

## ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ РОЗПОДІЛІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ КВАДРАТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ, ВИЗНАЧЕНИХ НА РОЗВ'ЯЗКАХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

*Континуальне інтегрування – один із ефективних методів сучасної теоретичної фізики та прикладної математики. Відомо, що з відомих конструкцій континуальних інтегралів беруться лише континуальні інтеграли по гаусовій мірі. Розвиток обчислювальних методів та засобів забезпечує можливість успішного вирішення різноманітних завдань. При розгляді реальних марківських процесів результат взяття відповідних континуальних інтегралів гаусової мірою містить кореневі вирази. Як правило, ці вирази є Лаплас-трансформантами від шуканих розподілів значень інтегральних функціоналів. Для отримання самих розподілів необхідно зробити зворотне перетворення Лапласа, тобто знайти значення відповідного інтеграла Фур'є на поверхні Рімана. У зв'язку з двозначністю зазначених кореневих виразів комп'ютерними засобами неможливо визначити правильний знак від радикалів, що виникають. Це в свою чергу призводить до необхідності розвитку аналітичних методів, орієнтованих на етап дослідження, попередній чисельному. У роботі викладено результати аналітичного знаходження типових континуальних інтегралів. Докладно викладено процедуру взяття континуального інтеграла квадратичного виду щодо амплітуди розв'язання стохастичного диференціального рівняння. Змістовний зміст цього функціоналу у тому, що він визначає середнє щодо кінцевого інтервалу спостереження потужність нормального процесу – рішення стохастичного диференціального рівняння. У роботі викладено результати, присвячені саме аналітичній та чисельній сторонам отримання фізичних та прикладних залежностей у завданнях, частиною яких є необхідність статистичного усереднення у функціональному просторі рішень використовуваного стохастичного диференціального рівняння. Як результати наводяться залежності, що описують імовірнісні властивості інтегральних функціоналів, що розглядаються.*

*Ключові слова: континуальне інтегрування, гаусова міра, квадратичний функціонал, стохастичне диференціальне рівняння, марківський процес, перетворення Лапласа.*

## COMPUTATIONAL ALGORITHMS FOR DISTRIBUTIONS OF INTEGRAL QUADRATIC FUNCTIONALS, DETERMINED BY SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Path integration is one of the effective methods of modern theoretical physics and applied mathematics. It is well known that from the known constructions of path integrals only path integrals with respect to the Gaussian measure are taken. The development of computational methods and tools makes it possible to successfully solve a variety of problems. When considering real Markov processes, the result of taking the corresponding path integrals over the Gaussian measure contains root expressions. As a rule, these expressions are Laplace transformants of the desired distributions of values of integral functionals. To obtain the distributions themselves, it is necessary to perform the inverse Laplace transform, in other words, to find the value of the corresponding Fourier integral on the Riemann surface. Due to the two-valued nature of these root expressions, it is impossible to determine the correct sign of the resulting radicals using computer tools. This in turn leads to the need to develop analytical methods focused on the research stage preceding the numerical one. The paper presents the results of the analytical determination of typical path integrals. The procedure for taking a path integral of quadratic form with respect to the amplitude of the solution of a stochastic differential equation is described in detail. The meaningful meaning of this functional is that it describes the average power of a normal process relative to a finite observation interval – the solution of a stochastic differential equation. The paper presents results devoted specifically to the analytical and numerical aspects of obtaining physical and applied dependencies in problems, part of which is the need for statistical averaging in the functional space of solutions of the stochastic differential solution used. As results, dependencies are given that describe the probabilistic properties of the integral functionals under consideration.*

*Key words: path integration, Gaussian measure, quadratic functional, stochastic differential equation, Markov process, Laplace transform.*

### Постановка проблеми

Континуальне інтегрування – один із ефективних методів сучасної теоретичної фізики та прикладної математики. Відомо, що з відомих конструкцій континуальних інтегралів беруться лише континуальні інтеграли по гаусовій міри. Гаусова властивість повинна мати не тільки міра, тобто вагова функція, за допомогою якої здійснюється процедура усереднень у просторі рішень стохастичного диференціального рішення, але й вираз, математичне очікування якого шукається. Розвиток обчислювальних методів і засобів забезпечує можливість успішного вирішення різноманітних завдань, що у свою чергу призводить до необхідності розвитку аналітичних методів, орієнтованих на етап дослідження, що передує чисельному.

