

УДК 539.3:534

К.Г. ДЕГТЯРЬОВ, І.О. ВЕРУШКІН, Д.В. КРЮТЧЕНКО, О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України

О.Л. ЗАЙДЕНВАРГ

Харківський національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

Ю.В. НАУМЕНКО

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

МЕТОД ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

Метою цього дослідження є розробка ефективного числового методу аналізу напружено-деформованого стану конструкцій з тріщиноподібними дефектами. Новизна запропонованого підходу полягає в застосуванні гіперсингулярних інтегральних рівнянь для розв'язку еталонної задачі з обчислення коефіцієнту інтенсивності напружень. Еталонна задача полягає у визначенні напружено-деформованого стану зразка з круговою тріщиною в умовах дії однорідного розтягування. Для розв'язання цієї задачі використовуються методи скінчених та граничних елементів. При застосуванні методу скінчених елементів розглядається зразок у вигляді паралелепіпеду, що містить центральну кругову тріщину. Використовується сітка скінчених елементів, що згущується біля тріщини. При використанні методу граничних елементів розглядається тріщина у необмеженому тривимірному просторі. Крайову задачу теорії пружності для тіла з розрізом з використанням методів теорії потенціалу зведено до сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому обчислення коефіцієнтів інтенсивності зводиться до визначення скачка переміщень вздовж контуру тріщини. Визначення цього скачку здійснюється шляхом розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння на круговій області. В роботі запропоновано використання одновимірних та двовимірних гіперсингулярних рівнянь. Побудовані аналітичні формули для обчислення скінчених частин за Адамаром, які є елементами матриці системи розв'язувальних лінійних алгебраїчних рівнянь. При використанні обох типів гіперсингулярних рівнянь. За допомогою вказаних методів отримані значення числових коефіцієнтів інтенсивності напружень. Зроблено порівняння результатів, отриманих різними методами. Порівнюються також розмірності розв'язувальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. З'ясовані переваги та недоліки застосованих підходів.

Ключові слова: гіперсингулярне інтегральне рівняння, метод граничних елементів, метод скінчених елементів, коефіцієнти інтенсивності напружень.

K.G. DEGTYAREV, I.A. VIERUSHKIN, D.V. KRIUTCHENKO, E.A. STRELNIKOVA

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences

O.L. ZAYDENVARG

National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute"

Yu.V. NAUMENKO

V.N. Karazin National University

METHOD OF HYPER-SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS IN BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF FRACTURE MECHANICS

The purpose of this study is to develop an effective numerical method for analysing stress-strain state of structures with crack-like defects. The novelty of the proposed approach is in applying hypersingular integral techniques for solving the benchmark test problem of calculating the stress intensity factor. The reference problem consists in determining the stress-strain state of a sample with a circular crack under uniform tension. Finite and boundary element methods are used to solve this problem. When applying the finite element method, the sample in the form of a parallelepiped containing the central circular crack is considered. A mesh of finite elements is used, which thickens near the crack. When using the boundary element methods, the crack is considered in an infinite three-dimensional space. The boundary value problem of the elasticity theory for a cracked body is reduced to hypersingular integral equations using the potential theory methods. At the same time, the calculation of the stress intensity factors is reduced to the jump of movement determination along the crack contour. The determination of this jump is carried out by solving the hypersingular integral equation on the circular domain. The paper proposes the use of one-dimensional and two-dimensional hypersingular equations for this simulation. Analytical formulas are obtained for calculating finite parts according to Hadamard of the singular integrals, which are the matrix elements of the solving system of linear algebraic equations, using both types of hypersingular integral equations. Using the specified methods, the numerical values of the stress intensity factors were obtained. A comparison of the results obtained by different methods was made. The dimensions of solving systems of linear algebraic equations are also compared. The advantages and disadvantages of the applied methods are clarified.

Key words: hypersingular integral equation, boundary element method, finite element method, stress intensity factor.

