УДК 517.9

В.П. ЛЯШЕНКО, О.Б. КОБИЛЬСЬКА
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
О.П. ДЕМ'ЯНЧЕНКО
Національний університет «Львівська політехніка»

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В РОЗВ'ЯЗАННІ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

У роботі розглядається математична модель температурного поля ізотропної сферичної області (кулі), що обертається навколо однієї з осей симетрії з постійною швидкістю, як початково-крайова задача для рівняння параболічного типу з нелінійними крайовими умовами. Метою дослідження є застосування інтегрального рівняння до розв'язку нелінійної початково-крайової задачі у сферичній області та визначення умови термодинамічної рівноваги за необмеженого числа обертів кулі. Такий розв'язок дозволяє отримати розподіл температури як на поверхні кулі так і всередині, а також умову її термодинамічної рівноваги. Розглядається періодична нелінійна початково-крайова задача за однією із просторових координат, яка зводиться до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння. Отримане інтегральне рівняння за допомогою другої формули Гріна зводиться до рівняння типу Фредгольма за просторовою координатою і типу Вольтерри за часом. Ядро інтегрального рівняння знайдене у вигляді функції Гріна. Функція Гріна побудована з використанням властивостей оператора Лапласа у сферичній системі координат, а також функцій Лежандра та Бесселя напівцілого порядку. Лінійну частину функції розв'язку задачі як усередині кулі, так і на її поверхні було знайдено з використанням властивостей гамма-функції. Для визначення умов термодинамічної рівноваги кулі за необмеженої кількості її обертів навколо своєї осі було застосовано граничний перехід, у результаті чого визначені умови термодинамічної рівноваги. Розв'язок нелінійної частини задачі для визначення періодичного квазістаціонарного температурного поля було отримано за допомогою розв'язку відповідного їй нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна. Також було доведено, що розв'язок вихідної задачі, періодичної як за часом, так і за просторовою координатою, не залежить від початкової умови. Ця умова не впливає на квазістаціонарне температурне поле кулі за необмеженого числа її обертів.

Ключові слова: *куля, початково-крайова задача, рівняння параболічного типу, термодинамічна рівновага, інтегральні рівняння, функції Гріна, Лежандра, Бесселя, Вольтерри, інтегральне рівняння типу Гаммерштейна.*

V.P. LYASHENKO, O.B. KOBILSKA
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University
O.P. DEMYANCHENKO
Lviv Polytechnic National University

APPLICATION OF THE INTEGRAL EQUATION IN THE SOLUTION OF ONE NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM

This paper considers a mathematical model of the temperature field of an isotropic spherical area, rotating around one of the symmetry axes at a constant speed in the form of an initial-boundary-value problem for a parabolic-type equation with nonlinear boundary conditions. The purpose of the work is to apply the method of integral equations to the solution of a nonlinear boundary value problem in the spherical domain, to determine the conditions of thermodynamic equilibrium. A periodic problem is considered in one of the spatial coordinates, which is reduced to solving a nonlinear integral equation. The obtained integral equation is reduced to a Fredholm-type equation along the spatial coordinate using the second Green's formula, and to a Volterra-type equation along the time coordinate. The kernel of the integral equation is found in the form of a Green's function. The Green's function is constructed using the properties of the Laplace operator in a spherical coordinate system, as well as the Legendre and Bessel functions of half-integer order. The linear part of the solution function of the problem both inside the sphere and on its surface was found using the properties of the Gamma function. To determine the conditions of thermodynamic equilibrium of a sphere with an unlimited number of its rotations around its axis, a limit transition was applied, as a result of which the conditions of thermodynamic equilibrium were determined. The solution of the nonlinear part of the problem for determining the periodic quasi-stationary temperature field was obtained by solving the corresponding nonlinear integral equation of the Hammerstein type. It was also proved that the solution of the original problem, periodic both in time and in the spatial coordinate, does not depend on the initial condition. This condition does not affect the quasi-stationary temperature field of the sphere with an unlimited number of its rotations.

Key words: *spherical area, nonlinear initial-boundary value problem, thermodynamic equilibrium, Green's function, Hammerstein-type integral equation.*

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

Постановка проблеми

Розв'язуванню задач теплообміну присвячені численні публікації. Основні методи дослідження температурного поля ізотропного або анізотропного сферичного тіла (кулі), що обертається навколо своє осі зі сталою швидкістю, за допомогою математичних моделей умовно поділяються на два види: а) прямі, або класичні, які базуються на аналітичних методах розв'язання крайових задач для рівнянь із частинними похідними параболічного типу [1; 2] або зведенні нелінійних початково-крайових задач до розв'язання інтегральних рівнянь [3]; б) наближені чисельно-аналітичні методи [4; 5].

Дослідження розподілу температур усередині або на поверхні кулі зазвичай пов'язано із проведенням натурних експериментів. Але коли натурні експерименти провести неможливо, то в такому разі інформацію про температурне поле отримують за допомогою математичних моделей, які будують як лінійні або нелінійні початково-крайові задачі для рівняння теплопровідності [6; 7]. Однією із таких задач є задача моделювання температурного поля $U = U(r, \theta, \varphi, t)$ ізотропної кулі радіусом $0 \le r \le R$, що обертається з кутовою швидкістю $\omega = const$, коли напрямок теплового потоку інтенсивності $q = const$ перпендикулярний до осі обертання і на різних частинах поверхні різні умови теплообміну з навколишнім середовищем [8]. У такому разі одним з ефективних методів розв'язання крайових задач у сферичній області є метод інтегральних рівнянь, що базується на зведенні крайової задачі до лінійного або нелінійного інтегрального рівняння [3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Більшість задач для рівняння теплопровідності, що розглядаються в науковій літературі, лінійні, містять постійні умови теплообміну поверхні тіла із середовищем, що його оточує [3]. У роботі [19] розглянуто нестаціонарні задачі, у яких досліджується температурний розподіл уздовж радіуса. У роботі [10] для розв'язку нелінійних задач теплопровідності в довільній областях запропоновано метод лінеаризації нелінійних крайових задач у лінійні, які можна розв'язати за допомогою класичних методів [3]. У роботі [11] розглянуто математичну модель температурного поля сфери, що обертається навколо своєї осі в пористому середовищі. Аналітичний розв'язок отримано у вигляді степеневих рядів. Задачі, що моделюють різні умови теплообміну поверхні кулі, що обертається навколо своєї осі, з навколишнім середовищем, у вітчизняній і закордонній науковій літературі досліджені мало.

