

О.С. МАЗМАНІШВІЛІ

Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут»

## РОЗКАЧУВАННЯ ДРОБОВИМ ШУМОМ ХВИЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ У ПАРАБОЛІЧНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ І СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ЧАСУ ЖИТТЯ ХВИЛЬНОГО ПАКЕТУ ЧАСТИНКИ

*Властивості матеріалів пов'язуються зі збудженням нелінійних локалізованих коливань у ґратах, які впливають на динаміку частинок у ній. У роботі поставлено та проаналізовано задачу руйнування хвильового пакету частинки. Розглянуто параболічний потенціал, який як ціле схильний до стохастичного впливу випадкового процесу дробового шуму, і динаміку хвильової функції частинки в ньому. На основі знайдених рішень нестационарного рівняння Шредінгера розглянуто часову еволюцію хвильової функції. Сформульовано задачу руйнування хвильового пакета частинки, що реалізується під час виконання умови досягнення дисперсії пакета заданого розміру. Подібна постановка виникає у завданнях, коли обурення є траєкторією одновимірного або двовимірного процесу, що моделює зміни потенціалу під час руху частинки, зокрема під час руху електрона вздовж кристалічної осі. У цьому разі роль часу в задачі грає функція обурення, що описує вимушені коливання кристалічних ґрат. Розглянуто часову еволюцію частинки, що перебуває в основному стані, з вихідною хвильовою функцією у потенціалі, що включає квадратично-інтегровану функцію – стохастичний процес дробового шуму з нульовим математичним очікуванням і дисперсією. На основі рішення, у якому використано дробовий шум, наведено у вигляді профілів щільності частинки. Розглянуто задачу про час життя хвильового пакета, який обурений стохастичним процесом дробового шуму та руйнується за умови, що його дисперсія досягла заданого розміру і частка вибуває з розгляду ( гине ). Через стохастичність процесу, що обурює, часовий інтервал до руйнування також виявиться випадковим. Отримано аналітичний вираз для густини розподілу випадкової величини – часу життя.*

*Ключові слова: рівняння Шредінгера, параболічний потенціал, дробовий шум, стохастичне розгойдування, еволюція хвильової функції, час життя хвильового пакета, щільність розподілу ймовірностей часу життя.*

O.S. MAZMANISHVILI

National Science Center "Kharkov Institute of Physics &amp; Technology"

## STRUCTURE OF THE WAVE FUNCTION BY SHOT NOISE IN THE PARABOLIC POTENTIAL AND STATISTICAL DISTRIBUTION OF THE LIFETIME OF A PARTICLE WAVE PACKET

*The properties of materials are associated with the excitation of nonlinear localized vibrations in the lattice, which affect the dynamics of particles in it. In this work, the problem of destroying the wave packet of a particle is posed and analyzed. We consider the quantum mechanical problem of the motion of a particle in a quadratic potential, which as a whole is subject to the stochastic process of shot noise and the dynamics of the wave function of the particle in it. Based on the found solutions to the nonstationary Schrödinger equation, the time evolution of the wave function is considered. The problem of destruction of the wave packet of a particle is formulated, which is realized when the condition of achieving the dispersion of the packet of a given size is met. A similar formulation arises in problems when the perturbation represents the trajectory of one-dimensional or two-dimensional process that models changes in the potential during the movement of a particle, in particular, when an electron moves along the crystal axis. In this case, the role of time in the problem is played the perturbation function that describes the forced vibrations of the crystal lattice. The time evolution of a particle in the ground state with an initial wave function in a potential that includes a square-integrable function – a stochastic shot noise process with zero mathematical expectation and dispersion – is considered. Based on the solution, which uses shot noise, particle density profiles are given in the form of profiles. The problem of the lifetime of a wave packet is considered, which is perturbed by the stochastic process of shot noise and is destroyed under the condition that its dispersion has reached a given size and the particle drops out of consideration (dies). Due to the stochastic nature of the disturbing process, the time interval before destruction will also be random. An analytical expression is obtained for the distribution density of the random variable – lifetime.*

*Key words: Schrödinger equation, parabolic potential, shot noise, stochastic buildup, wave function evolution, wave packet lifetime, lifetime probability density distribution.*

### Постановка проблеми

Механізм зміни властивостей матеріалів пов'язується зі збудженням нелінійних локалізованих коливань у ґратах [1; 2]. Ці коливання, структура та розташування атомів у монокристалі впливають на динаміку частинок у ній та на характер руху частинок у ґратах [3; 4]. У роботі поставлено завдання руйнування хвильового пакета частинки, що реалізується під час виконання умови досягнення дисперсії пакета заданого розміру. Для випадкової величини – часу до руйнування – наведено щільність розподілу ймовірностей.

