

УДК 539.3

О.В. КІЙКО, А.В. ПОЖУЄВ, О.М. МІХАЙЛУЦА
Запорізький національний університет**НЕСТАЦІОНАРНА ДИНАМІКА ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ
З В'ЯЗКОПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ПІД ДІЄЮ РУХОМОГО
НАВАНТАЖЕННЯ**

Під час дослідження розглянуто задачі про дію рухомих навантажень на циліндричні оболонки, заповнені або оточені пружним середовищем, детально проаналізовано уточнений підхід до вирішення таких задач для тришарових оболонок, коли рух заповнювача описується динамічними рівняннями теорії пружності. Основний акцент зроблено на застосуванні принципу відповідності пружної та в'язкопружної задач. Цей принцип полягає у заміні коефіцієнтів Ляме в рівняннях для переміщень і напружень точок середовища в просторі зображень комплексними значеннями. Остаточний розв'язок знаходиться шляхом застосування зворотного перетворення Фур'є та Лапласа. Показано, що цей принцип дає змогу узагальнити раніше розглянуті задачі такого класу у разі в'язкопружних середовищ. У разі його використання для нестационарних задач механічні властивості в'язкопружного матеріалу можуть бути задані в досить загальному вигляді.

Запропонований підхід застосовано до розв'язання задачі про дію рухомого навантаження на нескінченно довгу циліндричну оболонку, що містить в'язкопружний заповнювач, внутрішня поверхня якого вільна від напружень. Отримано чисельні результати для задачі про рух осесиметричного нормального навантаження. Унаслідок демпфуючих властивостей в'язкопружного заповнювача отримане нестационарне рішення є єдиним за будь-якої швидкості руху навантаження. Інтегралі звернення є особливими, і їх значення знайдене за спеціальним алгоритмом, що містить у собі сумісне застосування методу Файлона та зміщених поліномів Лежандра. Наведено розподіл безрозмірних прогинів по довжині оболонки для різних швидкостей руху навантаження. Визначено, що облік в'язкопружних властивостей заповнювача дає змогу розглянути однаково з погляду обчислення інтегралів обернення всі режими руху навантаження.

Результати дослідження можуть бути використані для розрахунку та проектування циліндричних оболонок із в'язкопружним заповнювачем, які застосовуються в авіа- та машинобудуванні, будівництві та інших галузях.

Ключові слова: нестационарна динаміка, циліндрична оболонка, в'язкопружний заповнювач.

O.V. KIYKO, A.V. POZHUYEV, O.M. MIKHAILUTSA
Zaporizhzhia National University**UNSTEADY DYNAMICS OF A CYLINDRICAL SHELL WITH A VISCOELASTIC
FILLER UNDER THE ACTION OF A MOVING LOAD**

In the course of the study, the problems of the action of moving loads on cylindrical shells filled or surrounded by an elastic medium were considered, and a refined approach to solving such problems for three-layer shells, when the movement of the filler is described by the dynamic equations of the theory of elasticity, was analyzed in detail. The main emphasis was placed on the application of the principle of correspondence between elastic and viscoelastic problems. This principle consists of replacing the Lamé coefficients in the equations for displacements and stresses of points of the medium in image space with complex values. The final solution is found by applying the inverse Fourier and Laplace transform. It is shown that this principle allows one to generalize previously considered problems of this class in the case of viscoelastic media. If it is used for unsteady problems, the mechanical properties of a viscoelastic material can be specified in a fairly general form.

The proposed approach is applied to solving the problem of the action of a moving load on an infinitely long cylindrical shell containing a viscoelastic filler; the inner surface of which is stress-free. Numerical results were obtained for the problem of the motion of an axisymmetric normal load. As a result of the damping properties of the viscoelastic filler, the resulting unsteady solution is unique at any load speed. The inversion integrals are special and their values are found using a special algorithm containing the joint application of the Failon method and the shifted Legendre polynomials. The distribution of dimensionless deflections along the length of the shell is given for different loading speeds. It has been determined that taking into account the viscoelastic properties of the filler allows us to consider all modes of load movement equally from the point of view of calculating the inversion integrals.

The results of the study can be used for the calculation and design of cylindrical shells with viscoelastic filler used in aircraft and mechanical engineering, construction and other industries.

Key words: non-stationary dynamics, cylindrical shell, viscoelastic filler.

Постановка проблеми

Використання циліндричних оболонок із в'язкопружним заповнювачем має значне поширення. В'язкопружні матеріали використовуються у багатьох галузях, де необхідно забезпечити міцність, жорсткість, герметичність, зносостійкість, шумоізоляцію та інші важливі характеристики. Актуальність дослідження питання, пов'язаного з нестационарною динамікою конструкції «циліндрична оболонка – в'язкопружний заповнювач» під дією рухомого навантаження, зумовлюється не тільки широким застосуванням таких конструкцій в авіа- та машинобудуванні, а й складністю аналізу поведінки таких конструкцій. У цій роботі представлено метод розв'язання задачі про динамічну поведінку циліндричної оболонки, заповненої в'язкопружним матеріалом, під дією рухомих навантажень. Метод ґрунтується на принципі відповідності між пружною та в'язкопружною задачами.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Питанням поведінки циліндричних оболонок під дією різних видів навантажень присвячено значну кількість публікацій. У роботах [1–7] розглядаються нестационарні задачі деформування пружної циліндричної оболонки. Вивчається випадок, коли до внутрішньої поверхні оболонки прикладаються невісесиметричні врівноважені імпульсивні нормальні навантаження [6].

