УДК 517.91:532.2

О.М. ЛЕНЮК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
О.М. НІКІТІНА
Чернівецький ліцей № 1 математичного та економічного профілів
М.І. ШИНКАРИК
Західноукраїнський національний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТІ

На нинішньому етапі науково-технічного прогресу виникає необхідність дослідження фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які дедалі частіше використовуються для виробництва різних деталей. Моделювання фізичних процесів у таких матеріалах, зокрема процесу дифузії, математично призводить до задачі розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку параболічного типу на кусково-однорідному інтервалі з певними початковими та крайовими умовами, оскільки для різних матеріалів фізичні процеси описуються різними диференціальними операторами. Одним із найбільш ефективних методів одержання інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень, який виник у другій половині 20 століття.

У цій роботі одержано розв'язок задачі дифузії на двоскладовому сегменті $[0;R_2]$ *з однією точкою спряження за допомогою гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Бесселя.*

Математичне моделювання дифузійних процесів в двокомпонентних матеріалах математично означає побудувати обмежений розв'язок сепаратної системи двох диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу з певними крайовими умовами, початковими умовам та, умовами спряження. Застосувавши до такої крайової задачі побудоване заздалегідь гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя на сегменті, ми одержуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння. Знайшовши розв'язок задачі Коші, ми застосовуємо до нього обернене гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя.

Пряме гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя на сегменті з однією точкою спряження можна записати у вигляді матриці-рядка. Якщо при цьому вихідну систему та початкові умови записати в матричній формі, то, застосовавши до такої задачі операторну матрицю-рядок за правилом множення матриць, ми в результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, яка нескладно розв'язується. Якщо записати обернене гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя у вигляді операторної матриці-стовпця, то, застосувавши його до одержаного розв'язку задачі Коші, після здійснення елементаргих перетворень, ми одержуємо єдиний розв'язок вихідної задачі в аналітичному вигляді.

Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Ключові слова: гібридний диференціальний оператор, задача дифузії, гібридне інтегральне перетворення.

O.M. LENYUK
Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych
O.M. NIKITINA
Chernivtsi Lyceum №1 of Mathematical and Economic Profiles
M.I. SHYNKARYK
West Ukrainian National University

MODELING OF DIFFUSION PROCESSES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF EULER-BESSEL TYPE ON THE SEGMENT

At the current stage of scientific and technical progress, there is a need to study the physical and technical characteristics of composite materials, which are increasingly used for the production of various parts. Modeling physical processes in such materials, in particular the diffusion process, mathematically leads to the problem of solving a separate system of partial differential equations of the second order of the parabolic type on a piecewise homogeneous interval with certain initial and boundary conditions, since for different materials physical processes are described by different differential operators.

One of the most effective methods of obtaining integral images of analytical solutions of the algorithmic nature of such mathematical physics problems is the method of hybrid integral transforms, which arose in the second half of the 20th century.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

In this work, the solution of the diffusion problem on the two-component segment [0;R_2] with one point of conjugation is obtained using the Euler-Bessel hybrid integral transform.

Mathematical modeling of diffusion processes in two-component materials mathematically means constructing a limited solution of a separate system of two partial differential equations of the parabolic type with certain boundary conditions, initial conditions, and conjugation conditions. Applying to such a boundary-value problem the previously constructed Euler-Bessel hybrid integral transform on a segment, we obtain the Cauchy problem for an ordinary differential equation. Having found the solution of the Cauchy problem, we apply to it the inverse Euler-Bessel hybrid integral transform.

The direct Euler-Bessel hybrid integral transform on a segment with one point of conjugation can be written in the form of a row matrix. If at the same time the original system and initial conditions are written in matrix form, then, applying the row operator matrix to such a problem according to the rule of matrix multiplication, we get the Cauchy problem for an ordinary differential equation of the first order, which is easily solved. If we write the inverse Euler-Bessel hybrid integral transform in the form of a column operator matrix, then, applying it to the resulting solution of the Cauchy problem, after performing elementary transformations, we obtain a unique solution of the original problem in analytical form.

Constructed solutions of boundary value problems are algorithmic in nature, which allows them to be used both in theoretical studies and in numerical calculations.

Key words: hybrid differential operator, problem of diffusion, hybrid integral transform.

Постановка проблеми

На теперішньому етапі науково-технічного прогресу виникає необхідність дослідження фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які дедалі частіше використовуються для виробництва різних деталей. Моделювання фізичних процесів у таких матеріалах, зокрема процесу дифузії, математично призводить до задачі розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку параболічного типу на кусково-однорідному інтервалі з певними початковими та крайовими умовами [1–3], оскільки для різних матеріалів фізичні процеси описуються різними диференціальними операторами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним із найбільш ефективних класичних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків крайових задач математичної фізики неоднорідних структур є метод гібридних інтегральних перетворень, який виник у другій половині 20 століття. В [4] побудовано скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на сегменті [0, R_2] з однією точкою спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Ейлера-Бесселя, яке можна застосовувати для моделювання різних фізичних процесів в неоднорідних середовищах. В даній роботі показано застосування відповідного СГІП до розв'язування задачі дифузії.