Мета дослідження

Метою дослідження є застосування інтегрального рівняння до розв'язку нелінійної початково-крайової задачі у сферичній області та визначення умови термодинамічної рівноваги за необмеженого числа обертів кулі.

Викладосновного матеріалу дослідження

Розглянемо нелінійну початково-крайову задачу для рівняння параболічного типу з нелінійними граничними умовами:

$$
\begin{aligned}
&\Delta U - \frac{1}{a^2} U_t = 0, \qquad 0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad t > 0 \\
&U(r, \theta, \varphi, t) = U_0 = const, \qquad 0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi \\
&\left.\frac{\partial U}{\partial r} + h_2 U\right|_{r=R} = \begin{cases} h_2 U_c + \dfrac{q}{\lambda} \sin\theta \sin\varphi, & 0 < \theta < \pi,\ \omega t < \varphi < \omega t + \pi \\ (h_2 - h_1) U + h_1 U_c + \kappa\left(U_c^4 - U^4\right), & 0 < \theta < \pi,\ \omega t + \pi < \varphi < \omega t + 2\pi \end{cases}, \qquad (1) \\
&U(r, \theta, \varphi, t) = U(r, \theta, \varphi + 2\pi, t)
\end{aligned}
$$

де $\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа у сферичній системі координат; $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$, $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$, $\kappa = \frac{\xi\sigma}{\lambda}$, λ – коефіцієнт теплопровідності, c – теплоємність, ρ – щільність,

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

α_i – коефіцієнт теплообміну, σ – стала Стефана – Больцмана, ξ – ступінь чорноти поверхні кулі, U_c – температура охолоджувального середовища, R – радіус кулі. Зазначимо, що коефіцієнти оператора крайових умов задачі, що розглядається, є кусково-сталими функціями точок контактуючої та вільної частини поверхні кулі, уважаємо, що прецесія відсутня, тому в (1) покладемо $\sin\varphi = 1$.

Скориставшись другою формулою Гріна та знайшовши функцію Гріна як розв'язок спряженої задачі до задачі (1), шукаємо її розв'язок у вигляді еквівалентного інтегрального рівняння типу Фредгольма за кутовими координатами $0 < \varphi < 2\pi$ і $0 < \theta < \pi$ та типу Вольтерри за часом для $t > 0$ [2; 4; 6; 7]. Розв'язок задачі (1) має вигляд:

$$U(\rho;\zeta;\psi;\tau) = U_L(\rho;\zeta;\psi;\tau) -$$

$$-\int_0^{\tau}\int_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi} G(R,\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)\left[(h_1-h_2)W+\kappa W^4\right]R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt, \tag{2}$$

$$U_L(\rho,\zeta,\psi,\tau) = \frac{U_0}{a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} G(r,\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;0-\tau)r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi +$$

$$+\int_0^{\tau}\int_{\omega t}^{\omega t+\pi}\int_0^{\pi} G(R,\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)\left(h_2U_c+\frac{q}{\lambda}\sin\theta\right)R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt +$$

$$+\left(h_1U_c+\kappa U_c^4\right)\int_0^{\tau}\int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi} G(R,\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt.$$

Функція Гріна $G(r,\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)$ як розв'язок спряженої задачі до задачі (1) отримана з розв'язку рівняння Лежандра [2], отримано як ряд [6; 8]:

$$G = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\cos j(\varphi-\psi)\,\bar{g}_j(r,\theta,t),$$

де $\bar{g}_j(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{nj}(\cos\theta)\, g_{nj}(r,t)$.

Розподіл температури на поверхні кулі має вигляд:

$$W(\zeta,\psi,\tau) = W_L(\xi;\psi;\tau) - \int_0^{\tau}\int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi} G(\theta-\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)\Phi\left[W(\theta,\varphi,t)\right]\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt, \tag{3}$$

де $W = W(\theta,\varphi,t) = U(R,\theta,\varphi,t)$ – температура на поверхні кулі, $\Phi\left[W(\theta,\varphi,t)\right] = \left(h_1-h_2+\kappa W^3\right)W$,

$$U_L(\rho,\zeta,\psi,\tau) = 2U_0R\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\mu_{0m}}{R}\right)e^{-a^2\left(\frac{\mu_{0m}}{R}\right)^2\tau}\sqrt{1+\mu_{0m}^2}\,\sin(\mu_{0m}-\beta_{0m})}{\rho\left(\mu_{0m}^2+(h_2R-1)h_2R\right)\sin^2\mu_{0m}} +$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

$$U_L\left(\rho,\zeta,\psi,\tau\right)=2U_0R\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\mu_{0m}}{R}\right)e^{-a^2\left(\frac{\mu_{0m}}{R}\right)^2\tau}\sqrt{1+\mu_{0m}^2}\sin\left(\mu_{0m}-\beta_{0m}\right)}{\rho\left(\mu_{0m}^2+\left(h_2R-1\right)h_2R\right)\sin^2\mu_{0m}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\frac{a^2q}{2\pi\sqrt{R}\lambda}J_{2k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{2k\,m}}{R}\rho\right)P_{2k}\left(\cos\zeta\right)\left[-\sin\left(\omega\tau+\beta_{2k\,m}\right)+\sin\beta_{2k\,m}e^{-a\left(\frac{\mu_{2k\,m}}{R}\right)^2\tau}\right]\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{k!}\right]^2}{\frac{\sqrt{\rho}}{4k+1}\left(1+\frac{\left(h_2R-2k-1\right)\left(h_2R+2k\right)}{\mu_{2k\,m}^2}\right)J_{2k+\frac{1}{2}}\left(\mu_{2k\,m}\right)\sqrt{\omega^2+\left(a_2\left(\frac{\mu_{2k\,m}}{R}\right)^2\right)^2}\left(k+1\right)\left(2k-1\right)}+$$