У роботі викладено процедуру взяття континуального інтеграла квадратичного вигляду, що квадратично визначений через амплітуду розв'язання стохастичного диференціального рівняння. Змістовний зміст цього функціоналу у тому, що він визначає середнє щодо кінцевого інтервалу спостереження – потужність нормального процесу розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Особлива увага приділяється обчислювальній стороні, тобто етапу отримання кількісних характеристик фізичних і прикладних залежностей, що шукаються, в задачах, частиною яких є необхідність статистичного усереднення в просторі розв'язків використовуваного стохастичного диференціального рівняння.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

До задачі знаходження значення континуального інтеграла призводять багато проблем статистичної фізики [1], квантової механіки [2], статистичної радіофізики [3, 4], квантової оптики [5], фізики високих енергій [6], теорії оцінювання [7] та інші. Кількість публікацій, присвячених застосуванню континуального інтегрування, велика.

### Мета дослідження

Метою роботи є виклад аналітичної процедури для обчислення зворотного перетворення Лапласа, яка виникає після взяття континуального інтеграла квадратичного виду щодо амплітуди розв'язку стохастичного рівняння. У роботі викладено результати, присвячені саме аналітичній та чисельній сторонам отримання фізичних та прикладних залежностей у завданнях, частиною яких є необхідність статистичного усереднення у функціональному просторі. Як результати наводяться залежності, що описують властивості аналізованого інтегрального функціоналу.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Теорія, що описує нелінійні системи, значно складніша проти теорії лінійних систем. Якщо на вхід лінійної системи надходить нормальний випадковий процес, то визначення статистичної структури результуючого процесу достатньо визначити перші два моменти процесу на виході. У разі нелінійної системи потрібно знаходити всю функцію розподілу. Кількість точно розв'язуваних завдань з аналітичним описом результуючих процесів досить мала, тим часом інформація, що отримується при вирішенні, важлива як для аналізу, так і для наступних чисельних розрахунків. Тут обмежимося розглядом нелінійних систем квадратичного типу.

Найбільш важливим із квадратичних функціоналів є функціонал – середня за кінцевий інтервал спостереження  $L$  потужність  $J$  нормального процесу Орнштейна-Уленбека [1] (ОУ-процесу)  $h(s)$

$$J = \frac{1}{L} \int_0^L ds h^2(s). \quad (1)$$

Цей марківський процес підпорядковується рівнянню  $h'(s) + \nu h(s) = w(s)$  з породжувальним процесом  $w(s)$  «білого» шуму і параметрами: інтенсивність  $\sigma_H^2$  та декремент  $\nu$ , при цьому  $\langle h(s) \rangle_H = 0$  і  $\langle h^2(s) \rangle_H = \sigma_H^2 [1-4]$ .

Нехай необхідно визначити густину розподілу  $f(\eta)$  (або функцію розподілу  $F(\eta)$ ) випадкових значень функціоналу  $J$ . До цієї задачі примикає велика кількість близьких щодо постановки завдань. Для тих варіантів з них, у яких підінтегральний вираз функціоналів типу (1) залишається квадратичним щодо  $h(s)$ , можна розраховувати на просування в аналітичному відношенні. Відзначимо, що марківський процес  $h(s)$  є регулярним, тому функціонал  $J$  має одне-єдине значення і умовна густина розподілу ймовірностей  $f(\eta)$  може бути записана з використанням  $\delta$ -функції Дірака:  $f(\eta) = \delta\left(\eta - L^{-1} \int_0^L ds h^2(s)\right)$ . У загальному випадку стохастичного ОУ-процесу  $h(s)$  умовну густину  $f(\eta)$  необхідно усереднити за всіх можливих флуктуаціях, що реалізуються на інтервалі  $(0 \leq s \leq L)$ :

$$f(\eta) = \left\langle \delta\left(\eta - \frac{1}{L} \int_0^L ds h^2(s)\right) \right\rangle_{\text{H}}. \quad (2)$$