Розглядається квантово-механічна задача про рух частинки в квадратичному потенціалі, який як ціле схильний до стохастичного процесу дробового шуму. Подібна постановка виникає у задачах, коли обурення є траєкторією процесу, що моделює зміни потенціалу під час руху частинки, зокрема під час руху електрона вздовж кристалічної осі [3; 5]. У цьому разі роль часу в задачі грає функція обурення, що описує вимушені коливання кристалічних ґрат. Інший приклад пов'язаний з обчисленням швидкості хімічної реакції поблизу локалізованих ангармонічних вібрацій атомів, спричинених термічними флуктуаціями або зовнішнім впливом [5]. Тут унаслідок великої амплітуди вібрацій положення потенційної ями, у якій знаходиться частинка, уже не може вважатися нерухомим, що вимагає перегляду задачі про обчислення хвильової функції з урахуванням динаміки потенційної ями.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Вивченню еволюції хвильової функції частинки в параболічному потенціалі традиційно приділяється велика увага [2; 5; 8]. Є велика кількість робіт, присвячених каналізованню, випромінюванню та реакціям у кристалах за високих енергій [5; 8], квантовій динаміці пакетів у нестационарних параболічних потенціалах [1; 6; 7]. Під час аналізу використовуються теорії випадкових процесів та континуального інтегрування [3; 4; 8; 9].

### Мета дослідження

Розглянуто задачу про час життя хвильового пакета, який обурений стохастичним процесом дробового шуму [4; 10] і руйнується за умови, що дисперсія досягла заданого розміру й частка вибуває з розгляду ( гине ) [1; 5]. Через стохастичність процесу, що обурює, часовий інтервал до руйнування також виявиться випадковим. Метою роботи є отримання аналітичного виразу для густини розподілу випадкової величини – часу життя. За виконання умови узгодження наведені формули можуть бути поширені у разі «білого» шуму.

### Виклад основного матеріалу дослідження

#### 1. Хвильова функція у параболічному потенціалі

Нижче буде розглянуто тимчасову еволюцію частинки, яка перебуває в основному стані, з вихідною хвильовою функцією:

$$\psi(x_0, 0) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left( -\frac{m\omega}{2\hbar} x_0^2 \right) \quad (1)$$

в потенціалі

$$V(x, t) = \frac{1}{2} m\omega^2 [x - U(t)]^2, \quad (2)$$

де  $U(t)$  – деяка квадратично-інтегрована функція. Такий потенціал є узагальненням параболічного потенціалу  $V(x, t) = m\omega^2 x^2 / 2$  з  $U(t) = 0$ , використовуюваного, зокрема, під час аналізу руху каналюючих заряджених частинок [3; 4].

Для аналізованої хвильової функції (функції Гріна)  $\Psi = \Psi(x, t; x_0, t_0)$  рівняння Шредінгера має вигляд [1]:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 [x - U(t)]^2 \Psi. \quad (3)$$

Фізичний зміст функції Гріна (пропагатора)  $\Psi$  полягає у тому, що вона описує амплітуду ймовірності переходу зі стану в момент  $t_0 = 0$ , що характеризується координатою  $x_0$ , у стан у момент  $t$ , що характеризується координатою  $x$ .

