

УДК 539.3:534

К.Г. ДЕГТЯРЬОВ, Д.В. КРЮТЧЕНКО, О.О. УСАТОВА

Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного Національної академії наук України

О.Л. ЗАЙДЕНВАРГ

Харківський національний аерокосмічний університет  
імені М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»

Ю.В. НАУМЕНКО

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ КОАКСІАЛЬНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З УРАХУВАННЯМ ПЛЕСКАНЬ РІДИНИ

Головна мета дослідження полягає у розробленні ефективної комп'ютерної технології для оцінки власних частот коливань складених резервуарів із рідиною. Вивчаються власні коливання пружних конструкцій, складених із циліндричних і конічних оболонок, з'єднаних кільцями. Простір між оболонками заповнено ідеальною, нестисливою рідиною. Для числової симуляції використовуються методи заданих форм, граничних та скінчених елементів. Перевага запропонованого підходу полягає у можливості вивчення як вільних, так і вимушених коливань незаповнених та частково заповнених рідиною оболонок у рамках єдиної комп'ютерної технології. Розроблений метод дає змогу досліджувати коливання пружних оболонок як з урахуванням, так і без урахування плескань вільної поверхні. Спектральна гранична задача для коливань рідини в жорстких оболонках вирішується окремо. Базисні функції для визначення частот та форм, заповнених рідиною, оболонок обчислюються шляхом розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь. Для оболонок обертання ці системи зводяться до одновимірних, де інтеграли обчислюються вздовж кривих та ламаних. Використані ефективні числові процедури для обчислення одновимірних інтегралів із логарифмічною особливістю та особливістю типу Коші. Розрахунки тестових задач продемонстрували високу точність та ефективність запропонованого методу. Новизна та практична цінність отриманих результатів полягають у можливості дослідження коливань паливних баків складної форми за різних умов польоту.

Ключові слова: коаксіальні пружні оболонки, методи граничних та скінчених елементів, плескання рідини.

K.G. DEGTYAREV, D.V. KRIUTCHENKO, O.O. USATOVA

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences

O.L. ZAIDENVARG

National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute"

YU.V. NAUMENKO

V.N. Karazin Kharkiv National University

## COMPUTER MODELING VIBRATIONS OF ELASTIC COXIAL LIQUID-FILLED SHELLS OF REVOLUTION CONSIDERING SLOSHING

The primary aim of this study is to create an effective numerical approach by combining finite and boundary element methods for assessing the natural frequencies of vibrations in compound liquid-filled reservoirs. The research focuses on analysing the natural vibrations of elastic structures, which consist of interconnected cylindrical and conical shells connected by rings. The space between these shells is occupied by an ideal, incompressible fluid. Numerical simulations employ mode superposition methods, as well as boundary and finite element methods. The key advantage of proposed approach is its capability to investigate both free and forced vibrations in structures composed of empty and liquid-filled shells, all within the unified computer technology framework. The developed method allows for the exploration of elastic shell vibrations with and without considering the free surface sloshing. Additionally, a separate solution is provided for the spectral boundary problem related to liquid vibrations in rigid shells. The frequencies and modes of liquid-filled shells are determined through basis functions evaluated by solving singular integral equations. For shells of revolution, these systems are reduced to one-dimensional ones, where integrals are computed along curves and segments of lines. Efficient numerical procedures are employed for the computation of one-dimensional integrals with logarithmic and Cauchy-type singularities. Test calculations affirm the high precision and efficiency of the proposed method. The significance and practical usage of these findings lie in the ability to investigate the vibrations of complex-shaped fuel tanks under various flight conditions.

Key words: coaxial elastic shells, boundary and finite element methods, sloshing.

