

УДК 539.3

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА
 Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
 О.В. БІЛОВА
 Український державний університет науки і технологій
 І.В. ЩЕРБИНА, О.Д. ОНОПРИЄНКО
 Дніпровський державний аграрно-економічний університет

ВРАХУВАННЯ ЧАСТКОВОГО ПРОКОВЗУВАННЯ ПІД ЧАС КОНТАКТУ ШТАМПУ З КРИВОЛІНІЙНОЮ АНІЗОТРОПНОЮ ПЛАСТИНОЮ

Метою роботи є дослідження напружено-деформованого стану скінченної пружної анізотропної пластини у вигляді зрізаного криволінійного сектора під дією жорсткого штамп за наявності ділянок ковзання та зчеплення. Математична модель поставленої задачі описана за допомогою рівнянь рівноваги та співвідношень Коші. Для розв'язання застосовано метод збурень, коли малий параметр задається у вигляді співвідношення фізичних характеристик матеріалу. Запропоновані перетворення координат і шуканих функцій, що залежать від малого параметру. Використання зазначених перетворень дає змогу розкласти вихідні крайові задачі на дві складові частини, що різняться за своїми властивостями.

Розв'язок знаходиться у вигляді суперпозиції результатів двох типів. Кожен з напружено-деформованих станів містить основну функцію та допоміжну. Невідомі функції розшукуються із застосуванням розкладень у ряди за малим параметром. У кожному наближенні основні функції знаходяться з рівнянь Лапласа, допоміжні – за допомогою інтегрування. Проведено аналіз граничних умов, що показує, що вони практично завжди можуть бути сформульовані для основних функцій. Отримано розподіл напружень під штампом та розмір зони контакту.

Дослідження показало, що анізотропні властивості матеріалу суттєво впливають на механічний стан пластини. Наприклад, зміна кута зрізу або розподілу матеріальних характеристик може призвести до значних варіацій у напруженнях. Це особливо важливо для практичного застосування, де точність прогнозу напружено-деформованого стану є критично важливою для забезпечення надійності конструкцій. В подальшому отримані результати можуть бути використані для оптимізації процесів формування деталей з анізотропних матеріалів, а також для розроблення нових матеріалів, що поєднують потрібні механічні властивості

Таким чином, дослідження відкриває нові перспективи для подальшого вивчення впливу анізотропії на механічні характеристики матеріалів у різних технологічних процесах.

Ключові слова: асимптотичний метод, малий параметр, пружний стрижень, динамічне навантаження.

T.S. KAGADIY, A.H. SHPORTA
 Dnipro University of Technology
 O.V. BILOVA
 Ukrainian State University of Science and Technology
 I.V. SHCHERBYNA, O.D. ONOPRIENKO
 Dnipro State Agrarian and Economic University

ACCOUNTING OF PARTIAL SLIPPING IN CONTACT OF A STAMP WITH A CURVILINEAR ANISOTROPIC PLATE

The purpose of this work is to study the stress-strain state of a finite elastic anisotropic plate in the form of a truncated curvilinear sector under the action of a rigid stamp, in the presence of areas of sliding and adhesion. The mathematical model of the given problem is described using equilibrium equations and Cauchy relations. The perturbation method is used for the solution, when a small parameter is set in the form of a ratio of physical characteristics of the material. The proposed transformations of coordinates and the required functions depending on a small parameter. The use of the indicated transformations allows you to decompose the original boundary value problems into two components that differ in their properties.

The solution is in the form of a superposition of results of two types. Each of the stress-strain states contains a main function and an auxiliary one. Unknown functions are searched using series expansions with a small parameter. In each approximation, the main functions are derived from Laplace's equations, the auxiliary functions are derived using integration. An analysis of the boundary conditions was carried out, which shows that they can almost always be formulated for the main functions. The stress distribution under the stamp and the size of the contact zone were obtained.

The study showed that the anisotropic properties of the material significantly affect the mechanical condition of the plate. For example, changing the cut angle or distribution of material characteristics can lead to significant variations in stresses. This is especially important for practical applications, where the accuracy of the prediction of the stress-strain state is critical for ensuring the reliability of structures. In the future, the obtained results can be used to optimize the processes of forming parts from anisotropic materials, as well as to develop new materials that combine the required mechanical properties.

Thus, this study opens new perspectives for further study of the influence of anisotropy on the mechanical characteristics of materials in various technological processes.

Key words: asymptotic method, small parameter, elastic rod, dynamic load.

Постановка проблеми

У сучасному житті важко переоцінити вплив наявності адгезивної взаємодії між тілами, що контактують. Наявність і ступінь адгезії має, наприклад, вагоме значення в багатьох галузях, як-от аерокосмічна, біомедична, електронна [3]. Тож потреба враховувати наявність тертя в процесі аналізу контакту стає дедалі гострішою.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Розв'язанню контактних задач, що описують наявність шорсткості поверхонь або тертя, присвячують дослідження Р.М. Мартиняк, О.В. Приходько [4], В.І. Острик із співавторами [5; 6] та інші вчені [7–15]. У статті [3] за допомогою інтегральних рівнянь розв'язані окремі типові приклади, що включають механіку тріщин і ковзного контакту. Огляд сучасних ефективних підходів чисельного розв'язання задач механіки твердого тіла, в тому числі контактних, запропоновано у статті [8].

Автори робіт [9; 10] досліджують методом Гальборкіна контактні задачі без урахування тертя або з урахуванням його. Вагомість впливу параметрів обробки поверхонь контакту проаналізована в роботі [11].

У роботі досліджено напружено-деформований стан скінченного пружного зрізаного під дією жорсткого штампа за наявності ділянок ковзання та зчеплення. Розв'язок отримано за допомогою розробленого авторами методу збурень [1; 2]. Встановлено залежність розміру ділянки зчеплення від характеристик жорсткості штампу (для різних матеріалів), розмірів штампу і кута розкриття сектора. Отримано розподіл напружень під штампом залежно від розмірів області контакту пружної анізотропної пластини зі штампом.