На підставі параболічності потенціалу (2) запишемо, що рішення рівняння Шредінгера (3) таке [6–8]:

$$\Psi(x, t; x_0, t_0) = \left( \frac{m e^{i\omega t}}{\pi \hbar (e^{2i\omega t} - 1)} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{m\omega}{2\hbar} (x^2 - x_0^2) - i \frac{m\omega^2}{2\hbar} \int_0^t U^2(\tau) d\tau \right) \times \quad (4)$$

$$\times \exp \left( i \frac{\hbar}{2m} \int_0^t Y^2(\tau) d\tau + xY(t) - \frac{m\omega}{\hbar(e^{2i\omega t} - 1)} [x - e^{i\omega t} x_0 - Z(t)]^2 \right),$$

$$Y(\tau) = i \frac{m\omega^2}{\hbar} \int_0^\tau U(\tau') \exp(-i\omega\tau + i\omega\tau') d\tau', \quad Z(t) = \frac{\hbar e^{i\omega t}}{m} \int_0^t Y(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau.$$

Гауссова форма виразу (4) щодо аргументів  $x$  та  $x_0$  у отриманої функції Гріна  $\Psi(x, t; x_0, t_0)$  впливає з параболічності потенціалу (2). Функція  $\Psi(x, t; x_0, t_0)$  (4) задовольняє тому ж рівнянню, що хвильова функція  $\psi(x_0, 0)$ , але з початковою умовою  $\Psi(x, t; x_0, 0) = \delta(x - x_0)$ . Значення хвильової функції  $\psi(x, t)$  у момент  $t > t_0$  може бути визначено за заданим її значенням  $\psi(x_0, 0)$  у момент  $t_0 = 0$ :

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, 0) \Psi(x, t; x_0, 0) dx_0. \quad (5)$$

Після обчислення інтеграла (5) з ядром  $\Psi(x, t; x_0, 0)$  (4) та початковою хвильовою функцією  $\psi(x_0, 0)$  (1) отримаємо:

$$\psi(x, t) = \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left( -i \frac{m\omega^2}{2\hbar} J - \frac{m\omega}{2\hbar} [x - X(t)]^2 \right), \quad (6)$$

$$X(t) = \omega \int_0^t U(\tau) \sin(\omega t - \omega\tau) d\tau,$$

де  $J$  – набіг фази результуючої хвильової функції.

$$J = \int_0^t U^2(\tau) d\tau + \frac{\hbar}{m\omega} t + 2x \int_0^t U(\tau) \cos(\omega(t - \tau)) d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' U(\tau) U(\tau') \sin(\omega(\tau - t)) \cos(\omega(\tau' - t)). \quad (7)$$

Якщо за  $t = 0$  частинка знаходилася в основному стані з хвильовою функцією (1), то для моменту часу  $t$  для щільності ймовірностей  $p(x, t)$  знайдемо:

$$p(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{m\omega}{\hbar} [x - X(t)]^2 \right). \quad (8)$$

Таким чином, якщо частинка відчуває часову еволюцію у потенціалі (2) з  $U(t) = 0$ , то на момент часу  $t$  розподіл ймовірностей  $p(x, t)$  залишається тим самим, що й у момент  $t_0 = 0$ . Стан хвильового пакета істотно змінюється, якщо  $U(t) \neq 0$ , що можна побачити з характеристик хвильового пакета.

## 2. Дробовий шум

Далі розглядатимемо випадок, коли  $U(t)$  – стохастичний процес дробового шуму з нульовим математичним очікуванням та дисперсією  $\sigma_s^2$  [3; 4; 10].

Дробовий шум (shot noise)  $U(t)$  задається як послідовність дельта-подібних імпульсів:

$$U(t) = \sum_{t_k \leq t} a_k \delta(t - t_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

що мають такі властивості:

а) кожен з ударів (імпульсів) дробового шуму має нульову протяжність;  
 б) амплітуда  $a_k$  кожного імпульсу незалежно від інших амплітуд із набору  $\{a_k\}$  підпорядковується нормальному закону Гаусса з нульовим математичним очікуванням і дисперсією, яка дорівнює  $\sigma_s^2$ ;

в) кожен із часових інтервалів  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$  між послідовними ударами ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) є незалежною випадковою величиною та підпорядковується експоненційному закону з параметром (середнім інтервалом)  $\langle \tau \rangle$ , який узгоджений із кількістю ударів  $M$  на одиничному часовому проміжку; кількість ударів на вибраному часовому інтервалі підпорядковується розподілу Пуассона.