### Постановка проблеми

Проблема коливань рідини є викликом для різних галузей промисловості, таких як авіа-космічна, морська, цивільна, машинобудівна, ядерна інженерія, а також складним завданням для фізиків та математиків. Коливання рідини можуть призводити до катастрофічних пошкоджень резервуарів для зберігання води та нафти. Тиск рідини в резервуарі може суттєво впливати на його міцність та несучу здатність. Це має важливі наслідки для стійкості транспортних засобів перевезення резервуарів із рідиною, оскільки призводить до небажаних гідродинамічних навантажень, які можуть бути небезпечними для мобільності кораблів, вантажівок, ракет та супутників. Проектування кожної нової ракети-носія, нових транспортних засобів потребує виготовлення нових паливних баків, нових резервуарів з ускладненою формою. Це, своєю чергою, потребує створення високоточних та надійних методів оцінки міцності та динамічного стану зазначених об'єктів. Тому актуальним питанням є розроблення нових числових методів та їх тестування. Визначення власних частот та форм резервуарів ускладненої форми є важливим практичним питанням, оскільки набуті дані дадуть змогу відстроювання працюючих конструкцій від небажаних резонансів.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Оболонки та оболонкові конструкції є поширеними елементами конструкцій у сучасному машинобудуванні. Ці конструкції використовуються як баки пального для ракетних апаратів, резервуари для зберігання нафти, прісної води та інших речовин, включаючи потенційно небезпечні вибухонебезпечні рідини. Важливо відзначити, що розроблення кожного нового космічного апарата передбачає проектування нових паливних баків. Зазвичай ці баки проєктуються як оболонки обертання, частково заповнені рідиною. Сьогодні поширено використання баків у формі циліндричних оболонок з округлими краями [1], конічних [3], тороїдальних та коаксіальних оболонок [2]. Найточніша оцінка міцності баків, наповнених рідиною, під впливом інтенсивних зовнішніх сил може бути отримана з комплексних, повномасштабних натурних експериментів. Однак проведення таких експериментів є вартісним і ризикованим. У зв'язку із цим віртуальні експерименти набувають популярності в наукових дослідженнях як безпечний та більш ефективний альтернативний метод. Нині розроблено низку ефективних методів комп'ютерного моделювання динамічних процесів. Серед них – методи скінченних (МСЕ) [4] та граничних (МГЕ) [4] елементів та методи скінченних об'ємів [5; 6]. Під час моделювання динамічних процесів в оболонках із відсіками, частково заповненими рідиною, першим кроком є визначення частот та форм їхніх власних коливань. Цей аспект досліджувався, наприклад, у роботах [3; 7]. Робота [8] присвячена розробленню аналітичних методів аналізу вібрацій в оболонках, наповнених рідиною, із перегородками. Мембранні покриття для гасіння коливань розглянуто в [9; 10]. У [7] визначено фундаментальні частоти циліндричних оболонок. Дослідження, представлене у [2], фокусувалося на вивченні власних частот тороїдальних та коаксіальних циліндричних оболонок. Дослідження стійкості циліндричних оболонок проведено в [11–13], у [14; 15] розглянуто проблеми стійкості руху рідини в призматичних резервуарах. Для відстроювання від небажаних резонансних частот необхідно мати весь частотний спектр власних коливань за різних рівнів наповнення паливом та різних рівнях навантаження. Однак дослідження вібрацій складених оболонок із відсіками, частково заповненими рідиною, не отримало достатньої уваги в літературі [12].

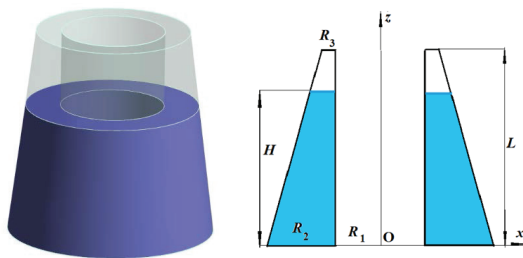
### Мета дослідження

Мета роботи – розроблення ефективного числового методу на основі МСЕ та МГЕ для оцінки власних частот та форм коливань складених резервуарів із рідиною.

**Виклад основного матеріалу дослідження**

**Основні рівняння для визначення власних частот пружних резервуарів із рідиною.**

Розглядаються складені оболонки обертання, частково заповнені рідиною, зображені на рис. 1. Змочена поверхня оболонки позначена як  $S_1$ , тоді як  $S_0$  є вільною поверхнею рідини. Припускається, що рідина є ідеальною та нестисливою. Резервуари складаються з коаксіальних циліндричних та конічних оболонок, з'єднаних кільцями. Рідина знаходиться між оболонками. Поверхні оболонок та днища змочені, а вільна поверхня у стані спокою знаходиться на висоті  $H$ , утворюючи кільце, яке описується у полярній системі координат так:  $\{z = H, R1 < r < R0\}$ . Тут  $R0 = R3 + (R2 - R3)(L - H)/L$ . Змочена поверхня  $S_1$  включає у себе циліндричні та конічні частини, а також днище.