Постановка проблеми

Для елементів обладнання, виготовлених з конструкційних матеріалів, завжди характерна наявність різноманітних мікрodefektів, які виникли в процесі виробництва або експлуатації. Ці дефекти можуть вплинути як на безпеку, так і на довговічність конструкцій. Поширення втомної тріщини є основною причиною катастрофічних руйнувань на залізничному транспорті, пошкоджень турбо- і гідрогенераторів, аварій літаків та гелікоптерів тощо. У гідротурбінах втомні тріщини, як правило, розташовуються поблизу опорних поверхонь. Новоутворена тріщина починає повільно рости, навіть якщо навантаження не перевищують номінальних значень. При досягненні тріщиною критичної довжини несучий елемент раптово отримує велику кінетичну енергію, що призводить до катастрофічного руйнування. В даний час, коли значна частина енергетичного обладнання України практично виробила свій нормативний ресурс, або була пошкоджена, проблеми оцінки залишкового ресурсу стають конче потрібними. Таким чином, актуальними є питання довговічності, працездатності та залишкового ресурсу елементів конструкції з тріщино-подібними дефектами.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідження динамічних процесів в елементах конструкції експериментальними методами призводить до значних матеріальних витрат, небажаних екологічних наслідків і не дозволяє отримати детальний розподіл напружень, деформацій, переміщень, температур, а також описати процеси виникнення та зростання тріщини, і руйнування споруд. Тому виникає необхідність у проведенні комп'ютерного експерименту. Для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) запропоновано багато числових методів. Серед них зазначимо метод Галеркіна [1], метод скінченних елементів для моделювання КІН в балках з тріщиною [2], згладжений метод скінченних елементів для тривимірних тіл з тріщиною [3], узагальнений метод скінченних елементів [4], Р-версія методу скінченних елементів із контурними інтегралами [5], метод граничних елементів для 2D тіл із дефектами [6]. У [7] метод граничних елементів використовується для розрахунку КІН у функціонально градуйованих пластинах. Іншим важливим аспектом дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкції з дефектами є поширення тріщини. Двовимірну постановку такої задачі розглянуто в [8], експериментальні дослідження розвитку тріщини в балках виконано в [9]. Тривимірний аналіз поширення втомної тріщини в зварній сталевій балці на основі глобального-локального числового аналізу розглянуто в [10]. Останнім часом з'явилися наукові праці, що використовують теорію потенціалу. Це дає змогу не лише покращити точність обчислень, а й суттєво зменшити розмірність задач, що розглядаються [11], [12]. Методи теорії потенціалу та граничних інтегральних рівнянь привабливі ще й тим, що їх застосування не обмежується задачами з механіки руйнування. Наприклад, ці методи застосовуються при вивченні проблем підтоплення міських територій [13], особливостей коливань рідини в пружних та жорстких резервуарах [14], визначенні аеродинамічних характеристик крила в потоці [15], тощо. Тому саме ці методи використовуються в даній роботі.

Як засвідчив аналіз літератури, проблема поширення тріщини в елементах обладнання ще далека від повного вирішення. Для цього необхідна розробка нових числових методів, які покажуть свою ефективність і надійність у дослідженні процесу розвитку тріщини в реальних конструкціях.

Мета дослідження

Метою дослідження є створення розрахункової методики для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень в тілах з дефектами типу тріщини.

Викладення основного матеріалу дослідження

Основні рівняння для аналізу напружено-деформованого стану для тіл з дефектами

Для визначення напружено-деформованого стану пружного тіла використовується розв’язуюча система трьох рівнянь еліптичного типу в частинних похідних другого порядку (рівняння Ламе)

$$\mu\Delta U_j + (\lambda + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \vartheta = \operatorname{div}\mathbf{U}, \quad j=1,2,3. \quad (1)$$

Тут $\mu=G=E/[2(1+\nu)]$ є модулем здвигу, $\lambda=Ev/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ – коефіцієнт Ляме, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, \mathbf{U} – вектор переміщень.