$$+\left(h_1U_c+h_2U_c+\kappa U_c^4\right)R^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\mu_{0m}}{R}\rho\right)\left(1-e^{-a^2\left(\frac{\mu_{0m}}{R}\right)^2\tau}\right)}{\rho\left(\mu_{0m}^2+\left(h_2R-1\right)h_2R\right)\sin\mu_{0m}}+ \tag{4}$$

$$+\frac{a^2}{\pi\sqrt{R}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{2k+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{2k+1\,m}}{R}\rho\right)P_{2k+1\,1}\left(\cos\zeta\right)}{\frac{\sqrt{\rho}}{4k+3}\left(2k+1\right)\left(2k+2\right)\left(1+\frac{\left(h_2R-2k-2\right)\left(h_2R+2k+1\right)}{\mu_{2k+1\,m}^2}\right)J_{2k+\frac{3}{2}}\left(\mu_{2k+1\,m}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{4\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}{k!\left(k+1\right)!\sqrt{\omega^2+\left(a^2\left(\frac{\mu_{2k+1\,m}}{R}\right)^2\right)^2}}\left[-\cos\left(\omega\tau-\psi+\beta'_{2k+1\,m}\right)+e^{-a^2\left(\frac{\mu_{2k+1\,m}}{R}\right)^2\tau}\cos\left(\psi+\beta'_{2k+1\,m}\right)\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(h_1U_c-h_2U_c+\kappa U_c^4\right)+\frac{2q\pi\sin\psi}{3\lambda\,a^2\left(\frac{\mu_{1\,m}}{R}\right)^2}\left(1-e^{-a^2\left(\frac{\mu_{1\,m}}{R}\right)^2\tau}\right)\right\}+$$

$$+\frac{qa^2}{\lambda\pi\sqrt{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\rho\right)P_{n\,2k+2}\left(\cos\zeta\right)A_{n\,2k+2}}{\frac{\sqrt{\rho}}{2n+1}\cdot\frac{\left(n+2k+2\right)!}{\left(n-2k-2\right)!}\left(1+\frac{\left(h_2R-n-1\right)\left(h_2R+n\right)}{\mu_{nm}^2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{nm}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\frac{1}{2k+3}\left(\sin\left[\left(2k+3\right)\omega\tau-\left(2k+2\right)\psi+\beta''_{nm}\right]+e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\tau}\sin\left[\left(2k+2\right)\psi+\beta''_{nm}\right]\right)}{\sqrt{\left(2k+3\right)^2\omega^2+\left(a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\right)^2}}+\right.$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

$$+\frac{\frac{1}{2k+1}\left(\sin\left[(2k+1)\omega\tau-(2k+2)\psi+\beta'_{nm}\right]+e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\tau}\sin\left[(2k+2)\psi+\beta'_{nm}\right]\right)}{\sqrt{(2k+1)^2\omega^2+\left(a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\right)^2}}\Bigg\}+$$

$$+\frac{a_2}{\pi\sqrt{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\rho\right)P_{n\,2k+3}(\cos\zeta)A_{n\,2k+3}}{\frac{\sqrt{\rho}}{2n+1}\cdot\frac{(n+2k+3)!}{(n-2k-3)!}\left(1+\frac{(h_2R-n-1)(h_2R+n)}{\mu_{nm}^2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nm})}\times$$

$$\times\frac{\frac{2}{2k+3}\left(e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\tau}\cos\left[(2k+3)\psi+\beta'_{nm}\right]-\cos\left[(2k+3)(\omega\tau-\psi)+\beta'_{nm}\right]\right)}{\sqrt{(2k+3)^2\omega^2+\left(a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\right)^2}}\left(h_1U_c-h_2U_c+\kappa U_c^4\right),$$

де: $A_{n\,2k+2}=\int_0^{\pi}P_{n\,2k+2}(\cos\theta)\sin^2\theta\,d\theta,\qquad A_{n\,2k+3}=\int_0^{\pi}P_{n\,2k+3}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$ [6],

$\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)$ – гама-функції, $\mu_{n1},\mu_{n2},...,$ – додатні корені трансцендентного рівняння:

$$kR\,J'_{n+\frac{1}{2}}(kR)+\left(h_2R-\frac{1}{2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(kR)=0,$$

$$\beta_{0m}=arctg\mu_{0m},\ \beta_{nm}=arctg\frac{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2}{\omega},\quad \beta'_{nm}=arctg\frac{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2}{(2k+1)\omega},\quad \beta''_{nm}=arctg\frac{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2}{(2k+3)\omega},$$

$J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}r\right)$, $J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\rho\right)$, $J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nm})$ – функції Бесселя напівцілого порядку,

$P_{nj}(\cos\theta)$, $P_{nj}(\cos\zeta)$ – приєднані функції Лежандра.

Функція Гріна $G(r,\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)$ є розв'язком наступної задачі, спряженої до задачі (1):

$$\begin{aligned}&\Delta_{r,\theta,\varphi}G+\frac{1}{a^2}G_t=-\delta(r-\rho)\delta(\theta-\xi)\delta(\varphi-\psi)\delta(t-\tau),\\&0<r,\rho<R,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi,\quad t,\tau>0\\&G=0,\qquad t>\tau;\ G<\infty,\ r=0\\&G_r+h_2G=0,\qquad r=R,\qquad G\big|_{\varphi+2\pi}=G\big|_{\varphi}\end{aligned}\tag{5}$$

де: $\delta(r-\rho)$, $\delta(\theta-\varsigma)$, $\delta(\varphi-\psi)$ – дельта-функції Дірака у сферичній системі координат.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

$$G(r,\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)=$$

$$=\eta(\tau-t)\frac{a^2}{\pi R^2}\sum_{j=0}^{\infty}{}'\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}r\right)\ J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\rho\right)P_{nj}(\cos\theta)\,P_{nj}(\cos\zeta)\cos j(\varphi-\psi)}{\frac{\sqrt{r\rho}}{2n+1}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}\left(1+\frac{(h_2R-n-1)(h_2R+n)}{\mu_{nm}^2}\right)J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nm})}\,e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}. \qquad (6)$$

Знак «$'$» означає зменшення вдвічі всіх членів ряду за $j=0$.