Це усереднення, позначене індексом «Н», включає врахування всіх можливих флуктуацій  $\{h_0 = h(0)\}$  на старті ( $s = 0$ ), внесок усіх можливих реалізацій процесу  $H(s)$  на інтервалі  $(0 < s < L)$  та, нарешті, облік усіх можливих реалізацій  $\{h_L\}$  на фініші ( $s = L$ ). При цьому повинні враховуватися ті реалізації  $\{h(s)\}$  ОУ-процесу, які стартують з  $\{h_0 = h(0)\}$  і фінішують в  $\{h_L = h(L)\}$ . Використовуючи Фур'є-уявлення для  $\delta$ -функції Дірака, зазначене усереднення можна позначити у вигляді

$$f(\eta) = \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dh_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_H^2}} \exp\left(-\frac{h_0^2}{2\sigma_H^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dh_L \exp\left\{i\lambda \left[\eta - \frac{1}{L} \int_0^L ds h^2(s)\right]\right\} \right\rangle_{\text{H}}. \quad (3)$$

Виділяючи усереднення на кінцях інтервалу, перепишемо (3) у вигляді

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_H^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dh_0 \exp\left(-\frac{h_0^2}{2\sigma_H^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dh_L \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(i\lambda\eta) \Psi(i\lambda, \eta), \quad (4)$$

де введена твірна (характеристична) функція

$$\Psi(\lambda; h_0, h_L) = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{L} \int_0^L ds h^2(s)\right\} \right\rangle_{0 < s < L} = \langle h_0 | \exp\left\{-\frac{\lambda}{L} \int_0^L ds h^2(s)\right\} | h_L \rangle, \quad (5)$$

яка є умовним середнім по всіх траєкторіях ОУ-процесу, що мали за  $s = 0$  значення  $h_0$  і прийняли за  $s = L$  значення  $h_L$ . Шляхом усереднення по всіх випадкових реалізаціях процесу  $h(s)$  на старті ( $s = 0$ ) і всіх можливих реалізаціях на фініші ( $s = L$ ) знаходимо безумовну твірну функцію (ТФ):

$$Q_J(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh_0}{\sqrt{2\pi\sigma_H^2}} \exp\left(-\frac{h_0^2}{2\sigma_H^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dh_L \langle h_0 | \exp\left\{-\frac{\lambda}{L} \int_0^L ds h^2(s)\right\} | h_L \rangle = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{L} \int_0^L ds h^2(s)\right\} \right\rangle_{\text{H}}, \quad (6)$$

яка містить усю статистичну інформацію про функціонал (1).

Таким чином, завдання знаходження густини розподілу  $f(\eta)$  та опису статистико-імовірнісних властивостей функціоналу (1), яка сама по собі досить ємна, можна розділити на етапи:

а) знаходження умовної твірної функції  $\Psi(\lambda; h_0, h_L)$  (5) та знаходження безумовної твірної функції  $Q_J(\lambda)$  (6);

б) за допомогою зворотного перетворення Фур'є на підставі знайденої характеристичної функції  $Q_J(\lambda)$  з використанням чисельного алгоритму отримати густину розподілу  $f(\eta)$  випадкових значень функціоналу (1):

$$f(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(i\lambda\eta) Q_1(i\lambda). \quad (7)$$

Твірна функція інтегрального квадратичного функціоналу.

Проблема визначення характеристичної функції  $\Psi(\lambda; h_0, h_s)$  (6) досить часто зустрічається у тому чи іншому формулюванні, зокрема, у завданнях квантової механіки та статистичної фізики. Наприклад, функція Гріна рівняння Шредінгера [2] чи рівняння Фоккера-Планка [1, 3, 5] має вигляд за структурою досить близький до (5). Наслідуючи [2, 3], побудуємо для  $\Psi(\lambda; h_0, h_s)$  рівняння

$$\frac{\partial}{\partial s} \Psi = \frac{\partial}{\partial h_s} \left( v h_s + \frac{1}{2} \sigma_H^2 \frac{\partial}{\partial h_s} \right) \Psi - \lambda h_s^2 \Psi \quad (8)$$