Введемо оператор напружень класичної теорії пружності як

$$\mathbf{T}^{n(x)} \mathbf{U} = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \lambda n \operatorname{div}\mathbf{U} + \mu(\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{U}), \quad (2)$$

де \mathbf{n} – одинична зовнішня нормаль до поверхні, що розглядається.

Нехай на частині межі Ω_1 задані кінематичні умови першої крайової задачі, а на межі Ω_2 мають виконуватись умови статичного навантаження другої крайової задачі, крім того $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. На поверхнях тріщини зазвичай вважаються відомими компоненти нормальних та дотичних напружень.

Отже, для визначення \mathbf{U} формулюємо наступну крайову задачу для тривимірного тіла, обмеженого Ω та ослабленого системою розрізів S_i ($i=1, \dots, n$):

$$\mu\Delta U_j + (\lambda + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}, \quad j = 1,2,3, \quad U_i(\mathbf{x})=u_{il}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad \mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{U}(\mathbf{x})=\mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_2, \quad (3)$$

$$(\mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) = N_{3i}, \quad (\mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x})) = N_{ki}, \quad \mathbf{x} \in S_i, \quad i = 1,2.$$

Розглянемо крайову задачу (3) і представимо її розв’язок у вигляді суми векторних функцій $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Тут $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ – переміщення, які виникають в твердому деформованому тілі без тріщини за однакові задані поверхневі навантаження, та визначаються таким чином:

$$\mu\Delta u_{j0} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0, \quad u_{j0}(\mathbf{x}) = u_{il}(\mathbf{x}), \quad j=1,2,3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad \mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_2. \quad (4)$$

Розв’язок крайової задачі (4) можна знайти різними числовими методами. Серед них слід назвати метод скінченних елементів (МСЕ) [16] та метод граничних елементів (МГЕ) [14]; обидва ці методи засновані на використанні методу зважених нев’язок. Отже, невідомі будуть подані у вигляді рядів за базисом із функцій зі скінченним носієм $\{\psi_n\}_{n=1}^{N_1}$, і для тестових функцій використовується той же самий базис.

Скінченно-елементне формулювання

Спочатку розглядається скінченно-елементне формулювання. Отже, апроксимація переміщень застосована у вигляді

$$\mathbf{u}_0 = \{N^u\}\{u_s\}, \quad (5)$$

де $\{N^u\}$ є функціями форми для переміщень, і $\{u_s\}$ це вузлові значення невідомих. Після інтегрування фінальних рівнянь і зведення частини об’ємних інтегралів до поверхневих отримуємо скінченно-елементне формулювання задачі (4) у вигляді

$$[\mathbf{K}_s]\{u_s\} = \{f_s\}. \quad (6)$$

Тут $[\mathbf{K}_s]$ – матриця жорсткості, $\{f_s\}$ – відомий вектор зусиль.

Гранично-елементне формулювання

Далі наведемо гранично-елементне формулювання задачі. Суттєвою особливістю МГЕ є використання сингулярних тестових функцій, які задовольняють диференціальне рівняння (1) всюди, крім однієї особливої точки. Таким чином, фундаментальний і сингулярний розв’язки рівняння (1) застосовуються як тестові функції. Фундаментальний розв’язок отримано з розгляду рівняння (1) з правою частиною у вигляді дельта-функції, та представлено у наступній матричній формі:

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right], \quad (7)$$

Цей розв’язок називається матрицею фундаментальних рішень Кельвіна-Соміліано.