Розглянемо температурне поле кулі під час періодичного довготривалого процесу обертання кулі навколо осі з періодом $T=\frac{2\pi}{\omega}$ розігріву й охолодження в інтервалі часу $(N+q+1)T$ -го обороту: $(N+q)T\le\tau\le(N+q+1)T$:

$$U_L(\rho,\theta,\varphi)=\lim_{\tau\to\infty}U_L(\rho,\theta,\psi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\mu_{0m}}{R}\rho\right)\left(h_1U_c+h_2U_c+\kappa U_c^4\right)R^2}{\rho\left(\mu_{nm}^2+(h_2R-1)h_1R\right)\sin\mu_{nm}}+$$

$$+\frac{a^2q}{2\pi\sqrt{R}\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{2i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{2i\ m}}{R}\rho\right)P_{2i}(\cos\zeta)\sin\left(\omega\tau+\beta_{2i\ m}\right)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right)}{i!}\right]^2}{\frac{\sqrt{\rho}}{4i+1}\left(1+\frac{(h_2R-2i-1)(h_2R+2i)}{\mu_{2k\ m}^2}\right)J_{2i+\frac{1}{2}}(\mu_{2i\ m})(1+i)(1-2i)}+$$

$$+\frac{a^2}{\pi\sqrt{R}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{2i+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{2i+1\ m}}{R}\rho\right)P_{2i+1\ 1}(\cos\zeta)}{\frac{\sqrt{\rho}}{4i+3}(i+1)(2i+1)\left(1+\frac{(h_2R-2i-1)(h_2R+2i+1)}{\mu_{2k\ m}^2}\right)J_{2i+\frac{3}{2}}(\mu_{2i+1\ m})}\times$$

$$\times\left[\frac{q\pi\sin\psi}{3\lambda a^2\left(\frac{\mu_{1m}}{R}\right)^2}-\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\right)\cos\left(\omega\tau-\psi+\beta'_{2i+1\ m}\right)}{k!\,(i+1)!\sqrt{\omega^2+\left(a^2\left(\frac{\mu_{2i+1\ m}}{R}\right)^2\right)^2}}\left(h_1-h_2+\kappa U_c^3\right)U_c\right]+$$

$$+\frac{q\,a^2}{\lambda\pi\sqrt{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{2i+\frac{5}{2}}\left(\frac{\mu_{2i+2\ m}}{R}\rho\right)P_{2i+2\ 2k+2}(\cos\zeta)\,A_{2i+2\ 2k+2}}{\frac{\sqrt{\rho}}{4i+5}\cdot\frac{(2i+2k+4)!}{(2i-2k)!}\left(1+\frac{(h_2R-2i-3)(h_2R+2i+2)}{\mu_{2i+2\ m}^2}\right)J_{2i+\frac{5}{2}}(\mu_{2i+2\ m})}\times \qquad (7)$$

$$\times\left[\frac{\frac{1}{2k+3}\sin\left[(2k+3)\omega\tau-(2k+2)\psi+\beta''_{2i+2m}\right]}{\sqrt{(2k+3)^2\omega^2+\left(a^2\left(\frac{\mu_{2i+2\ m}}{R}\right)^2\right)^2}}+\frac{\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\omega\tau-(2k+2)\psi+\beta''_{2i+2m}\right]}{\sqrt{(2k+1)^2\omega^2+\left(a^2\left(\frac{\mu_{2i+2\ m}}{R}\right)^2\right)^2}}\right]-$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

$$-\left(h_1-h_2+\kappa U_c^3\right)U_c\,\frac{a^2}{\pi\sqrt{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{2i+\frac{7}{2}}\left(\frac{\mu_{2i+3\ m}}{R}\rho\right)P_{2i+3\ 2k+3}\left(\cos\zeta\right)\ A_{2i+3\ 2k+3}}{\frac{\sqrt{\rho}}{4i+7}\cdot\frac{(2i+2k+6)!}{(2i-2k)!}\left(1+\frac{(h_2R-2i-4)(h_2R+2i+3)}{\mu_{2i+3\ m}^2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\frac{2}{2k+3}\cos\left[(2k+3)(\omega\tau-\psi)+\beta'_{2i+3m}\right]}{J_{2i+\frac{7}{2}}\left(\mu_{2i+3\ m}\right)\sqrt{(2k+3)^2\,\omega^2+\left(a^2\left(\frac{\mu_{2i+3\ m}}{R}\right)^2\right)^2}},$$

оскільки $\lim\limits_{\tau\to\infty}e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\tau}=0$, то за $N>>1$ $(\tau\to\infty)$ вплив початкової температури зникає:

Тут
$$A_{2i+2\ 2k+2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k+2}}\cdot\frac{\Gamma(2i+2k+5)\,\Gamma\left(2k+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2i-2k+1)\,\Gamma(2k+3)\,\Gamma(k+2)}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(i+k+\frac{5}{2}+l\right)\,\Gamma(k-i+l)\,\Gamma\left(k+\frac{5}{2}+l\right)\,\Gamma(2k+3)\,\Gamma(k+3)}{\Gamma\left(i+k+\frac{5}{2}\right)\,\Gamma(k-i)\,\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)\,\Gamma(2k+3+l)\,\Gamma(k+3+l)\,l!},$$

$$A_{2i+3\ 2k+3}=-\frac{\pi}{2^{2k+3}}\,\frac{\Gamma(2i+2k+7)}{\Gamma(k+2)\,\Gamma(k+3)\,\Gamma(2i-2k+1)}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(i+k+\frac{7}{2}+l\right)}{\Gamma\left(i+k+\frac{7}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma(k-i+l)}{\Gamma(k-i)}\cdot\frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}+l\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma(2k+4)}{\Gamma(2k+4+l)}\cdot\frac{\Gamma(k+3)}{\Gamma(k+3+l)}\cdot\frac{1}{l!}.$$

