УДК 519.21

С.А. НЕЧИПОРУК
Національний університет «Острозька академія»

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ВІРОГІДНОСТІ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ДВОПОРОГОВОГО ПРОЦЕСУ ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Дворежимний двопороговий процес дає змогу моделювати складні системи, в яких динаміка змінюється за досягнення порогових рівнів. У роботі для оцінки параметрів дворежимного двопорогового дифузійного процесу з дискретно відібраними даними запропоновано наближений метод максимальної правдоподібності, заснований на апроксимації логарифмічної функції правдоподібності спостережень. Логарифмічна форма функції правдоподібності покращує стабільність обчислень, що особливо важливо для порогових моделей з великою кількістю параметрів. Дискретна модель побудована на підставі процесу Орнштейна-Уленбека, заданого відповідним стохастичним диференціальним рівнянням та подальшою його дискретизацією за схемою Ейлера, яка є простою в реалізації та забезпечує необхідну точність під час вибору оптимального кроку часу. Процес Орншейна-Уленбека є зручним і поширеним у різноманітних застосуваннях, оскільки є гауссовим, для нього зручно виписується умова стаціонарності, що уможливлює працю з даними у вигляді часового ряду. Диференціюючи функцію правдодподібності за кожним параметром, отримуємо низку співвідношень для визначення оцінок параметрів зсуву, дифузії та порогів. Досліджуваний двопороговий процес поводиться по-різному за значень нижче першого порогу, між порогами та вище другого. У кожному з цих інтервалів процес може мати різну поведінку параметрів. У практичних умовах важливо знайти якомога кращі оцінки для параметрів зсуву, дифузії та порогів, оскільки точність їх визначення впливає на здатність моделі коректно описувати динаміку процесу.

У роботі також запропоновано обчислювальний алгоритм для моделі з двома порогами. Модель ділить спостереження на кілька діапазонів відповідно до порогів r1 та r2. Кожен з цих діапазонів описується своїми параметрами, що дає змогу враховувати різну поведінку процесу у кожному з цих інтервалів. В межах кожного діапазону обчислюється функція правдоподібності, яка відображає ймовірність отримання спостережуваних даних за умови правильності параметрів у кожному з діапазонів. Цей підхід надає моделі гнучкості для аналізу складних стохастичних процесів із пороговими ефектами, зокрема для фінансових ринків, де зміни ціни активу можуть значно залежати від досягнення визначених порогів, що відповідає ринковим стратегіям.

Ключові слова: наближений метод максимальної правдоподібності, пороговий дифузійний процес, стохастичне диференціальне рівняння.

S.A. NECHYPORUK
The National University of Ostroh Academy

APPROXIMATE MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD FOR ESTIMATING A TWO-THRESHOLD ORNSTEIN-ULENBECK PROCESS

A two-regime two-threshold process allows modeling complex systems in which dynamics change upon reaching threshold levels. This paper proposes an approximate maximum likelihood method for estimating the parameters of a two-threshold regime diffusion process with discrete sample data based on approximating the logarithmic likelihood function of observations. The logarithmic form of the likelihood function improves computational stability, which is particularly important for threshold models with a large number of parameters. The discrete model is built based on the Ornstein-Uhlenbeck process, defined by the corresponding stochastic differential equation and its subsequent discretization using the Euler scheme, which is simple to implement and ensures the required accuracy with an appropriately chosen time step. The Ornstein-Uhlenbeck process is convenient and widely used in various applications because it is Gaussian, and its stationarity condition is easily formulated, which allows for working with data in the form of a time series. By differentiating the likelihood function with respect to each parameter, we obtain a series of equations for determining the estimates of the shift, diffusion, and threshold parameters. The studied two-threshold regime process behaves differently at values below the first threshold, between the thresholds, and above the second threshold. In each of these intervals, the process may exhibit different parameter behavior. In practical applications, it is crucial to obtain the most accurate estimates for the drift, diffusion, and threshold parameters, as the precision of these estimates affects the model's ability to accurately describe the process dynamics.

