,\varepsilon)-\varepsilon^h\left(B^*(t,\varepsilon)\right)' & 0 \\ 0 & C(t,\varepsilon) & -d(t,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

Розв'язок системи будується за степенями малого параметра залежно від кратності та кількості коренів характеристичного рівняння $\det(\tilde{A}(t,0)-\lambda\tilde{B}(t,\varepsilon))=0$.

Для системи (8) якої з урахуванням умов (2), (3) матимемо крайову задачу

$$\begin{pmatrix} \vec{y}(0,\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vec{y}(T,\varepsilon) & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1(\varepsilon) \\ \vec{x}_2(\varepsilon) \end{pmatrix} = \vec{y}_0(\varepsilon) \tag{9}$$

Отже, задача оптимального керування (1) – (3) зводиться до двоточкової крайової задачі (8), (9).

Нестабільність у спектрі системи (1) призводить до нестабільності у спектрі системи (8), можливо іншого виду. Питання про вид нестабільності не є тривіальним, і потребує окремого дослідження. На теперішній час запропоновано [2; 6; 7] метод побудови асимптотичного розв'язку систем із простою ТП у двох випадках:

I) $\tilde{A}(0,0)=diag\{E_q, J_p\};\ \tilde{B}(0,0))=diag\{J_q, E_p\}$;

II) $\tilde{A}(0,0)=diag\{E_q, O_p\};\ \tilde{B}(0,0))=diag\{J_q, O_p\}$.

Матриці, що входять до умов I, II описано далі. Прикладом досліджуваної системи без наявності керування є така система [6; 7]:

$$\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ t+\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t+\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\vec{x}.$$

Формулювання мети дослідження

У цьому дослідженні методи [2; 6; 7] використовуються для побудови двомасштабного асимптотичного розв'язку описаної вище задачі оптимального керування системою (1) із нестабільністю у спектрі граничної в'язки матриць. Система вигляду (1) є досить складною для дослідження, тому у цій роботі розглянемо питання побудови матриці імпульсних перехідних функцій цієї системи.

Обговорюється також в загальному випадку схема розв'язування крайової задачі. Проте конкретні оцінки та розрахункові формули потребують окремого дослідження.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо систему ДАР, що відповідає системі (1) без урахування керування:

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\vec{x} \tag{10}$$

Побудуємо асимптотичне зображення загального розв'язку системи при умові, що

6) $A(0,0)=diag\{E_q, J_p\};\ B(0,0))=diag\{J_q, E_p\}$; p + q = n.

7) $\frac{d}{dt}(\det A(t,0)|_{t=0}\neq 0;\ \frac{d}{dt}(\det B(t,0)|_{t=0}\neq 0$.

Умови вказують на те, що точка t = 0 є простою ТП. У випадку відсутності ТП асимптотичне зображення розв'язку системи (10) будується методами [5, 10]. Лише в околі ТП асимптотичне зображення стає розривним, що спричинене зміною характеру фізичного явища при переході згаданої точки.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

Побудуємо розв'язок на відрізку $\left[0; k_1\varepsilon^{\frac{n}{n+1}}\right]$. З цією метою застосуємо двомасштабний метод [1; 11]. Згідно з [8] існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$, що справджуються рівності:

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) \equiv diag\{E_q(t,\varepsilon),\, J_p(t,\varepsilon)\};$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = H(t,\varepsilon) \equiv diag\{J_q(t,\varepsilon),\, E_p(t,\varepsilon)\}.$$

Тут $\Omega(t, 0) = \Omega(t) \equiv diag\{E_q(t), J_p(t)\}$; $H(t, 0) = H(t) \equiv diag\{J_q(t), E_p(t)\}$,

$$J_q(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_q(t,\varepsilon) & b_{q-1}(t,\varepsilon) & b_{q-2}(t,\varepsilon) & \cdots & b_1(t,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Виконавши підстановку $\vec{x}(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\vec{y}(t,\varepsilon)$, дістанемо систему вигляду

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)\frac{d\vec{y}}{dt} = S(t,\varepsilon)\vec{y}\,. \tag{11}$$

Тут $S(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t,\varepsilon)Q^{-1}(t,\varepsilon)Q'(t,\varepsilon);\ Q'(t,0) = 0$. Для запису необхідних формул, розкладемо записані матриці у ряди вигляду (5):

$$H(t,\,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k H_k(t);\ S(t,\,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k S_k(t)\,.$$

Тоді $H_0(t) = H(t),\ H_1(t) = diag\left\{H_{1q}(t);\ H_{1p}(t)\right\}$,

$S_0(t) = \Omega(t),\ S_1(t) = diag\left\{S_{1q}(t);\ S_{1p}(t)\right\}$, де H1q та S1q – квадратні матриці порядку q.