Мета дослідження

Стаття спрямована на те, щоб розв'язати задачу про взаємодію жорсткого штампу та пружної анізотропної пластини скінченних розмірів; встановити залежність розміру ділянки зчеплення від характеристик жорсткості штампу (для різних матеріалів), розмірів штампу і кута розкриття сектора; отримати розподіл напружень під штампом залежно від розмірів області контакту пружної анізотропної пластини зі штампом.

Виклад основного матеріалу дослідження

Постановка задачі. Взаємодія жорсткого штампу та пружної анізотропної пластини скінченних розмірів.

Нехай пружна пластина (рис. 1) $R_0 \leq r \leq R_1$, $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$ закріплена за кромками $\theta = \pm\gamma$. На границю $r = R_0$ на ділянці $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$ діє жорсткий штамп з основою, що співпадає з межею $r = R_0$, навантаженою нормальним зусиллям P_0 (штамп переміщується поступально, паралельно осі Ox). Інша межа, $r = R_1$, залишається вільною.

Припускається, що в області контакту штампа з пластиною існують дві ділянки ковзання, що примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. У зонах ковзання зсувні зусилля направлені у протилежні боки. Межові точки ділянки зчеплення ($\theta = \pm\alpha$), що заздалегідь не відомі та повинні бути визначені у ході розв'язання

задачі, розташовані симетрично відносно осі Ox . Напруження в цих точках повинні бути обмеженими та неперервними. Пластина товщиною δ працює в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Матеріал її є ортотропним, головні напрямки анізотропії співпадають з полярними координатами r, θ . Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

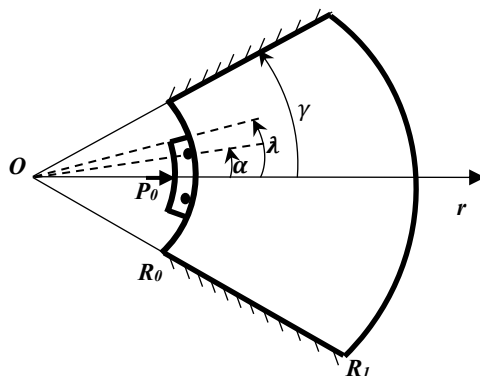


Рис. 1. Пружна пластина

Якщо замість полярних координат r, θ ввести безрозмірні координати ξ, η співвідношеннями $r = R_0 e^\xi, \theta = \eta$, то поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги пластини у переміщеннях:

$$\begin{aligned} B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta &= 0, \\ G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) &= 0 \end{aligned}$$

за таких крайових умов:
зовні штампу:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \vartheta_2 (v_\eta + u)) &= 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma), \\ \tau = G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) &= 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma), \\ u = v = 0 & \quad (\eta = \pm\gamma); \end{aligned}$$

під штампом:

$$\begin{aligned} u = const = C_0 & \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda), \\ v = 0 & \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha), \\ \tau = sign(\eta) \rho \sigma_1 & \quad (\xi = 0, \alpha < |\eta| < \lambda) \end{aligned}$$

на границі:

$$\xi = h, \quad |\eta| < \gamma \quad (r = R_1, \quad |\theta| < \gamma), \quad \sigma_1 = \tau = 0.$$

Крім того, повинні бути виконані умови рівноваги штамп. Тут $u = u_x$, $v = u_\theta$ – компоненти вектору переміщень пластини; $B_1 = E_1\delta / (1 - \vartheta_1\vartheta_2)$, $B_2 = E_2\delta / (1 - \vartheta_1\vartheta_2)$, $G = G_*\delta$; σ_1 – нормальне в напрямку координати ξ напруження; τ – дотичне напруження; E_1, E_2 – модулі пружності вздовж головних напрямків; G_* – модуль зсуву; $m = 1 + \mu$, $\mu = \vartheta_2 B_1 / G = 1 + \vartheta_1 B_2 / G$; ϑ_1, ϑ_2 – коефіцієнти Пуассона матеріалу пластини; ρ – коефіцієнт тертя ($\rho < 1$); індекси ξ, η позначають диференціювання за відповідними координатами.

Метод розв’язання та отримані результати

Визначення напруженого стану першого типу (що повільно змінюється у напрямку координати ξ) у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння:

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \tag{1}$$

за таких крайових умов:

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 = B_1 R_0^{-1} u_\xi^{1,0} = 0 & \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma; \text{ і } \xi = h, |\eta| < \gamma) \\ u^{1,0} = C_0 & \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda), \\ u^{1,0} = 0 & \quad (\eta = \pm\gamma). \end{aligned} \tag{2}$$

Оскільки за $\eta = \pm\gamma$ компонента вектору переміщення $u^{1,0}$ дорівнює нулю, то й $u_\xi^{1,0}$ за $\eta = \pm\gamma$ також буде дорівнювати нулю. Переміщення $v^{1,0}$, що відповідає цьому напружено-деформованому стану, знаходиться зі співвідношення:

$$v_\eta^{1,0} + u^{1,0} = 0. \tag{3}$$

Введемо нові незалежні змінні $x_1 = (G / B_1)^{1/2} \xi$, $y_1 = \eta$, тоді крайова задача (3.27) (2) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} u_{x_1 x_1}^{1,0} + u_{y_1 y_1}^{1,0} &= 0, \\ u_{x_1}^{1,0} = 0 & \quad (x_1 = 0, \lambda < |y_1| < \gamma; \text{ і } x_1 = h_1, |y_1| < \gamma); \\ u^{1,0} = C_0 & \quad (x_1 = 0, |y_1| \leq \lambda), \\ u_{x_1}^{1,0} = 0 & \quad (y_1 = \pm\gamma); \\ h_1 &= (G / B_1)^{1/2} h. \end{aligned} \tag{4}$$