Ця матриця є симетричною, і кожен її стовпець і рядок задовольняють рівнянню статички у переміщеннях (1) у довільній точці $\mathbf{x} \in E^3$, за винятком $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. З використанням фундаментального розв’язку (7) і диференціального оператора поверхневих напружень (2) сингулярний розв’язок рівнянь (1) отримується як

$$\mathbf{T}^n(\partial_x, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \Gamma_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \Gamma_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = [\mathbf{T}^n(\partial_y, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\Gamma(\mathbf{y} - \mathbf{x})]'. \quad (8)$$

Отже, вектор-функцію $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ можна розглядати як узагальнений пружний потенціал простого шару вздовж границь тіла

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{p}_0(\mathbf{y}) d\Omega_y, \quad (9)$$

де $\mathbf{p}_0(\mathbf{y})$ – невідомий вектор густини. Вектор-функція $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ задовольняє рівняння Ламе для будь-якої густини $\mathbf{p}_0(\mathbf{y})$, інтегрованої на Ω . Підставляючи (9) у граничні умови (4), отримуємо інтегральні рівняння

$$\iint_{\Omega} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{p}_0(\mathbf{y}) d\Omega_y = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad \mathbf{p}_0(\mathbf{x}) + \iint_{\Omega} \Gamma_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{p}_0(\mathbf{y}) d\Omega_y = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_2. \quad (10)$$

Визначимо переміщення $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, розглядаючи їх інтегральне зображення як суму узагальнених пружних потенціалів простого і подвійного шарів. Потенціал подвійного шару розподіляється по поверхні розрізів $S = \cup S_i$, тоді як потенціал простого шару прикладається до межі поверхні тіла Ω , тому

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iint_S \Gamma_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}) dS_y + \iint_{\Omega} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_y. \quad (11)$$

Завдяки властивостям узагальнених потенціалів простого та подвійного шарів вектор-функція $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ задовольняє рівнянню (1). Розглядаючи граничні умови для визначення функції $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь.

Гіперсингулярні інтегральні рівняння

Рівняння, отримані за допомогою подання (11), перетворюються на систему гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГІР) відносно невідомої густини $\alpha(y)$. Для тріщини нормального відриву в необмеженому тілі ця система зводиться до одного гіперсингулярного рівняння [7]

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\alpha_3(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} dS_y = Mq(\mathbf{x}), \quad M = \frac{1-\nu}{G}, \quad (12)$$

де функція $q(\mathbf{x})$ характеризує навантаження на розтяг. Для тестування числових методів зручно використовувати копійчану (кругову) тріщину в необмеженому пружному тілі при рівномірному розтязі. У даній роботі розглядається щільна копійчана тріщина, а для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) застосовано МСЕ та МГЕ. По-перше, рівняння (12) було розглянуто для тріщини у формі кола радіуса R при одновісному рівномірному розтязі σ . Отже, $q(\mathbf{x}) = \sigma$, а S є колом в рівнянні (12). Область інтеграції S розділена на N плоских трикутних і чотирикутних елементів, рис. 1а). Розглянемо гіперсингулярний інтеграл по апроксимованій поверхні та отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^N H_{kj3k} = f(\mathbf{x}_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

Тут елементи матриці H_{kj} обчислюються за формулою

$$H_{kj} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^m \frac{([\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i] \cdot \mathbf{n})}{|[\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i]|^2} \left[\frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_i)}{r_i} \right], \quad (14)$$

де m – кількість сторін у k -го граничного елемента, а вектори $\mathbf{r}_k, \mathbf{l}_i, \mathbf{n}$ є такими:

$$\mathbf{r}_k = (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0), \mathbf{l}_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i), i = \overline{1, m}, \quad (15)$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), x_{m+1} = x_1, y_{m+1} = y_1, z_{m+1} = z_1, r_k = |\mathbf{r}_k|.$$

Оскільки область S у рівнянні (12) є колом, то двовимірне гіперсингулярне рівняння зводиться до одновимірного [12]. Застосовано циліндричну систему координат

