

УДК 519.65

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО

Херсонський навчально-науковий інститут Національного університету кораблебудування  
імені адмірала Макарова

П. ГУЧЕК

Економіко-гуманітарна Академія у Варшаві (Польща)

І.О. АСТІОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

## «ДУТА» МОДА КВАДРАТНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА: КОГНІТИВНО-ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ

*У задачах відновлення функцій двох аргументів головним інструментом є стародавній метод перерізів. Традиційно вважається, що важливіші горизонтальні перерізи поверхонь (лінії рівня). В нашому аналізі лінії рівня відступили на другий план. Більш інформативні вертикальні перерізи утворили дивну шеренгу видатних вчених, таких як Бернуллі, Лагранж, Лежандр, Леонардо да Вінчі, Гаусс, Арнольд. Золота пропорція покроково повернула вузли екзотичної кубатури тригонометричного походження в традиційно звичні точки, які відкрили Я. Бернуллі і А. Лежандр. Виявляється, що незалежно від стереометрії моди для обчислення її об'єму кубатури Гаусса-Лежандра найкращі.*

*У роботі аналізуються геометричні особливості і маловідомі властивості моделей «дутої» моди поліноміального та тригонометричного походження. «Дутою» модою в англійських джерелах називають базисну унімодальну поверхню, що асоціюється з центральним вузлом інтерполяції квадратного або трикутного скінченного елемента. Ця поверхня зустрічається в задачах відновлення функцій двох аргументів і нагадує мильну плівку. Французькі інженери віддають перевагу назві «купа піску». Порівняння стереометричних характеристик моделей ілюструє цікавий приклад «м'якого» та «жорсткого» математичного моделювання (за термінологією В. Арнольда). Метод перерізів поліноміальної поверхні дає простий спосіб визначення вузлів квадратури Гаусса-Лежандра (Бернуллі). У випадку тригонометричної моди звичне розташування вузлів квадратури порушується («жорстка» модель), об'єм «дутої» моди невиправдано збільшується. Точне значення об'єму відновлюється за допомогою «золотої» пропорції.*

*Робота фактично продовжує і суттєво доповнює тему «дутої» моди трикутного скінченного елемента третього порядку. Тепер мильна плівка охоплює скінченний елемент квадратної форми. Розглядається два канонічних квадрата-носія.*

*Ключові слова: поліноміальна модель, тригонометрична модель, метод перерізів, об'єм «дутої» моди, кубатура Гаусса, вузли Лежандра (Бернуллі), оптимізація тригонометричної моделі.*

A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

O.I. LYTVYENKO

Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding

P. GUCHEK

University of Economics and Human Sciences in Warsaw (Poland)

I.O. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

## “BLOWN” MODE OF A SQUARE FINITE ELEMENT: A COGNITIVE AND GRAPHICAL ANALYSIS

*In the problems of restoring functions of two arguments, the main tool is the ancient method of sections. It is traditionally believed that horizontal sections of surfaces (level lines) are more important. In our analysis the level lines have receded into the background. More informative vertical sections formed a strange chain of prominent scientists, such as Bernoulli, Lagrange, Legendre, Leonardo da Vinci, Gauss, Arnold. The golden proportion has step by step returned the nodes of the exotic cubature of trigonometric origin to the traditionally familiar points discovered by Bernoulli and Legendre. It turns out that regardless of the stereometry of the mode Gauss-Léjeandre cubatures are the best for calculating its volume.*

*In this paper we analyze the geometric features and little-known properties of the “blown” mode models of polynomial and trigonometric origin. In English-language sources the “blown” mode refers to a basic unimodal surface associated with the central interpolation node of a square or triangular finite element. This surface is found in problems of restoring functions of two arguments and resembles a soap film. The French engineers prefer the name “pile of sand”. Comparison of the stereometric characteristics of the models illustrates an interesting example of “soft” and “hard” mathematical modeling (in V. Arnold’s terminology). The method of sections of a polynomial surface provides a simple way to determine the nodes of the Gauss-Lejeune (Bernoulli) quadrature. In the case of the trigonometric mode the usual arrangement of the quadrature nodes is disturbed (the “hard” model), and the volume of the “blown” mode unjustifiably increases. The exact value of the volume is restored using the “golden” proportion.*

*In fact the work continues and significantly complements the theme of the “blown” mode of the third-order triangular finite element. Now the soap film covers a square-shaped finite element. Two canonical square-carriers are considered.*

*Key words: polynomial model, trigonometric model, method of sections, volume of the “blown” mode, Gauss cubature, Legendre (Bernoulli) nodes, optimization of the trigonometric model.*

