

МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В АНАЛІЗІ СТІЙКОСТІ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ОБОЛОНКАХ ОБЕРТАННЯ

Метою дослідження є розроблення методу для оцінки стійкості руху рідини в жорстких оболонках обертання під дією вертикальних та горизонтальних навантажень. Припускається, що рідина, яка заповнює оболонку, є ідеальною та нестисливою, а її рух унаслідок дії навантажень є безвихровим. Ці припущення дають змогу сформулювати мішану крайову задачу для рівняння Лапласа відносно потенціалу швидкостей. За відсутності навантажень приходимо до спектральної проблеми власних значень. Для числового розв'язання цієї проблеми використовуємо метод інтегральних рівнянь. Застосовується третя формула Гріна, що дає змогу отримати двовимірну систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення потенціалу швидкостей. У разі оболонок обертання двовимірною системою сингулярних інтегральних рівнянь зводиться до одновимірної. Застосовано ефективні методи обчислення одновимірних сингулярних інтегралів за процедурою Гауса з використанням середнього арифметико-геометричного значення. Використовується метод граничних елементів зі сталою апроксимацією густини. Після розв'язання спектральної проблеми отримуємо власні числа та власні форми коливань. Ці форми надалі використовуються як базисні функції під час дослідження вимушених коливань рідини під дією гармонічних навантажень. Вивчалися коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі. Розглянуто явища резонансів, у тому числі й параметричного резонансу. Досліджено горизонтальні навантаження та комбіновані горизонтально-вертикальні навантаження, резонансні частоти сил, що змушують. Розглянуто вплив демпфування за Релеєм. Матриця Релея вводиться штучним шляхом. Шляхом комп'ютерного експерименту визначено найменший коефіцієнт демпфування, за якого відбувається згасання коливань. Окремо розглянуто випадки горизонтального та вертикального періодичних навантажень. Розроблена методика може бути використана для відстроювання від небажаних резонансних частот під час проєктування паливних баків.

Ключові слова: метод граничних та скінчених елементів, плескання рідини, параметричний резонанс, демпфування.

METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS IN STABILITY ANALYSIS OF FLUID VIBRATIONS IN SHELLS OF REVOLUTION

The purpose of the study is to develop a method for evaluating the stability of fluid movement in rigid shells of revolution under vertical and horizontal loads. It is assumed that the liquid filling the shell is an ideal and incompressible one, and its movement due to the action of loads is vortex-free. These assumptions make it possible to formulate a mixed boundary value problem for the Laplace equation with respect to the velocity potential. In the absence of loads, we come to the spectral problem of eigenvalues. For the numerical solution of this problem, the method of integral equations is used. The third Green's formula is applied, which allows obtaining a two-dimensional system of singular integral equations for determining the potential of velocities. In the case of shells of revolution, the two-dimensional system of singular integral equations is reduced to one-dimensional one. Effective methods of calculating the one-dimensional singular integrals according to the Gaussian procedure using the average arithmetic-geometric value are applied. The boundary element method with constant density approximation is used. After solving the spectral problem, the eigenvalues and eigenmode of vibrations are obtained. These modes are further used as basis in the study of forced fluid vibrations under harmonic loads. Fluid vibrations in the rigid cylindrical tank have been studied. Resonance phenomena are considered including parametric resonance. Horizontal loads and combined horizontal-vertical loads are also studied. The resonance frequencies of the forcing forces are studied. The effect of Rayleigh damping is considered. The Rayleigh matrix is introduced artificially. By means of a computer experiment, the smallest damping coefficient, at which the oscillations are mitigated, has been determined. The cases of horizontal and vertical periodic loads are considered separately. The developed technique can be used to tune out unwanted resonant frequencies in the design of fuel tanks.

Key words: boundary finite element method, liquid sloshing, parametric resonance, damping.