Таким чином, потрібно знайти аналітичну у прямокутнику $0 \leq x_1 \leq h_1$, $|y_1| \leq \gamma$ функцію $u^{1,0}$ за заданими граничними умовами (4). Задача розв’язується відображенням прямокутника з площини $z_1 (z_1 = y_1 + ix_1)$ у верхню півплощину зображень $\zeta_1 (\zeta_1 = \eta_1 + i\xi_1)$. Функція відображення має такий вигляд:

$$\zeta_1 = sn(K(k_1)z_1 / \gamma; k_1). \tag{5}$$

При цьому початок координат зберігає своє розташування, а точка $z_1 = \gamma$ переходить у точку $\zeta_1 = 1$; $z_1 = \gamma + ih_1$ переходить у $\zeta_1 = 1 / k_1$; $z_1 = ih_1$ – у $\zeta_1 = \infty$. Оскільки $sn(-z) = -sn(z)$,

то точка $z_1 = -\gamma$ переходить у точку $\zeta_1 = -1$; $z_1 = -\gamma + ih_1$ – у точку $\zeta_1 = -1/k_1$, а точки $z_1 = \pm\lambda$ – у точки $\zeta_1 = \pm sn(K(k_1)\lambda/\gamma; k) = \pm\ell_1$. Тут $sn(z)$ – еліптичний синус, $K(k_1)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду, причому модуль k_1 знаходиться з рівняння:

$$K(k_1')/K(k_1) = h_1/\gamma \quad (k_1' = \sqrt{1-k_1^2}). \quad (6)$$

Нехай $\varphi^0 = u^{1,0} + i\theta^{1,0}$ ($\theta^{1,0}$ – гармонічна функція, сполучена з $u^{1,0}$). Тоді $\varphi_1^0 = \varphi_{y_1}^0 = u_{y_1}^{1,0} + i\theta_{y_1}^{1,0} = u_{y_1}^{1,0} - iu_{x_1}^{1,0}$.

Функцію $\varphi_1^0(x_1, y_1)$ можна визначити у півплощині ζ_1 . З умов (4) і співвідношення (5) випливає, що на дійсній осі півплощини в інтервалі $|\eta_1| < \ell_1$ відома дійсна частина функції φ_1^0 , а на інших інтервалах осі η_1 відома її уявна частина.

Задача про визначення аналітичної у півплощині функції, коли на деяких інтервалах границі відома дійсна, а на деяких інших – уявна частина шуканої функції, як і в попередній задачі, розв’язується за допомогою формули Келдиша-Сєдова. Оскільки з умов (4) випливає, що на границі півплощини ζ_1 у інтервалі $|\eta_1| < \ell_1$ дійсна частина функції φ_1^0 дорівнює нулю, а на решті частини границі уявна її частина дорівнює нулю, то розв’язання для функції φ_1^0 в усій півплощині має вигляд:

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - \ell_1^2}},$$

де A – дійсна стала, вибирається та гілка кореня, що додатна за додатних значень аргументу.

Дійсна та уявна частини $\varphi_1^0(\zeta_1)$ визначають функції $u_{y_1}^{1,0}, u_{x_1}^{1,0}$. Зокрема, за $\xi_1 = 0$ ($x_1 = 0$ або $y_1 = \pm\gamma$; чи $x_1 = h_1, |y_1| < \gamma$):

$$\begin{aligned} \varphi_1^0(\eta_1) &= \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \\ u_{y_1}^{1,0} &= 0, \quad u_{x_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_1^2}} \quad (|\eta_1| < \ell_1), \\ u_{y_1}^{1,0} &= \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad (|\eta_1| > \ell_1), \end{aligned}$$

$$\eta_1 = sn(K(k_1)y_1/\gamma; k).$$

Нормальне напруження σ_1^0 та складова дотичного напруження $\tau^{1,0}$, відповідна функції $u^{1,0}$, знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= B_1(R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\xi}^{1,0} = (R_0 e^{\xi})^{-1} \sqrt{GB_1} u_{x_1}^{1,0}, \\ \tau^{1,0} &= G(R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\eta}^{1,0} = G(R_0 e^{\xi})^{-1} u_{y_1}^{1,0}. \end{aligned}$$

Стала A визначається з умови рівноваги штампа та дорівнює:

$$A = -P_0 R_0 \left[2\sqrt{GB_1 C_1 B} \right]^{-1}, \tag{7}$$

$$C_1 = \frac{\gamma}{K(k_1)}, \quad B = \int_0^{\ell_1} \frac{dt}{\sqrt{(l_1^2 - t^2)(1 - t^2)(1 - k_1^2 t^2)}}.$$

Тоді напруження під штампом у першому наближенні виражається таким чином:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0}{2C_1 B} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \tag{8}$$

а функція $u_{y_1}^{1,0}$ за $\xi = 0, |\eta_1| > \ell_1$ знаходиться за формулою:

$$u_{y_1}^{1,0} = A(\eta_1^2 - \ell_1^2)^{-1/2}, \tag{9}$$

де A надається рівністю (7).

Складова $v^{1,0}$ компоненти вектору переміщень v^0 , відповідна цьому напруженому стану, визначається з рівняння (3). Функція $u^{1,0}$ знаходиться зі співвідношень для $u_{x_1}^{1,0}, u_{y_1}^{1,0}$ за $|\zeta_1| < \ell_1, |\zeta_1| > \ell_1$ відповідно з урахуванням того, що за $y_1 = \eta = \pm\gamma \quad u^{1,0} = 0$.