**Рис. 1. Конічно-циліндрична оболонкова конструкція та її схема**

Припускається, що рідина всередині оболонкової конструкції є ідеальною та нестисливою. Уважається, що рух рідини є безвихровим. Якщо  $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$  – вектор швидкості рідини, умова нестисливості має вигляд:

$$\text{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Таким чином, потенціал швидкості  $\Phi$  можна ввести як  $\mathbf{V} = \text{grad}\Phi$  та з (1) отримати рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Система рівнянь руху пружної оболонки з рідиною в операторній формі [14]:

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}, \tag{3}$$

де  $\mathbf{L}$  та  $\mathbf{M}$  – оператори пружних і масовим сил,  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$  – вектор переміщень,  $\mathbf{Q}$  – вектор зовнішніх навантажень,  $\mathbf{P}_1$  – тиск рідини,  $\mathbf{P}_1 = p\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  – зовнішня одинична нормаль до поверхні. Згідно з інтегралом Бернуллі, значення тиску  $p$  обчислюється так:

$$\frac{p}{\rho_l} = -\frac{\partial}{\partial t} - gz + \frac{p_0}{\rho_l}, \tag{4}$$

де  $z$  позначає вертикальну координату точки в рідині,  $p_0$  – атмосферний тиск,  $\rho_l$  – густина рідини. Область, яку займає рідина, позначається як  $\Omega$ ,  $\mathbf{P}$  – точки у межах  $\Omega$ . На змоченій поверхні  $S_1$  виконуються умови непротікання, а на вільній – кінематична і динамічна умови [17]. Тобто для рівняння (2) сформульована крайова задача:

$$\nabla^2\Phi = 0, \mathbf{P}, \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = (\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{n}), \mathbf{P}S_1, \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t}, p - p_0 = 0, \mathbf{P}S_0. \tag{5}$$

Тут невідома функція  $\zeta = \zeta(t, x, y)$  характеризує зміни в положенні та формі вільної поверхні з часом. Таким чином, необхідно визначити невідомі функції  $\Phi$ ,  $\zeta$  та  $\mathbf{U}$  з рівнянь (3)–(5), з урахуванням крайових та і початкових умов.

### Метод заданих форм

Невідома вектор-функція  $\mathbf{U}$  подається у вигляді:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k(x, y, z) c_k(t), \quad (6)$$

де функції  $\mathbf{u}_k(x, y, z)$  – форми власних коливань порожньої оболонкової конструкції, а  $c_k(t)$  – залежні лише від часу невідомі коефіцієнти. Для визначення  $\mathbf{u}_k(x, y, z)$  використовується МСЕ [7]. Потенціал швидкості подається у вигляді  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ .

Для визначення потенціалу  $\Phi_1$  сформульовано таку крайову задачу:

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0, \mathbf{P} \in \Omega, \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{n}} = (\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{n}), \mathbf{P} \in S_1, \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0, \mathbf{P} \in S_0. \quad (7)$$

Ураховуючи рівняння (6) та друге рівняння з (5), побудовано ряд для  $\Phi_1$  у вигляді:

$$\Phi_1(r, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^n \varphi_{1k}(r, \theta, z) \dot{c}_k(t), \quad (8)$$

де функції  $\varphi_{1k}(r, \theta, z)$  є розв'язками крайової задачі

$$\nabla^2 \varphi_{1k} = 0, \mathbf{P} \in \Omega, \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \mathbf{P} \in S_1, \varphi_{1k} = 0, \mathbf{P} \in S_0. \quad (9)$$