Постановка проблеми

Інтерес до проблеми гасіння коливань рідини в резервуарах та паливних баках, що знаходяться під дією знакозмінних періодичних навантажень, виник ще в минулому столітті і не вщухає дотепер. Це пов'язано з широким використанням оболонкових конструкцій, що мають відсіки, заповнені рідиною, у сучасному машинобудуванні, хімічній та нафтогазовій промисловості, аерокосмічній техніці. Неконтрольовані плескання рідини можуть призвести до появи великих деформацій, сходження ракет-носіїв із розрахункової траєкторії, руйнування паливних баків, небажаних екологічних наслідків, пов'язаних із виплескуванням небезпечного заповнювача. Тому побудова ефективних числових методів для дослідження проблеми демпфування плескань рідини є важливим та актуальним завданням. У цьому дослідженні зроблено аналіз коливань на кшталт уведення демпфування за Релеєм із різними коефіцієнтами демпфування. Здійснено комп'ютерне дослідження, яке дало змогу оцінити найменші коефіцієнти демпфування, за яких здійснюється гасіння коливань.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Розв'язання проблеми гасіння коливань рідини в паливних баках та резервуарах потребує, перш за все, визначення частот і форм власних коливань рідини. Це так звана спектральна проблема, її розв'язанню присвячено значну кількість наукових праць. Серед них відзначимо фундаментальні праці [1; 2]. Визначенню частот та форм коливань порожніх та заповнених резервуарів складної форми присвячено роботи [3; 4]. Сьогодні розроблено низку ефективних числових методів моделювання динамічних процесів в оболонкових конструкціях. Це методи скінченних [5] та граничних [6] елементів, скінченних об'ємів [7], методи розвинення в ряди [8]. Для гасіння коливань рідини в резервуарах застосовують різні пристрої, такі як закріплені [9; 10] та плаваючі [9] мембранні кришки, горизонтальні [10] та вертикальні [11] перегородки. Стійкість руху рідини в циліндричних оболонках досліджено в [11; 12]. У [12; 13] розглянуто проблеми стійкості руху рідини в призматичних резервуарах. Для відстроювання від небажаних резонансних частот необхідно мати весь частотний спектр власних коливань за різних рівнях наповнення паливом та різних рівнях навантаження з урахуванням пружності стінок [11]. Однак дослідження гасіння вібрацій оболонок, частково заповнених рідиною, не отримало достатньої уваги в літературі.

Мета дослідження

Мета дослідження – визначення найменшого коефіцієнту демпфування, за якого відбувається згасання коливань рідини в жорстких резервуарах шляхом комп'ютерного експерименту.

Виклад основного матеріалу дослідження

Основні співвідношення для розв'язання спектральної проблеми

Спектральна проблема [11] полягає у визначенні частот та форм коливань рідини, що частково заповнює жорсткий резервуар. Як свідчать дані низки досліджень [2; 9; 12; 15], у багатьох випадках частоти коливань рідини є значно меншими за частоти гідропружних коливань стінок резервуарів. Тому розв'язання спектральної проблеми є першорядним. Розглядається жорстка оболонка, частково заповнена ідеальною нестисливою рідиною. Рух рідини вважається безвихровим. У цих умовах існує скалярний потенціал швидкостей рідини Φ такий, що $\mathbf{V} = \text{grad}\Phi$, а умова нестисливості приймає вигляд:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Значення тиску p обчислюється згідно з інтегралом Бернуллі так:

$$\frac{p}{\rho_l} = -\frac{\partial}{\partial t} - gz + \frac{p_0}{\rho_l}, \quad (2)$$

де ρ_l – густина рідини, z – вертикальна координата точки, що розглядається, p_0 – атмосферний тиск.