Друга складова $v^{2,0}$ компоненти вектору переміщень v^0 , знаходиться з рівняння:

$$Gv_{\xi\xi}^{2,0} + B_2 v_{\eta\eta}^{2,0} = 0. \tag{10}$$

Оскільки $v^{1,0}$ і $v^{2,0}$ мають той самий порядок за $\varepsilon = G / B_1$, а похідна $v_{\xi}^{2,0}$ більша за похідну $v_{\xi}^{1,0}$ на два порядки за $q = B_2 / B_1 \approx 1$, то у цьому наближенні граничні умови для визначення $v^{2,0}$ запишуться таким чином:

$$\begin{aligned} v^0 &= v^{1,0} + v^{2,0} = 0 & (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha), \\ GR_0^{-1} v_{\xi}^{2,0} &= \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1^0 & (\xi = 0, \alpha \leq |\eta| < \lambda), \\ v_{\xi}^{2,0} &= -u_{\eta}^{1,0} & (\xi = 0, \lambda \leq |\eta| < \gamma; \quad \text{і} \quad \xi = h, |\eta| < \gamma), \\ v_{\xi}^{2,0} &= 0 & (\eta = \pm\gamma). \end{aligned} \tag{11}$$

При цьому, як припускалося в постановці задачі, $\rho < 1$ ($\rho = \rho_0 \varepsilon^{1/2}, \rho_0 \approx 1$), а σ_1^0 під штампом знаходиться за формулою (8).

Компонента $u^{2,0}$, відповідна цьому напруженому стану, задовольняє умові $u_{\xi\xi}^{2,0} = 0$. Після введення нових незалежних змінних $x_2 = (B_2 / G)^{1/2} \xi, y_2 = \eta$ крайова задача (10), (11) набуває вигляду:

$$v_{x_2 x_2}^{2,0} + v_{y_2 y_2}^{2,0} = 0. \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 v^{2,0} &= -v^{1,0} & (x_2 = 0, |y_2| \leq \alpha), \\
 v_{x_2}^{2,0} &= 0 & (y_2 = \pm \gamma), \\
 v_{x_2}^{2,0} &= \text{sign}(y_2) \rho R_0 (GB_2)^{-1/2} \sigma_1^0 & (x_2 = 0, \alpha < |y_2| < \lambda) \\
 v_{x_2}^{2,0} &= -\sqrt{\frac{G}{B_2}} u_{y_2}^{1,0} & (x_2 = 0, \lambda < |y_2| < \gamma; \text{ і } x_2 = h_2, |y_2| < \gamma),
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$h_2 = (B_2 / G)^{1/2} h.$$

Задача (12), (13) є мішаною задачею для аналітичної функції $v^{2,0}$ у прямокутнику $0 \leq x_2 \leq h_2, -\gamma \leq y_2 \leq \gamma$, що може бути розв'язана відображенням прямокутника з площини z_2 ($z_2 = y_2 + ix_2$) у верхню півплощину зображень ζ_2 ($\zeta_2 = \eta_2 + i\xi_2$). Функція відображення має вигляд (5) із заміною z_1 на z_2, k_1 на k_2 , причому модуль k_2 визначається з рівняння (6) також за заміни k_1 на k_2, h_1 на h_2 .

Відповідно до запропонованого асимптотичного методу припускається, що $G / B_1 = \varepsilon$ є малим параметром, $B_2 \approx B_1$. Тому $h_2 = (B_2 / G)^{1/2} h$ набагато більше за $h_1 = (G / B_2)^{1/2} h$ ($h_2 / h_1 \gg 1$) і k_2 виявляється близьким до нуля. Але за малих значень k_2 $K(k_2) \approx \pi / 2$, а функція відображення (5) переходить у функцію $\zeta_2 = C_2 \sin(\pi z_2 / 2\gamma)$, дійсна та уявна частини якої записуються відповідно:

$$\eta_2 = C_2 \sin \frac{\pi y_2}{2\gamma} \operatorname{ch} \frac{\pi x_2}{2\gamma}, \xi_2 = C_2 \cos \frac{\pi y_2}{2\gamma} \operatorname{sh} \frac{\pi x_2}{2\gamma}.$$

Стала C_2 визначається з тієї умови, щоб точки $x_2 = 0, y_2 = \pm \lambda$ відображалися у точки $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm \ell_1$. Тоді:

$$C_2 = \ell_1 / \sin(\pi \lambda / 2\gamma), \ell_1 = \operatorname{sn}(K(k_1) \lambda / \gamma; k_1).$$

Точки $x_2 = 0, y_2 = \pm \gamma$ переходять у точки $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm C_2$, а точки $x_2 = 0, y_2 = \pm \alpha$ – у точки $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm \alpha_2$ де:

$$\alpha_2 = C_2 \sin \frac{\pi \alpha}{2\gamma} = \frac{\operatorname{sn}(K(k_1) \lambda / \gamma; k_1) \sin(\pi \alpha / 2\gamma)}{\sin(\pi \lambda / 2\gamma)}.$$

Таким чином, для другого напруженого стану замість прямокутника фактично маємо півсмугу. З урахуванням (8), (9), (13) задача зводиться до такої: знайти аналітичну у півплощині ζ_2 функцію $v^{2,0}$ за умови, що на дійсній осі півплощини похідні функції $v^{2,0}$ набувають таких значень:

$$\begin{aligned}
 v_{y_2}^{2,0} &= -v_{\eta}^{1,0} = C_0 & (|\eta_2| \leq \alpha_2), \\
 v_{x_2}^{2,0} &= 0 & (|\eta_2| \geq C_2), \\
 v_{x_2}^{2,0} &= \text{sign}(y_2) \rho A \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_2^2}} & (\alpha_2 < |\eta_2| < \ell_1), \\
 v_{x_2}^{2,0} &= -A \sqrt{\frac{G}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - \ell_1^2}} & (\ell_1 < |\eta_2| < C_2).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Тут A виражається формулою (7) (враховане співвідношення (3)), C_0 – осідання штампа. На нескінченності напруження спадають.

Якщо $\psi^0 = v^{2,0} + iQ^{2,0}$ ($Q^{2,0}$ – гармонійна функція, спряжена з $v^{2,0}$), то $\psi_1^0 = i\psi_{y_2}^0 = v_{x_2}^{2,0} + iv_{y_2}^{2,0}$. Функція ψ_1^0 у будь-якій точці верхньої півплощини ζ_2 за зазначених умов (14) і обмеженості у точках $\zeta_2 = \pm\alpha_2$ записується таким чином:

$$\begin{aligned} \psi_1^0(\zeta_2) = & -\frac{A}{\pi i} \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_1^2} \times \left(\sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[\int_{-c_2}^{-\ell_1} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} + \int_{\ell_1}^{c_2} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} \right] - \right. \\ & \left. -\rho \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \left[\int_{-\ell_1}^{-\alpha_2} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} + \int_{\alpha_2}^{\ell_1} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} \right] \right) + \frac{C_0}{\pi i} i \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_2^2} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \alpha_2^2}} \frac{dt}{t - \zeta_2}, \end{aligned} \tag{15}$$

де $f(t) = \left[(t^2 - \alpha_2^2)(t^2 - \ell_1^2) \right]^{-1/2}$.