У публікаціях [1–4] досліджено задачі про дію рухомих навантажень на циліндричні оболонки, які заповнені або оточені пружним середовищем. У статті [2] увага приділяється теоретичному дослідженню поширення власних неаксіально-симетричних хвиль у тришарових циліндричних оболонках із в'язкопружним заповнювачем. Ураховується жорсткий або ковзний контакт на межі шарів. Авторами запропоновано метод для розрахунку характеристик хвиль, що базується на поєднанні методу змінних та інтегральних перетворень. У роботі [3] досліджуються коливальні процеси в тонкостінних циліндричних оболонках, заповнених шаруватим в'язкопружним матеріалом, урахувуючи вплив рухомого навантаження. Для аналізу використовується теоретичний підхід, розв'язок отриманих рівнянь руху здійснюється за допомогою інтегральних перетворень. Дослідження [4] присвячено динамічній поведінці циліндричної оболонки під впливом ударного навантаження. Для зменшення вібрацій використовується частковий шар в'язкопружного матеріалу. У роботі отримано розуміння того, як частковий в'язкопружний шар впливає на вібрації циліндричної оболонки під ударним навантаженням, та розроблено рекомендації щодо оптимізації розміщення та властивостей в'язкопружного шару для ефективного гасіння таких вібрацій. Водночас багато заповнювачів, що зустрічаються на практиці, є полімерами з яскраво вираженими властивостями в'язкопружності.

Мета дослідження

Отримання нестационарного розв'язання задачі про дію рухомих навантажень на циліндричну оболонку з в'язкопружним заповнювачем за допомогою принципу відповідності між пружною та в'язкопружною задачами. Показано, що цей принцип дає змогу узагальнити раніше розглянуті задачі такого класу в разі в'язкопружних середовищ.

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Запишемо рівняння руху середовища у прямокутній декартовій системі координат:

$$\sigma_{ij,j}(t) = \rho_c \partial \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i, j = x, y, z) \quad (1.1)$$

Залежність між компонентами тензорів напружень та деформацій у разі диференціальних операторів запишемо у вигляді [15]:

$$\begin{aligned} Q_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{ij} &= Q_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon \cdot \delta_{ij} + Q_2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_{ij}; \\ Q_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \sum_{k=0}^{n_0}\left(a_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right); & Q_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \sum_{k=0}^{n_1}\left(b_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right); \\ Q_2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \sum_{k=0}^{n_2}\left(c_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера; a_k, b_k, c_k – параметри, які характеризують в’язкопружний матеріал.

Співвідношення між деформаціями та переміщеннями мають вигляд:

$$2\varepsilon_{ij}(t) = u_{i,j}(t) + u_{j,i}(t) \tag{1.3}$$

Граничні умови для в’язкопружного тіла запишемо у формі:

$$\sigma_{ij}(t)n_j = S_i(t) \text{ на } \Gamma_\sigma; \quad u_j(t) = \Delta_j(t) \text{ на } \Gamma_u, \tag{1.4}$$

де n_i – компоненти одиничної зовнішньої нормалі до межі тіла; Γ_σ – частина межі, на якій задано компоненти тензора, а Γ_u – частина межі, на якій задано компоненти вектора переміщення.

Припустимо, що Γ_σ і Γ_u , залишаються незмінними в часі (у задачах рухомими навантаженнями вважаємо, що Γ_σ і Γ_u не змінюються в рухомій системі координат).

Перейдемо в (1.1) – (1.4) до безрозмірних змінних, відносячи всі лінійні величини до радіусу оболонки a , окрім того, введемо нову змінну часу за формулою $\tau = c_s \frac{t}{a}$. Нехай задані навантаження, шукані переміщення і напруги в середовищі задовольняють умовам існування перетворення Фур’є за змінною x^* . Тоді, застосовуючи до (1.1) – (1.4) перетворення Фур’є та Лапласа у вигляді

$$\begin{aligned} f^0 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta, y, z) \cdot e^{i\xi x} dx & f &= \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{\infty} f^0(\xi, y, z) \cdot e^{-i\xi x} d\xi \\ f^L &= \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \end{aligned} \tag{1.5}$$

отримуємо:

$$\sigma_{ij,j}^0 = \rho_c \frac{c_s^2}{a^2} p^2 u_i^0; \tag{1.6}$$

$$\sigma_{ij}^0 = \lambda(c, \xi) \delta_{ij} \varepsilon^0 + 2\mu(c, \xi) \varepsilon_{ij}^0, \tag{1.7}$$

де $\lambda(c, \xi), 2\mu(c, \xi)$ – комплексні, залежні від швидкості руху та параметра перетворення Фур’є, коефіцієнти Ляме, що визначаються за формулами:

$$\lambda(c, \xi) = Q_1^0(c, \xi) / Q_0^0(c, \xi); \quad \mu(c, \xi) = Q_2^0(c, \xi) / Q_0^0(c, \xi) \tag{1.8}$$

$$Q_0^0 = \sum_{k=0}^{n_0} a_k \left(\frac{c_s}{a}\right)^k (-p)^k; \quad Q_1^0 = \sum_{k=0}^{n_1} b_k \left(\frac{c_s}{a}\right)^k (-p)^k; \quad Q_2^0 = \sum_{k=0}^{n_2} c_k \left(\frac{c_s}{a}\right)^k (-p)^k; \quad (1.9)$$

Замість (1.3), (1.4) маємо:

$$2\varepsilon_{ij}^0 = u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0 \quad (1.10)$$

$$\sigma_{ij}^0 n_j = S_i^0 \text{ на } \Gamma_\sigma; \quad u_j^0 = \Delta_j^0 \text{ на } \Gamma_u \quad (1.11)$$

Причому Γ_σ , Γ_u переміщуються, залишаючись незмінними, разом із рухомою системою координат.

