

УДК 539.3

Н.О. ЯРЕЦЬКА

Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького;

Хмельницький національний університет

А.О. РАМСЬКИЙ

Хмельницький національний університет

В.В. МОРОЗ

Хмельницький кооперативний торговельно-економічний інститут

ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ КОНТАКТУ ПРУЖНИХ ПІВПРОСТОРІВ ТА КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Представлено дослідження математичної моделі контакту двох попередньо напружених півпросторів, які тиснуть на пружний кільцевий циліндр з початковими напруженнями. Зроблено припущення про те, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження – неперервні. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій за довільної структури пружного потенціалу з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності основ (півпросторів) однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив циліндричного штамп викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Задача розв'язана для випадку рівних коренів характеристичного рівняння та сформульована у вигляді розв'язку потрібних інтегральних рівнянь. Вони зводяться до одного інтегрального рівняння способом підстановки. Оскільки задача вісесиметрична, ядро інтегрального рівняння залежить від добутку трьох функцій Бесселя. Для розв'язку була використана формула, що представляє добуток двох функцій Бесселя у ряд. Це дало змогу звести задачу до функціонального рівняння. Воно пов'язує переміщення штамп з невідомими коефіцієнтами розподілу контактних напружень. В свою чергу, отримане функціональне рівняння було зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Цю систему розв'язуємо методом редукції (утинання). Під час дії навантаження на кільцевий штамп розподіл контактних напружень знаходимо у вигляді ряду добутків приєднаних функцій Лежандра. Числовий аналіз представлено графічно для випадку гармонічного потенціалу.

Важливо відзначити, що врахування початкових (залишкових) напружень в межах лінеаризованої теорії пружності істотно змінює постановку та значно ускладнює розв'язання контактної задачі. Запропонований у статті метод дав змогу виявити вплив початкових напружень на контактні характеристики тіл, а також посприяти підвищенню надійності та довговічності інженерних споруд та конструкцій.

Ключові слова: кільцевий циліндричний штамп, лінеаризована теорія пружності, контактні проблеми, початкові напруги, залишкові напруги.

N.O. YARETS'KA

Bohdan Khmelnytskyi National Academy of the State Border Guard Service of Ukraine;

Khmelnytskyi National University

A.O. RAMSKY

Khmelnytskyi National University

V.V. MOROZ

Khmelnytskyi Cooperative Trade and Economic Institute

RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE CONTACT OF ELASTIC HALF-SPACES AND A RING STAMP WITH INITIAL STRESSES

A study of the mathematical model of the contact of two prestressed half-spaces pressing on an elastic ring cylinder with initial stresses is presented. It is assumed that the surfaces outside the contact boundary remain free from the influence of external forces, and at the contact boundary displacements and stresses are continuous. The study was performed in a general form for compressible (incompressible) bodies for the theory of large (final) initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations with an arbitrary structure of the elastic potential using the relations of the linearized theory of elasticity without taking into account frictional forces. We assume that the initial states of the elastic

cylindrical die and the elastic bases (half-spaces) are homogeneous and equal. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates (of the natural state). In addition, the influence of the cylindrical stamp causes small perturbations of the corresponding values of the main stress-strain state. The problem is solved for the case of equal roots of the characteristic equation and is formulated as a solution of triple integral equations. They are reduced to one integral equation by substitution. Since the problem is axisymmetric, the kernel of the integral equation depends on the product of three Bessel functions. For the solution, a formula representing the product of two Bessel functions in a series was used. This made it possible to reduce the problem to a functional equation. This equation relates the die displacement to the unknown contact stress distribution coefficients. In turn, the obtained functional equation was reduced to an infinite system of linear algebraic equations. We solve this system by the method of reduction. When a load is applied to the ring dies, the distribution of contact stresses is found in the form of a series of products of the connected Legendre functions. The numerical analysis is presented graphically for the case of harmonic potential.

It is important to note that taking into account the initial (residual) stresses within the linearized theory of elasticity significantly changes the formulation and significantly complicates the solution of the contact problem. The method proposed in the article made it possible to reveal the influence of initial stresses on the contact characteristics of bodies and contribute to increasing the reliability and durability of engineering structures and structures.