Позначимо область, яку займає рідина, як Ω . Цю область обмежує границя $S = S_0 S_1$, причому S_0 є вільною поверхнею рідини, а S_1 – змочена поверхня резервуара. Як \mathbf{P} позначимо точки у межах області Ω . Для рівняння (1) сформульована така крайова задача:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \mathbf{P}, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \mathbf{P} S_1, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t}, p - p_0 = 0, \mathbf{P} S_0. \quad (3)$$

Тут невідома функція $\zeta = \zeta(t, x, y)$ описує положення вільної поверхні та її зміни з часом. Таким чином, необхідно визначити невідомі функції Φ, ζ при цьому на вільній поверхні виконється співвідношення:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (4)$$

Невідомі функції ζ і Φ у циліндричних координатах (r, θ, z) зобразимо у вигляді рядів:

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^m \cos(l\theta) \sum_{k=1}^n d_{kl}(t) \zeta_{kl}(r), \quad (5)$$

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{l=0}^m \cos(l\theta) \sum_{k=1}^{n_2} d_{kl}(t) \varphi_{kl}(r, z) \quad (6)$$

Тут $\varphi_{kl}(r, z), \zeta_{kl}(r)$ – базисні функції, між якими на вільній поверхні існує такий зв'язок [6]:

$$\left. \frac{\partial \varphi_{kl}(r, z)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{z=H} = \zeta_{kl}(r). \quad (7)$$

При цьому функції $\Psi_{kl} = \varphi_{kl}(r, z) \cos(l\theta)$ мають задовольняти рівнянню Лапласа.

Припускаючи гармонічний характер зміни коефіцієнтів $d_{kl}(t)$ за часом $d_{kl}(t) = D_{kl} \exp(i_{kl}t)$, отримаємо з (4.3) співвідношення:

$$\frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\omega_{kl}^2}{g} \Psi_{kl}, \quad (8)$$

яке призводить до спектральної крайової задачі відносно Ψ_{kl} [6]. Після знаходження розв'язку спектральної задачі отримуємо базисні функції $\varphi_{kl}(r, z)$ та $\zeta_{kl}(r)$ та власні частоти ω_{kl} .

Метод граничних інтегральних рівнянь для розв'язання спектральної проблеми

Для застосування методу граничних елементів використовуємо третю формулу Гріна [15]:

$$2\pi \Psi_{kl}(\mathbf{P}_0) = \iint_S \frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS - \iint_S \Psi_{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS \quad (9)$$

тут $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|$ – декартова відстань між точками \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 . Із використанням крайових умов спектральної задачі (3) отримуємо:

$$2\pi\psi_{kl} + \iint_{S_1} \psi_{kl} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \right) dS_1 - \frac{\omega_{kl}^2}{g} \iint_{S_0} \frac{\psi_{kl}}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS_0 + \iint_{S_0} \psi_{kl} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \right) dS_0 = 0, \mathbf{P}_0 \in S_1,$$

$$2\pi\psi_{kl} + \iint_{S_1} \psi_{kl} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \right) dS_1 + \frac{\omega_{kl}^2}{g} \iint_{S_0} \frac{\psi_{kl}}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS_0 = 0, \mathbf{P}_0 \in S_0. \quad (10)$$

Якщо досліджуються оболонки обертання, отримуємо одновимірну систему сингулярних інтегральних рівнянь [15]:

$$2\pi\varphi_{kl}(r_0, z_0) + \int_{\Gamma} \varphi_{kl}(r(z), z)\Theta(z, z_0)r(z)d\Gamma - \frac{\omega_{kl}^2}{g} \int_0^R \varphi_{kl}(\rho, H)\Xi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0)\rho d\rho = 0, \mathbf{P}_0 \in S_1, \quad (11)$$

$$2\pi\varphi_{kl}(r_0, H) + \int_{\Gamma} \varphi_{kl}(r(z), z)\Theta(z, z_0)r(z)d\Gamma - \frac{\omega_{kl}^2}{g} \int_0^R \varphi_{kl}(\rho, H)\Xi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0)\rho d\rho = 0, \mathbf{P}_0 \in S_0.$$

$$\Theta(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_l(k) - F_l(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_l(k) n_z \right\},$$

$$\Xi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_l(k), \quad a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2rr_0$$

Узагальнені еліптичні інтеграли введено так:

$$E_l(k) = (-1)^l (1 - 4l^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2b_l \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad (12)$$

$$F_l(k) = (-1)^l \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2b_l \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k^2 = 2b / (a + b). \quad (13)$$

Обчислення інтегралів (12) – (13) здійснено методом, запропонованим у [15], із використанням середнього арифметико-геометричного значення. Для числового розв’язання системи сингулярних рівнянь (11) застосовано метод граничних елементів зі сталою апроксимацією густини вздовж елемента [14].