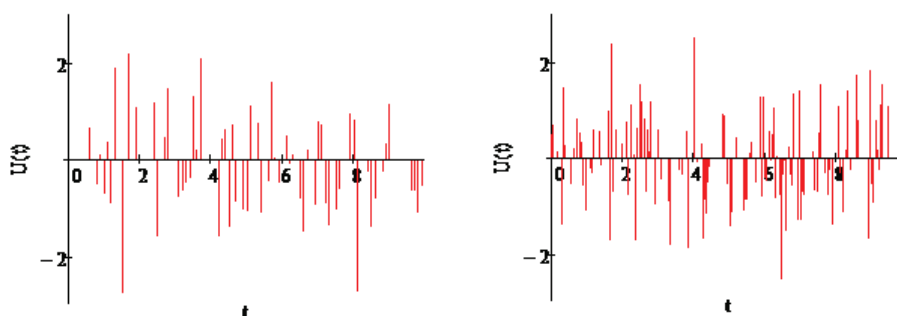


Рис. 1. Приклади генерації дробового шуму  $U(t)$  на інтервалі;  $\sigma_s = 1$ , загальна кількість ударів  $N = 100$  (ліворуч),  $N = 200$  (праворуч)

На рис. 1 наведено реалізацію дробового шуму  $U(t)$  з інтенсивністю  $\sigma_s = 1$  та різною кількістю ударів  $N$  на інтервалі розгляду.

Отримані з урахуванням рівняння (3), у якому використаний дробовий шум, рішення наведено на рис. 2 у вигляді об'ємних профілів щільностей  $p(x, t)$ .

Оскільки модуляційна функція  $U(t)$  складається зі стохастичної компоненти, то середні  $\langle x(t) \rangle_U$  і  $\langle x^2(t) \rangle_U$  відносно щільності  $p(x, t)$  також є випадковими величинами, що залежать від часу. Тут і нижче кутовими дужками  $\langle \dots \rangle_U$  позначено операцію знаходження математичного очікування щодо реалізацій стохастичного процесу дробового шуму  $U(t)$ .

Із часом  $t$  щільність  $p(x, t)$  відчуває перетворення, що відбивають вплив функції  $U(\tau)$ . Квантово-механічні середні – перший та другий моменти щільності  $p(x, t)$  становлять:

$$\langle x(t) \rangle_U = \left\langle \omega \int_0^t U(\tau) \sin(\omega t - \omega \tau) d\tau \right\rangle_U = \left\langle \omega \int_0^t \sum_{t_k \leq t} a_k \delta(t - t_k) \sin(\omega t - \omega \tau) d\tau \right\rangle_U = 0. \quad (10)$$

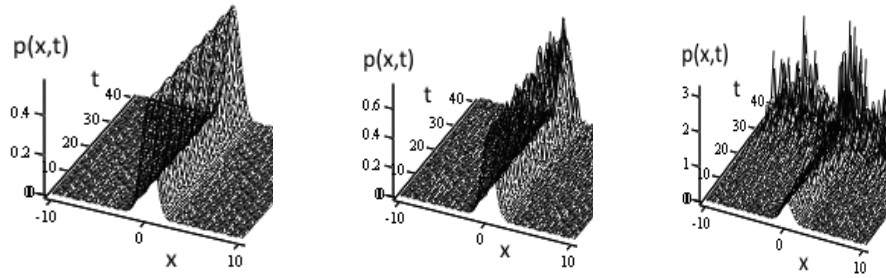


Рис. 2. Приклади еволюції густини  $p(x,t)$  хвильового пакета, обуреного стохастичним процесом дробового шуму; параметри:  $\omega = 1$ ,  $\sigma_U = 0$  (ліворуч),  $\sigma_U = 1$  (посередині),  $\sigma_U = 1.5$  (праворуч)

Для другого моменту запишемо:

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle_U &= \frac{\hbar}{2m\omega} + \omega^2 \left\langle \int_0^t \int_0^t U(\tau)U(\tau') \sin(\omega t - \omega\tau) \sin(\omega t - \omega\tau') d\tau d\tau' \right\rangle_U = \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} + \omega^2 \left\langle \int_0^t \int_{t_k \leq \tau} \sum a_k \delta(\tau - t_k) \sum_{t_j \leq \tau'} \sum a_j \delta(\tau' - t_j) \sin(\omega t - \omega\tau) \sin(\omega t - \omega\tau') d\tau d\tau' \right\rangle_U. \end{aligned} \quad (11)$$