Неважко бачити, що якщо провести зазначені вище перетворення і застосувати перетворення Фур'є та Лапласа до рівнянь руху, закону Гука, співвідношень Коші та граничних умов для пружного середовища з тією ж густиною, що й розглянутий в'язкопружний матеріал, то в просторі зображень прийдемо до подібної (1.6), (1.7), (1.10), (1.11) задачі, якщо тільки в перетвореному за Фур'є законі Гука замість λ і μ підставити одержувані згідно з (1.8), (1.9) комплексні коефіцієнти Ляме.

Тому розв'язання нестационарної задачі про дію рухомого навантаження на в'язкопружне середовище можна отримати на підставі принципу відповідності [8], згідно з яким у просторі зображень у формулах для переміщень і напружень точок середовища треба замінити коефіцієнти Ляме комплексними коефіцієнтами, а потім остаточний розв'язок отримати шляхом застосування зворотного перетворення Фур'є та Лапласа. Головним обмеженням під час використання зазначеного принципу є вимога, щоб частини поверхні Γ_σ і Γ_u не змінювалися з часом, що в задачах із рухомими навантаженнями постулюється у вигляді незмінності цих областей.

Раніше під час дослідження дії рухомого навантаження на багатошарову основу використовувалася інтегральна форма залежності між напруженнями та деформаціями. Показано, що у цьому разі й напруження також не в рухомій системі координат переміщення залежатимуть від часу, причому комплексні коефіцієнти Ляме можуть бути отримані за формулами:

$$\lambda(c, \xi) = \lambda \left[1 - \int_0^\infty f_1(t) e^{-ic\xi t} dt \right]; \quad \mu(c, \xi) = \mu \left[1 - \int_0^\infty f_2(t) e^{-ic\xi t} dt \right], \quad (1.12)$$

де $f_1(t)$, $f_2(t)$ – ядра в'язкопружних операторів, які є функціями швидкості об'ємної та зсувної релаксації.

У [9], приймаючи об'ємну деформацію пружною і використовуючи на початку інтегральну форму зв'язку між напруженнями і деформаціями із застосуванням експоненціальної залежності для ядра $\Gamma(t - \tau)$, робиться перехід від інтегро-диференціального зв'язку до диференціального з подальшим розглядом задачі в стаціонарній постановці.

Таким чином, у разі використання для нестационарних задач принципу відповідності механічні властивості в'язкопружного матеріалу можуть бути задані в досить загальному вигляді. Оскільки навіть у пружній постановці знаходження інтегралів обертання проводилося чисельно з використанням ЕОМ [6; 7; 10], то тут немає необхідності застосовувати обмежені часткові форми механічних моделей тіл для різного роду спрощень формул (1.8) або (1.12).

2. Застосуємо описаний вище підхід до розв'язання задачі про дію рухомого навантаження на нескінченно довгу циліндричну оболонку, що містить в'язкопружний заповнювач, внутрішня поверхня якого вільна від напружень.

Рух заповнювача описується рівняннями (1) – (3), де виконано перехід від прямокутних координат до циліндричних, а для оболонки використовуються рівняння з урахуванням поперечного зсуву та інерції обертання (типу Тимошенко), які з урахуванням реакції заповнювача можна записати у вигляді:

$$\|L_{ij}\| \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h}q_x + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{1}{h}q_y + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{1}{h}q_z + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{h}{2}q_x + \rho I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \\ \frac{h}{2}q_y + \rho I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \end{pmatrix} \quad (i,j = \overline{1,5}), \quad (2.1)$$

де L_{ij} – диференціальні оператори теорії оболонок [2]; $q_x = q_1 - q_{xc}$, $q_y = q_2 - q_{yc}$, $q_z = \rho - q_{rc}$, ρ, h – щільність і товщина оболонки радіусом a .

Завдання зводиться до спільного інтегрування рівнянь руху оболонки і середовища під час виконання граничних умов на бічних поверхнях заповнювача:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} = -q_{xc}; \sigma_{ry} = -q_{yc}; \sigma_{rr} = -q_{rc} \quad (r = a); \\ u_x = u + \frac{1}{2}h\psi_x; u_y = u + \frac{1}{2}h\psi_y; u_r = w; \\ \sigma_{rx} = \sigma_{ry} = \sigma_{rr} = 0 \quad (r = b), \end{aligned} \quad (2.2)$$

де b – внутрішній радіус заповнювача.