Позначивши $K(t,\,\varepsilon) = diag\left\{E_q + \varepsilon S_{1q}(t);\ E_p + \varepsilon H_{1p}(t)\right\}$, та помноживши систему (11) на матрицю $K^{-1}(t,\,\varepsilon)$, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\varepsilon G(t,\varepsilon)\frac{d\vec{y}}{dt} = W(t,\varepsilon)\vec{y}\,. \tag{12}$$

За побудовою [6; 7] $G(t,\,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k G_k(t);\ W(t,\,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k W_k(t)$,

$$W_0(t) = S_0(t),\, W_1(t) = diag\left\{0;\, W_{1p}(t)\right\} \equiv diag\left\{0;\, S_{1p}(t) - H_{1p}(t)J_p(t)\right\},$$

$$G_0(t) = H_0(t),\, G_1(t) = diag\left\{G_{1q}(t);\, 0\right\} \equiv diag\left\{H_{1q}(t) - S_{1q}(t)J_q(t);\, 0\right\}.$$

Підстановкою $\vec{y} = U(t,\varepsilon)\vec{z} = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k U_k(t,\varepsilon)\vec{z}$ дістанемо таку систему рівнянь:

$$\varepsilon G(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\frac{d\vec{z}}{dt} = (W(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon) - \varepsilon G(t,\varepsilon)U'(t,\varepsilon))\vec{z}\,.$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

Матрицю можна побудувати такою, щоб справджувалася рівність:

$$W(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)-\varepsilon G(t,\varepsilon)U'(t,\varepsilon)=G(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)(\Lambda(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}\Delta(t,\varepsilon)),$$

де $\Lambda(t,\varepsilon)=diag\{\lambda_1(t,\varepsilon),\lambda_2(t,\varepsilon),...,\lambda_n(t,\varepsilon)\}=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\Lambda_k(t,\varepsilon)$, а $\Delta(t,\varepsilon)$ – нев'язка.

Інтегрування останньої системи методом [6; 7] дає n лінійно незалежних розв'язків, а саме:

$$\vec{x}_j(t,\varepsilon)=Q(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\left(\vec{e}_j+O\left(m^{-1}k_1^{-\frac{m(p+1)}{p}}\right)\right)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_{a_j}^{t}\lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau\right\},\ j=\overline{1,n}.$$

Отримані лінійно незалежні розв'язки складуть фундаментальну матрицю системи на вказаному проміжку.

Згідно із алгоритмом багатомасштабного методу, у системі (11) виконаємо підстановку $\tau=\varepsilon^{-1}t$ і на відрізку $\left[0;k_1\varepsilon^{\frac{p}{p+1}}\right]$ методом [4]–[6] матимемо розв'язок у вигляді

$$V(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k V_k(\tau,\varepsilon),$$

де елементи ряду обчислюються рекурентно як розв'язки систем рівнянь:

$$\begin{pmatrix}\Phi_q(\tau,\varepsilon) & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix}\frac{dV_0}{d\tau}=\begin{pmatrix}E_q & 0\\ 0 & -K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1+\Phi_p(\tau,\varepsilon)E_p\end{pmatrix}V_0,$$

$$\begin{pmatrix}\Phi_q(\tau,\varepsilon) & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix}\frac{dV_k}{d\tau}=\begin{pmatrix}E_q & 0\\ 0 & -K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1+\Phi_p(\tau,\varepsilon)E_p\end{pmatrix}V_0+F_k(\tau,\varepsilon),\ k\geq 1.$$

$$F_k(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{k}M_s(\tau,\varepsilon)V_{k-s}(\tau,\varepsilon)-\sum_{s=2}^{k}N_s(\tau,\varepsilon)V'_{k-s}(\tau,\varepsilon).$$