У силу властивостей дробового шуму  $\langle a_k a_j \rangle = \sigma_S^2 \delta_{k,j}$ , тому:

$$\langle x^2(t) \rangle_U = \frac{\hbar}{2m\omega} + \omega^2 \sigma_S^2 \int_0^t \sum \delta(\tau - t_k) \sin^2(\omega t - \omega\tau) d\tau. \quad (12)$$

Підсумовуючи по всіх часових інтервалах  $(t_k, t_{k+1})$ , що не перекриваються, запишемо:

$$\langle x^2(t) \rangle_U = \frac{\hbar}{2m\omega} + \omega^2 \sigma_S^2 \int_0^t \sin^2(\omega t - \omega\tau) d\tau. \quad (13)$$

Для достатньо великому часу,  $t \gg \omega^{-1}$ , маємо:

$$\langle x^2(t) \rangle_U = \frac{\hbar}{2m\omega} + \frac{\omega^2 \sigma_S^2 M}{2} t. \quad (14)$$

За узгоджених інтенсивностей, коли  $M\sigma_S^2 = \sigma_U^2$  для дробового шуму  $\sigma_S^2$  і білого шуму  $\sigma_U^2$ , вони є статистично еквівалентними щодо множини реалізацій [10].

### 3. Руйнування хвильового пакета та розподіл часу життя

Перейдемо до розгляду задачі про руйнування хвильового пакету та статистичний розподіл часу життя. Задамося горизонтальним розміром  $H$  і нехай дано, що після виконання умови:

$$\langle x^2(t) \rangle_U = H^2 \quad (15)$$

частинка вибуває з розгляду ( гине ) [1; 5].

Позначимо  $\eta(\tau) = \langle x^2(\tau) \rangle_U$ . Оскільки  $\eta(\tau)$  – випадковий процес, то момент  $t$  досягнення рівня також буде також випадковим, він однозначно визначений рівнем досягнення  $\eta(t) = H^2$  через монотонне зростання  $\eta(\tau)$ . Отже, випадкова подія  $\{A : \langle x^2(t) \rangle_U = H^2\}$  матиме місце у випадковий момент часу  $T$ . Поставимо задачу про функцію розподілу ймовірностей  $F(t)$  випадкової величини – часу життя  $T$  – та її статистичних характеристик.

Щільність розподілу  $f(t)$  значень випадкової величини  $T$  може бути записана як:

$$f(t) = \left\langle \delta(t - \eta^{-1}(H^2)) \right\rangle. \quad (16)$$

Із вигляду випадкової події  $\{A : \langle x^2(t) \rangle_U = H^2\}$  та властивостей  $\delta$ -функції випливає:

$$f(t) = \left\langle \delta(\langle x^2(t) \rangle_U - H^2) \left( \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle_U \right) \right\rangle. \quad (17)$$

Тут можна використати інтегральне уявлення для  $\delta$ -функції:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\lambda(\langle x^2(t) \rangle_U - H^2)\right] \frac{d\lambda}{i\lambda} \right\rangle. \quad (18)$$

Для заданого моменту часу  $t$  знаходження математичного очікування у (18) здійснимо шляхом інтегрування по множині  $\{y\}$  реалізацій випадкового процесу  $y^2 = \langle x^2(t) \rangle_U$  у цей момент [10]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dy \rho(y) \exp\left[i\lambda(y^2 - H^2)\right] \quad (19)$$

зі щільністю  $\rho(y)$  та дисперсією  $D_t$  згідно з (10) та (14):

$$\rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2D_t}\right), \quad D_t = \frac{\hbar}{2m\omega} + \frac{\omega^2 M \sigma_s^2}{2} t. \quad (20)$$

Інтегруючи у (19) по  $y$ , запишемо:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{i\lambda \sqrt{1 - 2i\lambda D_t}} \exp(-i\lambda H^2), \quad (21)$$

після чого використаємо заміну  $z = \lambda D_t$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{iz \sqrt{1 - 2iz}} \exp\left(-iz \frac{H^2}{D_t}\right). \quad (22)$$

Обчислення похідної та наступна заміна змінної інтегрування  $z = (1 - u^2) / 2i$  дає для щільності:

$$f(t) = \frac{\omega^2 \sigma_U^2 H^2}{4\pi i D_t^2} \exp\left(-\frac{H^2}{2D_t}\right) \int_C du \exp\left(\frac{u^2 H^2}{2D_t}\right). \quad (23)$$