$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0, y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0$, та введено позначення

$$a = \rho_0^2 + (z - z_0)^2, b = 2\rho_0,$$

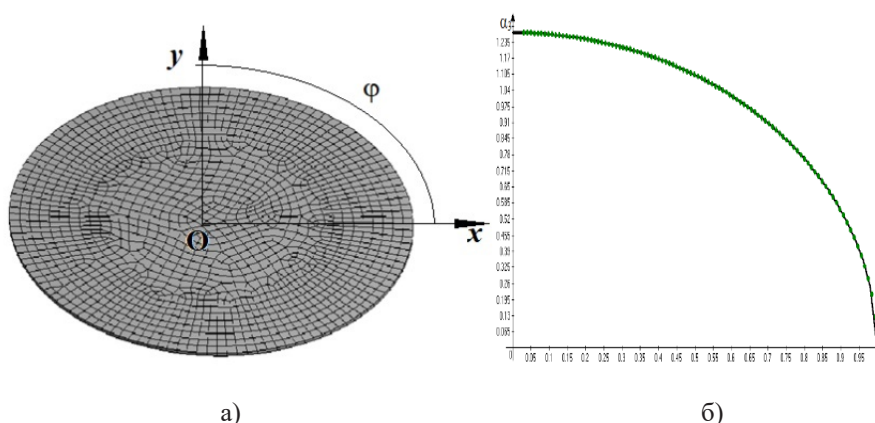


Рис. 1. Дискретизація для кругової тріщини, а) порівняння розв’язків, б)

Отримано таке одновимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \alpha_3(\rho) \frac{\rho E(k) d\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} = \frac{1 - \nu}{G}. \tag{15}$$

Тут $E(k)$ є еліптичним інтегралом другого роду, $k^2 = 2b / (a + b)$.

Для числового розв'язку рівняння (15) застосовано одновимірний МГЕ [17]. Відрізок $[0, R]$ розбивається на N_1 одновимірних граничних елементів. Для обчислення внутрішнього еліптичного інтеграла використовується метод, розроблений у [18]. Для порівняння результатів та їх перевірки використовується МСЕ. Розглянуто центральну кругову тріщину радіусом R в однорідному матеріалі (рис. 2а).

Числові результати

Розглянуто копійчану (кругову) тріщину радіусом R при одновісному розтягу σ . При використанні МГЕ тріщина розглядається в необмеженому 3D просторі. Отже, задіяно два формулювання з гіперсингулярними інтегральними рівняннями.

Перше стосується рівняння (12), тоді як друге відповідає аксіально-симетричному формулюванню (15). При чисельному моделюванні обрано такі параметри: $R=0,005\text{м}$, $\sigma=1\text{МПа}$. Дискретизація області S на граничні елементи показана на рис. 1а). Загальна кількість плоских трикутних і чотирикутних елементів склала $N = 9284$ для числового розв'язку рівняння (12). Відрізок $[0, R]$ розбивали на $N_1 = 100$ одновимірних граничних елементів. Аналітичний розв'язок рівняння (15) з правою частиною $f(\rho_0) = -1$ отримано в [7] як $\alpha_3(\rho) = 4\sqrt{R^2 - \rho^2} /$

На малюнку 2b) показано порівняння аналітичних (суцільна лінія) та числових рішень (зелені точки) у безрозмірних координатах $\hat{A} = A / R, \hat{\rho} = \rho / R$. При розрахунках досягнуто точність $\epsilon=10^{-3}$.

Найважливішими параметрами руйнування в аналізі напружень деформованого тіла є коефіцієнти інтенсивності напружень. Вони характеризують поля напружень і переміщень біля вершини тріщини і успішно використовуються для прогнозування поширення тріщини і руйнування конструкції.

У розглянутому випадку копійчаної (пенні-подібної) кругової тріщини єдиний КІН, необхідний для точного опису напружено-деформованого стану біля вершини тріщини, це КІ. Його аналітичний вираз для кругової тріщини радіусом R при одновісному розтягу σ становить $K_I = 2\sqrt{R} / K_I = 2\sqrt{R} / \sigma$, [7]. Цей КІН в теорії гіперсингулярних рівнянь [16] виражається через компоненти вектору зміщення наступним чином

$$K_I(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{A/2r} \frac{G}{1-\nu} u_3(y), \quad y \in S, \tag{16}$$

де $r = |x - y|$ – декартова відстань між точками x, y , при цьому $\lim_{yx} u_3(y) = \pm_3(x) / 2$