з початковою умовою  $\Psi(\lambda; h_0, h_s | s = 0) = \delta(h_0 - h_s)$ . Останній доданок в (8) відображає конкретний вид квадратичного функціоналу (1). Будемо шукати рішення рівняння (8) у такому вигляді:

$$\Psi(\lambda; h_0, h_s) = \exp\left(-\frac{v-r}{2\sigma_H^2}(h_s^2 - h_0^2) + \frac{v+r}{2}s\right) \chi(\lambda; h_0, \exp(rs)h_s), \quad (9)$$

де  $r = \sqrt{v^2 + 2\lambda v \sigma_H^2}$ . Позначимо  $y = h_s \exp(rs)$ . Для введеної функції  $\chi(\lambda; h_0, y)$  отримуємо наступне диференціальне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial s} \chi(\lambda; h_0, y) = \frac{1}{2} \sigma_H^2 \exp(2rs) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \chi(\lambda; h_0, y), \quad (10)$$

розв'язок якого відомий [1, 3]:

$$\chi(\lambda; h_0, y) = \left( \frac{r}{\pi \sigma_H^2 (\exp(2rs) - 1)} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{r(y - h_0)^2}{\sigma_H^2 (\exp(2rs) - 1)}\right). \quad (11)$$

Таким чином, згідно (9) з використанням (11) отримаємо при  $s = L$

$$\Psi(\lambda; h_0, h_L) = \left( \frac{r}{\pi \sigma_H^2 (\exp(2rL) - 1)} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{v-r}{2\sigma_H^2}(h_L^2 - h_0^2) + \frac{v+r}{2}L - \frac{r[h_L - \exp(-rL)h_0]^2}{\sigma_H^2 (1 - \exp(-2rL))}\right). \quad (12)$$

Інтегруючи тепер по змінній  $h_L$  та змінній  $h_0$  з рівновісною вагою

$$g(h_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_H^2}} \exp\left\{-\frac{h_0^2}{2\sigma_H^2}\right\}, \quad (13)$$

Отримаємо

$$Q_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dh_0 g(h_0) Q(\lambda, L; h_0) = \sqrt{\frac{4vr \exp(vL - rL)}{(v+r)^2 - (v-r)^2 \exp(-2rL)}}, \quad r = r(\lambda) = \sqrt{v^2 + 2\lambda v \sigma_H^2}. \quad (14)$$

З (14) випливає, що  $Q_1(0) = 1$ . Далі отримуємо для математичних очікувань:

$$\mathbf{M}[J] = -\frac{d}{d\lambda} Q_1(\lambda)|_{\lambda=0} = \sigma_H^2, \quad \mathbf{M}[J^2] = \frac{d^2}{d\lambda^2} Q_1(\lambda)|_{\lambda=0} = \sigma_H^4 \frac{-1 + 2vL + v^2 L^2 + \exp(-2vL)}{2v^2 L^2}, \quad (15)$$

тому дисперсія  $\Delta^2$  густини розподілу  $f(\eta)$  випадкового функціоналу  $J$  дорівнює

$$\Delta^2 = \mathbf{M}[J^2] - (\mathbf{M}[J])^2 = (\mathbf{M}[J])^2 \frac{-1 + 2vL + \exp(-2vL)}{2v^2 L^2}. \quad (16)$$

При  $vL \gg 1$  маємо  $\Delta^2 \approx \sigma_H^2 / vL$ , а при  $vL \ll 1$  маємо  $\Delta^2 \approx \sigma_H^2$ .

Для довільного значення декременту  $v$  густина  $f(\eta)$  та функція розподілу  $F(\eta)$  при  $\eta \rightarrow 0$  (флуктуаційна область) прагнуть до нуля швидше, ніж будь-яка ступінь  $\eta$ .