Переходячи безрозмірної системи координат і застосовуючи перетворення Фур'є по x^* та Лапласа за часом, у просторі зображень будемо шукати рішення у вигляді рядів Фур'є за кутовою координатою θ , уважаючи, що всі задані й шукані величини допускають розкладання в ряди Фур'є. Аналогічно [6] для визначення $u_n^0, v_n^0, w_n^0, \psi_{x,n}^0, \psi_{y,n}^0$ отримується система алгебраїчних рівнянь, до якої входять коефіцієнти Фур'є, трансформант реакції заповнювача $q_{xc,n}^0, q_{yc,n}^0, q_{rc,n}^0$.

Для їх знаходження за допомогою (1.2) і (1.3) рівняння руху заповнювача записуються у переміщеннях і, аналогічно пружному випадку вводяться потенційні функції [10]:

$$\bar{\mathbf{u}} = \text{grad } \phi_1 + \text{rot}(\bar{\mathbf{e}}_x \phi_2 + \text{rot } \bar{\mathbf{e}}_x \phi_3), \quad (2.3)$$

де $\bar{\mathbf{e}}$ – одиничний вектор осі Ox , а скалярні потенціали ϕ_i у просторі зображень задовольняють видозміненим хвильовим рівнянням:

$$\frac{d^2 \phi_1^0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_1^0}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - (\xi^2 + \lambda^2 p^2) \phi_1^0 = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2\phi_i^0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_i^0}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - (\xi^2 + p^2)\phi_i^0 = 0 \quad (i = \overline{2, 3});$$

$$m_1^2 = \xi^2 + p^2; \quad m_2^2 = m_3^2 = \xi^2 + p^2; \quad M(c, \xi) = c / c_p(c, \xi);$$

$$M_s(c, \xi) = c / c_s(c, \xi); \quad c_p^2(c, \xi) = \frac{\lambda(c, \xi) + 2\mu(c, \xi)}{\rho_c}; \quad c_s^2(c, \xi) = \frac{\mu(c, \xi)}{\rho_c}.$$

де c_p, c_s – комплексні величини, аналогами яких у випадку пружного середовища є швидкості поширення хвиль розтягування – стиснення і зсуву в заповнювачі.

Записавши загальні розв’язки рівнянь (2.4) через функції Бесселя, знайдемо вирази для гармонік трансформант переміщень і напружень у заповнювачі. Подальший перебіг розв’язання аналогічний випадку пружного заповнювача і може бути проведено двома шляхами:

1) із граничних умов визначити зв’язок між реакціями заповнювача і трансформантами переміщень оболонки, остаточне розв’язання отримати, розв’язуючи зазначену вище систему рівнянь відносно $u_n^0 - \psi_{y,n}^0$ (такий шлях зазвичай зручніший для суцільного заповнювача [6]);

2) із системи алгебраїчних рівнянь визначити навантаження, що передаються на заповнювач із боку оболонки, висловивши їх через переміщення, і переписати з урахуванням отриманих формул граничні умови (2.2), виключивши з них переміщення оболонки. Водночас остаточний розв’язок отримують у разі задоволення граничних умов (такий підхід застосовують для оболонок із пустотілим заповнювачем і тришарових оболонок [10]). Уважаючи в отриманих результатах $n = 0$, знаходимо розв’язок відповідної осесиметричної задачі.

3. Як приклад отримаємо чисельні результати для задачі про рух осесиметричного нормального навантаження. Застосовуючи другий шлях розв’язання задачі й вважаючи, що контакт між оболонкою і заповнювачем ковзкий, але зв’язок двобічний, визначаємо нормальне навантаження, яке передається на заповнювач:

$$q_{rc}^0 = p^0 + \frac{2G}{1-\nu} \chi^2 \left\{ 1 + \frac{\chi^2 \xi^4 (1-\nu) k^2 c_3}{2[18(1-\nu)k^2 + \chi^2 \xi^2 c_3]} - \frac{3\nu^2}{c_3} - \frac{1-\nu}{3} c_0^2 \xi^2 \right\} w_*^0; \quad (3.1)$$

$$c_3 = 3 - (1-\nu)c_0^2,$$

де k – коефіцієнт Тимошенка; $\chi = h/a$, $c_0 = c(3\rho/2G)^{1/2}$, $w_*^0 = w^0/h$, p^0 – трансформанта заданого нормального навантаження.

Якщо рух оболонки описується рівняннями, заснованими на гіпотезі Кірхгофа – Лява, то замість (3.1) отримуємо:

$$q_{rc}^0 = p^0 + \frac{2G}{1-\nu} \chi^2 \left\{ 1 + \frac{\chi^2 \xi^4}{12} - \frac{3\nu^2}{c_3} - \frac{1-\nu}{3} c_0^2 \xi^2 \right\} w_*^0 \quad (3.2)$$

Загальні розв’язки рівнянь (2.4) для $n = 0$ запишемо у вигляді:

$$\phi_1^0 = A_1(\xi) J_0(m_1 r_*) + A_2(\xi) Y_0(m_1 r_*) \quad (3.3)$$

$$\phi_3^0 = A_3(\xi) J_0(m_2 r_*) + A_4(\xi) Y_0(m_2 r_*) \quad (r_* = r/a),$$

де $J_n(z), Y_n(z)$ – функції Бесселя першого і другого роду.