Для спадання напружень на нескінченності необхідно, щоб $\psi_1^0(\zeta_2) \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Re}\zeta_2| \rightarrow \infty$. Оскільки останній доданок у (15) прямує до нуля, тоді:

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \left(\int_{-c_2}^{-\ell_1} f(t)dt + \int_{\ell_1}^{c_2} f(t)dt \right) = \rho \left(\int_{-\ell_1}^{-\alpha_2} f(t)dt + \int_{\alpha_2}^{\ell_1} f(t)dt \right).$$

або

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_1^c \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(\tau^2 - 1)}} = \rho \int_{\alpha_*}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(1 - \tau^2)}}, \tag{16}$$

де:

$$\tau = \frac{t}{\ell_1}, \quad c = \frac{C_2}{\ell_1} = \frac{1}{\sin(\pi\lambda / 2\gamma)},$$

$$\alpha_* = \frac{\alpha_2}{\ell_1} = \frac{\sin(\pi\alpha / 2\gamma)}{\sin(\pi\lambda / 2\gamma)},$$

$$c > 1 > \alpha_* > 0.$$

Інтеграл з лівої частини співвідношення (16) є неповним еліптичним інтегралом першого роду $F(\varphi, \alpha_*)$, причому φ визначається рівністю:

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{c^2 - 1}{c^2 - \alpha_*^2}}. \tag{17}$$

Інтеграл, що записаний у правій частині рівності (16), є повним еліптичним інтегралом першого роду $K(\sqrt{1 - \alpha_*^2}) = K(\alpha'_*) = K'(\alpha_*)$, де $\alpha'_* = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$. Тому рівність (16) може бути представлена таким чином:

$$F(\varphi, \alpha_*) = \rho (B_1 / G)^{1/2} K'(\alpha_*). \tag{18}$$

Співвідношення (18) встановлює зв'язок між розмірами ділянки зчеплення, області контакту, кута відкриття сектора, а також коефіцієнтом тертя та характеристиками жорсткості матеріалу пластини. Воно виявляється таким самим, як і тоді, якби пластини являли собою напівнескінченний зрізаний круговий сектор. Це пов'язано з характером цього напруженого стану (швидко змінюється у напрямку координати ξ).

З рівності (15) за $\xi_2 = 0, |\eta_2| < \alpha_2$ (на ділянці зчеплення) отримаємо:

$$\begin{aligned} \psi_1^0(\eta_2) = v_{x_2}^{2,0} = & -\frac{2A}{\pi} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \eta_2^2} \left(\sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_{\ell_1}^{c_2} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_2^2)(t^2 - \ell_1^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} - \right. \\ & \left. - \rho \int_{\alpha_2}^{\ell_1} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_2^2)(\ell_1^2 - t^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} \right). \end{aligned} \tag{19}$$

Останній доданок у виразі (15) за $\xi_2 = 0, |\eta_2| < \alpha_2$ дає чисто уявну величину iC_0 . Враховуючи вигляд інтегралів, вираз (19) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} v_{x_2}^{2,0} = & \frac{2A}{\pi \ell_1} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \eta_2^2} \left(\sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{1}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)(\alpha_2^2 - \eta_2^2)} \times \right. \\ & \times \left[(\ell_1^2 - \alpha_2^2) \Pi \left(\varphi, \frac{\alpha_2^2 - \eta_2^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_* \right) - \right. \\ & \left. \left. - (\ell_1^2 - \eta_2^2) F(\varphi, \alpha_*) \right] + \frac{\rho}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)} \Pi \left(\frac{\ell_1^2 - \alpha_2^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_*' \right) \right), \end{aligned} \tag{20}$$

де $\alpha_* = \alpha_2 / \ell_1$ знаходиться з (18), $|\eta_2| < \alpha_2$, $\Pi(\varphi, \alpha_*')$ – повний еліптичний інтеграл третього роду, $\alpha_*' = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$, $\Pi(\varphi, \mu, \alpha_*)$ – неповний еліптичний інтеграл третього роду, φ визначається рівністю (17). Дотичне напруження під штампом у першому наближенні має вигляд:

$$\begin{aligned} \tau = \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1^0 & \quad (\alpha \leq |\eta| < \lambda), \\ \tau = R_0^{-1} \sqrt{GB_2} v_{x_2}^{2,0} & \quad (|\eta| \leq \alpha), \end{aligned}$$

де $\sigma_1^0, v_{x_2}^{2,0}$ виражаються співвідношеннями (7) та (20).

Оскільки $0 < \alpha_* < \ell_1 < c > 1$, то $\frac{c_2 - 1}{c^2 - \alpha_*^2} = 1 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = \frac{1 - \alpha_*^2}{c^2 - \alpha_*^2} \ll 1$.