У разі, коли  $\eta$  значно перевищує  $\langle \eta \rangle = \sigma_H^2$  (периферійна область), для  $f(\eta)$  можна отримати наближений вираз при  $vL \approx 1$

$$f(\eta) \cong \frac{2}{3} \sqrt{\frac{vL}{\pi \eta \langle \eta \rangle}} \left( 1 - \frac{1}{9} \exp(-2vL) \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{vL}{4} \frac{\eta}{\langle \eta \rangle} \right). \quad (17)$$

Для випадку, коли  $vL \gg 1$ , з (14) випливає асимптотичний вираз

$$f(\eta) = \sqrt{\frac{vL}{\pi}} \frac{\langle \eta \rangle}{\eta} \left[ (\eta + \langle \eta \rangle)^2 - (\eta - \langle \eta \rangle)^2 \exp\left( -2vL \frac{\langle \eta \rangle}{\eta} \right) \right]^{-1/2} \exp\left( -\frac{vL}{4} \left[ \sqrt{\frac{\eta}{\langle \eta \rangle}} - \sqrt{\frac{\langle \eta \rangle}{\eta}} \right]^2 \right), \quad (18)$$

який можна отримати, виділяючи в експоненті  $\exp(vL - rL)$  формули (14) квадратичну форму щодо нової змінної  $r = \sqrt{v^2 + 2\lambda v \sigma_H^2}$  та інтегруючи з застосуванням методу перевалу.

У загальному випадку для отримання інформації про статистичну структуру випадкової величини – функціонала (1) – необхідне залучення чисельних методів.

### Числові характеристики імовірнісних властивостей інтегрального квадратичного функціоналу

Оскільки інтегральний функціонал (1) позитивно визначений, густина розподілу ймовірностей  $f(\eta)$  випадкової величини  $J$  може бути отримана на основі твірної функції  $Q_\lambda(\lambda)$ , використовуючи зворотне перетворення Лапласа.

Функціонал (1) підпорядковується розподілу типу  $\chi^2$ . Цей функціонал – узагальнений відносно розподілу  $\chi^2$  в тому сенсі, що він визначений на процесу, відліки якого є корельованими. Хоча явно вираз для твірної функції  $Q_\lambda(\lambda)$  функціоналу  $J$  наведено в (14), чисельні процедури, що виникають при виконанні зворотного перетворення Лапласа, призводять до необхідності здійснення ряду труднопереборних дій. До них відносяться, зокрема, побудова на  $\lambda$ -площині Рімана розрізів, необхідних для усунення безлічі кореневих розгалужень і пов'язаних з ними неоднозначностей, і подальше інтегрування вздовж зазначених розрізів.

Полюси твірної функції (14) визначаються її знаменником. Нулі функції – це полюси твірної функції (14). У виразі, що міститься під радикалом, є функція

$$w(\lambda) = \frac{(v + r(\lambda))^2 \exp(r(\lambda)L) - (v - r(\lambda))^2 \exp(-r(\lambda)L)}{4vr(\lambda) \exp(vL)}, \quad r(\lambda) = \sqrt{v^2 + 2\lambda v \sigma_H^2}, \quad (19)$$

що є аналітичною функцією аргументу, тому в (14) достатньо вибрати знак «+» у радикалі. Полюси цієї функції визначаються рівнянням  $(r - v)(r + v)^{-1} = \exp(rL)$  відносно змінної  $r$ . Порівнюючи його ліву і праву частини цього рівняння, можна зробити висновок, що у точці полюса величина  $r$  має бути чисто уявною,  $r = ib$ , де  $b$  – реальна величина. Тому в точці полюса  $\lambda = -(v^2 + b^2) / 2v\sigma_H^2$ , тобто  $\lambda < 0$ , і полюси  $Q$ -функції розташовані на негативному промені реальної осі  $\lambda$ -площини. При  $vL \ll 1$  точка першого полюса  $\lambda_1$  (вважаючи праворуч наліво) приблизно дорівнює  $\lambda_1 \approx (1 + vL) / \sigma_H^2$ . Якщо  $vL \gg 1$ , то перший полюс тим далі від точки  $\lambda = 0$ , чим більший декремент  $v$ .

Нижче наведемо залежності для двох випадків (результати отримані в середовищі MathCad). У першій серії буде інтенсивність  $\sigma_H^2 = 0.8$  і декремент  $\nu = 1.0$ . Відповідно, у другій серії результатів розрахунків інтенсивність  $\sigma_H^2 = 1.0$  і декремент  $\nu = 1.0$ .