Для визначення потенціалу  $\Phi_2$  маємо крайову задачу:

$$\nabla^2 \Phi_2 = 0, \mathbf{P} \in \Omega, \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} = 0, \mathbf{P} \in S_1, \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + g\zeta = 0, \mathbf{P} \in S_0, \quad (10)$$

при цьому на вільній поверхні виконується співвідношення:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (11)$$

Невідомі функції  $\zeta$  і  $\Phi_2$  у циліндричних координатах  $(r, \theta, z)$  виражаються як:

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{n_2} d_k(t) \zeta_k(r, \theta), \quad \Phi_2(r, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^{n_1} \dot{d}_k(t) \varphi_{2k}(r, \theta, z). \quad (12)$$

Тут залежні від часу коефіцієнти  $d_k(t)$  є невідомими. Унаслідок (12) базисні функції  $\zeta_k(r, \theta)$  і  $\varphi_{2k}(r, \theta, z)$  є розв'язками такої лінійної спектральної крайової задачі:

$$\nabla^2 \varphi_{2k} = 0, \mathbf{P} \in \Omega, \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \Big|_{S_1}, \frac{\partial \varphi_{2k}(r, \theta, z)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_{2k}(r, \theta, H), \quad (13)$$

де  $\chi_k$  – фундаментальні частоти. Як показано в [5], для оболонок обертання всі невідомі функції для кожного хвильового числа  $l$  та  $j = 1, 2$  можна подати у вигляді [18]:

$$\mathbf{u}_k(r, \theta, z) = \mathbf{u}_k(r, z) \cos(l\theta), \varphi_{jk}(r, \theta, z) = \varphi_{jk}(r, z) \cos(l\theta), \zeta(r, \theta) = \zeta(r) \cos(l\theta). \quad (14)$$

Подання (14) спрощує аналіз, зводячи проблему до серії незв'язаних систем з одним ступенем свободи, що залежать від параметра  $l$ . Окрім того, для оболонок обертання можна застосовувати редуковані методи скінченних і граничних елементів [5]. Підставимо всі визначені базисні функції  $\mathbf{u}_k, \varphi_{1k}, \varphi_{2k}$  у рівняння:

$$\mathbf{LU} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = p\mathbf{n}, \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \right|_{S_0} = 0, \quad (15)$$

та отримуємо систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно  $c_{kl}(t)$  і  $d(t)$ . Якщо  $c_{kl}(t) = C_{kl} \exp(i\omega t), d_{kl}(t) = D_{kl} \exp(i\omega t)$ , то маємо узагальнену проблему власних значень [13].

### Числові результати

Спочатку розв'язано деякі тестові задачі для оцінки необхідної кількості скінченних і граничних елементів для досягнення заданої точності. Розглянуто порожні усічені пружні конічні резервуари. Нехай  $R_1$  і  $R_2$  – більший та менший радіуси конуса,  $\alpha$  – кут при вершини,  $H$  – висота конуса. Конічна поверхня резервуара розглядається у циліндричній системі координат  $(r, \theta, z)$ . У числовому моделюванні товщина оболонки та коефіцієнт Пуассона  $h/R_1 = 0.01$  та  $\nu = 0.3$ , кут  $\alpha = 90^\circ, H/R_2 = 1$ , модуль Юнга  $E = 2.11 \cdot 10^6$  МПа, густина матеріалу оболонки  $\rho_s = 8000$  кг/м<sup>3</sup>, густина рідини  $\rho_l = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $R_1 = 1$  м. Умови закріплення на краях оболонки: защемлений – защемлений (CC), защемлений – вільно опертий (C-SS), вільно опертий – защемлений (SS-C) і защемлений – вільний (C-F). Збіжність обчислень досягнута, коли кількість скінченних елементів дорівнювала 30. Табл. 1 надає порівняння результатів із даними [15]. Розглянуто вказані граничні умови із хвильовими числами  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