Трансформанти необхідних для подальших компонент напруги та переміщення виражаються через ϕ_1^0, ϕ_3^0 за формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0 &= \frac{\mu(c, \xi)}{a^2} \left[-\frac{\lambda(c, \xi)}{\mu(c, \xi)} M^2(c, \xi) \xi^2 \phi_1^0 + 2 \frac{d^2 \phi_1^0}{dr_*^2} - 2i \frac{\xi}{a} \frac{d^2 \phi_3^0}{dr_*^2} \right]; \\ \sigma_{rx}^0 &= \frac{\mu(c, \xi)}{a^2} \left[-2i \xi \frac{d^2 \phi_1^0}{dr_*^2} + [M_s^2(c, \xi)] - 2i \frac{\xi^2}{a} \frac{d \phi_3^0}{dr_*} \right]; \\ u_r^0 &= \frac{1}{a} \left[\frac{d \phi_1^0}{dr_*} - i \frac{\xi}{a} \frac{d \phi_3^0}{dr_*} \right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Підставляючи (3.1) у граничні умови (2.2), у просторі зображень отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx}^0 &= 0; \quad \sigma_{rr}^0 = -p^{0-} \frac{2G}{1-\nu} \chi^2 n_1 u_r^0 \\ \sigma_{rx}^0 &= \sigma_{rr}^0 = 0 \quad (r_* = \varepsilon = b/a). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Тут через n_1 позначено вираз, що стоїть у фігурних дужках правої частини формули (3.1). Підставляючи (3.3) у (3.4), а потім отримані вирази в (3.5), приходимо до системи алгебраїчних рівнянь для визначення функцій $A_1(\xi) - A_4(\xi)$, розв’язок якої можна подати у вигляді:

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \frac{p^0 a^2}{\mu(c, \xi) \xi \det \|a_{ki}\|} \left\{ A_{41}, A_{42}, -i \frac{a}{m_2 \xi} A_{43}, -i \frac{a}{m_2 \xi} A_{44} \right\} \tag{3.6}$$

Тут A_{4j} – мінори елементів a_{4j} детермінанту $\det \|a_{ki}\|$

$a_{11} = 2m_1 s_2$	$a_{12} = 2m_1 s_4$	$a_{13} = (M_s^2 - 1) s_6$	$a_{14} = (M_s^2 - 2) s_8$
$a_{21} = n_4 \xi s_1 - \frac{2m_1}{\varepsilon} s_2$	$a_{22} = n_4 \xi s_3 - \frac{2m_1}{\varepsilon} s_4$	$a_{23} = -2m_2 \xi s_5 + \frac{2}{\varepsilon} s_6$	$a_{24} = -2m_2 \xi s_7 + \frac{2}{\varepsilon} s_8$
$a_{31} = 2m_1 s_{10}$	$a_{32} = 2m_1 s_{12}$	$a_{33} = (M_s^2 - 1) s_{14}$	$a_{34} = (M_s^2 - 2) s_{16}$
$a_{41} = n_4 \xi s_1 - (2 - n_3) m_1 s_{10}$	$a_{42} = n_4 \xi s_{11} - (2 - n_3) m_1 s_{12}$	$a_{43} = -2m_2 \xi s_{13} + (2 - n_3) s_{14}$	$a_{44} = -2m_2 \xi s_{15} + (2 - n_3) s_{16}$

$$n_2 = \lambda(c, \xi) / \mu(c, \xi); \quad n_3 = 2G \chi n_1 / (1 - \nu) \mu(c, \xi); \quad n_4 = n_2 M^2 + 2m_1^2;$$

$$s_1 = J_0(m_1 \varepsilon); \quad s_2 = J_1(m_1 \varepsilon); \quad s_3 = Y_0(m_1 \varepsilon); \quad s_4 = Y_1(m_1 \varepsilon);$$

$s_5 - s_8$ отримуються з $s_1 - s_4$ заміною m_1 на m_2 , а $s_9 - s_{16}$ – з $s_1 - s_8$ при $\varepsilon = 1$.

Після визначення $A_1 - A_4$ записуємо формули для трансформант переміщень і напружень у заповнювачі:

$$u_r^0 = \frac{p^0 a}{\mu(c, \xi) \det \|a_{ki}\|} v(\xi, r_*) \tag{3.7}$$

$$\sigma_{rr}^0 = \frac{p^0 a}{\det \|a_{ki}\|} \sigma(\xi, r_*) \tag{3.8}$$

$$v(\xi, r_*) = m_1 s_{18} A_{41} + m_1 s_{20} A_{42} - s_{22} A_{43} - s_{24} A_{44}$$

$$\sigma(\xi, r_*) = \left(-n_4 \xi s_{17} + \frac{2m_1}{r_*} s_{18} \right) A_{41} + \left(-n_4 \xi s_{19} + \frac{2m_1}{r_*} s_{20} \right) A_{42} +$$

$$+ 2 \left(m_2 \xi s_{21} - \frac{1}{r_*} s_{22} \right) A_{43} + 2 \left(m_2 \xi s_{23} - \frac{1}{r_*} s_{24} \right) A_{44}$$

де $s_{17} - s_{24}$ отримуються з $s_1 - s_8$, якщо замість ε підставити r_* .