Припустимо, що за деякого $N>>1$ встановлюється періодичний стан, коли $U(\rho,\zeta,\psi,\tau)=U(\rho,\zeta,\psi,\tau')$, де

$$\tau=(N+q)T+\tau',\qquad 0\le\tau'\le T\quad. \tag{8}$$

За $\tau\to\infty$ лінійна частина (4) рівняння (2) перетворюється на (7), а лінійною частиною рівняння (3) за $\tau\to\infty$ буде:

$$W_L(\zeta,\ \psi,\tau)=R\left(h_1+h_2+\kappa U_c^3\right)U_c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{0m}^2+(h_2R-1)h_2R}+$$

$$+\frac{a^2q}{2\pi R\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{P_{2i}\left(\cos\zeta\right)\sin\left(\omega\tau+\beta_{2i\ m}\right)(4i+1)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right)}{i!}\right]^2}{\left(1+\frac{(h_2R-2i-1)(h_2R+2i)}{\mu_{2i\ m}^2}\right)(1+i)(1-2i)}+$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

$$+\frac{a^2}{\pi R}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(4i+3)\,P_{2i+1\;1}(\cos\zeta)}{(i+1)(2i+1)\left(1+\dfrac{(h_2R-2i-2)(h_2R+2i+1)}{\mu_{2i+1\;m}^2}\right)}\times \tag{9}$$

$$\times\left[\frac{q\pi\sin\psi}{3\lambda a^2\left(\dfrac{\mu_{1\;m}}{R}\right)^2}+\frac{2\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+i\right)\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+i\right)\cos\left(\omega\tau-\psi+\beta'_{2i+1\;m}\right)}{i!(i+1)!\sqrt{\omega^2+\left(a^2\left(\dfrac{\mu_{2i+1\;m}}{R}\right)^2\right)^2}}\left(h_2-h_1-\kappa U_c^3\right)U_c\right]+$$

$$+\frac{qa^2}{\lambda\pi R}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(4i+5)(2i-2k)!\;P_{2i+2\;2k+2}(\cos\zeta)\;A_{2i+2}}{(2i+2k+4)!\left(1+\dfrac{(h_2R-2i-3)(h_2R+2i+2)}{\mu_{2i+2\;m}^2}\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{\dfrac{1}{2k+3}\sin\left[(2k+3)\omega\tau-(2k+2)\psi+\beta''_{2i+2m}\right]}{\sqrt{(2k+3)^2\omega^2+\left(a^2\left(\dfrac{\mu_{2i+2\;m}}{R}\right)^2\right)^2}}+\frac{\dfrac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\omega\tau-\left(2k+2\psi+\beta''_{2i+2m}\right)\right]}{\sqrt{(2k+1)^2\omega^2+\left(a^2\left(\dfrac{\mu_{2i+2\;m}}{R}\right)^2\right)^2}}\right]+$$

$$+\left(h_2-h_1-\kappa U_c^3\right)U_c\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(4i+7)(2i-2k)!\,P_{2i+3\;2k+3}(\cos\zeta)\;A_{2i+3\;2k+3}\cos\left[(2k+3)\omega\tau+\beta'_{2i+3\;m}\right]}{(2k+3)(2i+2k+6)!\left(1+\dfrac{(h_2R-2i-4)(h_2R+2i+3)}{\mu_{2i+3\;m}^2}\right)}\;.$$

Обчислимо нелінійні частини. Розглянемо інтеграл:

$$\int_0^{\tau}\int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi}G(R,\rho;\theta,\zeta;\varphi,\psi;t-\tau)\left[(h_1-h_2)W+\kappa W^4\right]R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{\pi\sqrt{R}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\mu_{nm}}{R}\rho\right)P_{nj}(\cos\zeta)\displaystyle\int_0^{\pi}P_{nj}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}{\dfrac{\sqrt{\rho}}{2n+1}\dfrac{(n+j)!}{(n-j)!}\left(1+\dfrac{(h_2R-n-1)(h_2R+n)}{\mu_{nm}^2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nm})}\times$$

$$\times\int_0^{\tau}e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}\left(\int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi}\cos j(\varphi-\psi)\left[(h_1-h_2)W+\kappa W^4\right]d\varphi\right)dt\,.$$

Зауважимо, що за $n+j$ непарного $\int_0^{\pi}P_{nj}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=0.$

Позначимо $F(t)=\int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi}\cos j(\varphi-\psi)\left[(h_1-h_2)W+\kappa W^4\right]d\varphi$ і розглянемо інтеграл за $\tau=(N+q)T+\tau'$, коли $n\to\infty$. Тоді

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

$$\int_0^{\tau} F(t)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}dt = \int_0^{NT} + \int_{NT}^{(N+q)T} + \int_{(N+q)T}^{(N+q)T+\tau'} F(t)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}dt.$$

Розглянемо кожний із доданків почергово:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{NT} F(t)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^{NT} F(t)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-(N-t)T-\tau')}dt = \lim_{N\to\infty} e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(N+q)T}\int_0^{NT} F(t)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau')}dt = 0$$

за $q \sim N \to \infty$.

Розглянемо інтеграл у припущенні, що $W(\zeta,\psi,\tau)$ – періодична функція за змінною τ із періодом T.

$$\int_{NT}^{(N+q)T} F(t)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}dt = \int_{NT}^{(N+q)T} F(t)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-(N+q)T-\tau')}dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{q}\int_{(N+i-1)T}^{(N+i)T} F(t)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-(N+q)T-\tau')}dt = \left\{\begin{matrix} t=(N+i-1)T,\ t'=t-(N+i)T+t,\ dt=dt' \\ при\ \ t=(N+i-1)T \Rightarrow t'=0,\ при\ t=(N+i)T \Rightarrow t'=T \end{matrix}\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{q}\int_0^T F\left((N+i-1)T+t'\right)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2((N+i-1)T+t'-(N+q)T-\tau')}dt' =$$

$$= \sum_{i=1}^{q}\int_0^T F(t')e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau'-T)}dt' \cdot e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(i-q)T} = \int_0^T F(t')e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t'-\tau'-T)}dt \sum_{i=1}^{q} e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(i-q)T} =$$