Розв’язувальна система диференціальних рівнянь

Після знаходження базисних функцій $\varphi_{kl}(r, z)$ підставимо їх у (5) – (6) для потенціалу швидкості Φ та для висоти підйому вільної поверхні ζ . Далі отримані вирази вводимо в динамічну умову на вільній поверхні S_0 , яка має вигляд:

$$\frac{p}{\rho_l} = -\frac{\partial}{\partial t} - (g + a_v(t))z + a_h(t)x + \frac{p_0}{\rho_l} \quad (14)$$

Це призводить до співвідношення:

$$\sum_{l=0}^m \cos(l\theta) \sum_{k=1}^n \left[\ddot{d}_{kl}(t) + \omega_{kl}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g} \right) d_{kl}(t) \right] \varphi_{kl}(r, z) + a_h(t)r \cos = 0. \quad (15)$$

Виконавши скалярний добуток рівняння (15) на функції $\psi_{kl}(k = \overline{1, n}; l = \overline{0, m})$ і використавши ортогональність власних форм [1], отримуємо незв’язану систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\ddot{d}_{k0}(t) + \omega_{k0}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g} \right) d_{k0}(t) = 0, \quad (16)$$

$$\ddot{d}_{k1}(t) + \omega_{k1}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g} \right) d_{k1}(t) + a_h(t) F_{k1} = 0, F_{k1} = \frac{(r, \varphi_{k1})}{(\varphi_{k1}, \varphi_{k1})},$$

$$\ddot{d}_{kl}(t) + \omega_{kl}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g} \right) d_{kl}(t) = 0, k = \overline{1, n}; l = \overline{2, m}.$$

Для однозначного розв’язання системи (15) задаємо такі початкові умови:

$$d_{kl}(t) = d_{kl}^0, \dot{d}_{kl}(t) = d_{kl}^1, k = \overline{1, n}, l = \overline{0, m}. \tag{17}$$

Демпфування включимо в рівняння (15), як запропоновано у [23]:

$$\ddot{d}_{k0}(t) + 2\gamma_{kl}\omega_{kl}\dot{d}_{kl}(t) + \omega_{k0}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g} \right) d_{k0}(t) = 0 \quad k = \overline{1, n}; l = \overline{0, 2..m} \tag{18}$$

$$\ddot{d}_{k1}(t) + 2\gamma_{k1}\omega_{k1}\dot{d}_{k1}(t) + \omega_{k1}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g} \right) d_{k1}(t) + a_h(t)F_{k1} = 0.$$

Тут γ_{kl} – коефіцієнти демпфування. Якщо $\gamma_{k1}=1$, то має місце критичне демпфування. Це такий процес демпфування, коли система якомога швидше повертається в положення рівноваги без коливань [2].

Числові результати

Спочатку розв’язано тестову задачу для оцінки необхідної кількості граничних елементів для досягнення заданої точності. Розглянемо кругову циліндричну оболонку з плоским дном із радіусом $R = 1$ м за рівня заповнення рідиною $H = 1$ м. Застосовано метод граничних елементів (МГЕ) зі сталою апроксимацією густини [14]. Використано N_{bot} граничних елементів уздовж днища, N_w елементів уздовж зволоженої циліндричної частині та N_0 елементів уздовж радіусу вільної поверхні. У табл. 1 наведено числові значення власних частот плескання рідини для вузлових діаметрів $l = 0$ та $l = 1$. Отримані числові результати порівнюються з аналітичними даними [1].