Таблиця 1

Порівняння значень частот коливань, отриманих різними методами

$l$	Граничні умови					
	SS-C		C-SS		C-C	
	МСЕ	[15]	МСЕ	[15]	МСЕ	[15]
0	0,8701	0,8700	0,7157	0,7151	0,8730	0,8732
1	0,8119	0,8118	0,7097	0,7090	0,8120	0,8120
2	0,6614	0,6613	0,6479	0,6475	0,6694	0,6696
3	0,5247	0,5245	0,5203	0,5201	0,5427	0,5428
4	0,4321	0,4319	0,4166	0,4161	0,4563	0,4566
5	0,3828	0,3826	0,3596	0,3592	0,4087	0,4089
6	0,3739	0,3737	0,3458	0,3450	0,3960	0,3964
7	0,3984	0,3981	0,3652	0,3648	0,4141	0,4143

Порівнювалися безрозмірні частоти для усічених пружних конічних резервуарів за різних умов фіксації, для різних хвильових чисел  $l, k = 1, \alpha = 90^\circ$  із використанням частотного параметру  $\Omega_1 = \lambda\Omega, \lambda = R_1\sqrt{\rho_s(1-\nu^2)}/E$ . Результати, отримані запропонованим методом (МСЕ), добре узгоджуються з даними [14]. Далі проведено порівняння отриманих числових результатів із даними [15]. Розглядаються як V-подібні, так і  $\Lambda$ -подібні конічні резервуари з  $R_1 = 1$  м і  $\alpha = \pi/3$ . Для резервуара V-подібної форми  $R_1$  – радіус вільної поверхні, а для резервуара  $\Lambda$ -подібної форми це радіус днища. Якщо відомі  $R_1, R_2$  і  $\alpha$ , маємо  $H = (R_1 - R_2) \cot \alpha$ . У табл. 2 наведено дані для різних  $R_2$ .

Таблиця 2

Частоти плескань у конічних резервуарах

$R_2$	V-подібні					Λ-подібні				
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
$l=0, k=1$										
[19]	3.386	3.386	3.382	3.139	2.187	24.153	10.014	6.665	4.550	2.683
МГЕ	3.389	3.390	3.391	3.192	2.200	20.027	10.034	6.669	4.545	2.678
$l=1, k=1$										
[19]	1.304	1.302	1.254	0.934	0.542	11.332	5.629	3.515	1.661	0.726
МГЕ	1.305	1.307	1.259	0.954	0.574	11.303	5.626	3.481	1.651	0.732

Порівняння результатів, отриманих МГЕ, із даними [13] показує гарну збіжність за винятком даних, що стосуються Λ-подібної ємності при  $l = 0$  і  $R_2 = 0,2$  м. Але в [13] зазначено, що в саме у цьому разі авторами досягнуто невелику точність.

Далі проведено розрахунки частот та форм коливань порожньої та заповненої рідиною конструкції, зображених на рис. 1. Вибрані такі геометричні розміри:  $L = 1$  м,  $R_1 = 0,5$  м,  $R_2 = 0,5$  м,  $R_3 = 0,25$  м, рівень заповнення  $H = 1,25$  м. Матеріал та механічні властивості вибрано такі:  $\rho_s = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 2,1 \cdot 10^6$  МПа,  $\nu = 0$ , товщина оболонкової конструкції всюди 3 мм. Уважалось, що конструкція жорстко закріплена по днищу. На першому етапі обчислені частоти та форми незаповненої конструкції використано МСЕ, описаний у [19]. У табл. 3 наведено нижчі вісім частот коливань.

Таблиця 3

Частоти коливань незаповненого резервуару, Гц

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення	127,59	128,07	132,6	133,6	157,79	158,55	167,61	169,86

Відповідні форми коливань  $\mathbf{u}_{kl}$  зображено на рис. 2.

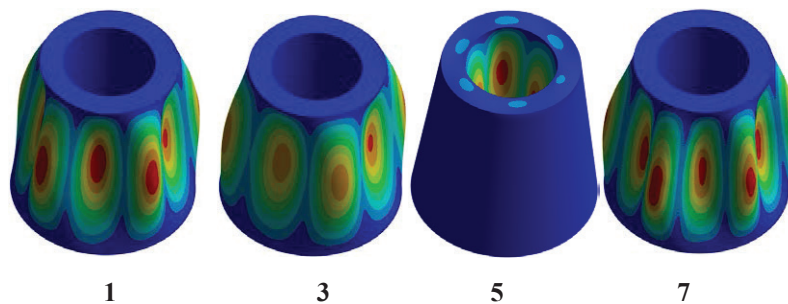


Рис. 2. Форми коливань незаповненої конструкції

Нижчі частоти відповідають 6 та 7 хвильовим числам. Перші частоти відповідають конічній частині. Слід відзначити наявність кратних частот. Далі розв’язана спектральна гранична задача (14), що дало змогу знайти форми  $\varphi_{2k}(r, \theta, z)$  та відповідні їм фундаментальні частоти. Значення перших восьми частот плескань наведено в табл. 4.