Тоді рівність (17) може мати вигляд:

$$\varphi = \arcsin \sqrt{1 - \varepsilon_1} = \arcsin(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \dots) \approx \arcsin(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1).$$

Звідси випливає, що:

$$\varphi = \pi/2 - \varepsilon_1^{1/2} - o(\varepsilon_1^{3/2}).$$

У першому наближенні по ε_1 $\varphi^0 = \pi/2$ інтеграл $F(\varphi^0, \alpha_*^0)$ стає повним еліптичним інтегралом першого роду $K(\alpha_*^0)$, а рівність (18) можна переписати таким чином:

$$K'(\alpha_*^0) / K(\alpha_*^0) = (G / B_1)^{1/2} / \rho.$$

У цьому разі визначається величина q :

$$q = \exp\left(-\frac{\pi}{\rho} \sqrt{\frac{G}{B_1}}\right), \quad \alpha_*^0 = 4 \left(\left[\sum_{v=0}^{\infty} q^{(v+1/2)^2} \right] \left[1 + 2 \sum_{v=0}^{\infty} q^{v^2} \right]^{-1} \right)^2,$$

а також інтеграл:

$$K(\alpha_*) = \frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2} \right).$$

Якщо коефіцієнт тертя ρ дорівнює нулю, то $q = 0$, $\alpha_*^0 = 0$, тобто ділянка зчеплення, зникає. Зі зростанням ρ вона збільшується, окрім того, вона залежить від характеристик жорсткості матеріалу пластини. Так, за зменшення $(G / B_1)^{1/2}$ та постійного $\rho \neq 0$ розмір ділянки зчеплення збільшується.

Висновки

На цьому розв'язання задачі у першому наближенні закінчується. Оскільки $u_{\xi}^{2,0} = 0$, то крайові умови для визначення функцій $u^{1,1}, v^{2,1}$ у другому наближенні виявляються нульовими. Відповідно, нульовими є і розв'язки, тобто друге наближення не вносить корективів до першого.

Відзначимо також, що якщо у напруженому стані типу примежового шару розглядати не напівполосу, а прямокутник, то відображення його на напівплощину краще здійснювати не так, як зазначено вище, а вимагати, щоб точки $x_2 = 0, y_2 = \pm\lambda; x_2 = 0, y_2 = \pm\gamma$ відображалися у точки $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm\ell_1; \xi_2 = 0, \eta_2 = \pm 1$.

Це дасть змогу уникнути переходу від одних координат до інших під час формування крайових умов і досягається вибором однієї зі сталих у функції відображення. Друга стала (модуль k_2) при цьому визначається з умови, що точки $z_2 = \pm\gamma + ih_2$ відображаються у точки $\zeta_2 = \pm 1 / k_2$. Подальший аналіз здійснюється аналогічно викладеному вище, проте це можливо лише за достатньо малих значень: $h = \ln(R_1 / R_0)$.

Вплив тертя на напруження під штампом позначається лише з третього наближення. У цьому разі виникає відхил за деформацією u_{ξ} ($\xi = 0, \ell_1 < |\eta_1| < 1$), що знімається під час розв'язання рівняння (1) для функції $u^{1,2}$ з крайовими умовами:

$$\begin{aligned} u_{\xi}^{1,2} &= u_{\xi}^{1,0} - \mu v_{\eta}^{1,0} \quad (\ell_1 < |\eta_1| < 1), \\ u_{\eta}^{1,2} &= 0 \quad (|\eta_1| < \ell_1). \end{aligned}$$

На границі $\xi = h$ усі функції обертаються на нуль.

Оскільки $u_{\xi}^{1,0} = 0$ ($|\eta_1| > l_1$), то $u_{\xi}^{1,2} = -\mu v_{\eta}^{1,0} = \mu u^{1,0}$ ($\xi = 0, l_1 < |\eta_1| < 1$). Тут $\mu = \vartheta_1 B_2 / G = \vartheta_2 B_1 / G$ і врахований зв'язок між $v_{\eta}^{1,0}, u^{1,0}$, обумовлений рівністю (3).

Таким чином, відхил за нормальними напруженнями σ_1 за $\xi = 0, l_1 < |\eta_1| < 1$ викликаний лише врахуванням коефіцієнта Пуассона. Розв'язок останньої задачі повторює вищенаведене, але з урахуванням зазначених умов.

Вираз $u^{1,0} = c_0 = (2\gamma / \pi) A \ln(l_1) [\cos(\pi\lambda / 2\gamma)]^{-1}$ за $x_1 = 0$ ($\xi = 0$) $|y_1| = |\eta_1| \leq \lambda$ описує осідання штампа. З використанням (7), а також враховуючи, що $C_1 = \gamma / K(k_1)$, отримуємо $c_0 = -\frac{P_0 R_0}{\pi} K(k_1) \ln(l_1) [\sqrt{GB_1} B \cos(\pi\lambda / 2\gamma)]^{-1}$. Нехай $C_0^* = -\frac{\pi}{P_0 R_0} C_0$, тоді вираз для обчислення шуканої сталої набуває вигляду: $C_0^* = K(k_1) \ln(l_1) [\sqrt{GB_1} B \cos(\pi\lambda / 2\gamma)]^{-1}$.

Далі наведено значення C_0^* для різних значень характеристик жорсткості матеріалу $(G / B_1)^{1/2}$, при цьому вибрано конкретне значення параметра $\lambda / \gamma = 0,409$ (відношення розміру області контакту до кута розкриття пластини). Результати обчислень наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Осідання штампу C_0^* для різних значень характеристик жорсткості матеріалу $(G / B_1)^{1/2}$ ($\lambda / \gamma = 0,409$)

$(G / B_1)^{1/2}$	B	K(k1)	λ/γ	И	C0
0,524401	2,99	3,36	0,409	0,882338	-0,02109
0,348107	5,03	4,86	0,409	0,963352	-0,00541
0,134264	11,32	16,06	0,409	0,999996	-8,5*10 ⁻⁷

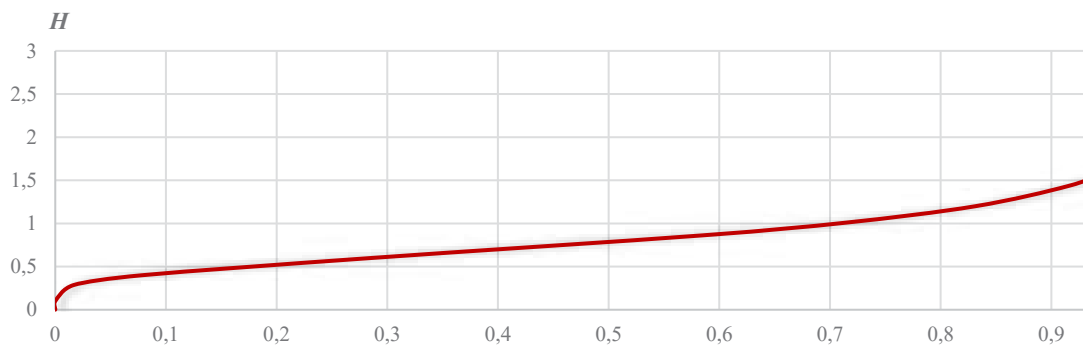


Рис. 2. Змінення розміру ділянки зчеплення

Нарис. 2 наведено залежність розміру ділянки зчеплення α_* від параметру $N = \rho(G / B_1)^{-1/2}$ для $(G / B_1)^{1/2} = 0,348$ (N обчислювалось за таких значень коефіцієнта тертя ρ : 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9).