Таблиця 1

Порівняння аналітичних та числових значень частот плескань ω_{kl}^2 / g

$l = 0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
МГЕ	6.117	8.297	9.992	11.434	12.713
[1].	6.117	8.296	9.989	11.432	12.711
$l = 1$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
МГЕ	4.032	7.23	9.151	10.716	12.075
[1].	4.032	7.23	9.151	10.717	12.075

Результати табл. 1 свідчать про збіжність запропонованого МГЕ. Слід зазначити, що точність $\varepsilon = 10^{-4}$ тут досягнута при $N_0 = N_w = N_{\text{bot}} = 100$. Тому далі розглядаємо граничні елементи з довжиною близько 1% від характерного розміру оболонки.

Далі переходимо до дослідження вимушених коливань. Припускаємо, що

$$a_h(t) = a_0 \cos \omega_0 t, \quad a_v(t) = a_1 \cos \omega_1 t. \tag{19}$$

Спочатку розглядаємо коливання рідини під дією лише горизонтальних навантажень без урахування демпфування, тобто вважаємо, що $a_1 = 0$. Розглянемо нульові початкові умови. При

цьому отримаємо нульові розв'язки всіх рівнянь із (15), окрім рівняння, що відповідає $l = 1$. Вибираємо такі значення частоти сили збудження: $\omega_0 = 1.2$, $\omega_0 = 4.032$ та $a_0 = 8.064$ та значення $a_0 = 0.1$. Графіки зміни рівня вільної поверхні зображено на рис. 1–3.

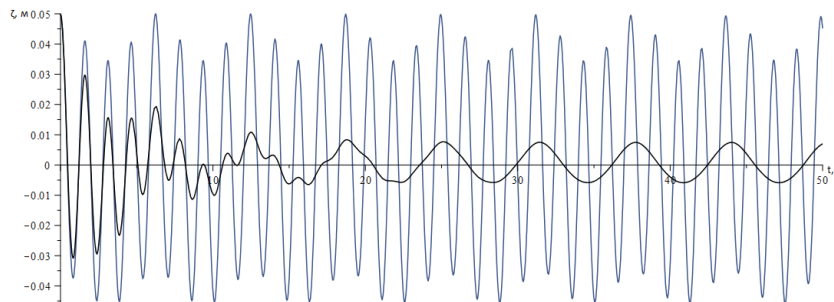


Рис. 1. Рівень підйому вільної поверхні з урахуванням демпфування за частоти сили, що змушує, 1.2 Гц

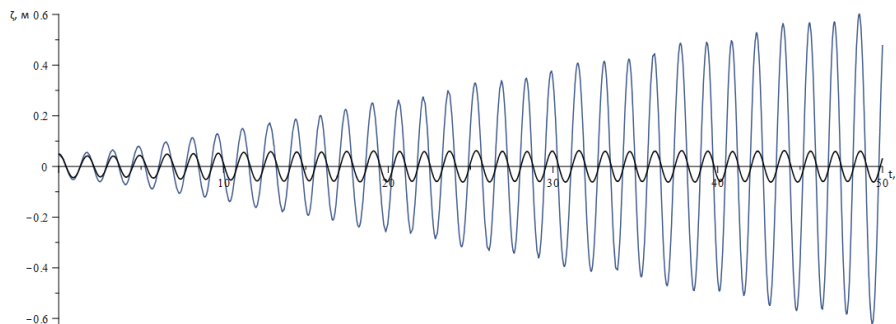


Рис. 2. Рівень підйому вільної поверхні з урахуванням демпфування за частоти сили, що змушує, рівній власній частоті 4.032 Гц

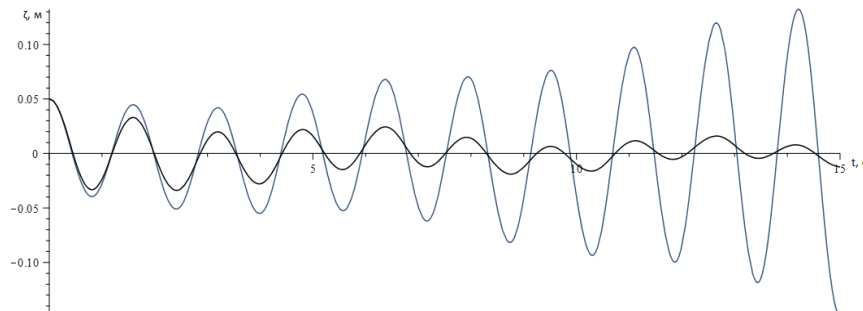


Рис. 3. Рівень підйому вільної поверхні з урахуванням демпфування за частоти сили, що змушує, 8.064 Гц

Із рис. 1–3 можна зробити висновок, що за демпфуючого коефіцієнта, який дорівнює значенню 0.05, відбувається суттєве зменшення амплітуди коливань вільної поверхні рідини.