Таблиця 4

Частоти плескань, Гц

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення	0,6277	0,6277	0,8892	0,8892	1,0779	1,0779	1,2355	1,2355

У цьому разі також наявні кратні частоти. Форми плескань вільної поверхні подано на рис. 3. Відзначено, що найнижчі частоти плескань відповідають 1, 2 та 3 хвильовим числам, що узгоджується з даними [4].

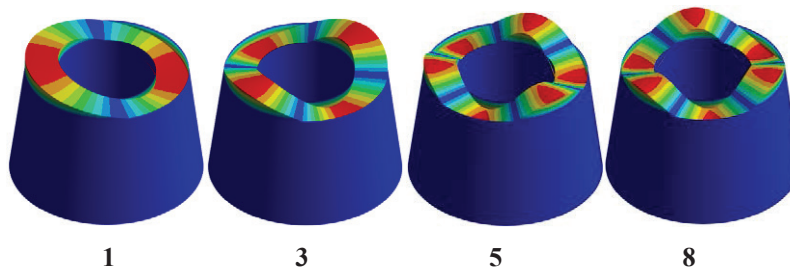


Рис. 3. Форми плескань  $\varphi_{2k}(r, \theta, H)$  вільної поверхні

Далі отримано базисні функції  $\varphi_{ik}(r, \theta, z)$  та відповідні частоти. Ці функції є формами коливань стінок конструкції з урахуванням приєднаних мас рідини. Частоти коливань надано в табл. 5.

Таблиця 5

Частоти коливань пружних стінок за наявності рідини, Гц

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Значення	45,327	45,597	47,141	47,602	51,264	51,433	52,787	54,053

Бачимо суттєве зменшення частот порівняно з порожньою оболонкою, також наявні кратні частоти. На рис. 4 зображено деякі характерні форми коливань.

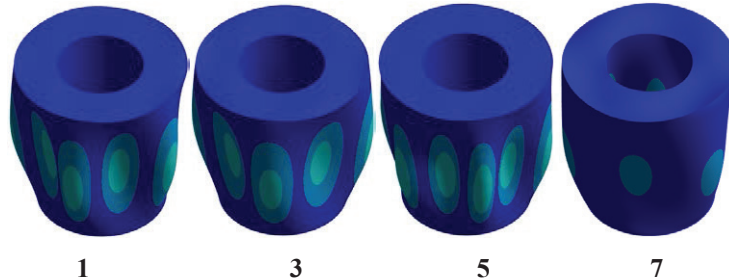


Рис. 4. Форми плескань  $\varphi_{ik}(r, \theta, H)$  пружної поверхні заповненої конструкції

Нижча частота відповідає восьмому хвильовому числу. Найнижчими частотами коливань оболонкової системи з рідиною виявилися частоти плескань вільної поверхні. Спектри частот плескань та пружних стінок конструкції відокремлені.

### Висновки

Розроблено комп'ютерну технологію для аналізу вільних і вимушених коливань частково заповнених рідиною складених оболонкових конструкцій, яка дає змогу досліджувати вільні та вимушені коливання незаповнених оболонок коливання пружних оболонок як з урахуванням, так і без урахування плескань вільної поверхні рідини. У подальшому передбачається застосування наноматеріалів [12] для покращення механічних характеристик розглянутих оболонкових конструкцій.