Із останньої системи матричних рівнянь отримаємо:

$$V_0(\tau,\varepsilon)=diag\{V_{01}(\tau,\varepsilon),V_{02}(\tau,\varepsilon)\},$$
$$V_{01}(\tau,\varepsilon)=diag\left\{\exp\left(\int_{b_1}^{\tau}\omega_1^{-1}(s,\varepsilon)ds\right),...,\exp\left(\int_{b_q}^{\tau}\omega_q^{-1}(s,\varepsilon)ds,...,\right)\right\},$$

де $V_{02}(\tau,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\frac{dV_{02}}{d\tau}=\left(-K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1+\Phi_p(\tau,\varepsilon)\right)V_{02}$$

$$V_k(\tau,\varepsilon)=\int_{b}^{\tau}V_0(\tau,\varepsilon)V_0^{-1}(s,\varepsilon)R_k(s,\varepsilon)ds,\ k\geq 1.$$

Тут $R_k(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Phi_q^{-1}(\tau,\varepsilon) & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix}F_k(\tau,\varepsilon)$. - , $b=(b_1,b_2,...,b_q,k_1\varepsilon^{-\beta},...,k_1\varepsilon^{-\beta})$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

$$x(\tau,\,\varepsilon)=\left(\sum_{i=1}^{2n}\Phi_{1i}a_i,\quad \ldots,\quad \sum_{i=1}^{2n}\Phi_{ni}a_i\right);$$
$$\psi(\tau,\,\varepsilon)=\left(\sum_{i=1}^{2n}\Phi_{n+1\,i}a_i,\quad \ldots,\quad \sum_{i=1}^{2n}\Phi_{2n\,i}a_i\right).$$

Розглянемо питання про зрощування розв’язків.

Отже, маємо дві фундаментальні матриці на відповідних проміжках

$$X_1(t,\,\varepsilon)=Q(t,\,\varepsilon)U(t,\,\varepsilon)\left(E_n+O\left(m^{-1}k_1^{-\frac{m(p+1)}{p}}\right)\right)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_a^t\Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right\},\ t\in\left[k_2\varepsilon^{\frac{n}{n+1}};T\right],$$

$$X_2(t,\,\varepsilon)=Q(t,\,\varepsilon)\tilde{T}(\tau,\,\varepsilon)U(t,\,\varepsilon)(t,\,\varepsilon)\left(V^{(m)}(\tau,\,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{m\gamma+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+1}}\right)\right),\ t\in\left[0;k_1\varepsilon^{\frac{n}{n+1}}\right].$$

За побудовою згідно з [6] k1 > k2, тому на відрізку $\left[k_2\varepsilon^{1-\beta};k_1\varepsilon^{1-\beta}\right]$ побудовано дві фундаментальні матриці системи (1). А тому існує така стала матриця N(ε), що

$$X_2(t,\,\varepsilon)=X_1(t,\,\varepsilon)N(\varepsilon),\ t\in\left[k_2\varepsilon^{1-\beta};k_1\varepsilon^{1-\beta}\right].$$

Щоб її визначити, візьмемо фіксоване число $t_1\in\left[k_2\varepsilon^{1-\beta};k_1\varepsilon^{1-\beta}\right]$, і зі співвідношення $X_2(t_1,\,\varepsilon)=X_1(t_1,\,\varepsilon)N(\varepsilon)$ дістанемо: $N(\varepsilon)=X_2^{-1}(t_1,\,\varepsilon)\cdot X_1(t_1,\,\varepsilon)$.