The paper also proposes a computational algorithm for the two-threshold regime model. The model divides the observations into several ranges according to the thresholds r1 and r2. Each range is described by its parameters, allowing for the consideration of different process behaviors within each interval. Within each range, the likelihood function is calculated, reflecting the probability of obtaining the observed data, given the correctness of the parameters in each

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-11

range. This approach provides the model with flexibility for analyzing complex stochastic processes with threshold effects, particularly in financial markets, where asset price changes can significantly depend on reaching specific thresholds, aligning with market strategies.

Key words: approximate maximum likelihood method, threshold jump process, stochastic differential equation.

Постановка проблеми

У деяких фінансових моделях ринкові ціни можуть включати не тільки випадкові коливання, але й певні обмеження, які можна змоделювати у вигляді порогів. Для математичного моделювання такого явища можна використати дифузійні двопорогові процеси з дискретно відібраними даними. Постала задача розробити метод оцінки параметрів двопорогового дифузійного процесу та запропонувати обчислювальний алгоритм. Саме цю задачу буде розглянуто у статі.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Як відомо, процес Орнштейна-Уленбека є корисною моделлю для опису явищ, що схильні до коливань навколо деякого рівноважного стану з наявністю випадкових шумів [11]. Процес має низку корисних властивостей (стаціонарність, гауссовість, марковська властивість) [1] і є розв'язком стохастичного диференціального рівняння:

$$dX_t = \theta\left(\mu - X_t\right)dt + \sigma dW_t, (1)$$

де X_t – значення процесу в момент часу t; θ – швидкість повернення до середнього значення μ; σ – стандартне відхилення (визначає інтенсивність шуму); W_t – броунівський процес (він же процес Вінера), який моделює випадкові зміни.

Головною характеристикою ОУ-процесу є схильність повертатися до деякого середнього значення з плином часу. Це робить його зручним для моделювання феноменів, де значення змінної коливається навколо деякого середнього, як, наприклад, процентні ставки або ціни активів на фінансових ринках. Цікавою задачею є виявлення порогових ефектів у моделях, що можуть бути описаними процесом Орнштейна-Уленбека.

Задачі з одним порогом розглядались в працях [2; 3; 12].

Мета дослідження

Ми будемо вивчати наявність двох порогових ефектів. Це може бути корисно для аналізу систем, де змінна не може виходити за межі визначеного діапазону. Наприклад, у фінансах це може відображати мінімальні та максимальні ціни активів, а у фізиці – обмеження на амплітуду коливань у певних умовах.

Виклад основного матеріалу дослідження

Нехай $X = \left\{X_0, X_1, \ldots, X_q\right\}$ – це дані, що спостерігаються в моменти часу $\left\{t_0, t_1, \ldots, t_q\right\}$, $\beta = \left(\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}\right)$, $\sigma^2 = \left(\sigma_1^2, \sigma_2^2\right)$, і $\theta = \left(\beta, \sigma^2\right)$. Наша мета полягає в оцінюванні невідомого параметра $\eta = \left(r_1, r_2, \theta\right)$.

Далі ми розглянемо простий випадок дифузійного процесу з двома режимами і двома порогами:

$$dX_t = \left\{\left(\beta_{10} + \beta_{11}X_t\right)I\left(X_t \le r_1\right) + \left(\beta_{20} + \beta_{21}X_t\right)I\left(r_2 > X_t \ge r_1\right) + \left(\beta_{30} + \beta_{31}X_t\right)I\left(X_t \ge r_2\right)\right\}dt +$$
$$+\left\{\sigma_1 I\left(X_t \le r_1\right) + \sigma_2 I\left(r_2 > X_t \ge r_1\right) + \sigma_3 I\left(X_t > r_2\right)\right\}dW_t. (2)$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-11

Стохастичне диференціальне рівняння (2) можна апроксимувати різницевим рівнянням, використовуючи узагальнений метод Ейлера:

$$X_j - X_{j-1} = \Delta_j \left\{ \left(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}\right) I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \left(\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}\right) I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + \left(\beta_{30} + \beta_{31} X_{j-1}\right) I\left(X_{j-1} \ge r_2\right) \right\} +$$

$$+ \left\{ \sigma_1 I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \sigma_2 I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + \sigma_3 I\left(X_{j-1} > r_2\right) \right\} \left(W_j - W_{j-1}\right), (3)$$