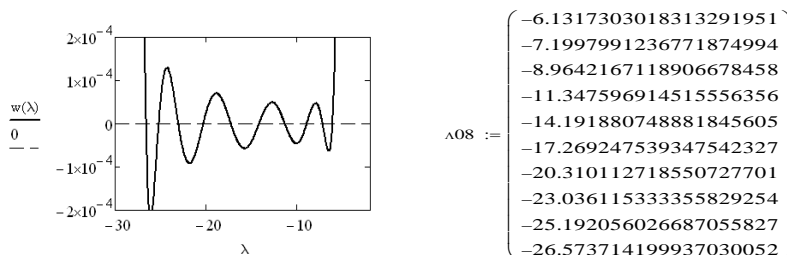


Рис. 1. Нулі знаменника ТФ  $Q_j(\lambda)$ ; ліворуч – функція  $w(\lambda)$  (19), праворуч – таблиця  $\lambda_{08}$  перших 10 нулів; параметри:  $L = 1, \nu = 1.0, \sigma_H^2 = 0.8$

На рис. 1 наведено графік знаменника (19) та таблиця  $\lambda_{08}$  – знайдені перші 10 його нулів (вважаючи праворуч наліво) при  $\sigma_H^2 = 0.8$ .

Слідуючи [2], після обліку нормування отримаємо наступне факторизаційне уявлення для твірної функції

$$Q_j(\lambda) = \sqrt{\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{2\lambda\sigma_H^2 + \lambda_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda_n}{2\lambda\sigma_H^2 + \lambda_n}}. \tag{20}$$

Факторизації твірних функцій відповідає згортка сукупності парціальних густин ймовірностей  $\phi_1(\eta), \phi_2(\eta), \dots, \phi_N(\eta), \dots$ . Розглянемо, наприклад, густину, що відповідає множнику з індексом  $n$ ,

$$\phi_n(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp(\lambda\eta) \sqrt{\frac{\lambda_n}{2\lambda\sigma_H^2 + \lambda_n}} d\lambda. \tag{21}$$

Хоча в кожному з інтегралів (21) також є коренева особливість, інтеграл (21) береться аналітично і можна скористатися відомим результатом:

$$\phi_n(\eta) = \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{2\pi\sigma_H^2\eta}} \exp\left(-\frac{|\lambda_n|}{2\sigma_H^2}\eta\right), \quad n = 1, 2, \dots, N, \tag{22}$$

і  $\phi_n(\eta) = 0$  якщо  $\eta \leq 0$ .

Таким чином, для густини розподілу ймовірностей  $f(\eta)$  випадкових значень адитивного функціоналу (1) отримуємо формулу у вигляді згортки нескінченної кратності

$$f(\eta) = (\phi_1 * \phi_2 * \dots * \phi_N * \dots)(\eta). \tag{23}$$

Коренева особливість, присутня в ТФ (20), обійдена, оскільки для кожного з співмножників (21) на функціональному рівні виконано зворотне перетворення Лапласа у вигляді (22).

Далі у чисельних розрахунках обмежимося випадком використання  $N = 10$  нулів, тобто. замінимо знаменник у (14) поліномом 10-го ступеня. З урахуванням нормування отримаємо наступне факторизаційне уявлення для твірної функції

$$Q_j(\lambda) = \prod_{n=1}^{10} \sqrt{\frac{\lambda_n}{2\lambda\sigma^2 + \lambda_n}}, \tag{24}$$

при цьому згортку (23) зручно здійснювати рекурентно:

$$\phi_{1,2}(\eta) = (\phi_1 * \phi_2)(\eta), \quad \phi_{1,3}(\eta) = (\phi_{1,2} * \phi_3)(\eta), \dots, f(\eta) = (\phi_{1,9} * \phi_{10})(\eta). \quad (25)$$

З метою контролю одержуваних залежностей у розрахунках з  $N = 10$  необхідно їх повторити, але вже з  $N = 11$  або  $N = 12$ , і можна перекопатися в тому, що кількість використаних нулів у факторизації (24) є достатньою.

