УДК 004.56

С.А. ПОЛОЖАЄНКО, А.Ю. ПРОКОФЬЄВ
Національний університет «Одеська політехніка»

# АДАПТИВНИЙ МЕТОД КОНТРОЛЮ ТА КРИТЕРІЇ ПЕРЕВІРКИ ДОСТОВІРНОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

*Питання дослідження динамічних систем найбільш гостро постають під час розроблення, експлуатації та модернізації систем управління різноманітними об'єктами та процесами. Характерною рисою сучасних систем управління є широке використання різноманітних типів обчислювальних систем, що реалізують методи й алгоритми моделювання та управління. Тому якість функціонування систем моделювання та управління багато в чому визначається характеристиками обчислювальних засобів, що використовуються. Проблема забезпечення якості функціонування, зокрема й керівних систем з обчислювальною машиною в контурі управління, є дуже складною як з технічного, так і з математичного погляду. Під час вирішення цієї проблеми практика висунула на одне з перших місць науковий напрям, пов'язаний із розробленням методів і засобів, що забезпечують надійність і достовірність процесів обчислень і обробки інформації. У низці прикладних завдань, зокрема з оцінювання достовірності отриманого розв'язку, визначальне значення мають час прогнозу (тобто швидкодія в його отриманні) та простота задіяних обчислювальних процедур. Зокрема, такі вимоги можуть виникати під час розв'язування завдань з управління швидкоплинними динамічними процесами (об'єктами), особливо в умовах багатоваріантної постановки (до таких завдань можуть бути віднесені: оптимізаційні завдання з ітераційними процедурами пошуку оптимального закону управління; завдання диспетчерського управління в нештатних і аварійних ситуаціях, коли відшукується найкращий за окремим критерієм розв'язок із можливих альтернативних; завдання, які розв'язуються у «прискореному» масштабі часу, коли відшукуються закони програмного управління, за умови відсутності можливості організувати замкнуті системи управління тощо). Очевидно, що для перевірки достовірності обчислень стосовно динамічного стану досліджуваних об'єктів і процесів раціонально застосовувати контрольні алгоритми. Причому, в разі обмеженого часу на обчислення доцільно як контрольний (перевірочний) алгоритм використовувати спрощений алгоритм розв'язування задачі оцінки достовірності отриманого розв'язку вихідної задачі моделювання або управління.*

***Ключові слова:*** *динамічна система, модель, достовірність обчислень, контрольний алгоритм, критерій перевірки обчислень, адаптивний метод.*

S.A. POLOZHAENKO, A.YU. PROKOFIEV
Odessa Polytechnic National University

# ADAPTIVE CONTROL METHOD AND CRITERIA FOR VERIFYING THE RELIABILITY OF COMPUTATIONAL IMPLEMENTATION OF MODELS OF DYNAMIC SYSTEMS

*The issues of studying dynamic systems are most acute in the development, operation and modernization of control systems for various objects and processes. A characteristic feature of modern control systems is the widespread use of various types of computer systems that implement methods and algorithms for modeling and control. Therefore, the quality of functioning of modeling and control systems is largely determined by the characteristics of the computing resources used. The problem of ensuring the quality of functioning, in particular, of control systems with a computer in the control loop is very complex from both a technical and mathematical point of view. In solving this problem, practice has put forward one of the first places a scientific direction related to the development of methods and tools that ensure the reliability and validity of computing and information processing processes. In a number of applied problems, in particular when assessing the reliability of the obtained solution, the dominant value is the forecast time (i.e. the speed of its receipt) and the simplicity of the computational procedures involved. In particular, such requirements may arise when solving control problems of fast-moving dynamic processes (objects), especially in conditions of multivariate formulation (such problems may include: optimization problems with iterative procedures for finding the optimal control law; dispatch control problems in abnormal and emergency situations, when the best solution according to a certain criterion is sought from possible alternative ones; problems that are solved in an "accelerated" time scale, when the laws of program control are sought, provided that there is no possibility to organize closed-loop control systems, etc.). It is obvious that to check the reliability of calculations regarding the dynamic state of the studied objects and processes, it is rational to use control algorithms. Moreover, in the case of limited time for calculations, it is advisable, as a control (verification) algorithm, to use a simplified algorithm for solving the problem of assessing the reliability of the obtained solution to the initial modeling or control problem.*

***Key words:*** *dynamic system, model, reliability of calculations, control algorithm, calculation verification criterion, adaptive method.*

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

## Постановка проблеми

Застосування цифрових регуляторів в управлінні динамічними системами пов'язано з реалізацією їх моделей, а також відповідних алгоритмів управління, на основі різноманітних обчислювальних (за прийнятою термінологією [1; 2] – моделююче-управляючих) пристроїв. Тому якість функціонування систем моделювання і управління багато в чому визначається характеристиками обчислювальних засобів, що використовуються. Проблема забезпечення якості функціонування, зокрема, керівних систем з обчислювальною машиною в контурі управління, є дуже складною як з технічного, так і з математичного погляду. У вирішенні цієї проблеми практика висунула на одне з перших місць науковий напрям, пов'язаний із розробленням методів і засобів, що забезпечують надійність та достовірність процесів обчислень і обробки інформації [3].

Під час практичного впровадження моделююче-управляючих комплексів динамічними системами обчислювальні процеси, що в них реалізуються, неодмінно наражаються на різного роду *завади* та *похибки*. Зокрема, комп'ютерне розв'язування математичних виразів, що утворюють математичні моделі (далі – ММ) динамічних систем, може зазнавати похибок, спричинених числовими алгоритмами реалізації ММ (наприклад, неточностями апроксимації неперервних моделей або накопичення похибок округлення), та перебоїв у роботі апаратних засобів. Більшість похибок і перебоїв мають *випадковий характер*. Тому потрібен дієвий поточний контроль, що дозволяє виявити й усунути похибки (збої) до їх поширення в контурі управління, що зумовлює *оперативність* як одну з основних характеристик засобів контролю похибок.