де $W_j - W_{j-1} \sim N\left(0, \Delta_j\right)$ і $\Delta_j = t_j - t_{j-1}$. За умови, що X_0 і r_1, r_2 відомі рівняння (3) може бути використане для отримання $-2l_x\left(\theta\right)$, що є подвоєною від'ємною наближеною логарифмічною функцією правдоподібності для X.

$$-2l_x\left(\theta\right) = C + \sum_{j=1}^{q} \log\left\{ \sigma_1^2 I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + (\sigma_3^2 I\left(X_{j-1} > r_2\right) \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} \frac{\left[X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left\{ \left(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}\right) I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \left(\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}\right) I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + \left(\beta_{30} + \beta_{31} X_{j-1}\right) I\left(X_{j-1} > r_2\right) \right\} \right]^2}{\left\{ \sigma_1^2 I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + (\sigma_3^2 I\left(X_{j-1} > r_2\right) \right\} \Delta_{\mathrm{j}}},$$

для деякої постійної C, яка не залежить від θ.

Диференціювання рівняння (4) за параметрами $\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$.

Диференціювання за β_{10}, β_{11} для випадків, коли $X_{j-1} \le r_1$:

$$-2\frac{\partial l_X\left(\theta\right)}{\partial \beta_{10}} = -2\sum_{j=1}^{q} \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}\right)\right) I\left(X_{j-1} \le r_1\right)}{\left\{ \sigma_1^2 I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + (\sigma_3^2 I\left(X_{j-1} > r_2\right) \right\} \Delta_{\mathrm{j}}};$$

$$-2\frac{\partial l_X\left(\theta\right)}{\partial \beta_{11}} = -2\sum_{j=1}^{q} \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}\right)\right) X_{j-1} I\left(X_{j-1} \le r_1\right)}{\left\{ \sigma_1^2 I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + (\sigma_3^2 I\left(X_{j-1} > r_2\right) \right\} \Delta_{\mathrm{j}}}.$$

Диференціювання за β_{20}, β_{21} для випадків, коли $r_2 > X_{j-1} \ge r_1$:

$$-2\frac{\partial l_X\left(\theta\right)}{\partial \beta_{20}} = -2\sum_{j=1}^{q} \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left(\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}\right)\right) I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right)}{\left\{ \sigma_1^2 I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + (\sigma_3^2 I\left(X_{j-1} > r_2\right) \right\} \Delta_{\mathrm{j}}};$$

$$-2\frac{\partial l_X\left(\theta\right)}{\partial \beta_{21}} = -2\sum_{j=1}^{q} \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left(\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}\right)\right) X_{j-1} I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right)}{\left\{ \sigma_1^2 I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + (\sigma_3^2 I\left(X_{j-1} > r_2\right) \right\} \Delta_{\mathrm{j}}}.$$

Диференціювання за β_{30}, β_{31} для випадків, коли $X_{j-1} > r_2$:

$$-2\frac{\partial l_X\left(\theta\right)}{\partial \beta_{30}} = -2\sum_{j=1}^{q} \frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left(\beta_{30} + \beta_{31} X_{j-1}\right)\right) I\left(X_{j-1} > r_2\right)}{\left\{ \sigma_1^2 I\left(X_{j-1} \le r_1\right) + \sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1} \ge r_1\right) + (\sigma_3^2 I\left(X_{j-1} > r_2\right) \right\} \Delta_{\mathrm{j}}};$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-11

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{30}} = -2\sum_{j=1}^{q}\frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j\left(\beta_{30}+\beta_{31}X_{j-1}\right)\right)X_{j-1}I\left(X_{j-1}>r_2\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+(\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}\Delta_{\mathrm{j}}}.$$

Диференціювання за $\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2$:

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_1^2} = \sum_{j=1}^{q}\frac{I\left(X_{j-1}\le r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+(\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}}$$

$$-\frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j\left(\beta_{10}+\beta_{11}X_{j-1}\right)\right)^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)}{\left\{\sigma_1^4 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^4 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+(\sigma_3^4 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}\Delta_j};$$