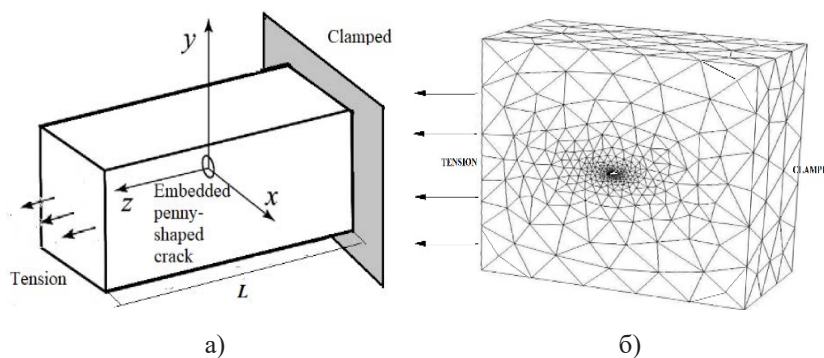


Рис. 2. Кругова тріщина в паралелепіпеді

Нижче, в таблиці 1, результати обчислення КІ наведені з використанням розв’язків рівнянь (12) і (15) та порівняні з аналітичним розв’язком за й рішенням за методом скінченних елементів. При цьому розглядається копійчана тріщина в прямокутному зразку, рис. 2а). Скінченно-елементна сітка складається з 43674 елементів, її половина зображена на рисунку 2б). Результати, наведені в таблиці 1, свідчать про точність і достовірність методів МСЕ і МГЕ, залучених до оцінок. Тут КІН розраховується в різних точках контуру відповідно до кута φ , рис. 1а).

Таблиця 1

Порівняння значень K_I / \sqrt{R} , отриманих різними методами

φ	Аналітичне значення	МГЕ, двовимірне ГСІУ, (12)	МГЕ, двовимірне ГСІУ, (16)	МСУ
10	1.12827	1.13217	1.12988	1.14217
30	1.12827	1.12945	1.12837	1.14207
50	1.12827	1.12876	1.12830	1.14204
70	1.12827	1.12842	1.12828	1.14203
90	1.12827	1.12830	1.12828	1.14200

Слід зазначити, що найбільш точні результати отримані при використанні одновимірного МГЕ. Але недоліком цього методу є його обмеження лише круговими та еліптичними областями інтегрування.

Висновки

Для аналізу напружень конструкцій з тріщиноподібними дефектами застосовано методи граничних та скінченних елементів. Формулювання з використанням граничних елементів базується на використанні гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Тестові розрахунки показали високу точність МГЕ та МСЕ. Порівняння розрахунків методу скінченних та граничних елементів підтвердило достовірність результатів.

Список використаної літератури

1. Xu B.B., Gao X.W., Jiang W.W., Cui M., Jun L. Galerkin free element method and its application in Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 2019. 218, 106575.
2. Bertolini P., Eder M. A., Taglialegne L., Valvo P. S. Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections. *Thin-Walled Structures*, 137, 527–540, 2019, DOI:10.1016/j.tws.2019.01.008.
3. Rokach V. Smoothed finite element method for stress intensity factor estimation: benefits and limitations, *CoRR abs/1903.11401*. 2019.
4. Serenza E.N., Oscar A. G. Suarez O.A., Rossi G. A study about SIF estimation using XFEM, *Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, ABMEC Foz do Iguacu/PR, Brazil, 2020.
5. Simionato F., Daros C. H.: Boundary element method analysis for mode III linear fracture mechanics in anisotropic and nonhomogeneous media, *Z Angew Math Mech.* 99, e201800211, 2019, //doi.org/10.1002/zamm.201800211.
6. Palladino S., Esposito L., Ferla P., and Minutolo V.: Functionally Graded Plate Fracture Analysis Using the Field Boundary Element Method, *Appl. Sci.*, 11, 8465, 2021.
7. Zhang J., Xu R., He Y., Yang W. Direct Computation of 3-D Stress Intensity Factors of Straight and Curved Planar Cracks with the P-Version Finite Element Method and Contour Integral Method, *Materials*, 14(14), 3949, 2021, DOI:10.3390/ma14143949
8. Yi W., Rao, Q., Li, Z., and Chun-Lin, C. A New Method for Predicting the Crack Propagation Process of Brittle Rock Under Thermo-Hydro-Mechanical Loading Conditions, *IEEE Access*, 9, 2021, DOI:10.1109/ACCESS.2021.3076001.