Якщо заповнювач суцільний, то у (3.3) необхідно покласти $A_2 = A_4 = 0$, і тоді замість (3.7), (3.8) маємо:

$$u_r^0 = \frac{p^0 a}{\mu(c, \xi) n_7(c, \xi)} \left[(M_s^2 - 2) s_{14} s_{18} + 2 s_{10} s_{22} \right] \quad (3.9)$$

$$\sigma_{rr}^0 = \frac{p^0}{n_7(c, \xi)} \left[\frac{M_s^2 - 2}{m_1} \left(n_4 \xi s_{17} - \frac{2m_1}{r_*} s_{18} \right) s_{14} + 4 \left(m_2 \xi s_{21} - \frac{1}{r_*} s_{22} \right) s_{10} \right] \quad (3.10)$$

$$n_7(c, \xi) = 2 a_{43} s_{10} - \frac{M_s^2 - 2}{m_1} a_{41} s_{14} \quad (3.11)$$

Остаточне рішення виходить шляхом застосування до (3.7) – (3.10) зворотного перетворення Фур’є та обернення перетворення Лапласа.

4. Чисельні результати, отримані для окремого випадку лінійних диференціальних операторів (1.2), коли залежність напруження – деформації, має вигляд:

$$\left(\Omega + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{ij} = \lambda_m^e \left(\tau_1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon \delta_{ij} + 2 \mu_m^e \left(\tau_2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_{ij}, \quad (4.1)$$

де Ω – величина, зворотна часу релаксації для нормальної та дотичної напруги; τ_1, τ_2 – величини, обернені часу відновлення одновісної деформації та деформації зсуву відповідно; λ_m^e, μ_m^e – ефективні константи Ляме. Відповідно до [11], модель, що описується рівняннями (4.1), є найбільш простою, що містить чотири основні особливості в’язкопружної поведінки матеріалу: миттєву пружність, повзучість, релаксацію напруги та повернення деформації за повзучості.

Для вибраної моделі формули (1.8) набувають вигляду:

$$\lambda(c, \xi) = \frac{\lambda_m^e (\tau_1 + p c_s / a)}{\Omega + p c_s / a}; \quad \mu(c, \xi) = \frac{\mu_m^e (\tau_2 + p c_s / a)}{\Omega + p c_s / a} \quad (4.2)$$

Розрахунки проведено для кільцевого зосередженого навантаження $p(x, t) = p_0 \delta(x - ct)$ та оболонки із суцільним заповнювачем за таких значень безрозмірних параметрів: $\chi = 0,02$; $\nu = 0,3$; $\gamma = G/\mu_m^e = 125$; $\rho^* = \rho/\rho_c = 12,5$; $\lambda_m^* = \lambda_m^e/\mu_m^e = 1,5$; $\tau_1^* = \tau_1/\Omega = 0,25$; $\tau_2^* = \tau_2/\tau_1 = 2$. Безрозмірна швидкість руху навантаження c і безрозмірна характеристика часу відновлення одновісної деформації $c_2^* = c_{se}/a\tau_1$; $c_{se} = (\mu_m^e/\rho_c)^{1/2}$ варіювалися.

Унаслідок демпфуючих властивостей в’язкопружного заповнювача отримане нестационарне рішення є єдиним за будь-якої швидкості руху навантаження. Інтеграли звернення є особливими, і їх значення можна знайти за спеціальним алгоритмом, що містить у собі сумісне застосування методу Файлона та зміщених поліномів Лежандра [10].

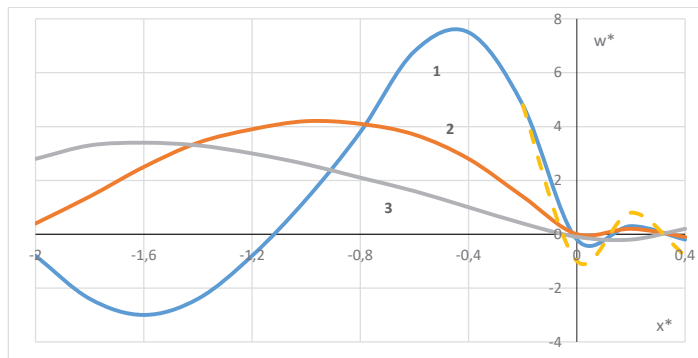


Рис. 1. Розподіл безрозмірних прогинів по довжині оболонки для різних швидкостей руху навантаження

На рис. 1 показано розподіл безрозмірних прогинів $w^* = -2wG/p_0$ по довжині оболонки для різних швидкостей руху навантаження, причому суцільні лінії відповідають оболонці типу Тимошенко, а пунктирні – оболонці Кірхгофа – Лява. Для кривої 1 $c_0 = 6$; 2 $c_0 = 1,2$; 3 $c_0 = 1,8$. Як видно з рис. 1, зі зростанням швидкості руху навантаження максимуми прогинів зменшуються і відбувається все більше їх відставання від фронту навантаження. У розглянутому діапазоні швидкостей зворотної хвилі результати з обох теорій оболонок збігаються, різниця у прогинах при $c_0 = 0,6$ є лише з прямої хвилі.