$$= \int_0^T F(t')e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t'-\tau'-T)}dt' \times \frac{1}{1-e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}} = \int_0^T F(t')e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t'-\tau')}\frac{e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}}{1-e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}}dt' =$$

$$= \frac{1}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1}\int_0^T F(t')e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t'-\tau')}dt' =$$

$$= \frac{1}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1}\int_0^{\tau'} F(t')e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t'-\tau')}dt' + \frac{1}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}}\int_{\tau'}^{T} F(t')e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t'-\tau')}dt.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{q} e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(i-q)T} = \frac{1}{1-e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}}$ – нескінченно-спадна геометрична прогресія, $q \sim N \to \infty$, то інтеграл:

$$\int_{(N+q)T}^{(N+q)T+\tau'} F(t)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-(N+q)T-\tau')}dt = \left\{\begin{matrix} t=(N+q)T+t',\ t'=t-(N+q)T,\ \ dt=dt' \\ при\ t=(N+q)T\ \ t'=0,\ при\ \ t=(N+q)T+\tau'\ t'=\tau' \end{matrix}\right\} =$$

$$\int_0^{\tau'} F\left((N+q)T+t'\right)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t'+(N+q)T-(N+q)T-\tau')}dt' = \int_0^{\tau'} F(t')e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t'-\tau')}dt'.$$

Після такого граничного переходу рівняння (2) та (3) перетворюються на нелінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна та відповідну квадратуру для визначення періодичного квазістаціонарного температурного поля:

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

$U(\rho,\zeta,\psi,\tau') =$

$$= U_L(\rho,\zeta,\psi,\tau) - \frac{a^2}{\pi\sqrt{R}} \int_0^T \int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{j=0}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\rho\right) P_{nj}(\cos\theta)\cos j(\varphi-\psi)\, \Phi(W)}{\frac{\sqrt{\rho}}{2n+1}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}\frac{(h_2R-n-1)(h_2R+n)}{\mu_{nm}^2} J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nm})} \times$$

$$\times e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t'-\tau')} \times \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1} & t' < \tau' \\ \dfrac{1}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1} & t' > \tau' \end{array} \right\} \times \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt. \qquad (8)$$

Позначимо ядро інтегрального рівняння:

$K(\rho;\ \theta-\zeta;\ \varphi-\psi;\ t-\tau) =$

$$= \frac{a^2}{\pi\sqrt{R}} \sum_{j=0}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\rho\right) P_{nj}(\cos\theta)\, P_{nj}(\cos\zeta)\cos j(\varphi-\psi)\, e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}}{\frac{\sqrt{\rho}}{2n+1}\cdot\frac{(n+j)!}{(n-j)!}\left(1+\frac{(h_2R-n-1)(h_2R+n)}{\mu_{nm}^2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nm})} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1} & t < \tau \\ \dfrac{1}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1} & t > \tau \end{array} \right. ,$$

тоді

$$U(\rho,\zeta,\psi,\tau) = U_L(\rho,\zeta,\psi,\tau) - \int_0^T \int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} K(\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)\, \Phi\left[W(\theta,\varphi,t)\right] \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt, \qquad (11)$$

де $0 \le \rho \le R,\quad 0 \le \zeta \le \pi,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad 0 \le \tau \le T.$

$$W(\zeta,\varphi,\tau) = W_L(\zeta,\varphi,\tau) - \int_0^T \int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} K(\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)\, \Phi\left[W(\theta,\varphi,t)\right] \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt, \qquad (12)$$

де $0 \le \zeta \le \pi,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad 0 \le \tau \le T$,

$$K(\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau) = K(R;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau). \qquad (13)$$

У (12) із періодичності вільного члена і ядра інтегрального рівняння (13) маємо:

$$W_L(\zeta,\psi+2\pi,\tau) = W_L(\zeta,\psi,\tau), \qquad K(\theta,\zeta;\varphi-\psi+2\pi;t-\tau) = K(\theta,\zeta;\varphi-\psi,\ t-\tau) = K(\theta,\zeta;\varphi-\psi;\ t-\tau-T).$$

Із цього випливає, що розв'язок інтегрального рівняння (9), отже, і $U(\rho,\zeta,\psi,\tau)$, періодичні за ψ і τ, з періодами 2π і T відповідно. Це дозволяє замість початково-крайової задачі (1) розглядати періодичну за t задачу:

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial t}=0,$$

$$0<r<R,\quad 0<\theta<\pi,\quad 0<\varphi<2\pi,\quad 0<t<T, \tag{14}$$

$$r=R:\ \frac{\partial U}{\partial r}+h_2U=\begin{cases} h_2U_c+\dfrac{q}{\lambda}\sin\theta\sin\varphi, & 0<\theta<\pi,\ \omega t<\varphi<\omega t+\pi \\ (h_2-h_1)U+h_1U_c+\kappa\left(U_c^4-U^4\right), & 0<\theta<\pi,\ \omega t+\pi<\varphi<\omega t+2\pi \end{cases}$$

$$U(r,\theta,\varphi,t)=U(r,\theta,\varphi+2\pi,t).$$

Твердження:

Існує функція Гріна $\bar{G}(r,\rho;\theta,\zeta;\varphi,\psi;t-\tau)$, що є розв'язком задачі:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\bar{G}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\bar{G}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\bar{G}}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial\bar{G}}{\partial t}=$$
$$=-\delta(r-\rho)\delta(\varphi-\psi)\delta(\theta-\zeta)\delta(t-\tau),$$

$$\bar{G}(r,\theta,\varphi,T-\tau)=\bar{G}(r,\theta,\varphi,0-\tau),\qquad \bar{G}(r,\theta,\varphi,t)=\bar{G}(r,\theta,\varphi+2\pi,t), \tag{15}$$

$$\bar{G}_r+h_2\bar{G}\Big|_{r=R}=0,\qquad \bar{G}\Big|_{r=\infty}<\infty.$$

Задача (14) зводиться до розв'язання інтегрального рівняння (11) та квадратури (12), ядро якого має вигляд $K(\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)=R^2\,\bar{G}(R,\rho;\theta,\zeta;\varphi,\psi;t-\tau)$ в області $\{0<r<R,\ \ 0<\theta<\pi,\ \ 0<\varphi<2\pi,\ \ 0<t<T\}$.