Після заміни змінної інтегрування та вибору контуру Бромвіча  $C$  інтегрування по  $u$  знайдемо для шуканої щільності розподілу ймовірностей  $f(t)$  випадкової величини  $T$  – часу життя хвильового пакета за стохастичного обурення (рис. 3):

$$f(t) = \frac{\omega^2 \sigma_U^2}{2\sqrt{2\pi}} \frac{H}{D_t^{3/2}} \exp\left(-\frac{H^2}{2D_t}\right). \quad (24)$$

Руйнування хвильового пакета має місце за досить великої величини дисперсії  $D_t$ . Тоді внесок основного стану хвильової функції можна знехтувати. У цьому разі:

$$f(t) = \frac{H}{\sqrt{\pi N \omega \sigma_U} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{H^2}{\omega^2 M \sigma_S^2 t}\right), \quad (25)$$

або у більш компактному записі маємо для щільності розподілу:

$$f(t) = \sqrt{\frac{\langle t \rangle}{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\langle t \rangle}{t}\right), \quad \langle t \rangle = \frac{H^2}{\omega^2 M \sigma_S^2}. \quad (26)$$

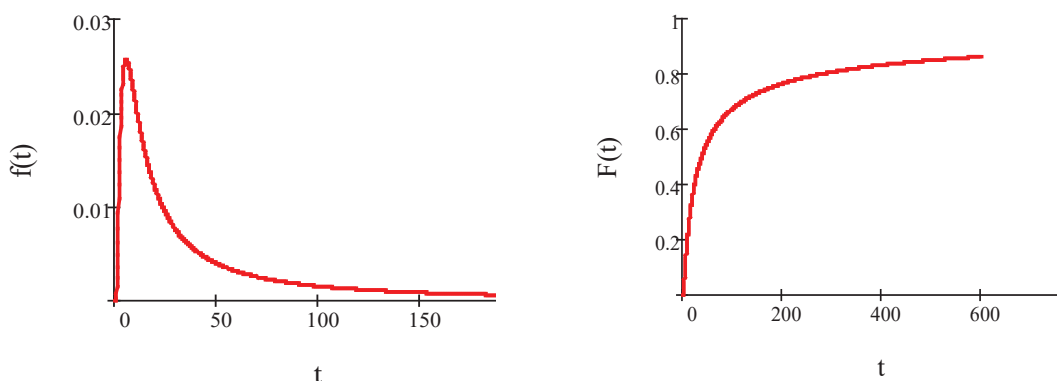


Рис. 3. Щільність розподілу  $f(t)$  (ліворуч) та інтегральна ймовірність  $F(t)$  (праворуч) часу життя  $T$ ; параметри:  $\omega=1$ ,  $\sigma_U=1$ ,  $H=3$

Щільність (24) унормована на одиницю. У щільності  $f(t)$  відсутні статистичні моменти, при цьому величину  $\langle t \rangle$  в (26) можна умовно інтерпретувати як «середній час» життя. Залежності щільності  $f(t)$  та ймовірності руйнування  $F(t)$  на момент часу  $t$  наведено на рис. 3.

Із формули (26) можна побачити, що зі збільшенням горизонтального розміру  $H$  імовірність руйнування зменшується. Разом із тим ця ймовірність збільшується зі зростанням інтенсивності  $M\sigma_S^2$  дробового шуму.

### Висновки

У роботі розглянуто параболічний потенціал, який як ціле схильний до стохастичного впливу типу дробового шуму, і динаміку хвильової функції частки в ньому. На основі нестационарного рівняння Шредінгера побудовано аналітичні вирази для динаміки хвильової функції. Проаналізовано еволюцію хвильової функції частинки. Розглянуто задачу про час життя хвильового пакета, який обурений стохастичним процесом дробового шуму і руйнується за умови, що дисперсія досягла заданого розміру й частка вибуває з розгляду ( гине). Через стохастичність процесу, що обурює, часовий інтервал до руйнування також виявиться випадковим. Отримано аналітичний вираз для густини розподілу випадкової величини – часу життя. Зазначимо, що за виконання умови узгодження  $M\sigma_S^2 = \sigma_U^2$  наведені формули (24–26) можуть бути використані у разі «білого» шуму з інтенсивністю  $\sigma_U^2$ .