Список використаної літератури

1. Hudramovich V.S., Sirenko V.N., Klimentko D.V., Daniev Ju.F., Hart E.L. Development of the normative framework methodology for justifying the launcher structures resource of launch vehicles. *Strength of Materials*. 2019. 51(3). 333–340. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10778-009-0224-5>.
2. Karaiev A., Strelnikova E. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells, In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J. Edl M. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. (2020). 3–13. DOI: 10.1007/978-3-030-50491-5\_1.
3. Gnitko V., Karaiev A., Degtyariv K., Strelnikova E. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells, *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2019. 126. 189–200. DOI:10.2495/BE420171.
4. Smetankina N., Pak A., Mandrazhy O., Usatova O. & Vasiliev A. Modelling of Free Axisymmetric Vibrations of the Fluid-Filled Shells with Non-classical Boundary Interface Conditions,. In *Int. Conference on Smart Technologies in Urban Engineering, Cham: Springer Nature Switzerland*. 2023. 185–196. DOI:10.1007/978-3-031-46874-2\_17
5. Choudhary N., Bora S.N. and Strelnikova E. Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain. *J. Vib. Eng. Tech.* 2021. 9. 1–18. DOI:10.1007/s42417-021-00314-w.
6. Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariv K. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University – Science*. 2021. 33(8). 101589. DOI: org/10.1016/j.jksus.2021.101589.
7. Sierikova O., Strelnikova E., Kriutchenko D. Membrane installation in storage tanks for seismic loads impact protection. *Acta Periodica Technologica*. 2023. 54. 209–222. DOI: 10.2298/APT2354209S.
8. Sierikova O., Strelnikova E., Gnitko V. and Degtyarev K. Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods, *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, Kharkiv, Ukraine. 2021. 351–356. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086.
9. Balas O.-M., Doicin C.V. and Cipu E.C. Analytical and Numerical Model of Sloshing in a Rectangular Tank Subjected to a Braking. *Mathematics*. 2023. 11. 949–955. DOI: 10.3390/math11040949.
10. Liu J., Zang Q., Ye W., Lin G. High performance of sloshing problem in cylindrical tank with various barrels by isogeometric boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. 114. 148–165. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.02.014.
11. Sierikova O., Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Reducing Environmental Hazards of Prismatic Storage Tanks under Vibrations. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*. 2022. 21. 249–257. DOI: 10.37394/23201.2022.21.27.
12. Zhang Z., Tao A.F., Wu Q.R., Xie Y.H. Review on the Progress and Issues in Liquid Tank Sloshing of Ships, *China Ocean Engineering*. 2023. 37(5). 709–724. DOI: 10.1007/s13344-023-0060-0.
13. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L. Strelnikova, E. Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. *J. of Basic and Appl. Research Int.* 2016. 17(1). 75–87. ISSN: 2395-3438 (P), ISSN: 2395-3446 (O).
14. Shu C. An efficient approach for free vibration analysis of conical shells. *Int. J. Mech. Sci.* 1996. 38(8-9). 935–949. DOI: 10.1016/0020-7403(95)00096-8.
15. Gavriilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks, *Engineering Computations*. 2008. 25(6). 518–540. DOI: 10.1108/02644400810891535.