Key words: ring cylindrical stamp, linearized theory of elasticity, contact problems, initial stresses, residual stresses.

Постановка проблеми

Проблема дослідження впливу початкових напружень на тіла, що перебувають у контакті, виникла в цілій низці фундаментальних та прикладних наукових напрямів, як-от механіка композитів, механіка матеріалів та елементів конструкцій, неруйнівні методи визначення навантажень, сейсмологія, біомеханіка, механіка гірських порід, геофізика. Отже, необхідність у дослідженні впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл є важливим аспектом вивчення представлених проблем.

Практичний аспект моделювання та розв'язку подібних задач зумовлений достатнім впливом залишкових (технологічних) напружень на висотні споруди, як-от димові труби, водонапірні вежі, градирні, якщо моделлю ґрунтової основи або перекриття прийнято пружний півпростір або шар. Також цей вплив важливо враховувати в деталях різноманітних механізмів, машин та конструкцій, які використовуються у промисловості й інших галузях.

Початкові (залишкові або технологічні) напруження можуть виникати в результаті вітрового навантаження на споруди; навантаження від власної ваги споруд; виробничих процесів виготовлення матеріалів; попередньої технологічної обробки матеріалів або частин конструкцій; складання конструкцій; геостатичних та геодинамічних сил земної кори; деформації мерзлих ґрунтів; зняття навантаження у пластичних тілах; процесів у кровоносних судинах живих істот та інших випадках.

Для компенсації контактних напружень, що виникають у процесі роботи в елементах конструкцій, доречно іноді навмисно створювати початкові (залишкові, технологічні) напруження. Це дає змогу підвищити міцність конструкцій та матеріалів, з яких вони виготовлені. Адже, ще у роботі [1] було доведено, що за стискаючих та розтягуючих початкових напружень контактні напруження та переміщення поведуться по-іншому у кількісному плані.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Оглядаючи праці контактної механіки, визначили, що моделі, які враховують складні фізичні та механічні властивості тіл були розглянуті у праці [2]. Загалом дія початкових напружень на контакт тіл вимагає використовувати під час дослідження нелінійну теорію пружності [3]. Але, якщо початкові напруження будуть достатньо великими, можна обмежитись її лінеаризованим варіантом [1].

Лінеаризована теорія пружності для тіл з початковими напруженнями вперше була запропонована у роботі [4]. Також у монографії [5] автором було використано міркування фізичного характеру і не завжди суворо дотримано принцип лінеаризації нелінійної теорії. Це розвинуло теорію інкрементальних деформацій для тіл з початковими напруженнями. Хоча спроба побудувати спрощений варіант такої теорії з міркувань фізичного характеру була ще у Коші (XIX ст.).

Однією з перших робіт, де було представлено розв'язок задачі для колової тріщини пружного нестисливого тіла з початковими напруженнями у разі конкретного виду потенціалу, була праця [6]. Наукові дослідження, в яких контактні задачі були розв'язані для конкретних потенціалів, представлені працями [7]. В них одна й та сама задача для попередньо напружених тіл розглядалась одними авторами для потенціалу одного конкретного типу, а іншими – для потенціалу іншого типу. Цей підхід не сприяє раціоналізації розв'язку контактних задач.

Тому, на думку авторів, ефективніше розв'язувати контактні задачі у загальному вигляді для стисливих та нестисливих тіл за довільної форми пружного потенціалу. До таких робіт можна віднести праці [1; 2; 8], що мають фундаментальний характер у цьому напрямі.

Цей метод розв'язку заснований на теорії функції комплексної змінної для плоских задач і теорії потенціалу для просторових контактних задач. Цей підхід дає змогу розв'язати поставлену контактну задачу в єдиній загальній формі для стисливих (нестисливих) тіл за довільної структури пружного потенціалу. А необхідні числові результати для конкретних пружних потенціалів отримують на завершальному етапі. Припущення, які є основними для лінеаризованої теорії пружності і цього підходу, наведені у роботі [8].