### Список використаної літератури

1. Dubinko V.I., Laptev D.V., Mazmanishvili A.S., Archilla J.F.R. Quantum dynamics of wave packets in a nonstationary parabolic potential and the Kramers escape rate theory. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*. V. 01, №. 02, 1650010 (2016).

2. Кравчук М. Структурні проблеми загальних квантових теорій. Київ : Фітосоціоцентр, 2009. 368 с.
3. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. Київ : Либідь, 1990. 166 с.
4. Анго А. Математика для електро- і радіоінженерів. Київ : Наукова думка, 1964. 772 с.
5. Ахієзер О.І., Рекало М.П., Фомін П.І. Фізика елементарних частинок. Київ : Наукова думка, 1978. 224 с.
6. Dubinko V.I., Selyshchev P.A., Archilla J.F.R. Reaction-rate theory with account of the crystal anharmonicity. *Phys. Rev.* E83 (4), 2011.
7. Dubinko V.I., Mazmanishvili A.S., Laptev D.V. Quantum Tunneling in a Time-Periodic Double-Well Potential as a Driver of LENR. *J. Condensed Matter Nucl. Sci.* 37, (2022), p. 1–15.
8. Мазманішвілі О.С. Континуальне інтегрування як метод розв'язування фізичних задач. Київ : Наукова думка, 1987. 224 с.
9. Пирога С. Самоорганізація квантових систем : монографія : у 4-х т. Луцьк, 2002. Т. 3. 199 с.
10. Мазманішвілі О.С., Сила Т.А., Сліпченко Н.І. Адитивний квадратичний функціонал у задачах ризику та керування за ймовірністю лінійною стохастичною системою. *АСУ та прилади автоматики.* 2000. № 111. С. 98–101.

### References

1. Dubinko, V.I., Laptev, D.V., Mazmanishvili, A.S., & Archilla, J.F.R. (2016). Quantum dynamics of wave packets in a nonstationary parabolic potential and the Kramers escape rate theory. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics.* 01, (02), 1650010 [in English].
2. Kravchuk, M. (2009). *Strukturni problemy zahalnykh kvantovykh teorii [Structural problems of general quantum theories]*. K.: Fitosotsiotsentr [in Ukrainian].
3. Skorokhod, A.V. (1990). *Lektsii z teorii vypadkovykh protsesiv [Lectures on the theory of random processes]*. K.: Lybid [in Ukrainian].
4. Anho, A. (1964). *Matematyka dlia elektro- i radioinzheneriv [Mathematics for electrical and radio engineers]*. K.: Naukova dumka [in Ukrainian].
5. Akhiezer, O.I., Rekal, M.P., & Fomin, P.I. (1978). *Fizyka elementarnykh chastynok [Physics of elementary particles]*. K: Naukova dumka [in Ukrainian].
6. Dubinko, V.I., Selyshchev, P.A., & Archilla, J.F.R. (2011). Reaction-rate theory with account of the crystal anharmonicity. *Phys. Rev.* E83 (4) [in English].
7. Dubinko, V.I., Mazmanishvili, A.S., & Laptev, D.V. (2022). Quantum Tunneling in a Time-Periodic Double-Well Potential as a Driver of LENR. *J. Condensed Matter Nucl. Sci.* 37, 1–15 [in English].
8. Mazmanishvili, A.S. (1987). *Kontynualne intehruvannia yak metod rozviazuvannia fizychnykh zadach [Path integration as a role for solving physical problems]*. K.: Naukova Dumka Press [in Ukrainian].
9. Pyroha, S. (2002). *Samoorganizatsiia kvantovykh system: Monohrafiia u 4-kh t. [Self-organization of quantum systems: monograph: in 4 vols]*. Lutsk, T. 3 [in Ukrainian].
10. Mazmanishvili, O.S., Syla, T.A., & Slipchenko, N.I. (2000). Additive quadratic functional in problems of risk and probability control of a linear stochastic system. *ASU ta pryklady avtomatyky – ACS and automation devices*, 111, 98–101 [in Ukrainian].



Мазманішвілі Олександр Сергійович – д.ф.-м.н., професор, старший науковий співробітник Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут». E-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

Mazmanishvili Oleksandr Serhiiovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Senior Researcher at the National Science Center "Kharkiv Physical-Technical Institute". E-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.