### Постановка проблеми

Проблема полягає в тому, що стереометричні особливості унімодальних поверхонь типу «дутої» моди, особливо тригонометричного походження, недостатньо вивчені. Йдеться про скінченні елементи квадратної форми, конкретно, про  $Q_9$  і  $Q_{17}$ . З розвитком серендипових апроксимацій інженери втратили інтерес до унімодальних поверхонь, хоча математики продовжують добувати латентну інформацію. Когнітивно-графічний аналіз «дутої» моди трикутного елемента несподівано відкрив прямий зв'язок критичних точок поверхні з вузлами квадратури Гаусса. Цікаво дізнатися, яку інформацію «приховують» унімодальні поверхні на квадратних носіях, які властивості «дутої» моди поліноміального походження успадковує тригонометрична мода.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Наша робота фактично продовжує і суттєво доповнює тему «дутої» моди трикутного скінченного елемента третього порядку [1]. Тепер мильна плівка охоплює скінченний елемент квадратної форми. Розглядається два канонічних квадрата-носія. Носій  $-1 \leq x, y \leq 1$  найчастіше зустрічається в публікаціях інженерно-орієнтованих фахівців [2, 3, 4], а носій  $0 \leq x, y \leq 1$  подобається математикам [5, 6]. Популярність метода скінченних елементів неухильно зростає, з'явилися нові неполіноміальні базиси, наприклад, тригонометричні [4, 5, 7]. У нашій роботі ми порівнюємо поліноміальні і тригонометричні «дуги» моди. Результати аналізу несподівано похитнули довіру до тригонометричної апроксимації щодо її зв'язку з кубатурою Гаусса. Ситуація нагадує парадокс Бертрана в теорії ймовірностей. Відновлення зв'язку тригонометричної моди з кубатурою Гаусса відбувається за допомогою методу «золотої» пропорції [8].

### Мета дослідження

За допомогою метода перерізів поліноміальних та тригонометричних унімодальних поверхонь проілюструвати приклади «м'якого» і «жорсткого» математичного моделювання. Показати роль «золотої» пропорції в задачах підвищення ефективності квадратур типу Гаусса.

### Викладення основного матеріалу дослідження

На канонічному квадраті  $-1 \leq x, y \leq 1$  рівняння дутої моди має вигляд [2, 4]:

$$z = f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2). \quad (1)$$

Як базисна функція «дуга» мода (1) використовується на елементі другого порядку  $Q_9$  (лагранжева версія). Це природно і обґрунтовано. На елементі четвертого порядку (серендипові версія) [2, 3] використання «дутої» моди виглядає неприродно. Навпаки, у 2009 році доведено [9],

що 17-й вузол в барицентрі квадрата в елементі четвертого порядку зовсім не потрібний. Але «дута» мода як унімодальна симетрична поверхня заслуговує на увагу. Когнітивно-графічний аналіз «дутої» моди трикутника [1] показав цікаві результати. Ми сподіваємося, що метод перерізів поверхні (1) відкриє нові ознаки побічної адекватності цієї моделі та стереометричні особливості. Переріз поверхні (1) координатними площинами  $y = 0$  ( $x = 0$ ) скоріше ілюстративний, ніж когнітивний. Цікаво зробити діагональний переріз  $y = x$  і показати проекцію діагонального перерізу на координатну площину  $y = 0$  (рис. 1).

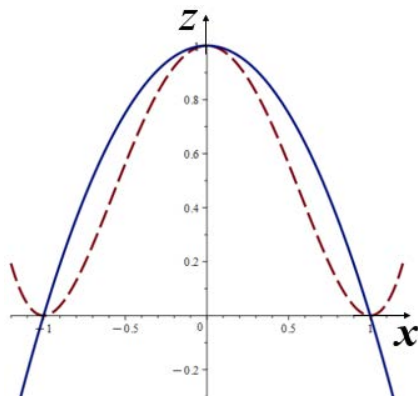


Рис. 1. Суцільна крива – переріз поверхні (1) площиною  $y = 0$ ; пунктир – проекція на  $y = 0$  перерізу  $y = x$

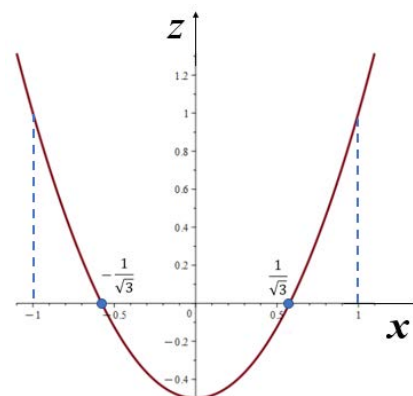


Рис. 2. Графік полінома Лежандра другого порядку

Аналіз поведінки поліноміальної «дутої» моди починається з підстановки  $y = x$  :

$$f(x) = (1 - x^2)^2. \quad (2)$$

Поліном четвертого порядку має п'ять критичних точок. За допомогою першої похідної  $f'(x) = 0$  визначаються точки екстремумів. Більш інформативні точки перегину графіка  $f(x) = (1 - x^2)^2$  визначаються за допомогою другої похідної  $f''(x) = 0$  .