В результаті приходимо до залежностей для густини розподілу, наведеним на рис. 2 (праворуч на ньому – у логарифмічному масштабі).

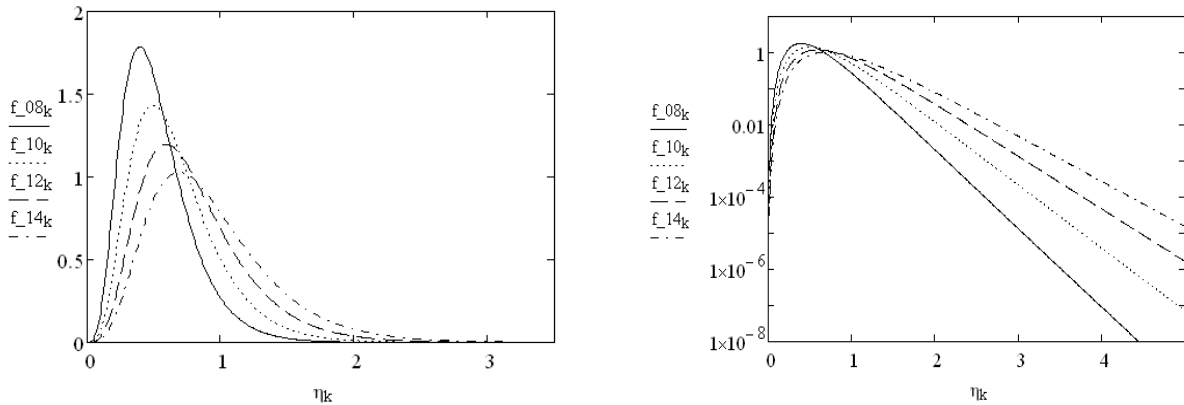


Рис. 2. Густина розподілу  $f(\eta)$ ; (праворуч – у логарифмічному масштабі); параметри:  $\nu = 1, L = 1, \sigma_H^2 = 0.8, 1.0, 1.2, 1.4$

З рис. 2 видно, що всі густини  $f(\eta)$  мають експоненційну асимптотику на периферії  $\eta \gg \langle \eta \rangle$  згідно з (22) і дорівнюють нулю у точці  $\eta = 0$ , тобто. через позитивну визначеність функціоналу (1) ймовірність події  $\{A : J = 0\}$  дорівнює нулю. Зі збільшенням інтенсивності  $\sigma_H^2$  густини  $f(\eta)$  поширюються у бік великих ухилень, при цьому їхній загальний вигляд залишається незмінним.

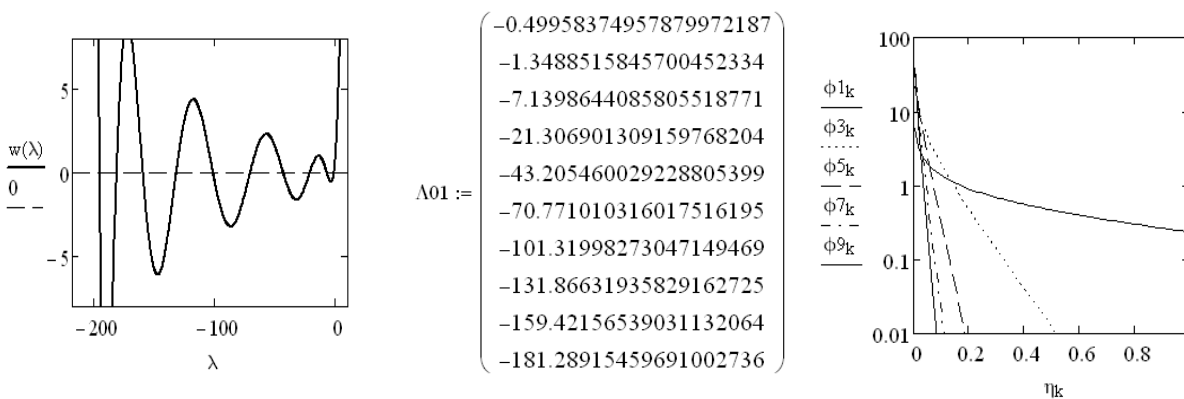


Рис. 3. Нулі знаменника твірної функції  $Q_j(\lambda)$ ; ліворуч – функція  $w(\lambda)$  (22), посередині – таблиця  $\Lambda_{01}$  перших 10 нулів; параметри:  $L = 1, \sigma_H^2 = 1, \nu = 1.0$ ; праворуч – парціальні щільності ймовірностей  $\phi_1(\eta), \phi_3(\eta), \phi_5(\eta), \phi_7(\eta), \phi_9(\eta)$