Отже, у статті представлено математичну модель та дослідження контактної задачі для двох попередньо напружених півпросторів, які тиснуть на пружний кільцевий циліндр з початковими напруженнями. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій за довільної структури пружного потенціалу з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності без урахування сил тертя. Задача сформульована у вигляді розв'язку потрійних інтегральних рівнянь. Вони зводяться до одного інтегрального рівняння способом підстановки. Оскільки поставлена задача вісесиметрична, ядро інтегрального рівняння залежить від добутку трьох функцій Бесселя. Для розв'язку була використана формула, що представляє добуток двох функцій Бесселя у подвійну суму добутків гіпергеометричної функції на функцію Бесселя. Це дало змогу звести задачу до функціонального рівняння. Це рівняння пов'язує переміщення штампа з невідомими коефіцієнтами розподілу контактних напружень. В свою чергу, отримане функціональне рівняння було зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Цю систему розв'язуємо методом редукції (утинання) [9]. Під час дії навантаження на кільцевий штамп розподіл контактних напружень знаходимо у вигляді рядів добутків приєднаних функцій Лежандра з вагою, що відповідає особливостям у контактних напруженнях на межах штампу.

У задачі зроблено припущення, що початкові напружено-деформовані стани у кільцевих штампах та півпросторах або шарі однорідні та рівні. У статті [10] розглянута контактна взаємодія кільцевого штампа з попередньо напруженим ізотропним шаром.

Мета дослідження

Основною метою роботи є дослідження проблем механіки твердого деформованого тіла з урахуванням початкових напружень, що є одним з фундаментальних питань розвитку сучасної контактної механіки. Врахування впливу додаткових сил (наприклад, початкових або залишкових напружень) на систему пружних тіл, що контактують, в разі ускладнює розв'язки таких задач у математичному аспекті. Тому важливо розвивати цей напрям досліджень, використовуючи апарат математичного моделювання та комп'ютерних застосувань.

Виклад основного матеріалу дослідження

Математична модель та граничні умови

Нехай скінченний пружний кільцевий циліндричний штамп висотою H , меншим радіусом R_1 та більшим радіусом R_2 з початковими напруженнями (рис. 1) стискається (розтягується)

двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою осесиметричного навантаження.

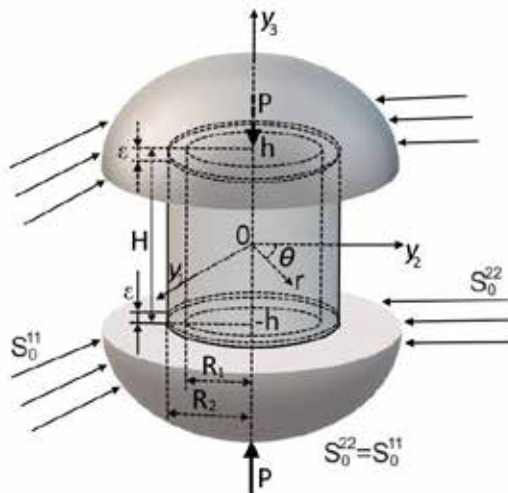


Рис. 1. Контакт двох пружних півпросторів на пружний кільцевий циліндр

Це навантаження зводиться до рівнодійної сили P . Геометрична вісь симетрії штампа збігається з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не завантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним штампом переміщуються відносно координатних площин $y_3 = \pm h$ на величину ε . Величина $h = 0,5 H$. Припускаємо, що пружні тіла виготовлені з різних стисливих або нестисливих ізотропних матеріалів з потенціалом довільної структури. Причому коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга для «верхнього» та «нижнього» півпростору позначимо як $\nu^{(i)}, E^{(i)}$ ($i=1, 2$) відповідно, а для кільцевого штампу – як $\nu^{(3)}, E^{(3)}$.

Вважаємо, що поверхні поза межею контакту вільні від впливу зовнішніх сил. Переміщення та напруження на межі контакту є неперервними. Величини λ_i ($i=1, 2, 3$) є коефіцієнтами видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11}, S_0^{22} – це компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Припускаємо, що початкові стани півпросторів та штампа є однорідними та рівними й для них виконуються співвідношення [1]:

$$y_m = x_m + U_m^0; \quad U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) \lambda_i^{-1} y_i \quad (i, m = \overline{1,3}), \quad (1)$$

де δ_{mi} – символ Кронекера.

Всі величини, що належать до верхнього, нижнього півпросторів, будемо позначати верхнім індексом (1) та (2) відповідно, а величини, що належать до кільцевого штампа, – верхнім індексом (3).