Мета дослідження

Одержати аналітичний вигляд розв'язку задачі дифузії на двоскладовому сегменті [0;R_2] з однією точкою спряження за допомогою гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Бесселя.

Викладення основного матеріалу дослідження

Моделювання дифузії тепла на двоскладовому сегменті з точкою спряження математично приводить до побудови в області

$$D_1 = \{(t,r) : t > 0, r \in I_1\},\ I_1 = \{r : r \in (0,R_1) \cup (R_1,R_2); R_2 < \infty\}$$

обмеженого розв'язку сепаратної системи рівнянь з частинними похідними параболічного типу [4]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B^*_{\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r),\ r \in (0,R_1),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}[u_2] = f_2(t,r),\ r \in (R_1,R_2), \qquad (1)$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

за початковими умовами

$$u_1(t,r)\big|_{t=0} = g_1(r),\ r \in (0, R_1),$$
$$u_2(t,r)\big|_{t=0} = g_2(r),\ r \in (R_1, R_2), \tag{2}$$

умовами спряження в точці контакту

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1\right)u_1 - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1\right)u_2\right]\Big|_{r=R_1} = 0,\ j = 1,2, \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma}u_1] = 0, \quad \left(\alpha_{22}^2 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^2\right)u_2\,\big|_{r=R_2} = 0. \tag{4}$$

Тут беруть участь диференціальний оператор Ейера $B^*_{\alpha_1}$ та диференціальний оператор Бесселя B_{ν,α_2} [4].

Коефіцієнти, які беруть участь в постановці крайової задачі (1)–(4), природньо задовольняють певні умови обмеження [4].

В праці [4] одержані формули для прямого $H_{\nu,(\alpha)}$ й оберненого $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ СГІП, породжених на множині I_1 ГДО

$$M_{\nu,(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B^*_{\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu,\alpha_2} :$$

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_0^{R_2} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{5}$$

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \tag{6}$$

При цьому для ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ виведена основна тотожність СГІП:

$$H_{\nu,(\alpha)}[M_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - k_1^2\int_0^{R_1} g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1}dr - k_2^2\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr +$$
$$+c_{11}^{-1}R_1^{2\alpha_1+1}[Z^1_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21} - Z^1_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11}] + (\alpha_{22}^2)^{-1}a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}V_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta)g_R. \tag{7}$$

Тут $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [1], спектральна вектор-функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta),$$

вагова функція $\sigma(r)$, спектральна щільність $\Omega_{(\alpha)}(\beta)$ а також інші величини та функції, визначені в праці [4].

Знайдемо інтегральне зображення аналітичного розв’язку задачі (1)–(4) методом СГІП типу Ейлера-Бесселя на двоскладовому сегменті $[0, R_2]$ з однією точкою спряження, які діють за правилами (5)–(7).

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

Для цього потрібно записати систему рівнянь (1) та початкові умови (2) у наступній матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 B_{\alpha_1}^*\right) u_1(t,r) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}\right) u_2(t,r) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,r) \\ \\ f_2(t,r) \end{pmatrix}, \qquad \left.\begin{pmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$, який діє згідно правила (5), можна зобразити у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,(\alpha)}[\ldots] = \left[\int_0^{R_1} \ldots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2 + 1} dr \right]. \tag{9}$$

Застосуємо до задачі (8) операторну матрицю-рядок (9) за правилом множення матриць. Використавши основну тотожність (7), ми отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2\right)\tilde{u}\,(t,\beta\,) + \left(k_1^2 + \gamma_1^2\right)\int_0^{R_1} u_1\,(t,r) V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr +$$

$$+\left(k_2^2 + \gamma_2^2\right)\int_{R_1}^{R_2} u_2\,(t,r)\, V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\,\sigma_2 r^{2\alpha_2 + 1} dr = \tilde{f}\,(t,\beta),$$

$$\tilde{u}\,\big|_{t=0} = \tilde{g}\,(\beta\,).$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2\} = \gamma_1^2$. Тоді покладемо $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \ge 0$. Задача Коші набуде вигляду:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + \gamma_1^2\right)\tilde{u}\,(t,\beta) = \tilde{f}\,(t,\beta), \tag{10}$$

$$\tilde{u}\,(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}\,(\beta).$$

Безпосередньо нескладно перевіряється, що розв’язок задачі Коші (10) записується наступною формулою