На рис. 3 наводиться друга серія залежностей, в яких фіксовані інтенсивність  $\sigma_H^2 = 1.0$  і декремент  $\nu = 1.0$ . З таблиці нулів  $\Lambda_{01}$  (рис. 3) видно, що інтервали з-поміж них утворюють

регулярну послідовність, при цьому всі нулі – прості. Проста структура парціальних функцій  $\phi_n(\eta)$  (22) зручна для чисельної організації їх кратної згортки згідно (23). Залежності для густини розподілу  $f(\eta)$  аналогічні наведеним на рис. 2.

Розрахунки, виконані при різних значень параметра  $\nu L$ , показали, що знайдені залежності мають форму, яка практично збігається з тими, для яких  $\nu L = 1$ .

### Висновки

Таким чином, у роботі викладено алгоритм, застосування якого дозволяє виконати зворотне перетворення Лапласа. Кореневі особливості та пов'язана з цим докладна деталізація контуру інтегрування при виконанні зворотного перетворення обійдені. В алгоритмі чисельні процедури складаються з знаходження нулів дисперсійного рівняння та послідовності згорток власних парціальних функцій, що відповідають власним нулям. Отримані дані дозволяють зробити висновки про ймовірнісні властивості функціоналу (1).

### Список використаної літератури

1. Chandrasekhar S. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics*. 1943. 15 (1). 1–89.
2. Feynman Richard P., Hibbs Albert Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw Hill. 1965. 365 p. ( ISBN 0-07-020650-3)
3. Скороход А. В. Лекції з теорії випадкових процесів. К.: Либідь, 1990. 168 с.
4. Rytov S.M. Introduction to statistical radiophysics. Nauka Press, 1966. 404 p.
5. Mazmanishvili A.S. Path integration as a method for solving physical problems. К.: Naukova Dumka Press. 1997. 224 p.
6. Helstrom C.W. Quantum detection and estimation theory. *J. Stat. Phys.* 1969. 1. 231–252. doi: 10.1007/BF01007479.
7. Laskin N.V., Mazmanishvili A.S., Nasonov N.N., Shulga N.F. On the theory of the Landau-Pomeranchuk effect of suppression of the radiation of relativistic electrons in amorphous and crystalline media. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 89, No. 3(9), pp. 763–780, 1985.

### References

1. Chandrasekhar, S. (1943). Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics*. 15 (1). 1–89 [in English]
2. Feynman, Richard P., & Hibbs, Albert (1965). Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw Hill. ( ISBN 0-07-020650-3) [in English]
3. Skorokhod, A. V. (1990). Lektsii z teorii vypadkovykh protsesiv [Lectures on the theory of random processes]. К.: Lybid. [in Ukrainian]
4. Rytov, S.M. (1966). Introduction to statistical radiophysics. Nauka Press. [in English]
5. Mazmanishvili, A.S. (1997). Path integration as a method for solving physical problems. К.: Naukova Dumka Press. [in English]
6. Helstrom, C.W. (1969). Quantum detection and estimation theory. *J. Stat. Phys.* 1:231–252. doi: 10.1007/BF01007479 [in English]
7. Laskin, N.V., Mazmanishvili, A.S., Nasonov, N.N., & Shulga, N.F. (1985). On the theory of the Landau-Pomeranchuk effect of suppression of the radiation of relativistic electrons in amorphous and crystalline media. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 89, 3(9), 763–780 [in English]

Мазманішвілі Олександр Сергійович – д.ф.-м.н., професор, старший науковий співробітник Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут». E-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

Mazmanishvili Oleksandr Serhiiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Senior Researcher at the National Science Center “Kharkiv Physical-Technical Institute”. E-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.