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_2^2} = \sum_{j=1}^{q}\frac{I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\le r_1\right)+(\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}}$$

$$-\frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j\left(\beta_{20}+\beta_{21}X_{j-1}\right)\right)^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)}{\left\{\sigma_1^4 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^4 I\left(r_2 > X_{j-1}\le r_1\right)+(\sigma_3^4 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}\Delta_j};$$

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_3^2} = \sum_{j=1}^{q}\frac{I\left(X_{j-1}>r_2\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+(\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}}$$

$$-\frac{\left(X_j - X_{j-1} - \Delta_j\left(\beta_{30}+\beta_{31}X_{j-1}\right)\right)^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)}{\left\{\sigma_1^4 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^4 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+(\sigma_3^4 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}\Delta_j}.$$

Прирівнявши результати диференціювання до нуля, отримаємо матричну форму системи рівнянь для основних параметрів:

$$\begin{bmatrix}\beta_{10}\\ \beta_{11}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I\left(X_{j-1}\le r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}} & \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I\left(X_{j-1}\le r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-1}} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I\left(X_{j-1}\le r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-1}} & \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I\left(X_{j-1}\le r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-2}} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$*\begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\frac{\left(X_j - X_{j-1}\right)I(X_{j-1}\le r_1)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\frac{\left(X_j - X_{j-1}\right)I(X_{j-1}\le r_1)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\le r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2 > X_{j-1}\ge r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-1}} \end{bmatrix};$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-11

$$\begin{bmatrix}\beta_{20}\\ \beta_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}} & \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-1}}\\ \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-1}} & \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-2}}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$*\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{q}\frac{\left(X_j-X_{j-1}\right)I(r_2>X_{j-1}\geq r_1)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}}\\ \sum_{i=1}^{q}\frac{\left(X_j-X_{j-1}\right)I(r_2>X_{j-1}\geq r_1)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-1}}\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}\beta_{30}\\ \beta_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}>r_2)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}} & \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}>r_2)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-1}}\\ \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}>r_2)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-1}} & \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}>r_2)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-2}}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\sigma_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{q}\frac{\left\{X_j-X_{j-1}-\Delta_j\left(\beta_{10}+\beta_{11}X_{j-1}\right)\right\}^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)}{\left\{\sigma_1^4 I\left(X_{j-1}\leq r\right)+\sigma_2^4 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^4 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}\Delta_j}}{\sum_{i=1}^{q}\frac{I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)\right\}}};$$

$$\sigma_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{q}\frac{\left\{X_j-X_{j-1}-\Delta_j\left(\beta_{20}+\beta_{21}X_{j-1}\right)\right\}^2 I(r_2>X_{j-1}\geq r_1)}{\left\{\sigma_1^4 I\left(X_{j-1}\leq r\right)+\sigma_2^4 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^4 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}\Delta_j}}{\sum_{i=1}^{q}\frac{I(r_2>X_{j-1}\geq r_1)}{\left\{\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)\right\}}};$$

$$*\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{q}\frac{\left(X_j-X_{j-1}\right)I(X_{j-1}>r_2)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}}\\ \sum_{i=1}^{q}\frac{\left(X_j-X_{j-1}\right)I(X_{j-1}>r_2)}{\left\{\sigma_1^2 I\left(X_{j-1}\leq r_1\right)+\sigma_2^2 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}X_{j-1}^{-1}}\end{bmatrix};$$

$$\sigma_3^2=\frac{\sum_{i=1}^{q}\frac{\left\{X_j-X_{j-1}-\Delta_j\left(\beta_{30}+\beta_{31}X_{j-1}\right)\right\}^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)}{\left\{\sigma_1^4 I\left(X_{j-1}\leq r\right)+\sigma_2^4 I\left(r_2>X_{j-1}\geq r_1\right)+\sigma_3^4 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}\Delta_j}}{\sum_{i=1}^{q}\frac{I\left(X_{j-1}>r_2\right)}{\left\{\sigma_3^2 I\left(X_{j-1}>r_2\right)\right\}}}. \qquad (5)$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-11

Обчислювальний алгоритм

Представимо алгоритм як узагальнену ітераційну процедуру, яку можна застосувати для обчислення наближеної оцінки максимальної правдоподібності, використовуючи модель на основі оцінок (5).

Крок 1. Набір даних для моделі.