9. Ren Y., Dong Y., Liu B., Zhao S., Yang R. Research on low stress high temperature precision shear separation process of metal bars. *Heavy Mach.*, 05, 37–41, 2021.
10. Zong L., Shi G. Three-dimensional fatigue crack propagation analysis of welded steel beam based on global-local numerical model. *Advances in Bridge Eng.*, 2(4), 1–17. 2021.
11. Obaiys S.J., Ibrahim R.W., Ahmad A.F. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study. In: *Differential and Integral Inequalities*. Springer Optimization and Its Applications, 151, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-030-27407-8_25.
12. Gnitko V., Karaiev A., Degtyariv K., Vierushkin I., Strelnikova E. Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 134, 67–79, 2022, DOI:10.2495/BE450061.
13. Serikova E., Strelnikova E., Yakovlev V. Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities, *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*, vol. 1, pp. 86–90, 2015. /Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf.
14. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 2016, 17(1), pp. 75–87. URL: <https://www.ikppress.org/index.php/JOBARI/article/view/3788>.
15. Avramov K. V., Strelnikova E. A. Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid. *Int. Appl. Mech* 50, 2014, pp. 329–335.
16. Rusanov A., Khorev O., Agibalov Y., Bykov Y., Korotaiev P. Numerical and Experimental Research of Radial-Axial Pump-Turbine Models with Splitters in Turbine Mode, In: ICTM 2020, Lecture Notes in Networks and Systems, 188, 2021, DOI:/10.1007/978-3-030-66717-7_36.
17. Karaiev A., Strelnikova E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / *International Journal of Modeling. Simulation, and Scientific Computing*. 11(1), 2050003. 2020, DOI:10.1142/S1793962320500038.
18. Karaiev A, Strelnikova E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *Z Angew Math Mech*. 101, e201800339. 2021, DOI:10.1002/zamm.201800339.

References

1. Xu, B.B., Gao, X.W., Jiang, W.W., Cui, M., & Jun, L. (2019). Galerkin free element method and its application in Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 218, 106575 [in English]
2. Bertolini, P., Eder, M.A., Taglialegne, L., & Valvo, P.S. (2019). Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections. *Thin-Walled Structures*, 137, 527–540, DOI:10.1016/j.tws.2019.01.008 [in English]
3. Rokach, V. (2019). Smoothed finite element method for stress intensity factor estimation: benefits and limitations, CoRR abs/1903.11401 [in English]
4. Serenza, E.N., Oscar, A.G., Suarez, O.A., & Rossi, G. (2020). A study about SIF estimation using XFEM, Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC Foz do Iguacu/PR, Brazil [in English]
5. Simionato, F., & Daros, C.H. (2019). Boundary element method analysis for mode III linear fracture mechanics in anisotropic and nonhomogeneous media, *Z Angew Math Mech*. 99, e201800211 <https://doi.org/10.1002/zamm.201800211> [in English]
6. Palladino, S., Esposito, L., Ferla, P., & Minutolo, V. (2021). Functionally Graded Plate Fracture Analysis Using the Field Boundary Element Method, *Appl. Sci.*, 11, 8465 [in English]
7. Zhang, J., Xu, R., He, Y., & Yang, W. (2021). Direct Computation of 3-D Stress Intensity Factors of Straight and Curved Planar Cracks with the P-Version Finite Element Method and Contour Integral Method, *Materials*, 14(14), 3949, DOI:10.3390/ma14143949 [in English]