Доведення:

Визначимо функцію Гріна за власними функціями, у сферичній системі координат r,θ,φ, знайдемо функції $\bar{g}_{nm}(t)$ із розв'язку такої задачі:

$$-\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\bar{g}_{nm}(t)+\frac{1}{a^2}\frac{\partial\bar{g}_{nm}(t)}{\partial t}=-\delta(t-\tau),\qquad \bar{g}_{nm}(T)=\bar{g}_{nm}(0). \tag{16}$$

Розв'язком однорідного рівняння є $\bar{g}_{nm}(t)=C\,e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}$.

Проінтегруємо рівняння (16) за t у проміжку $t\in[\tau-\varepsilon;\ \tau+\varepsilon]$ за $\varepsilon\to 0$.

$$\frac{1}{a^2}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\bar{g}'_{nm}(t)\,dt-\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\bar{g}_{nm}(t)\,dt=-\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\delta(t-\tau)\,dt.$$

З урахуванням того, що $\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\bar{g}_{nm}(t)\,dt=0$ через $\varepsilon\to 0$, а $\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\delta(t-\tau)\,dt=\begin{cases}1, & t\in[\tau-\varepsilon;\ \tau+\varepsilon]\\ 0, & t\notin[\tau-\varepsilon;\ \tau+\varepsilon]\end{cases}$, переконуємося в тому, що в точці $t=\tau$ функція $\bar{g}_{nm}(t)$ розривна.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

$$\frac{1}{a^2}\bar{g}_{nm}(t)\Big|_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}=-1, \qquad \bar{g}_{nm}(\tau+\varepsilon)-\bar{g}_{nm}(\tau-\varepsilon)=-a^2.$$

Тому за $t<\tau$ буде $\bar{g}_{nm}(t)=C_1 e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}$, а за $t>\tau$ буде $\bar{g}_{nm}(t)=C_2 e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}$. Отже, для визначення довільних сталих коефіцієнтів C_1 та C_2 отримуємо систему:

$$\begin{cases}\bar{g}_{nm}(\tau+\varepsilon)-\bar{g}_{nm}(\tau-\varepsilon)=a^2\\ \bar{g}_{nm}(T)=\bar{g}_{nm}(0)\end{cases}, \qquad \begin{cases}C_2 e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(\tau+\varepsilon)}-C_1 e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(\tau-\varepsilon)}=-a^2\\ C_2 e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}=C_1 e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\cdot 0}\end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи є $C_1=a^2\dfrac{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1}\cdot e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\tau}$ та $C_2=a^2\dfrac{e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\tau}}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1}$.

Отже:

$$\bar{g}_{nm}(t-\tau)=a^2\frac{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1}\times\begin{cases}e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}, & t<\tau\\ 1, & t>\tau\end{cases}.$$

Отже, розв'язком задачі (15) є функція Гріна:

$$\bar{G}(r,\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)=$$
$$=\frac{a^2}{\pi R^2}\sum_{j=0}^{\infty}{}'\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}r\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\rho\right)P_{nj}(\cos\theta)P_{nj}(\cos\zeta)\cos j(\varphi-\psi)e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}}{\frac{\sqrt{r\rho}}{2n+1}\cdot\frac{(n+j)!}{(n-j)!}\left(1+\frac{(h_2R-n-1)(h_2R+n)}{\mu_{nm}^2}\right)J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nm})\left(e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}-1\right)}\times$$
$$\times\begin{cases}e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2 T}, & t<\tau\\ 1, & t>\tau\end{cases}.$$

На поверхні кулі, за $r=R$, $\bar{G}(\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;\,t-\tau)=R^2\bar{G}(R,\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)$ (завдяки переходу до сферичної системи координат), тоді $\bar{G}(\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)=K(\rho;\theta,\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)$, що і потрібно було довести.

Висновки

У роботі досліджено математичну модель у вигляді початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами, температурного поля кулі, що обертається навколо однієї з осей симетрії з постійною швидкістю. Метою дослідження стало застосування інтегрального рівняння до розв'язання нелінійної початково-крайової задачі у сферичній області та визначення умови термодинамічної рівноваги за необмеженого числа обертів кулі навколо осі обертання. Такий розв'язок дозволив отримати розподіл температури як на поверхні кулі, так і всередині, а також умову її термодинамічної рівноваги. Розглянута періодична нелінійна початково-крайова задача, яка зведена до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння. Отримане інтегральне рівняння за допомогою другої формули Гріна зведено до рівняння типу Фредгольма

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10

за просторовою координатою і типу Вольтерри за часом. Ядро інтегрального рівняння знайдено у вигляді функції Гріна. Під час дослідження було визначено умови термодинамічної рівноваги кулі за необмеженої кількості її обертів навколо своєї осі. Для цього був застосований граничний перехід, який дозволив визначити умови термодинамічної рівноваги. Досліджено вплив лінійної та нелінійної частин розв'язку задачі на температурне поле за допомогою розв'язання нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна. Також було доведено, що розв'язок вихідної задачі, періодичної як за часом, так і за просторовою координатою, не залежить від початкової умови та не впливає на температурне поле кулі за необмеженого числа її обертів. Математичну модель і розв'язок початково-крайової задачі може бути використано під час дослідження теплових процесів в астрофізиці, геофізиці й атомній енергетиці.