$$\tilde{u}(t,\beta) = e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}\,\tilde{g}\,(\beta) + \int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)(t-\tau)}\,\tilde{f}\,(\tau,\beta)\,d\tau. \tag{11}$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha)}^{-1}$, який діє згідно правила (6), як обернений до оператора (9), можна зобразити у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-1}[\ldots] = \frac{2}{\pi}\begin{bmatrix} \int_0^\infty [\ldots] V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \int_0^\infty [\ldots] V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (12) за правилом множення матриць, до матриці елемента $[\tilde{u}\,(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}\,(t,\beta)$ визначена формулою (11). Виконавши елементарні перетворення, одержуємо єдиний розв’язок вихідної задачі дифузії (1)–(4):

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

$$u_j(t,r) = \int_0^t \int_0^{R_1} G_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho) + g_1(\rho)\delta_+(\tau)\right]\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}\, d\rho\, d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_{R_1}^{R_2} G_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho) + g_2(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_2 r^{2\alpha_2+1} d\rho\, d\tau, \quad j = 1,2. \tag{13}$$

У рівностях (13) присутні функції впливу, породжені неоднорідністю системи (1):

$$G_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta) V_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta) d\beta, \quad j,k = 1,2. \tag{14}$$

При цьому $\delta_+(t)$ – дельта-функція Дірака, зосереджена в точці $t = 0+$. Вона використовується лише для спрощення запису розв'язку.

Зауваження. Якщо $\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2\right\} = \gamma_2^2$, то $k_j^2 = \gamma_2^2 - \gamma_j^2 \geq 0,\ j = 1,2,$ й у формулах (10)–(14) вираз $(\beta^2 + \gamma_1^2)$ потрібно замінити на вираз $(\beta^2 + \gamma_2^2)$.

Висновки

Побудований розв'язок (13) крайової задачі (1)–(4), яка описує процес дифузії тепла у двокомпонентному середовищі, має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в в числових розрахунках, так і в теоретичних дослідженнях.

Список використаної літератури

1. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 188 с.
2. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. Чернівці: Прут, 2004. 276 с.
3. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. Тернопіль: Економ. Думка, 2004. 368 с.
4. Нікітіна О.М. Гібридні інтегральні перетворення типу (Ейлера-Бесселя). Львів, 2008. 86 с. (Препринт. НАН України, Ін-т прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача; 01–08).

References

1. Leniuk, M.P. (1997). *Temperaturni polia v ploskykh kuskovo-odnoridnykh ortotropnykh oblastiakh [Temperature fields in flat piecewise homogeneous orthotropic regions]*. K.: In-t matematyky NAN Ukrainy. 188. [in Ukrainian]
2. Konet, I.M., & Leniuk, M.P. (2004). *Temperaturni polia v kuskovo-odnoridnykh tsylindrychnykh oblastiakh [Temperature fields in piecewise homogeneous cylindrical regions]*. Chernivtsi: Prut. 276. [in Ukrainian]
3. Leniuk, M.P., & Shynkaryk, M.I. (2004). *Hibrydni intehralni peretvorennia (Furie, Besselia, Lezhandra). Chastyna 1 [Hybrid integral transformations (Fourier, Bessel, Legendre). Part 1]*. Ternopil: Ekonom. Dumka. 368 s. [in Ukrainian]
4. Nikitina, O.M. (2008). Hibrydni intehralni peretvorennia typu (Eilera-Besselia) [Hybrid integral transformations of the (Euler-Bessel) type]. Lviv. 86. (Preprynt. NAN Ukrainy, In-t prykladnykh problem matematyky i mekhaniky im. Ya.S. Pidstryhacha; 01–08) [in Ukrainian]

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

Ленюк Олег Михайлович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. E-mail: O.Lenyuk@chnu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9494-2864.

Нікітіна Ольга Михайлівна – к.ф.-м.н., доцент, вчитель математики Чернівецького ліцею №1 математичного та економічного профілів. E-mail: o.nikitina.chv@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0702-0453.

Шинкарик Микола Іванович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики Західноукраїнського національного університету. E-mail: shynkaryk_m@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8191-8953.

Lenyuk Oleh Myhaylovych – Ph.D in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Differential Equations Department of Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych. E-mail: O.Lenyuk@chnu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9494-2864.

Nikitina Ol'ha Myhaylivna – Ph.D in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Teacher of athematics of Chernivtsi Lyceum №1 of Mathematical and Economic Profiles. E-mail: o.nikitina.chv@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0702-0453.

Shynkaryk Mykola Ivanovych – Ph.D in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Applied Mathematics Department of West Ukrainian National University. E-mail: shynkaryk_m@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8191-8953.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9