8. Yi, W., Rao, Q., Li, Z., & Chun-Lin, C. (2021). A New Method for Predicting the Crack Propagation Process of Brittle Rock Under Thermo-Hydro-Mechanical Loading Conditions, *IEEE Access*, 9, DOI:10.1109/ACCESS.2021.3076001 [in English]
9. Ren, Y., Dong, Y., Liu, B., Zhao, S., & Yang, R. (2021). Research on low stress high temperature precision shear separation process of metal bars. *Heavy Mach.*, 05, 37–41 [in English]
10. Zong, L., & Shi, G. (2021). Three-dimensional fatigue crack propagation analysis of welded steel beam based on global-local numerical model. *Advances in Bridge Eng.*, 2(4), 1–17 [in English]
11. Obaiys, S.J., Ibrahim, R.W., & Ahmad, A.F. (2019). Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study. In: *Differential and Integral Inequalities*. Springer Optimization and Its Applications, 151, https://doi.org/10.1007/978-3-030-27407-8_25 [in English]
12. Gnitko, V., Karaiev, A., Degtyariv, K., Vierushkin, I., & Strelnikova, E. (2022). Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 134, 67–79, DOI:10.2495/BE450061 [in English]
13. Serikova, E., Strelnikova, E., & Yakovlev, V. (2015). Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities, *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*, vol. 1, pp. 86–90, Retrieved from: /Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf [in English]
14. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., & Strelnikova, E (2016). Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp. 75–87. <https://www.ikppress.org/index.php/JOBARI/article/view/3788> [in English]
15. Avramov, K.V., & Strelnikova, E.A. (2014). Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid. *Int. Appl. Mech* 50, pp. 329–335 [in English]
16. Rusanov, A., Khorev, O., Agibalov, Y., Bykov, Y., & Korotaiev, P. (2021). Numerical and Experimental Research of Radial-Axial Pump-Turbine Models with Splitters in Turbine Mode, In: *ICTM 2020, Lecture Notes in Networks and Systems*, 188, DOI:/10.1007/978-3-030-66717-7_36 [in English]
17. Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2020). Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / *International Journal of Modeling. Simulation, and Scientific Computing*. 11(1), 2050003. DOI:10.1142/S1793962320500038 [in English]
18. Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2021). Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *Z Angew Math Mech*. 101, e201800339. DOI:10.1002/zamm.201800339 [in English]

Дегтярьов Кирило Георгійович – к.т.н., молодший науковий співробітник відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Верушкін Іван Олексійович – аспірант Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: ivanveruskin86@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3837-5567.

Крютченко Денис Володимирович – провідний інженер відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Стрельнікова Олена Олександрівна – д.т.н., професор, провідний науковий співробітник Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: elena15@gmx.com, ORCID: 0000-0003-0707-7214.

Зайденварг Ольга Леонідівна – старший викладач кафедри прикладної математики Харківського національного аерокосмічного університету імені Н.Є. Жуковського. E-mail: olga.zaudenvarg@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7214-6656.

Науменко Юрій Віталійович – магістрант Науково-навчального інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. E-mail: yuriy.naumenko@karazin.ua, ORCID: 0000-0001-9058-6727.

Degtyarov Kyrylo Heorhiiovych – Ph.D., Junior Researcher, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Vierushkin Ivan Oleksiiiovych – Postgraduate Student, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: ivanveruskin86@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3837-5567.

Kriutchenko Denys Volodymyrovych – Leading Engineer, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Strelnikova Olena Oleksandrivna – D.Sc., Prof., Senior Researcher, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: elena15@gmx.com, ORCID: 0000-0003-0707-7214.

Zaydenvarg Olga Leonidivna – Assistant Professor, Department of Applied Mathematics at the N.E. Zhukovsky National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”. E-mail: olga.zaudenvarg@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7214-6656.

Naumenko Yuriy Vitaliyovych – Master's Student, Scientific and Educational Institute of Computer Physics and Energy at the V.N. Karazin Kharkiv National University. E-mail: yuriy.naumenko@karazin.ua, ORCID: 0000-0001-9058-6727.