Цікаво, що нулі другої похідної  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  співпадають з нулями класичного поліному Лежандра другого порядку (рис. 2):

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Саме в цих точках Гаусс розташував вузли квадратури найвищого алгебраїчного ступеня точності інтегрування. Це була справжня революція в історії наближеного інтегрування. До речі, поліноми Лежандра ортогональні на інтервалі  $[-1; 1]$ .

Читач розуміє, що можна говорити про кубатуру Гаусса (чотири вузли), якщо виконати другий діагональний переріз  $y = -x$ .

Треба підкреслити, що когнітивно-графічний аналіз «дутої» моди на правильному трикутнику [1] і квадраті дає простий і наочний спосіб визначення координат вузлів квадратури Гаусса. Такий підхід краще процедури складання і розв'язування системи із чотирьох алгебраїчних рівнянь, два з яких нелінійні.

Щоб переконатися, що отримані результати не випадкові, розглянемо «дуту» моду на одиничному квадраті  $0 \leq x, y \leq 1$  .

Поверхня має рівняння [5]:

$$z = f(x, y) = 16(1-x)(1-y)xy. \quad (3)$$

Стереометричні особливості спостерігаються в діагональних перерізах  $y = x$  та  $y = 1 - x$ .

Поверхня (3) отримана шляхом центрально-симетричного стиснення поверхні (1) та паралельного перенесення барицентра носія із  $(0, 0)$  в  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Таким чином, фігура (3) – це витончена копія фігури (1). Діагональний переріз дає залежність

$$f(x) = (1 - x^2)^2.$$

Тепер нулі ортогонального полінома другого порядку (вузли квадратури Гаусса)

$$f''(x) = 6x^2 - 6x + 1 = B_2(x) = 0$$

співпадають з нулями класичного полінома Я. Бернуллі другого порядку

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

На рис. 3 нормуючий множник вибрано так, щоб  $B_2(1) = 1$ .

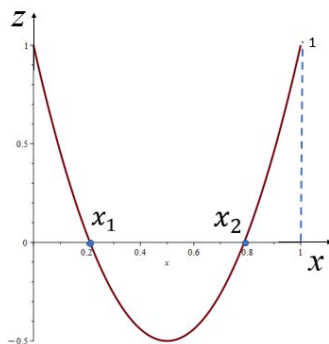


Рис. 3. Графік полінома Бернуллі другого порядку

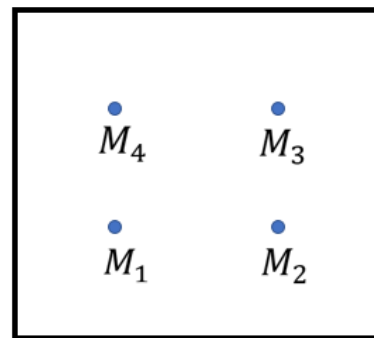


Рис. 4. Двовимірний обчислювальний шаблон Гаусса

Як бачимо, поліноміальні моделі «дутої» моди приховують цікаву інформацію щодо зв'язків з кубатурами Гаусса. На рис. 4 показано двовимірний обчислювальний шаблон Гаусса, який використовують для оцінки подвійного інтегрування функцій двох аргументів. В нашому випадку об'єм моди можна обчислити точно за формулою

$$V = \int_D f_d(x, y) dx dy, \quad D - \text{область інтегрування.}$$

Можна наближено оцінити  $V$  за формулою Гаусса-Лежандра:

$$V \approx \sum_{i=1}^4 f(M_i), \quad (4)$$

або за формулою Гаусса-Бернуллі:

$$V \approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f(M_i). \quad (5)$$

Вузли інтегрування  $M_i$  (рис. 4) мають наступні координати:

- а) за версією Лежандра  $x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $y_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  
 в) за версією Бернуллі  $x_i = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ ;  $y_i = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

Як і передбачалося, формули (4), (5) показують абсолютно точні результати інтегрування поліноміальних поверхонь (1) і (3). Для моделі (1):  $V_1 = \frac{16}{9}$ . Для моделі (3):  $V_3 = \frac{4}{9}$ . До речі,  $\frac{4}{9}$  – це точне значення середньої аплікати цих поверхонь.