Часовий ряд $\{X_0, X_1, \ldots, X_q\}$, для якого обчислюються порядкові статистики $\{X_{(0)}, X_{(1)}, \ldots, X_{(q)}\}$, де $X_{(0)} \le X_{(1)} \le \ldots \le X_{(q)}$.

Нехай $a = X_{(q/5)}$, $b = X_{(4q/5)}$, $\hat{r} = a + \frac{i}{s}$, $i = 0, 1, \ldots, \lambda$, де $b = \hat{r}_\lambda, s \in \mathbb{N}$.

Крок 2.

2.1. Зафіксуємо $\hat{r}$ для $i = 0, 1, \ldots, \lambda$. Визначимо $\sigma_1^2(0), \sigma_2^2(0), \sigma_3^2(0)$.

2.2. Для $k \ge 1$ обчислимо:

$$\theta(k) = \left(\hat{\beta}_{10}(k), \hat{\beta}_{11}(k), \hat{\beta}_{20}(k), \hat{\beta}_{21}(k), \hat{\beta}_{30}(k), \hat{\beta}_{31}(k), \sigma_1^2(k), \sigma_2^2(k), \sigma_3^2(k)\right),$$

рекурсивно, як у рівняннях (номер рівняння), замінивши у правих частинах β_{10} на $\hat{\beta}_{10}(k-1)$, β_{11} на $\hat{\beta}_{11}(k-1)$, β_{20} на $\hat{\beta}_{20}(k-1)$, β_{21} на $\hat{\beta}_{21}(k-1)$, β_{30} на $\hat{\beta}_{30}(k-1)$, β_{31} на $\hat{\beta}_{31}(k-1)$, σ_1^2 на $\hat{\sigma}_1^2(k-1)$, σ_2^2 на $\hat{\sigma}_2^2(k-1)$, σ_3^2 на $\hat{\sigma}_3^2(k-1)$ відповідно.

2.3. Повторимо крок 2.2, доки $\hat{\theta}(k)$ не буде збіжною.

Нехай збіжна оцінка матиме вигляд:

$$\hat{\theta}_i = \left(\hat{\beta}_{10,i}(k), \hat{\beta}_{11,i}(k), \hat{\beta}_{20,i}(k), \hat{\beta}_{21,i}(k), \hat{\beta}_{30,i}(k), \hat{\beta}_{31,i}(k), \hat{\sigma}_{1,i}^2(k), \hat{\sigma}_{2,i}^2(k), \hat{\sigma}_{3,i}^2(k)\right).$$

Крок 3.

Для $i = 0, 1, \ldots, \lambda$ обчислимо $-2l_X(\hat{\theta}_i)$. Тоді $\tau = \mathrm{argmin}_i \left\{-2l_X(\hat{\theta}_i)\right\}$ і наближеною оцінкою максимальної правдоподібності $\eta = (r, \theta)$ буде $\hat{\eta} = (\hat{r}_\tau, \hat{\theta}_\tau)$.

Висновки

У статті ми розглядаємо оцінку процесу порогової дифузії з даними дискретного часу та пропонуємо AMLE для оцінки параметрів зсуву, дифузії та двох порогів одночасно. Якщо процес наближається до меншого порога, відбувається «відштовхування» вгору, а наближення до більшого порога призводить до «відштовхування» вниз. Це явище може моделювати, наприклад, поведінку ринкових цін, коли цінові рухи обмежені певними межами (як під час криз чи державних регуляцій).

Список використаної літератури

1. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Introduction to the theory of random processes. Philadelphia: W. B. Saunders Company, 1969. 544 p.
2. Yu T.H., Tsai H., Rachinger H. Approximate maximum likelihood estimation of a threshold diffusion process. *Computational Statistics and Data Analysis*. 2020. № 142. Article 106823. DOI: 10.1016/j.csda.2019.106823.
3. Rachinger H., Lin E., Tsai H. A bootstrap test for threshold effects in a diffusion process. *Computational Statistics and Data Analysis*. 2023. № 39 (5). P. 2859–2872. DOI: 10.1007/s00180-023-01375-z.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-11