Нехай $t_1=k_0\varepsilon^{1-\beta}$. Тоді

$$X_1^{-1}(k_0\varepsilon^{1-\beta},\,\varepsilon)=\exp\left\{-\varepsilon^{-1}\int_a^{k_0\varepsilon^{1-\beta}}\Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right\}\left(E_n+O\left(m^{-1}k_1^{-\frac{m(p+1)}{p}}\right)\right)^{-1}\times$$
$$\times U^{-1}(k_0\varepsilon^{1-\beta},\,\varepsilon)Q^{-1}(k_0\varepsilon^{1-\beta},\,\varepsilon);$$

$$X_2(k_0\varepsilon^{1-\beta},\,\varepsilon)=Q(k_0\varepsilon^{1-\beta},\,\varepsilon)\tilde{T}(k_0\varepsilon^{1-\beta},\,\varepsilon)\left(V^{(m)}(k_0\varepsilon^{1-\beta},\,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{m\gamma+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+1}}\right)\right).$$

Таким чином, побудовано фундаментальну матрицю системи (10), яку можна записати за допомогою розбиття одиниці:

$$X(t,\,\varepsilon)=f_1(t)X_1(t,\,\varepsilon)+f_2(t)X_2(t,\,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{\beta}\right)$$

Повторивши міркування [3], та записавши фундаментальну матрицю системи (1):

$\vec{x}(t,\varepsilon)=X(t,\varepsilon)\vec{c}+\int_0^t X(t,\varepsilon)X^{-1}(s,\varepsilon)B^{-1}(s,\varepsilon)C(s,\varepsilon)\vec{u}(s,\varepsilon)ds$, нескладно записати

матрицю імпульсних перехідних функцій згаданої системи.

Зауважимо, що застосувати описані для системи (10) міркування до системи (8) не завжди можливо, оскільки система (8), як правило, матиме інший характер нестабільності, приклад такої зміни наведено у [3], тому у разі побудови асимптотичного розв’язку системи (8), задачу (9) при виконанні умов 1–5 можна розв’язати міркуваннями [10].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

Висновки

Нестабільність у спектрі головної матриці системи призводить до того, що побудова асимптотичного зображення розв'язку є значно складнішим, і потребує громіздких процедур при конструюванні фундаментальної матриці. Якщо, крім цього, наявне виродження основної матриці при похідних, то навіть теорія асимптотичного інтегрування таких систем потребує розвитку перед застосуванням до систем керування. Проте це відноситься до суто математичної частини дослідження. Реальність і фізичний зміст точок нестабільності потребує аналізу для кожної конкретної системи керування.

Список використаної літератури

1. Leifura V. N. On One Problem of Automatic Control with Turning Points. *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* : Proccedings of the Second International Conference. Kyiv, 1997. V. 2. P. 488–491.
2. Rashevs'kyi M.O., Samusenko P.F., Tomashchuk O.P. Asymptotic Solutions of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations with Turning Points. *Journal of Mathematical Sciences.* 2023. Vol. 273. P. 271–289.
3. Рашевський М. О. Асимптотичне розв'язування задачі оптимального керування нестаціонарними системами. *Математичне моделювання*. 2020. № 2(43). С. 14–20.
4. Samoilenko A. M. On the asymptotic integration of a system of linear differential equations with a small parameter in the coefficients of a part of derivatives. *Ukr. Mat. Zh*. 2002. Vol. 54, No. 11. P. 1505–1516.
5. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. Київ : Вища шк., 2000. 294 с.
6. Самойленко А.М., Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь із точками повороту. I. *Укр. мат. журн*., 2020, т. 72, № 12. С. 1669–1681.
7. Самойленко А.М., Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь із точками повороту. II. *Укр. мат. журн*., 2021, т. 73, № 6. С. 849–864.
8. Samusenko P. F. On the Canonical Forms of a Regular Matrix Pencil. Journal of Mathe-matical Sciences. 2021. Vol. 258. P. 713–721. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05575-0.
9. Shkil' N. I., Leifura V.N On the asymptotic solution of the problem of optimal control for systems with slowly varying coefficients. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*. Ser. A, 1976. No. 7. P. 604–608.
10. Tarasenko O.V. Approximate Solution of the Problem of Optimal Control for a Singularly Perturbed Differential-Algebraic System. *Journal of Mathematical Sciences.* 2015. Vol. 205. P. 848–858.
11. Яковець В.П., Тарасенко О.В. Побудова асимптотичного розв'язку однієї задачі оптимального керування. *Нелінійні коливання*. 2010. 13. 3. С. 420–436.
12. Wasow W. Linear Turning Point Theory. New York: Acad. Press, 1985. 246 p.