У системі циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1} y_3$; $v_i = \sqrt{n_i}$ ($i=1, 2$); $n_1 = \xi_2'^2$; $n_2 = \xi_3'^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

1) на торцях пружного кільцевого штампа в області контакту $z_i = \pm h / v_i$, де $v_i = \sqrt{n_i}$ ($i=1, 2$):

$$Q_{33}^{(i)} = Q_{33}^{(3)}, \quad Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad Q_{3r}^{(3)} = 0, \quad U_3^{(i)} - U_3^{(3)} = \varepsilon \quad (R_1 \leq r \leq R_2); \quad (2)$$

2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h / v_i$ ($i = \overline{1,2}$):

$$Q_{33}^{(i)} = Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad U_3^{(i)} = 0 \quad (r > R_2, \quad 0 < r < R_1) \quad (i = 1, 2, 3); \quad (3)$$

3) на боковій поверхні пружного штампa $r=R_1, r=R_2$:

$$Q_{rr}^{(3)} = 0; \quad Q_{3r}^{(3)} = 0 \quad (|z_i| \leq h / v_i), \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодійною навантаження P , має такий вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r |Q_{33}^{(i)}| dr, \quad |Q_{33}^{(3)}| = |Q_{3r}^{(3)}|_{z_i = \pm \frac{h}{v_i}} \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Умова (5) завершує постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного кільцевого циліндричного штампa з двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

В цьому дослідженні зробимо припущення, що пружні потенціали є двічі неперервно-диференційованими функціями алгебраїчних інваріантів тензора деформації Гріна [1]. Крім того, дія штампів викликає у тілах, що з ними контактують, мале збурення основного напружено-деформованого стану.

Також будемо розглядати три стани тіл з початковими напруженнями, а саме:

- природний, коли у тілах відсутні напруження;
- початковий;

– збурений, де всі величини складаються із суми відповідних величин початкового стану та збурень.

Відзначимо, що збурення при цьому є набагато меншими відповідних величин початкового стану [1].

Також будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. А в разі ортотропних тіл будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані.

Отже, перейдемо до розгляду головних співвідношень.

Метод розв'язання

Напружено-деформований стан у попередньо напружених півпросторах в області контакту ($y_3 = \pm h; \quad z_i = \pm h / v_i \quad (i = 1, 2)$) з [1] набуває вигляду:

$$Q_{33}^{(i)} \left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R} \right) = \frac{C_{44}(1 + m_1)l_1(s - s_3)}{R} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\mu \rho) d\eta;$$

$$Q_{3r}^{(i)} \left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R} \right) = 0; \quad U_3^{(i)} \left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R} \right) = -\frac{m_1(s_2 - s_3)}{v_1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\mu \rho) d\eta; \quad (6)$$

$$U_r^{(i)} \left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R} \right) = (s_3 - 1) \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\mu \rho) d\eta. \quad (i=1, 2)$$

Загальний розв’язок для визначення напружено-деформованого стану у циліндричному пружному штампі з початковими напруженнями у разі рівних коренів характеристичного рівняння [1] приймемо у вигляді:

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 z_1 v_1,$$

$$\chi_1 = A_0 (r^2 - 2z_1^2) + C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) + [A_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + A_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r)] S_1(\gamma_k v_1 z_1) + [T_k^{(2)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(1)} Y_0(\alpha_k r)] S_2(\alpha_k z_1),$$

$$\chi_2 = A_0 (r^2 - 2z_1^2) + C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) + [B_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + B_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r)] S_1(\gamma_k v_1 z_1) + [T_k^{(2)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(1)} Y_0(\alpha_k r)] S_3(\alpha_k z_1),$$

де $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$; $S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$; $S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$; $C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_0, C_0, A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, T_k^{(1)}, T_k^{(2)}$ – деякі сталі коефіцієнти; α_k, γ_k – власні значення задачі (2) – (5).

Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому кільцевому циліндричному штампі для стисливих (нестисливих) тіл та рівних коренів рівняння [1] з урахуванням граничних умов (2) – (5) представимо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} Q_{3r}^{(3)} &= \frac{C_{44}}{v_1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left\{ (1+m_1) \alpha_k \left(\frac{1}{v_1} S_2(z_1 \alpha_k) - S_3(z_1 \alpha_k) \right) + (1+m_2) S_3(z_1 \alpha_k) \right\} \times \\ &\quad \times \left[Y_1(r \alpha_k) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] T_k^{(1)}, \\ U_r^{(3)} &= -2r A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{\alpha_k}{v_1} S_4(z_1 \alpha_k) + (1+\alpha_k z_1) S_3(z_1 \alpha_k) \right) \left[Y_1(r \alpha_k) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] T_k^{(1)} \\ U_3^{(3)} &= \frac{1}{v_1} \left\langle (1-m_2) A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left((1-m_2) S_3(z_1 \alpha_k) - \frac{m_1 \alpha_k}{v_1} [S_2(z_1 \alpha_k) + v_1 z_1 S_3(z_1 \alpha_k)] \right) \right\rangle \times \\ &\quad \times \left[Y_0(r \alpha_k) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k r) \right] T_k^{(1)} \quad (7) \\ Q_{33}^{(3)} &= -C_{44} \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{v_1} \left\{ [(1+m_1) l_1 \alpha_k S_4(z_1 \alpha_k) + (1+m_2) l_2 v_1 S_3(z_1 \alpha_k)] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[Y_1(r \alpha_k) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] T_k^{(1)} \right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

де $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ – величини, що залежать від компонентів тензору напружень та коренів характеристичного рівняння [1, 8, 10],

$$S_2(x) = E_k sh(x) + F_k ch(x), \quad S_3(x) = M_k (sh(x) + ch(x)), \quad S_4(x) = E_k ch(x) + F_k sh(x),$$

$$E_k = \frac{v_1(1 - \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 - \alpha_k \tilde{c}_2)}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} M_k, \quad F_k = -\frac{v_1(1 + \tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \alpha_k \tilde{c}_2)}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} M_k, \quad N_k = M_k,$$

$$M_k = \frac{(1 + m_1) \left(sh\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) + ch\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) \right)}{(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1) \left(ch\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) - sh\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) \right) \left[(1 + m_2) + (1 + m_1)\alpha_k - \frac{(1 + m_1)(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \alpha_k \tilde{c}_2)}{(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} \right]},$$

$$A_0 = \frac{1}{2(1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left[Y_0(\alpha_k R_1) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k R_1) \right] T_k^{(1)}.$$

Знаходимо власні значення задачі α_k та γ_k (2) – (5) для $n_1 = n_2$ з розв’язку для штампа (7) та других граничних умов (2), (5). Отримуємо рівняння:

$$J_1(\alpha_k R_1) Y_1(\alpha_k R_2) - J_1(\alpha_k R_2) Y_1(\alpha_k R_1) = 0,$$

$$I_1(\gamma_k R_2 v_1) K_1(\gamma_k R_1 v_1) - I_1(\gamma_k R_1 v_1) K_1(\gamma_k R_2 v_1) = 0.$$

З першої умови (2) визначаємо невідому функцію $F(\eta)$ для (6) з потрійних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0 \quad (R_2 < r < \infty)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta = g(r) \quad (R_1 < r < R_2), \tag{8}$$

$$\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0 \quad (0 < r < R_1),$$

де:

$$g(r) = \varepsilon + \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 4 \left[m_1(\alpha_k^2 - h) + (1 + m_2)h \right] A_0 + \alpha_k \left\{ \left[\alpha_k h m_1 - (m_1 - 1)v_1 \right] \left(ch\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) - sh\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) \right) M_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_k m_1 \left(F_k ch\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) - E_k sh\left(\frac{\alpha_k h}{v_1}\right) \right) \right\} \left(Y_0(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k r) \right) \right\} T_k^{(1)}$$

Розв'язок системи (8) отримуємо у такому вигляді:

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle 4 \left[m_1(\alpha_k^2 - h) + (1 + m_2)h \right] A_0 \psi_0(\eta, 0) + \alpha_k \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\alpha_k h m_1 - (m_1 - 1)v_1 \right] \left(ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) M_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_k m_1 \left(F_k ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) \right\} \left(\psi_0(\eta, 0) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} \psi_0(\eta, \mu_k) \right) \right\rangle T_k^{(1)} + \varepsilon \psi_0(\eta, 0) \Bigg\}$$

де $\psi_n(x; y) = \int_0^1 t^n \cos(xt) \cos(yt) dt$.