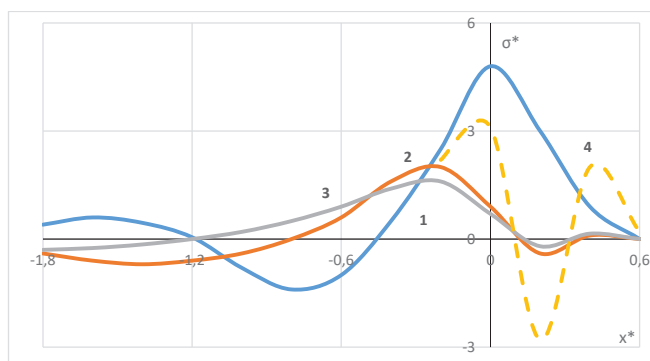


Рис. 2. Зміна контактної тиску на межі оболонки та в'язкопружного заповнювача

На рис. 2 показано зміну контактної тиску $\sigma^* = -\sigma_{rr} a/p_0$ на межі оболонки та в'язкопружного заповнювача. Із розрахунків слідує, що з $c_0 = 0,6$ облік поперечного зсуву та інерції обертання істотно позначається на результатах.

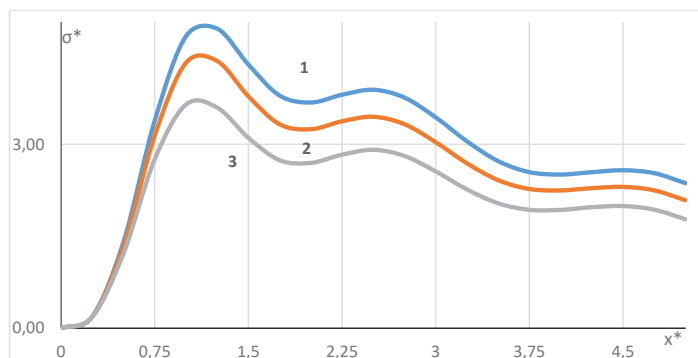


Рис. 3. Вплив часу відновлення одновісної деформації на розподіл напружень оболонки

На рис. 3 показано вплив часу відновлення одновісної деформації на розподіл напружень оболонки при $c_0 = 0,6$ (для кривої 1 – $c_2^* = 0,01$; 2 – $c_2^* = 0,1$; 3 – $c_2^* = 1,0$). Видно, що зміна часу відновлення у зазначених межах якісно не змінює картини деформування.

Висновки

На закінчення відзначимо, що облік в'язкопружних властивостей заповнювача дає змогу розглянути однаково з погляду обчислення інтегралів звернення всі режими руху навантаження. Аналогічний результат виходить за врахування демпфування в оболонці [7]. Якщо ж не враховувати дисипацію енергії в системі «оболонка – заповнювач», тоді за надзвукових швидкостей руху навантаження аналогічно [6] доводиться визначати на ЕОМ усі особливі точки підінтегрального виразу та застосовувати метод деформування контуру інтегрування у формулах звернення, що пов'язано зазвичай із суттєвими математичними труднощами. З отриманого рішення граничним переходом можна отримати результати для пружного заповнювача, уважаючи $\tau_1^* \rightarrow 1$; $\tau_2^* \rightarrow 1$; $c_2^* \rightarrow 0$.

Список використаної літератури

1. Foroutan K., Dai L. Nonlinear dynamic response and vibration of spiral stiffened FG toroidal shell segments with variable thickness. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023, vol.30, pp. 3184–3203. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2070803>
2. Safarov I.I., Teshaev M.K., Marasulov A.M., Nuriddinov B.Z. Propagation of own non-axisymmetric waves in viscoelastic three-layered cylindrical shells. *Engineering journal*. 2021, vol. 25(7), pp. 97–107.
3. Safarov I., Teshaev M., Marasulov A., Jurayev T., Raxmonov B. Vibrations of cylindrical shell structures filled with layered viscoelastic material. *E3S Web of Conferences*. 2021, vol. 264, pp. 451–461. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401027>
4. Khalfi B., Nasraoui M., Chakhari J., Ross A., Chafra M. Dynamic behavior of cylindrical shell with partial constrained viscoelastic layer damping under an impact load. *Acta Mechanica*. 2023, № 5, pp. 2125–2143. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03481-x>
5. Воропай О., Поваляев С., Шарапата А. Дві обернені нестационарні задачі осесиметричного деформування пружної циліндричної оболонки скінченної довжини. *Автомобільний транспорт*. Вип. 51. С. 74–84. <https://doi.org/10.30977/AT.2219-8342.2022.51.0.08>
6. Пожуев А.В., Фасоляк А.В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень. Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2015. № 2. С. 108–114.
7. Манжос О.Д., Пожуев А.В., Михайлуца О.М. Нестационарна реакція циліндричної оболонки з пружним шаром на дію рухомого радіального навантаження. Технічні науки та технології. 2023. № 2(32). С. 107–116.
8. Мартиненко В.Г., Львов Г.І. Огляд методів розв'язання контактних задач в'язкопружних композиційних оболонок. Динаміка і міцність машин. *Вісник НТУ «ХПИ»*. 2017. № 39. С. 32–48.
9. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф. Динамічні процеси в тілах (матеріалах) із початковими напруженнями. Ч. 2. Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і Інформатика»*. 2021. Вип. 38. № 1. С. 114–122.
10. Пожуев А.В., Михайлуца О.М. Нестационарна реакція тришарової циліндричної оболонки, яка занурена у рідину. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2018. № 1. С. 119–123.