References

1. Leifura, V.N. (1997). On One Problem of Automatic Control with Turning Points. *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* : Proccedings of the Second International Conference. Kyiv. V. 2. P. 488–491 [in English]
2. Rashevs'kyi, M.O., Samusenko, P.F., & Tomashchuk, O.P. (2023). Asymptotic Solutions of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations with Turning Points. *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. 273. P. 271–289 [in English]
3. Rashevs'kyi, M.O. (2020). Asymptotychne rozviazuvannia zadachi optymalnoho keruvannia nestatsionarnymy systemamy [Asymptotic solution of the optimal control problem for nonstationary systems]. *Matematychne modeluvannya – Mathematical modeling*, 2(43). P. 14–20 [in Ukrainian].

4. Samoilenko, A.M. (2002). On the asymptotic integration of a system of linear differential equations with a small parameter in the coefficients of a part of derivatives. *Ukr. Mat. Zh*. Vol. 54, No. 11. P. 1505–1516 [in English]
5. Samoilenko, A.M., Shkil’, M.I., & Yakovets’, V.P. (2000). *Liniini systemy dyferentsialnykh rivnian z vyrodzhenniamy [Linear Systems of Differential Equations with Degenerations]*. Kyiv. Vyshcha Shkola.294 p [in Ukrainian]
6. Samoilenko, A.M., & Samusenko, P.F. (2020). Asymptotychne intehruvannia synhuliarno zburenykh dyferentsialno-alhebraichnykh rivnian iz tochkamy povorotu [Asymptotic integration of singularly perturbed differential algebraic equations with turning points]. Part I. *Ukr. Mat. Zh*. 72, No. 12. P. 1669–1681 [in Ukrainian].
7. Samoilenko, A.M., & Samusenko, P.F. (2021). Asymptotychne intehruvannia synhuliarno zburenykh dyferentsialno-alhebraichnykh rivnian iz tochkamy povorotu [Asymptotic Integration of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations with Turning Points]. Part II. *Ukr Math J*. Vol. 73, № 6. P. 849–864 [in Ukrainian].
8. Samusenko, P.F. (2021). On the Canonical Forms of a Regular Matrix Pencil. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 258. P 713–721. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05575-0 [in English]
9. Shkil’, N.I., & Leifura, V.N. (1976). On the asymptotic solution of the problem of optimal control for systems with slowly varying coefficients. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*. Ser. A. No. 7. P. 604–608 [in English]
10. Tarasenko, O.V. (2015). Approximate Solution of the Problem of Optimal Control for a Singularly Perturbed Differential-Algebraic System. *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. 205. P. 848–858 [in English]
11. Yakovets’, V.P., & Tarasenko, O. (2010). Pobudova asymptotychnoho rozviazku odniiei zadachi optymalnoho keruvannia [Construction of an asymptotic solution of one optimal control problem]. *Neliniini kolyvannia – Nonlinear Oscill*. 13. 3. P. 420–436 [in English]
12. Wasow, W. (1985). Linear Turning Point Theory. New York: Acad. Press. 246 p. [in English]

Даниліна Галина Володимирівна – к.т.н., доцент, заступник начальника з навчально-методичної роботи Криворізького фахового коледжу Національного авіаційного університету. E-mail: danilina@ukr.net, ORCID: 0009-0007-3634-7734.

Рашевський Микола Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, викладач математики циклової комісії фізико-математичних дисциплін Криворізького фахового коледжу Національного авіаційного університету. E-mail: rashevskyi@g-suit.kk.nau.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1136-2691.

Самусенко Петро Федорович – д.ф.-м.н., професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: psamusenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4241-6173.

Danylina Galyna Volodymyrivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Deputy Head for Educational and Methodological Work of the Kryvyi Rih Professional College of the National Aviation University. E-mail: danilina@ukr.net, ORCID: 0009-0007-3634-7734.

Rashevs’kyi Mykola Oleksandrovych – Candidate of Physical And Mathematical Sciences, Associate Professor, Lecturer of Mathematics at the Cycle Commission of Physical and Mathematical Disciplines of the Kryvyi Rih Professional College of the National Aviation University. E-mail: rashevskyi@g-suit.kk.nau.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1136-2691.

Samusenko Petro Fedorovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Mathematical Analysis and Probability Theory, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”. E-mail: psamusenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4241-6173.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4