З другої умови (2) отримуємо:

$$\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = \frac{R_1}{(1 + m_1)l_1(s - s_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[Y_0(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k r) \right] \left(\frac{\alpha_k^3(1 + m_1)l_1}{v_1} \left[F_k ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - E_k sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] + \alpha_k^2(1 + m_2)l_2 M_k \left[sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \right) + 4(1 + m_2)l_2 \tilde{A}_0 \right\} T_k^{(1)}$$

Помножимо рівність (8) на $rJ_0(\mu_n r)dr$ та проінтегруємо її по r :

$$\int_{R_1}^{R_2} r J_0(\mu_n r) dr \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = \frac{R_1}{(1 + m_1)l_1(s - s_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[t_{nk}^{(1)} - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} t_{nk}^{(2)} \right] \left(\frac{\alpha_k^3(1 + m_1)l_1}{v_1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[F_k ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] + \alpha_k^2(1 + m_2)l_2 M_k \left[sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \right) + 4(1 + m_2)l_2 \tilde{A}_0 \right\} T_k^{(1)},$$

де:

$$t_{nk}^{(1)} = \frac{R_1 \alpha_k J_0(\mu_n R_1) Y_1(\alpha_k R_1) - R_1 \mu_n J_1(\mu_n R_1) Y_0(\alpha_k R_1)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2} + \\ + \frac{R_2 \mu_n J_1(\mu_n R_2) Y_0(\alpha_k R_2) - R_2 \alpha_k J_0(\mu_n R_2) Y_1(\alpha_k R_2)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2}, \\ t_{nk}^{(2)} = \frac{R_1 \alpha_k J_0(\mu_n R_1) J_1(\alpha_k R_1) + R_2 \mu_n J_1(\mu_n R_2) J_0(\alpha_k R_2)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2} - \\ - \frac{R_1 \mu_n J_1(\mu_n R_1) J_0(\alpha_k R_1) + R_2 \alpha_k J_0(\mu_n R_2) J_1(\alpha_k R_2)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2}.$$

Врахуємо значення інтеграла:

$$\int_0^\infty \sin \eta \cdot J_0(\eta \rho) d\eta = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1-\rho^2}.$$

Отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot J_0(\mu_m r) dr &= \int_{R_1}^{R_2} r \cdot J_0(\mu_m r) \int_0^\infty \psi_0(0; \eta) J_0(\eta r) d\eta dr = \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m [R_2^{2m+2} \tau_m(R_2) - R_1^{2m+2} \tau_m(R_1)]}{4^m (2m+2)m! \Gamma(m+1)}, \end{aligned}$$

де $\tau_m(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{R_2^{2k} \Gamma(m+2) \Gamma(k+0.5) \Gamma(m+1+k)}{k! \Gamma(m+1) \Gamma(0.5) \Gamma(m+2+k)}$.

Позначимо $T_k^{(1)} = \chi_k$. ($k=0,1,2,\dots$).

Для того щоб знайти невідомі χ_k ($k=0,1,2,\dots$), що входять до (6) – (8), випишемо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\tilde{\alpha}_k \chi_k + \sum_{n=0}^\infty \tilde{\alpha}_{kn} \chi_n = \tilde{\beta}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{9}$$

$$\text{де } \tilde{\alpha}_k = \frac{8}{\pi n_1} [(\alpha_k^2 - h)m_1 + (1 - m_2)h] \tilde{A}_0 \tilde{\omega}_k, \quad \tilde{\beta}_k = \frac{2\varepsilon}{\pi} \tilde{\omega}_k,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{kn} &= \frac{R_1}{(1+m_1)l_1(s-s_0)} \left\{ \left[t_{nk}^{(1)} - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} t_{nk}^{(2)} \right] \left[\frac{\alpha_k^3 (1+m_1) l_1}{v_1} \left[F_k ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \right. \right. \right. \\ &- E_k sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \left. \right] + \alpha_k^2 (1+m_2) l_2 M_k \left[sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \left. \right\} + \frac{4(1+m_2) l_2}{\mu_n} \tilde{A}_0 (R_2 J_1(\mu_n R_2) - \\ &- R_1 J_1(\mu_n R_1)) \left. \right\} - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\alpha_k}{m_1} \left[(\alpha_k h m_1) - (m_1 - 1) v_1 \right] \left[ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] M_k \tilde{\omega}_k - \right. \\ &- m_1 \alpha_k \left. \left[F_k ch \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k sh \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \right\} \left[\tilde{\omega}_k - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} \psi_0(\mu_n, \mu_k) \right] \end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}_k = \frac{(-1)^m [R_2^{2m+2} \tau_m(R_2) - R_1^{2m+2} \tau_m(R_1)]}{4^m (2m+2)m! \Gamma(m+1)}.$$

Відзначимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу, радіусів кільцевого штампа та висоти пружного штампа.

З умови рівноваги (5) встановлюємо зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження P у вигляді:

$$P = -4\pi l_2 C_{44} (R_2^2 - R_1^2) \chi_0 (1 + m_2) \tilde{A}_0.$$

Із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9) знаходимо невідомі сталі χ_k ($k=0,1,2,\dots$). Вони входять у формули (6) та (7) обчислення компонентів переміщень та напружень як у пружних півпросторах, так і у пружному штампі. Розв'язки представлені у вигляді рядів через нескінченну систему констант χ_k ($k=0,1,2,\dots$).

Числові результати

В роботі проведений числовий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9) методом редукції (утинання) та побудовано графік (рис. 2) у разі гармонічного потенціалу за таких значень параметрів: $R_1 = 1, R_2 = 2, H = 10, \varepsilon = 10^{-3}, E^{(i)} = 5 \cdot 10^{-2}$ ГПа (гума) ($i=1,2,3$), $\lambda_1 = 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$.

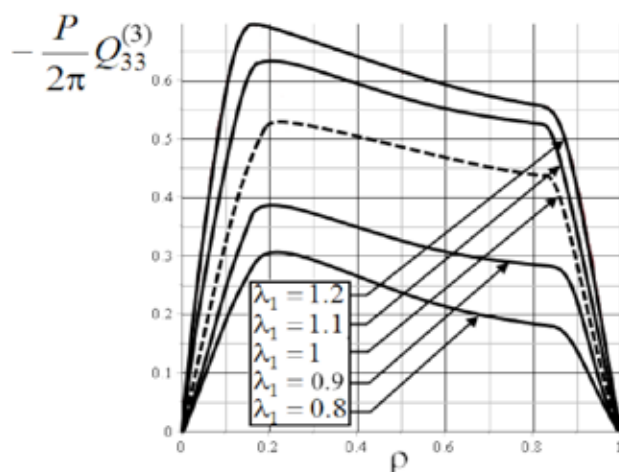


Рис. 2. Нормальні контактні напруження у кільцевому циліндричному штампі

Нормальні контактні напруження у кільцевому циліндрі представлені на рис. 2, у безрозмірних координатах за $\rho = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}, 0 \leq \rho \leq 1$. Тут $\rho=0$ при $r=R_1$, а $\rho=1$ при $r=R_2$.

З рис. 2 видно, що контактні напруження у штампі набувають своїх найбільших значень за абсолютної величини ближче до внутрішніх твірних кільцевого циліндра, ніж до зовнішніх. Причому під час розтягу контактні напруження більші, ніж за стиску.

Висновки

У статті представлено аналітичні розв'язки та числовий розв'язок актуальної контактної задачі в рамках лінеаризованої теорії пружності для сучасного машинобудування та будівництва споруд, машин та інженерних конструкцій, а саме задачу про тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний кільцевий циліндричний штамп з початковими напруженнями без урахування сил тертя. Розв'язки цієї задачі подані у вигляді рядів через нескінченну систему сталих величин χ_k ($k=0,1,2,\dots$), які визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9) методом утинання.

Отже, розв'язок цієї задачі дає змогу розширити коло наукових досліджень у межах механіки деформованого твердого тіла.