11. Qin D., Zou Q., Zhong X., Zhang B., Li Z. Effects of medium viscoelasticity on bubble collapse strength of interacting polydisperse bubbles. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2023. Vol. 95. P. 365–372. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2023.106375>

References

1. Foroutan, K., & Dai, L. (2023). Nonlinear dynamic response and vibration of spiral stiffened FG toroidal shell segments with variable thickness. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 30, 3184–3203. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2070803> [in English].
2. Safarov, I., Tshaev, K., Marasulov, A., & Nuriddinov, B. (2021). Propagation of own non-axisymmetric waves in viscoelastic three-layered cylindrical shells. *Engineering journal*. 25(7), 97–107 [in English].
3. Safarov, I., Tshaev, M., Marasulov, A., Jurayev, T., & Raxmonov, B. (2021). Vibrations of cylindrical shell structures filled with layered viscoelastic material. *E3S Web of Conferences*. 264, 451–461. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401027> [in English].
4. Khalfi, B., Nasraoui, M., Chakhari, J., Ross, A., & Chafra, M. (2023). Dynamic behavior of cylindrical shell with partial constrained viscoelastic layer damping under an impact load. *Acta Mechanica*. 5, 2125–2143. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03481-x> [in English].
5. Voropay, O., Povalyaev, S., & Sharapata, A. (2022). Dvi obrnenni nestatsionarni zadachi osesymetrychnoho deformuvannia pruzhnoi tsylindrychnoi obolonky skinchennoi dovezhyny [Two inverse non-stationary problems of axisymmetric deformation of an elastic cylindrical shell of finite length]. *Avtomobilnyi transport*, 51, 74–84. <https://doi.org/10.30977/AT.2219-8342.2022.51.0.08> [in Ukrainian].
6. Pozhuyev, A., & Fasolyak, A. (2015). Nestatsionarna nevisesymetrychna deformatsiya tsylindrychnoyi obolonky u pruzhnomu prostori pid diyeyu rukhomykh poverkhnevyykh navantazhen' [Non-stationary non-axisymmetric deformation of a cylindrical shell in elastic space under the action of moving surface loads]. *Novi materialy i tekhnolohiyi v metalurhiyi ta mashynobuduvanni*. 2, 108–114. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nmt_2015_2_20 [in Ukrainian].
7. Manzhos, D., Pozhuyev, A., & Mikhailutsa, O. (2023). Nestatsionarna reaktsiya tsylindrychnoyi obolonky z pruzhnym sharom na diyu rukhomoho radial'noho navantazhennya [Unsteady response of a cylindrical shell with an elastic layer to the action of a moving radial load]. *Technical sciences and technologies*. 2 (32), 107–116. DOI: 10.25140/2411-5363-2023-2(32)-107-116 [in Ukrainian].
8. Martynenko, V., & Lviv, G. (2017). Ohlyad metodiv rozv'yazannya kontaktnykh zadach v'yazkopruzhnykh kompozytsiynykh obolonok [Review of methods for solving contact problems of viscoelastic composite shells]. *Dynamics and strength of machines. Bulletin of NTU «KhPI»*. 39, 32–48 [in Ukrainian].
9. Babich, S., Glukhov, Yu., & Lazar, V. (2021). Dynamichni protsesy v tilakh (materialakh) z pochatkovyvy napruzhennyamy. Chastyna 2. Ploski dynamichni kontaktni zadachi dlya pivploshchyny z pochatkovyvy napruzhennyamy [Dynamic processes in bodies (materials) with initial stresses. Part 2. Planar dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Mathematics and Informatics series. Uzhgorod: Hoverla*, 38, 1, 114–122 [in Ukrainian].
10. Pozhuyev, A., & Mikhailutsa, O. (2018). Nestatsionarna reaktsiya trykhsharovoyi tsylindrychnoyi obolonky, yaka zanurena u ridynu [Nonstationary response of a three-layer cylindrical shell immersed in a liquid]. *New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering*. 1, 119–123 [in Ukrainian].
11. Qin, D., Zou, Q., Zhong, X., Zhang, B., & Li, Z. (2023). Effects of medium viscoelasticity on bubble collapse strength of interacting polydisperse bubbles. *Ultrasonics Sonochemistry*, 95, 365–372. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2023.106375> [in English].

Кійко Олексій Валерійович – аспірант кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету. E-mail: hamelleonreal2@gmail.com, ORCID: 0009-0009-2815-8719.

Пожуєв Андрій Володимирович – к.ф.-м.н., професор, професор кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету. E-mail: scorpio6828@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4083-5139.

Міхайлуца Олена Миколаївна – к.т.н., доцент, доцент кафедри електроніки, інформаційних систем та програмного забезпечення Запорізького національного університету. E-mail: elenamikhaylutsa7@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2935-7997.

Kiyko Oleksiy Valeriiovych – Postgraduate student of the Department of Fundamental and Applied Mathematics of the Zaporizhia National University. E-mail: hamelleonreal2@gmail.com, ORCID: 0009-0009-2815-8719.

Pozhuyev Andriy Volodymyrovych – Ph.D in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics of the Zaporizhia National University. E-mail: scorpio6828@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4083-5139.

Mikhailutsa Olena Mykolaivna – Ph.D in Technical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer of the Department of Electronics, Information Systems and Software of the Zaporizhia National University. E-mail: elenamikhaylutsa7@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2935-7997.