Про використання в МСЕ тригонометричних поверхонь спочатку писали, що це можливо [4, 6], згодом, що це необхідно [2, 3]. Здається, що тригонометричні «дуги» моди ще не досліджували когнітивно-графічно. Нижче ми розглядаємо з цієї точки зору дві моделі: на  $-1 \leq x, y \leq 1$  і  $0 \leq x, y \leq 1$ . Алгоритм дослідження стандартний. Спостерігається поведінка діагонального перерізу поверхні. На квадраті  $-1 \leq x, y \leq 1$  поверхня має вигляд:

$$f(x, y) = \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi y}{2} . \quad (6)$$

На квадраті  $0 \leq x, y \leq 1$  маємо:

$$f(x, y) = \sin \pi x \cdot \sin \pi y . \quad (7)$$

Метод вертикальних перерізів показав, що графіки тригонометричних кривих мало чим відрізняються від графіків поліномів четвертого порядку. Критичні точки першого роду співпадають. Друга похідна зберігає властивість ортогональної функції, але нулі другої похідної не співпадають з нулями поліномів Лежандра і Бернуллі другого порядку. На рис. 5, 6 показано нормовані графіки другої похідної функцій (6) і (7) на діагональному перерізі.

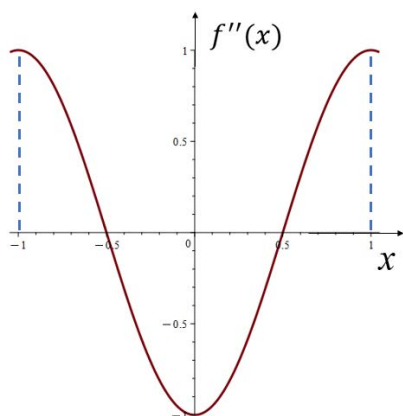


Рис. 5. Друга похідна функції (6)

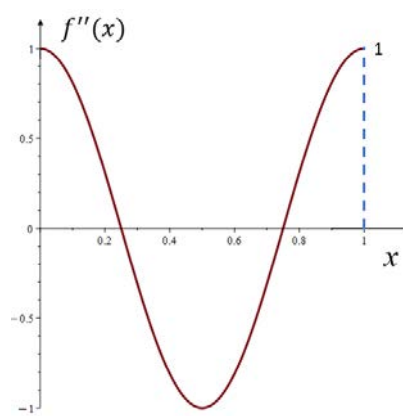


Рис. 6. Друга похідна функції (7)

Це яскравий приклад «жорсткого» математичного моделювання. Обов'язкова періодичність тригонометричних функцій спричинила зменшення відстані між вузлами шаблону. Така кубатура дає збільшений об'єм моди. «Жорстка» модель руйнує фундамент ідеї Гаусса – нерівномірність розташування вузлів. З іншого боку, несподівано збільшений і свідомо зменшений об'єми можна використати в процедурах оптимізації цільової функції (об'єму).

Щоб оцінити ефективність процедури оптимізації, знайдемо точний об'єм моди. Для моделі (6):  $V = \frac{16}{\pi^2}$ ; для моделі (7):  $V = \frac{4}{\pi^2}$ . Детальніше розглянемо модель (6) з об'ємом  $V \approx 1,623$ . Візьмемо зручний інтервал невизначеності  $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$  і скористаємося методом «золотої» пропорції. Граничні значення функції:  $V = 2$  при  $x = \frac{1}{2}$ ;  $V = 1$  при  $x = \frac{2}{3}$ . Привертає увагу натяк на золоту пропорцію з коефіцієнтами  $\frac{2}{3}$  і  $\frac{1}{3}$ , більш точна пара  $\frac{3}{5}$  і  $\frac{2}{5}$ , ще краще  $\frac{5}{8}$  і  $\frac{3}{8}$ . Покажемо, як змінюється об'єм моди в процесі оптимізації.

$$\text{Перша пара: } 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 1,667 = V_1.$$

$$\text{Друга пара: } 2 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = 1,6 = V_2.$$

$$\text{Третя пара: } 2 \cdot \frac{5}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} = 1,625 = V_3.$$

Ми зупинилися на цьому результаті, хоча потенціал метода іще не вичерпано. Для моделі (7) уточнення об'єму моди виконується аналогічно.