Список використаної літератури

1. Guz A.N., Rudnitsky V.B. Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses: монографія. Хмельницький: ПП Мельник, 2006. 710 с.
2. Guz A.N. Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. Cham: Springer, 2021. 366 p.
3. Hutchinson J.W., Thompson J. M. T. Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces. *Journal of Applied Mechanics*. 2017. Vol. 84. No. 6. 061001. DOI: 10.1115/1.4036355.
4. Kappus R. Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen. *ZAMM*. 1939. Vol. 19. No. 5. P. 271–315.
5. Biot M.A. Mechanics of incremental deformations. New York: John Wiley and Sons, 1965. 387 p.
6. Kurashige M. Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid. *ZAMM*. 1969. Vol. 49. No. 8. P. 671–678.
7. Dhaliwal R.S., Singh B.M., Rokne J.G. Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed Neo-Hookean elastic layer. *Int. J. Eng. Sci.* 1980. Vol. 18. No. 1. P. 169–179.
8. Yarets'ka N. Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses. *Advances in Mechanics – Current Research Results of the NAS of Ukraine*. Springer. Germany, 2023. № 29. P. 517–546. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_29.
9. Бобик О.І., Бобик І.О., Литвин В.В. Рівняння математичної фізики: навчальний посібник. Львів: Новий світ-2000, 2010. 256 с.
10. Габрусєва І.Ю., Шелестовський Б.Г. Контактна взаємодія кільцевого штампа з попередньо напруженим ізотропним шаром. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2011. № 54 (3). С. 138–146.

References

1. Guz, A.N., & Rudnitsky, V.B. (2006). Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytskyi: vyd. PP Melnyk. [in English]
2. Guz, A.N. (2021). Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. Cham: Springer. [in English]
3. Hutchinson, J.W., & Thompson, J.M.T. (2017). Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces. *Journal of Applied Mechanics*, 84 (6), 061001. doi:10.1115/1.4036355. [in English]
4. Kappus, R. (1939). Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen. *ZAMM*, 19 (5), 271–315. [in German]
5. Biot, M.A. (1965). Mechanics of incremental deformations. New York: John Wiley and Sons. [in English]
6. Kurashige, M. (1969). Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid. *ZAMM*, 49 (8), 671–678. [in English]
7. Dhaliwal, R.S., Singh, B.M., & Rokne, J.G. (1980). Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed Neo-Hookean elastic layer. *Int. J. Eng. Sci.* 18(1), 169–179. [in English]
8. Yarets'ka, N. (2023). Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses. In: *Guz, A.N., Altenbach, H., Bogdanov, V., Nazarenko, V.M. (eds) Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials* (pp. 517–546). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_29. [in English]
9. Bobyk, O.I., Bobyk, I.O., & Lytvyn, V.V. (2010). *Rivniannia matematychnoi fizyky*. [Equations of mathematical physics]. Lviv: Novyi svit-2000. [in Ukrainian]
10. Habrusieva, I.Yu., & Shelestovskiy, B.H. (2011). Kontaktna vzaiemodiia kiltsevoho shtampa z poperedno napruzhenym izotropnym sharom. [Contact interaction of a ring die with a prestressed isotropic layer]. *Visnyk Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia*, 3, 138–146. [in Ukrainian]

Ярецька Наталія Олександрівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри загальнонаукових та інженерних дисциплін Національної академії Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького; доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету. E-mail: massacran2@ukr.net, yaretskano@khnmu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-3726-2878.

Рамський Андрій Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету. E-mail: ramsky@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9624-5018.

Мороз Володимир Вікторович – старший викладач кафедри соціально-гуманітарної підготовки Хмельницького кооперативного торговельно-економічного інституту. E-mail: morozvv2008@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4511-1084.

Yarets'ka Natalia Oleksandrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ph.D., Associate Professor of the Department of General Scientific and Engineering Disciplines of the Bohdan Khmelnytskyi National Academy of the State Border Guard Service of Ukraine; Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Computer Applications of the Khmelnytskyi National University. E-mail: massacran2@ukr.net, yaretskano@khnmu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Ramsky Andrii Oleksandrovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor and Head of Department of Higher Mathematics and Computer Applications of the Khmelnytskyi National University. E-mail: ramsky@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9624-5018.

Moroz Volodymyr Viktorovych – Senior Lecturer of the Department of Social and Humanitarian Training of Khmelnytskyi Cooperative Trade and Economic Institute. E-mail: morozvv2008@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4511-1084.