4. Tsai H., Nikitin A. V. Threshold models and approximate maximum likelihood estimation of Lévy processes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2024. № 60. P. 261–267. DOI: 10.1007/s10559-024-00666-7.
5. Milstein G.N. Numerical Integration of Stochastic Differential Equations. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995. 172 p.
6. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. Asymptotic Analysis for Complex Evolutionary Systems with Markov and semi-Markov switching using approximation schemes. London: Wiley-ISTE, 2020. 240 p.
7. Ait-Sahalia Y. Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: a closed form approximation approach. *Econometrica*. 2002. № 70. P. 223–262. DOI: 10.1111/1468-0262.00274.
8. Chan K.S. Consistency and limiting distribution of the least square's estimator of a threshold autoregressive model. *Ann. Statist*. 1993. № 21 (1). P. 520–533. DOI: 10.1214/aos/1176349040.
9. Li C. Maximum-likelihood estimation for diffusion processes via closed-form density expansions. *Ann. Statist*. 2013. № 41 (3). P. 1350–1380. DOI: 10.1214/13-AOS1118.
10. Su F., Chan K. S. Quasi-likelihood estimation of a threshold diffusion process. *Econometrics*. 2015. № 189. P. 473–484. DOI: 10.1016/j.jeconom.2015.03.038.
11. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. On the theory of Brownian motion. *Phys. Rev.* 1930. № 36. P. 823–841. DOI: 10.1103/PhysRev.36.823.

References

1. Gikhman, I.I., & Skorokhod, A.V. (1969). *Introduction to the theory of random processes*. Philadelphia: W.B. Saunders Company [in English].
2. Yu, T.H., Tsai, H., & Rachinger, H. (2020). Approximate maximum likelihood estimation of a threshold diffusion process. *Computational Statistics and Data Analysis*, 142. DOI: 10.1016/j.csda.2019.106823 [in English].
3. Rachinger, H., Lin, E., & Tsai, H. (2023). A bootstrap test for threshold effects in a diffusion process. *Computational Statistics and Data Analysis*, 39 (5), 2859–2872. DOI: 10.1007/s00180-023-01375-z [in English].
4. Tsai, H., & Nikitin, A.V. (2024). Threshold models and approximate maximum likelihood estimation of Lévy processes. *Cybernetics and Systems Analysis*, 60, 261–267. DOI: 10.1007/s10559-024-00666-7 [in English].
5. Milstein, G.N. (1995). *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*. Boston: Kluwer Academic Publishers [in English].
6. Chabanyuk, Y., Nikitin, A., & Khimka, U. (2020). *Asymptotic Analysis for Complex Evolutionary Systems with Markov and semi-Markov switching using approximation schemes*. London: Wiley-ISTE.
7. Ait-Sahalia, Y. (2002). Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: a closed form approximation approach. *Econometrica*, 70, 223–262. DOI: 10.1111/1468-0262.00274 [in English].
8. Chan, K.S. (1993). Consistency and limiting distribution of the least square's estimator of a threshold autoregressive model. *Ann. Statist*, 21 (1), 520–533. DOI: 10.1214/aos/1176349040 [in English].
9. Li, C. (2013). Maximum-likelihood estimation for diffusion processes via closed-form density expansions. *Ann. Statist*, 41 (3), 1350–1380. DOI: 10.1214/13-AOS1118 [in English].
10. Su, F., & Chan, K.S. (2015). Quasi-likelihood estimation of a threshold diffusion process. *Econometrics*, 189, 473–484. DOI: 10.1016/j.jeconom.2015.03.038 [in English].
11. Uhlenbeck, G.E., & Ornstein, L.S. (1930). On the theory of Brownian motion. *Phys. Rev*, 36, 823–841. DOI: 10.1103/PhysRev.36.823 [in English].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-11

Нечипорук Сергій Анатолійович – аспірант кафедри економіко-математичного моделювання та інформаційних технологій Національного університету «Острозька академія». E-mail: serhii.a.nechyporuk@oa.edu.ua, ORCID: 0000-0002-0532-6160.

Nechyporuk Serhii Anatoliyovych – Postgraduate Student at the Department of Economic-Mathematical Modeling and Information Technologies of the National University of Ostroh Academy. E-mail: serhii.a.nechyporuk@oa.edu.ua, ORCID: 0000-0002-0532-6160.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-11