### References

1. Hudramovich, V.S., Sirenko, V.N., Klimenko, D.V., Daniev, Ju.F., & Hart, E.L. (2019). Development of the normative framework methodology for justifying the launcher structures resource of launch vehicles, *Strength of Materials*. 51(3), 333–340. Retrieved from: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10778-009-0224-5> [in English].
2. Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2020). Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells, In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J. Edl M. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham, 3–13, DOI: 10.1007/978-3-030-50491-5\_1 [in English].
3. Gnitko, V., Karaiev, A., Degtyariv, K., & Strelnikova, E. (2019). Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 126, 189–200, WIT Press, DOI: 10.2495/BE420171 [in English].
4. Smetankina, N., Pak, A., Mandrazhy, O., Usatova, O., & Vasiliev, A. (2023). Modelling of Free Axisymmetric Vibrations of the Fluid-Filled Shells with Non-classical Boundary Interface Conditions, In *Int. Conference on Smart Technologies in Urban Engineering, Cham: Springer Nature Switzerland*, 185–196, DOI: 10.1007/978-3-031-46874-2\_17 [in English].
5. Choudhary, N., Bora, S.N., & Strelnikova, E. (2021). Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain, *J. Vib. Eng. Tech.*, 9, 1–18, DOI: 10.1007/s42417-021-00314-w [in English].
6. Choudhary, N., Kumar, N., Strelnikova, E., Gnitko, V., Kriutchenko, D., & Degtyariv, K. (2021). Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University – Science*, 33(8), 101589. DOI: org/10.1016/j.jksus.2021.101589 [in English].
7. Sierikova, O., Strelnikova, E., & Kriutchenko, D. (2023). Membrane installation in storage tanks for seismic loads impact protection. *Acta Periodica Technologica*, 54, 209–222, DOI: 10.2298/APT2354209S [in English].
8. Sierikova, O., Strelnikova, E., Gnitko, V., & Degtyarev, K. (2021). Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods, *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, Kharkiv, Ukraine, 351–356. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086 [in English].
9. Liu, J., Zang, Q., Ye, W., & Lin, G. (2020). High performance of sloshing problem in cylindrical tank with various barrels by isogeometric boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 114, 148–165. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.02.014 [in English].
10. Balas, O.-M., Doicin, C.V. & Cipu, E.C. (2023). Analytical and Numerical Model of Sloshing in a Rectangular Tank Subjected to a Braking, *Mathematics*, 11, 949–955. DOI: 10.3390/math11040949 [in English].
11. Sierikova, O., Strelnikova, E., Kriutchenko, D., & Gnitko, V. (2022). Reducing Environmental Hazards of Prismatic Storage Tanks under Vibrations. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*. 21. 249–257. DOI: 10.37394/23201.2022.21.27 [in English].
12. Zhang, Z., Tao, A. F., Wu, Q.R., & Xie, Y.H. (2023). Review on the Progress and Issues in Liquid Tank Sloshing of Ships, *China Ocean Engineering*, 37(5), 709–724. DOI: 10.1007/s13344-023-0060-0 [in English].
13. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., & Strelnikova, E. (2016). Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. *J. of Basic and Appl. Research Int.*, 17(1), 75–87. ISSN: 2395-3438 (P), ISSN: 2395-3446 (O) [in English].
14. Shu, C. (1996). An efficient approach for free vibration analysis of conical shells, *Int. J. Mech. Sci.*, 38(8-9), 935–949. DOI: 10.1016/0020-7403(95)00096-8 [in English].

15. Gavrilyuk, I., Hermann, M., Lukovsky, I., Solodun, O., & Timokha, A. (2008). Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks, *Engineering Computations*, 25(6), 518–540. DOI: 10.1108/02644400810891535 [in English].

Дегтярьов Кирило Георгійович – к.т.н., науковий співробітник відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного Національної академії наук України. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Крютченко Денис Володимирович – доктор філософії, молодший науковий співробітник відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного Національної академії наук України. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Усатова Ольга Олександрівна – інженер відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного Національної академії наук України. E-mail: usatova.olia@gmail.com, ORCID: 0000-0001-1267-2723.

Зайденварг Ольга Леонідівна – старший викладач кафедри прикладної математики Харківського національного аерокосмічного університету імені Н.С. Жуковського. E-mail: olga.zaudenvarg@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7214-6656.

Науменко Юрій Віталійович – магістрант Науково-навчального інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. E-mail: yuriy.naumenko@karazin.ua, ORCID: 0000-0001-9058-6727.

Degtyarov Kyrylo Heorhiiovych – Ph.D., Researcher, Department of Thermoaerodynamics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Kriutchenko Denys Volodymyrovych – PhD, Junior Researcher, Department of Thermoaerodynamics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Usatova Olga Olexandrivna – Engineer, Department of Thermoaerodynamics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: usatova.olia@gmail.com, ORCID: 0000-0001-1267-2723.

Zaydenvrg Olga Leonidivna – Assistant Professor, Department of Applied Mathematics at the N.E. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute". E-mail: olga.zaudenvarg@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7214-6656.

Naumenko Yuriy Vitaliyovych – Master's Student, Scientific and Educational Institute of Computer Physics and Energy at the V.N. Karazin Kharkiv National University. E-mail: yuriy.naumenko@karazin.ua, ORCID: 0000-0001-9058-6727.