Проведено дослідження впливу параметра λ / γ (відношення розміру області контакту до розміру вільної границі пластини) на розподіл напружень під штампом.

Нехай $\sigma^* = -\frac{4\gamma}{P_0\pi} \sigma_1^0$, після перетворень маємо:

$$\sigma^* = \frac{1}{K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} = \frac{1}{K(l_1)l_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1}{l_1}\right)^2}}$$

Якщо позначити $t = \frac{\eta_1}{l_1} = \frac{\sin(\pi y_1/2\gamma)}{\sin(\pi\lambda/2\gamma)}$ за $x_1 = 0$, $|y_1| < \lambda$ і врахувати те, що вплив тертя на розподіл напружень під штампом позначається лише з третього наближення, тоді:

$$\sigma^* = \frac{1}{K(l_1)l_1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < l_1 < 1; \quad -1 < t < 1).$$

Величина σ^* залежить від $l_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$, що характеризує розмір ділянки під штампом. Встановлено залежність $l_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$ від відношення λ/γ (табл. 2).

Таблиця 2

Залежність $l_1 = \sin(\pi\lambda/2\gamma)$ від відношення λ/γ

λ/γ	0,006	0,064	0,128	0,333	0,409	0,59	0,872	0,971
l_1	0,0094	0,1004	0,1997	0,4995	0,5992	0,7997	0,9799	0,9991

Таблиця 3

Розподіл нормальних напружень під штампом з урахуванням впливу розмірів вільної грані пластини та штампу

t		0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9
σ^*	$l_1 0,0094$	67,39	68,78	70,64	77,81	84,24	88,68	154,6
	$l_1 0,1004$	6,179	6,306	6,477	7,135	7,724	8,131	14,18
	$l_1 0,1997$	3,017	3,081	3,163	3,484	3,772	3,971	6,922
	$l_1 0,4995$	1,081	1,102	1,132	1,247	1,351	1,421	2,477
	$l_1 0,5992$	0,856	0,874	0,898	0,989	1,071	1,127	1,965
	$l_1 0,7997$	0,554	0,566	0,581	0,631	0,693	0,729	1,271
	0,9799	0,305	0,311	0,319	0,352	0,381	0,401	0,699
	$l_1 0,9991$	0,208	0,212	0,218	0,241	0,259	0,273	0,476

В табл. 3 наведено залежність нормального напруження під штампом від значення відношення розміру області контакту до розміру вільної грані пластини. Результати отримані з урахуванням табл. 2.

Список використаної літератури

- Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Математичне моделювання в задачах геометрично нелінійної теорії пружності. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2021. Т. 4. № 1. С. 103–110. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11>.
- Shporta A.H., Kagadii T.S., Govorukha V.B., Onoprienko O.D., Zhao S. Analysis of numeric results for analogue of galin’s problem in curvilinear coordinates. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. 2023. V. 1. P. 142–148. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2023-1/142>.
- Erdogan F., Ozturk M. On the Singularities in Fracture and Contact Mechanics. *Journal of Applied Mechanics*. 2008. V. 75 (5). P. 51–111. <https://doi.org/10.1115/1.2936241>.
- Мартиняк Р.М., Приходько О.В. Задача про вдавлювання близького до плоского штампу в пружний шорсткий півпростір. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2020. Т. 31. С. 66–77. <https://doi.org/10.15421/4220006>.

5. Ostriuk V.I. Inversion Symmetry of the Solutions of Boundary-Value Problems of Elasticity for a Half-Space. *International Applied Mechanics*. 2020. V. 56. P. 628–642. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01040-8>.
6. Ostryk V.I. Closed Semi-Infinite Crack at the Interface between Materials in a Piecewise-Homogeneous Strip. *International Applied Mechanics*. 2021. V. 57. P. 363–372. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01087-1>.
7. Cen J.A., Komvopoulos K. Cohesive-Zone-Based Contact Mechanics Analysis of Delamination in Homogeneous and Layered Half-Spaces Subjected to Normal and Shear Surface Traction. *Journal of Applied Mechanics*. 2023. P. 1–17. <https://doi.org/10.1115/1.4062141>.
8. Lebon F., Ramière I. Advanced Numerical Methods in Computational Solid Mechanics. *Mathematics*. 2023. Vol. 11 (6). P. 12–15. <https://doi.org/10.3390/math11061512>.
9. Tchoualag L., Ndjansi L.O., Woukeng J.L. Rapid Methods for the Resolution of Contact Problems in Static Linear Elasticity. *Mathematical Problems in Engineering*. 2023. Vol. 2023. P. 1–26. <https://doi.org/10.1155/2023/9960116>.
10. Wang F., Shah S., Wu B. Discontinuous Galerkin Methods for Hemivariational Inequalities in Contact Mechanics. *Journal of Scientific Computing*. 2023. Vol. 95 (3). <https://doi.org/10.1007/s10915-023-02212-7>.
11. Sohrabifard M., Nategh M.J. Investigation of the stability and contact stiffness of workpiece inside fixture in different machining conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2023. Vol. 237 (20). doi:10.1177/09544062231153749.
12. Argatov I.I., Mishuris G.S., Popov V.L. Asymptotic modelling of the JKR adhesion contact for a thin elastic layer. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2016. V. 69 (2). P. 161–179. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbw002>.
13. Ciavarella M., Joe J., Papangelo A., Barber J.R. The role of adhesion in contact mechanics. *Journal of the Royal Society*. 2019. Vol. 16 (151) Article ID: 20180738. <http://doi.org/10.1098/rsif.2018.0738>.
14. Castellano M., Lorez F., Kammer D. S. Nucleation of frictional slip: A yielding or a fracture process? *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2023. Vol. 173. P. 105–193. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105193>.
15. Klimchuk T.V., Ostryk V.I. Smooth Contact of a Semiinfinite Punch with Rounded Edge and an Elastic Strip. *Journal of Mathematical Science*. 2018. V. 231. P. 650–664. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3842-9>.