Список використаної літератури

1. Suneet Singh, Prashant K. Jain, Rizwan-uddin. Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere. *Journal of Heat Transfer.* 2016. Vol. 138. № 10. P. 101301. https://doi.org/10.1115/1.4033536.
2. Courant R., Hilbert D. Methoden der Mathematischen Physik. *Verlag von Julius Springer*. Berlin, 1931. Vol. 1. 525 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-47436-1.
3. Ляшенко В.П., Козир А.Е., Дем'янченко О.П. Математична модель зі складними умовами теплообміну у сферичній області. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.* 2017. Том 106 (5). С. 21–27.
4. Özişik M.N., Orlande H.R.B., Colaço M.J., Cotta R.M. Finite Difference Methods in Heat Transfer, Second Edition. New York : CRC Press, 2017. P. 580. https://doi.org/10.1201/9781315121475.
5. Gosz M.R. Finite Element Method: Appli-cations in Solids, Structures, and Heat Transfer. New York : CRC Press, 2017. 400 p. https://doi.org/10.1201/9781315275857.
6. Demyanchenko O., Lyashenko V. Modeling of thermal processes in spherical area. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences :* AIP Conference Proceedings, 22–27 June 2016, Albena (Bulgaria). 2016. Vol. 1773. P. 040004–1–040004–8.
7. Тацій Р.М., Пазен О.Ю. Визначення нестаціонарного температурного поля в системі двох сферичних тіл. *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності.* 2019. № 19. С. 79–86. https://doi.org/10.32447/20784643.19.2019.08.
8. Demyanchenko O. Heat exchange model in a spherical region. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.* 2016. Том 101 (6). С. 46–52.
9. Мусій Р.С., Мельник Н.Б., Наконечний А.Й., Гошко Л.В., Бандирський Б.Й. Визначення і аналіз температурного поля суцільної електропровідної кулі за короткочасного індукційного нагріву. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2021. Т. 4. № 2.2. С. 149–158. https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.15.
10. Safarzadeh S., Rahimi A.B. Convective heat transfer and ow phenomena from a rotating sphere in porous media. *Sharif University of Technology Scientia.* Vol. 29 (2). P. 588–596. https://doi.org/10.24200/sci.2021.53800.3422.
11. Hao Xiaohong, Yang Xinming, Peng Cheng, Yao Zhi. Heat transfer berween rotating sphere and spherical surface sink. *Journal of Thermal Analysis & Calorimetry*. 2020. Vol. 141. P. 413–420. https://doi.org/10.1007/s10973-019-08983-2.

References

1. Suneet, Singh, Prashant, K. Jain, & Rizwan-uddin (2016). Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere. *Journal of Heat Transfer,* 138 (10), 101301–101341. https://doi.org/10.1115/1.4033536 [in English].
2. Courant, R., & Hilbert, D. (1931). Methoden der mathematischen physic [Methods of mathematical physics]. *Verlag von Julius Springer [Publisher of Julius Springer]*, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-47436-1 [in German].

3. Lyashenko, V.P., Kozyr, A.E. & Demyanchenko, O.P. (2017). Mathematiychna model zi skladnymy umovamy teploobminu u sferichnyi oblasti [Mathematical model with complex heat transfer conditions in a spherical region]. *Visnyk KrNU imeni Mykhaila Ostrogradskogo*, 106 (5), 21–27 [in Ukrainian].
4. Özişik, M.N., Orlande, H.R.B., Colaço, M.J., & Cotta, R.M. (2017). Finite Difference Methods in Heat Transfer, Second Edition. *New York: CRC Press*, 580. https://doi.org/10.1201/9781315121475 [in English].
5. Gosz, M.R. (2017). Finite Element Method: Appli-cations in Solids, Structures, and Heat Transfer. *New York: CRC Press*, 400. https://doi.org/10.1201/9781315275857 [in English].
6. Demyanchenko, O., & Lyashenko, V. (2016). Modeling of thermal processes in spherical area. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings*. 22–27 June, Albena (Bulgaria), 1773, 040004–1–040004–8 [in English].
7. Tatsii, R.M., & Pazen, O.Yu. (2019). Vyznachennia nestatsionarnogo temperaturnogo polia v systemi dvoh sferichnyh til [Definition of a non-stationary temperature field in a system of two spherical bodies]. *Visnyk Lvivskogo derjavnogo universytetu bezpeky jyttediialnosti,* 19, 79–86. https://doi.org/10.32447/20784643.19.2019.08 [in Ukrainian].
8. Demyanchenko, O. (2016). Heat exchange model in a spherical region. *Visnyk Kremenchutskogo natsionalnogo universytetu im. M. Ostrogradskogo.* Kremenchuk, 101 (6), 46–52 [in English].
9. Musii, R.S., Melnik, N.B., Nakonechny, A.Y., Goshko, L.V., & Bandyrsky, B.Y. (2021). Vyznachennia I analiz temperaturmogo polia sutsilnoi elektroprovidnoy kuli za korotkochasnogo induktsyinogo nagrivu [Determination and analysis of the temperature field of a solid electrically conductive sphere during short-term induction heating]. *Prykladni pytannia matematychnogo modeliunannia.* 4 (2.2), 149–158. https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.15 [in Ukrainian].
10. Safarzadeh, S., & Rahimi, A.B. Convective heat transfer and ow phenomena from a rotating sphere in porous media. *Sharif University of Technology Scientia,* 29 (2), 588–596. https://doi.org/10.24200/SCI.2021.53800.3422 [in English].
11. Hao, Xiaohong, Yang, Xinming, Peng, Cheng, & Yao, Zhi. (2020). Heat transfer berween rotating sphere and spherical surface sink. *Journal of Thermal Analysis & Calorimetry*, 141, 413–420. https://doi.org/10.1007/s10973-019-08983-2 [in English].

Ляшенко Віктор Павлович – д.т.н., професор, професор кафедри інформатики і вищої математики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. E-mail: viklyash2903@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4538-631X.

Кобильська Олена Борисівна – д.т.н., професор, професорка кафедри інформатики і вищої математики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. E-mail: kobilskaya1983@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4210-1534.

Дем'янченко Ольга Пантеліївна – к.т.н., старший викладач кафедри вищої математики Інституту прикладної математики і фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка». E-mail: olgademyanchenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4693-0364.

Lyashenko Viktor Pavlovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Mathematics of the Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. E-mail: viklyash2903@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4538-631X.

Kobilska Olena Borysivna – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Mathematics of the Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. E-mail: kobilskaya1983@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4210-1534.

Demyanchenko Olga Panteliivna – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics of the Institute of Applied Mathematics and Fundamental Sciences of the Lviv Polytechnic National University. E-mail: olgademyanchenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4693-0364.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-10