### Висновки

У задачах відновлення функцій двох аргументів головним інструментом є стародавній метод перерізів. Традиційно вважається, що важливіші горизонтальні перерізи поверхонь (лінії рівня). В нашому аналізі лінії рівня відступили на другий план. Більш інформативні вертикальні перерізи утворили дивну шеренгу видатних вчених, таких як Бернуллі, Лагранж, Лежандр, Леонардо да Вінчі, Гаусс, Арнольд. Золота пропорція покроково повернула вузли екзотичної кубатури тригонометричного походження в традиційно звичні точки, які відкрили Я. Бернуллі (1713 р.) і А. Лежандр (1785 р.). Виявляється, що незалежно від стереометрії моди для обчислення її об'єму кубатури Гаусса-Лежандра найкращі.

### Список використаної літератури

1. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. «Дута» мода як когнітивна модель побудови трикутника третього порядку. *Прикладні питання математичного моделювання*. Т. 2, № 2. 2019. С. 110–117. DOI: 10.32782/2618-0340/2019.2-2.10
2. Akin I. E. *Finite Element Analysis with Error Estimators*. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. 477 p.
3. Onate E. *Structural Analysis with the Finite Element Method*. Vol. 1. Springer Netherlands, 2009.
4. Zienkiewicz O. C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
5. Mitchell A. R., Wait R. *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*, London, Wiley, 1977.
6. Strang G., Fix G. J. *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1973.
7. Norrie D. H., de Vries G. *An Introduction to Finite Element Analysis*. Academic Prees. N.Y., 1978.
8. Shoup T. E. *A Practical Guide to Computer Methods for Engineers*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1979.
9. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. Формоутворення серендипових поверхонь з «прихованими» параметрами. *Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійського державний агротехнологічний університет*. Вип. 4, т. 48. Мелітополь: ТДАТУ, 2010. С. 55–62.

### References

1. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I., & Astionenko, I.O. (2019). «Duta» moda yak kohnityvna model pobudovy trykutnyka tretogo poriadku [«Blown» mode as cognitive model of building the triangle of third order]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. 2 (2), 110–117 DOI: 10.32782/2618-0340/2019.2-2.10 [in Ukrainian].
2. Akin, I.E. (2005). *Finite Element Analysis with Error Estimators*. Elsevier, Butterworth-Heinemann [in English]
3. Onate, E. (2009). *Structural Analysis with the Finite Element Method*. Vol. 1. Springer Netherlands [in English]
4. Zienkiewicz, O.C. (1971). *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: McGraw-Hill [in English]
5. Mitchell, A.R., & Wait, R. (1977). *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*, London, Wiley [in English]
6. Strang, G., & Fix, G.J. (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. [in English]
7. Norrie, D.H., & de Vries, G. (1978). *An Introduction to Finite Element Analysis*. Academic Press. N.Y. [in English]
8. Shoup, T.E. (1979). *A Practical Guide to Computer Methods for Engineers*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs [in English]
9. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I., & Astionenko, I.O. (2010). Formoutvorennia serendypovykh poverkhon z «prykhovanymy» parametramy [Shaping of serendipity surfaces with "hidden" parameters]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Pratsi. Tavriiskiy derzhavnyi ahrotekhnolohichniy universytet*. Melitopol: TDATU, 48 (4), 55–62 [in Ukrainian].

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету імені Петра Могили. E-mail: [khan@chmnu.edu.ua](mailto:khan@chmnu.edu.ua), ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. E-mail: [mmkntu@gmail.com](mailto:mmkntu@gmail.com), ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Гучек Петро – д.т.н., доцент факультету комп'ютерних наук Економіко-гуманітарної Академії у Варшаві (Польща). ORCID: 0000-0002-6110-6816.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри загальноосвітніх, гуманітарних та природничих дисциплін Херсонського національного технічного університету. E-mail: [astia@ukr.net](mailto:astia@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5831-6353.

Khomchenko Anatolij Nykyforovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Intelligent Information Systems of the Petro Mohyla Black Sea National University. E-mail: [khan@chmnu.edu.ua](mailto:khan@chmnu.edu.ua), ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Lytvynenko Olena Ivanivna – Ph.D., Associate Professor, Associate Professor at the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines of the Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding. E-mail: [mmkntu@gmail.com](mailto:mmkntu@gmail.com), ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Guchek Petro – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor at the Faculty of Computer Sciences of University of Economics and Human Sciences in Warsaw (Poland). ORCID: 0000-0002-6110-6816.

Astionenko Ihor Oleksandrovych – Ph.D., Associate Professor, Associate Professor at the Department of General Education, Humanities and Natural Science Disciplines of Kherson National Technical University. E-mail: [astia@ukr.net](mailto:astia@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5831-6353.