References

1. Kahadii, T.S., Shporta, A.H., Bilova, O.V., & Shcherbyna, I.V. (2021). Matematychno modeliuвання v zadachakh heometrychno nelineinoi teorii pruzhnosti. [Mathematical modeling in problems of geometrically nonlinear theory of elasticity]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*. 4 (1). 103–110. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11> [in Ukrainian].
2. Shporta, A.H., Kagadii, T.S., Govorukha, V.B., Onopriienko, O.D., & Zhao, S. (2023). Analysis of numeric results for analogue of Galin's problem in curvilinear coordinates. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. V. 1. P. 142–148. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2023-1/142> [in English].
3. Erdogan, F. & Ozturk, M. (2008). On the Singularities in Fracture and Contact Mechanics. *Journal of Applied Mechanics*. 75 (5), 51–111. <https://doi.org/10.1115/1.2936241> [in English].
4. Martyniak, R.M., & Prykhodko, O.V. (2020). Zadacha pro vdavliuvannia blyzko do ploskoho shtampu v pruzhnyi shorstkyi pivprostir. [The problem of pressing a close to flat Stamp in

- an elastic rough half-Space]. *Problemy obchysliuvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruksii*. 31. 66–77. <https://doi.org/10.15421/4220006> [in Ukrainian].
5. Ostriuk, V.I. (2020). Inversion Symmetry of the Solutions of Boundary-Value Problems of Elasticity for a Half-Space. *International Applied Mechanics*. 56, 628–642. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01040-8> [in English].
 6. Ostryk, V.I. (2021). Closed Semi-Infinite Crack at the Interface between Materials in a Piecewise-Homogeneous Strip. *International Applied Mechanics*. 57, 363–372. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01087-1> [in English].
 7. Cen, J.A. & Komvopoulos, K. (2023). Cohesive-Zone-Based Contact Mechanics Analysis of Delamination in Homogeneous and Layered Half-Spaces Subjected to Normal and Shear Surface Traction. *Journal of Applied Mechanics*. P. 1–17. <https://doi.org/10.1115/1.4062141> [in English].
 8. Lebon, F., & Ramière, I. (2023). Advanced Numerical Methods in Computational Solid Mechanics. *Mathematics*. 11 (6), 12–15. <https://doi.org/10.3390/math11061512> [in English].
 9. Tchoualag, L., Ndjansi, L.O., & Woukeng, J.L. (2023). Rapid Methods for the Resolution of Contact Problems in Static Linear Elasticity. *Mathematical Problems in Engineering*. 2023, 1–26. <https://doi.org/10.1155/2023/9960116> [in English].
 10. Wang F., Shah S., & Wu, B. (2023). Discontinuous Galerkin Methods for Hemivariational Inequalities in Contact Mechanics. *Journal of Scientific Computing*. 95 (3). <https://doi.org/10.1007/s10915-023-02212-7> [in English].
 11. Sohrabifard, M., & Nategh, M.J. (2023). Investigation of the stability and contact stiffness of workpiece inside fixture in different machining conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 237(20). doi:10.1177/09544062231153749 [in English].
 12. Argatov, I.I., Mishuris, G.S., & Popov, V.L. (2016). Asymptotic modelling of the JKR adhesion contact for a thin elastic layer. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 69 (2), 161–179. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbw002> [in English].
 13. Ciavarella, M., Joe J., Papangelo, A., & Barber, J.R. (2019). The role of adhesion in contact mechanics. *Journal of the Royal Society*. 16 (151) Article ID:20180738. <http://doi.org/10.1098/rsif.2018.0738> [in English].
 14. Castellano, M., Lorez, F., & Kammer, D. S. (2023). Nucleation of frictional slip: A yielding or a fracture process? *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 173, 105–193. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105193> [in English].
 15. Klimchuk, T.V., & Ostryk, V.I. (2018). Smooth Contact of a Semiinfinite Punch with Rounded Edge and an Elastic Strip. *Journal of Mathematical Science*. 231, 650–664. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3842-9> [in English].

Кагадій Тетяна Станіславівна – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Шпорта Анна Григорівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358.

Білова Оксана Вікторівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри економічної кібернетики Українського державного університету науки і технологій. E-mail: okbelova00@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Щербина Ірина Володимирівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, фізики та загальноінженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Онопрієнко Олег Дмитрович – доктор філософії з галузі «Математика та статистика», доцент, доцент кафедри вищої математики, фізики та загальноінженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: onopriienko.oleg@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3127-4616.

Kagadiy Tetyana Stanislavivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Applied Mathematics of the Dnipro University of Technology. E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Shporta Anna Hryhorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Applied Mathematics of the Dnipro University of Technology. E-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358.

Bilova Oksana Viktorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Economic Cybernetics of the Ukrainian State University of Science and Technology. E-mail: okbelova00@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Shcherbyna Iryna Volodymyrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher mathematics, Physics and General Engineering Disciplines of the Dnipro State Agrarian and Economic University. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Onopriienko Oleg Dmytrovych – PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, Physics and General Engineering Disciplines of the Dnipro State Agrarian and Economic University. E-mail: onopriienko.oleg@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3127-4616.