Висновки

Розроблено метод для оцінки стійкості руху рідини в жорстких оболонках обертання під дією вертикальних та горизонтальних навантажень з урахуванням демпфування. Сформульовано спектральну проблему власних форм та значень, для розв'язання якої використано метод інтегральних рівнянь. Для оболонок обертання двовимірні інтегральні рівняння зведено до одновимірних. Використано метод граничних елементів для числового розв'язання інтегральних рівнянь. Отримано частоти та форми власних коливань вільної поверхні рідини в оболонці.

Розв'язано задачу про вимушені коливання, і досліджено явища резонансів за комбінованого горизонтального та вертикального навантажень. Досліджено вплив демпфування на амплітуди коливань вільної поверхні рідини

У подальшому передбачається дослідження впливу демпфування за нечітких параметрів.

Список використаної літератури

1. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications. Cambridge University Press., 2005. 984 p.
2. Dodge F.T. The new «dynamic behavior of liquids in moving containers» Southwest Research Inst., San Antonio, TX. 2000. 195 p.
3. Karaiev A., Strelnikova E. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells, In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J. Edl M. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 2020. P. 3–13, DOI: 10.1007/978-3-030-50491-5_1.
4. Gnitko V., Karaiev A., Degtyariov K., Strelnikova E. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells, *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2019. № 126. P. 189–200, WIT Press, DOI: 10.2495/BE420171.
5. Smetankina N., Pak A., Mandrazhy O., Usatova O. & Vasiliev A. Modelling of Free Axisymmetric Vibrations of the Fluid-Filled Shells with Non-classical Boundary Interface Conditions, In *Int. Conference on Smart Technologies in Urban Engineering, Cham: Springer Nature Switzerland*. 2023. P. 185–196, DOI: 10.1007/978-3-031-46874-2_17.
6. Choudhary N., Bora S.N. and Strelnikova E. Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain, *J. Vib. Eng. Tech*. 2021. № 9. P. 1–18. DOI: 10.1007/s42417-021-00314-w.
7. Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariov K. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University – Science*. 2021. № 33(8). 101589. DOI: org/10.1016/j.jksus.2021.101589.
8. Sierikova O., Strelnikova E., Kriutchenko D. Membrane installation in storage tanks for seismic loads impact protection. *Acta Periodica Technologica*. 2023. № 54. P. 209–222. DOI: 10.2298/APT2354209S.
9. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Tonkonozhenko A. Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2020. № 25(3). P. 117–132. DOI: 10.2478/ijame-2020-0038.
10. Sierikova O., Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Reducing Environmental Hazards of Prismatic Storage Tanks under Vibrations. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*. 2022. № 21. P. 249–257. DOI: 10.37394/23201.2022.21.27.
11. Sierikova O., Strelnikova E., Degtyariov K. Strength Characteristics of Liquid Storage Tanks with Nanocomposites as Reservoir Materials. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine*. 2022. P. 1–7. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916369.
12. Brebbia C.A. The birth of the boundary element method from conception to application. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2017. № 77. P. 3–10. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.12.001>.
13. Krutchenko D.V., Strelnikova E.A., Shuvalova Yu.S. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*. 2017. № 35. P. 31–37. <http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/13113/1/Krutchenko.pdf>.

14. Karaiev A., Strelnikova E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *Z Angew Math Mech.* 2021. № 101. e201800339. DOI: 10.1002/zamm.201800339.
15. Shuvalova Yu.S., Krutchenko D.V., Strelnikova E. Integral equations in the problem of residual and forced vibrations of fluid in rigid tanks. *Bulletin of Kherson National Technical University.* 2016. № 3(58). P. 455–459. <https://cyberleninka.ru/article/n/integralnye-uravneniya-v-zadache-o-svobodnyh-i-vynuzhdennyh-kolebaniyah-zhidkosti-v-zhestkih-rezervuarah/viewer>.

References

1. Ibrahim, R.A. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications.* Cambridge University Press., 984 p. [in English].
2. Dodge, F.T. (2000). *The new «dynamic behavior of liquids in moving containers».* Southwest Research Inst., San Antonio, TX., 195 p. [in English].
3. Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2020). Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells, In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J. Edl M. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering.* Springer, Cham, 3–13. DOI: 10.1007/978-3-030-50491- 5_1 [in English].
4. Gnitko, V., Karaiev, A., Degtyariov, K., & Strelnikova, E. (2019). Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 126, 189–200, WIT Press, DOI: 10.2495/BE420171 [in English].
5. Smetankina, N., Pak, A., Mandrazhy, O., Usatova, O., & Vasiliev, A. (2023). Modelling of Free Axisymmetric Vibrations of the Fluid-Filled Shells with Non-classical Boundary Interface Conditions, In *Int. Conference on Smart Technologies in Urban Engineering, Cham: Springer Nature Switzerland*, 185–196. DOI:10.1007/978-3-031-46874-2_17 [in English].
6. Choudhary, N., Bora, S.N., & Strelnikova, E. (2021). Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain, *J. Vib. Eng. Tech.*, 9, 1–18. DOI:10.1007/s42417-021-00314-w [in English].
7. Choudhary, N., Kumar, N., Strelnikova, E., Gnitko, V., Kriutchenko, D., & Degtyariov, K. (2021). Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University – Science*, 33(8), 101589. DOI: org/10.1016/j.jksus.2021.101589 [in English].
8. Sierikova, O., Strelnikova, E., & Kriutchenko, D. (2023). Membrane installation in storage tanks for seismic loads impact protection. *Acta Periodica Technologica*, 54, 209–222. DOI: 10.2298/APT2354209S [in English].
9. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., & Tonkonozhenko, A. (2020). Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 25(3), 117–132. DOI: 10.2478/ijame-2020-0038 [in English].
10. Sierikova, O., Strelnikova, E., Kriutchenko, D., & Gnitko, V. (2022). Reducing Environmental Hazards of Prismatic Storage Tanks under Vibrations. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*. 21. 249–257. DOI: 10.37394/23201.2022.21.27 [in English].
11. Sierikova, O., Strelnikova, E., & Degtyariov, K. (2022). Strength Characteristics of Liquid Storage Tanks with Nanocomposites as Reservoir Materials, *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine*, 1–7. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916369 [in English].
12. Brebbia, C.A. (2017). The birth of the boundary element method from conception to application. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 77, iii-x, DOI: 10.1016/j.enganabound.2016.12.001 [in English].

13. Krutchenko, D.V., Strelnikova, E.A., & Shuvalova, Yu.S. (2017). Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs, *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*, 35, 31–37. Retrieved from: <http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/13113/1/Krutchenko.pdf> [in English].
14. Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2021). Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *Z Angew Math Mech.* 101, e201800339. DOI: 10.1002/zamm.201800339 [in English].
15. Shuvalova, Yu.S., Krutchenko, D.V., & Strelnikova, E. (2016). Integral equations in the problem of residual and forced vibrations of fluid in rigid tanks. *Bulletin of Kherson National Technical University*, 3(58), 455–459. Retrieved from: <https://cyberleninka.ru/article/n/integralnye-uravneniya-v-zadache-o-svobodnyh-i-vynuzhdennyh-kolebaniyah-zhidkosti-v-zhestkih-rezervuarah/viewer> [in English].

Крютченко Денис Володимирович – доктор філософії, молодший науковий співробітник відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного Національної академії наук України. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Kriutchenko Denys Volodymyrovych – PhD, Junior Researcher, Department of Thermoaerodynamics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.