## Аналіз останніх досліджень і публікацій

Натепер використовуються як *програмні* й *апаратурні* методи контролю процесів моделювання (чи управління), так і різноманітні їх поєднання, а детальний аналіз відповідних методів міститься, наприклад, у [4].

Загалом, математична модель (ММ) динамічної системи, що реалізується в моделююче-управляючому комплексі, можна представити наступним чином:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0, \tag{1}$$

де $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор змінних стану, $\mathbf{U} = (u_1, u_2, ..., u_m)^{\mathrm{T}}$ – вектор сигналів управління, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор-функція, $t$ – незалежний параметр часу.

Для будь-яких методів числового розв'язування рівнянь динаміки виду (1) контроль збоїв можна організувати шляхом порівняння результатів, отриманих на поточному та наступному кроках інтегрування відповідно.

Наявність чи відсутність збоїв визначається перевіркою умови

$$\xi = \rho(y_i, y_{i+1}) \in D, \tag{2}$$

де $\xi$ – міра близькості значень $y_i$ та $y_{i+1}$, $D$ – область допустимих значень цієї міри.

Для контролю похибок, спричинених збоями та відмовами, можуть використовуватися методи контролю методичної похибки числового розв'язку на етапі інтегрування або особливості побудови обчислювальних алгоритмів [5].

У методах прогнозу та корекції [6; 7] за різницею $\xi = |y_{\mathrm{f}} - y_{\mathrm{c}}|$ між прогнозованим $y_{\mathrm{f}}$ і скорегованим $y_{\mathrm{c}}$ значеннями шуканої функції можна робити висновки про наявності збою в роботі апаратури. Однак існуючий взаємозв'язок між значеннями $y_{\mathrm{f}}$ та $y_{\mathrm{c}}$ знімає достовірність контролю.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

Наявність такого зв'язку зумовлено таким. У методі «прогноз – корекція» значення шуканої функції на поточному $(i+1)$-му та попередньому $i$-му кроках обчислень зв'язані таким співвідношенням:

$$y_{i+1} = y_i + h\, f_i\,, \tag{3}$$

де $h$ – крок інтегрування, функція $f_i$ визначається (1), а корекція здійснюється відповідно до виразу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f_i + \tilde{f}_{i+1}\right), \tag{4}$$

де $\tilde{f}_{i+1} = f\left(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{U}, t_{i+1}\right)$.

Як видно із (3) і (4), на одному кроці інтегрування двічі обчислюється функція $f\left(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_i\right)$ у точках $t_i$ та $t_{i+1}$. Оскільки цей процес зазвичай становить основний обсяг обчислювальної роботи, можна припустити, що збій стався в момент обчислення $f\left(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_i\right)$ і значення функції $f_i$ отримано з похибкою $\Delta f_i$. Тоді значення функції, яке може бути отримане відповідно до формули (3), буде

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h\left(f_i + \Delta f_i\right) = y_i + h\, f_i + h\Delta f_i\,. \tag{5}$$

Тут величина $\Delta y_{i+1} = h\Delta f_i$ – похибка у значенні прогнозу.

Розкладемо функцію $\tilde{f}_{i+1}$ у ряд Тейлора за $y$, обмежимося двома першими членами:

$$\tilde{f}_{i+1} = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y} h f_i + \frac{\partial f_i}{\partial t} h\,.$$

Підставимо в останній вираз для $\tilde{f}_{i+1}$ значення функції $f_i$ з похибкою, у результаті чого отримаємо:

$$\tilde{f}_{i+1} = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y} h\left(f_i + \Delta f_i\right) + \frac{\partial f_i}{\partial t} h\,.$$

Обчислимо значення функції $y_{i+1}$ відповідно до формули (4):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[\left(f_i + \Delta f_i\right) + f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y} h_i\left(f_i + \Delta f_i\right) + \frac{\partial f_i}{\partial t} h\right]. \tag{6}$$

Різниця між прогнозованим $y_{\mathrm{f}}$ (5) та скорегованим $y_{\mathrm{c}}$ (6) значеннями буде дорівнювати

$$\xi = \left|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}\right| = \frac{h}{2}\left|\Delta f_i\left(1 - \frac{\partial f_i}{\partial y} h\right) - h\left(\frac{\partial f_i}{\partial y} f_i + \frac{\partial f_i}{\partial t}\right)\right|,$$

звідки видно, що величина $\xi$ залежить від величин похідних $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ та $\frac{\partial f_i}{\partial t}$, тобто водночас впливає як на прогнозоване значення $y_{\mathrm{f}}$, так і на скореговане значення $y_{\mathrm{c}}$. Навіть наявність

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

значної похибки у скоригованому значенні $\Delta y_{i+1} = h\Delta f_i$ може бути «непомічена», якщо величини цих похідних малі. Окрім того, наявність множника $\frac{h}{2}$ за малих $h$ знижує «чутливість» величини $\xi$ до похибок, які спричинені збоями в обчисленні $f_i$.

Дієвим у контролі достовірності обчислень може розглядатися підхід, що ґрунтується на застосуванні, окрім основного алгоритму $A_{\text{b}}$ реалізації ММ виду (1), контрольного алгоритму $A_{\text{k}}$ [8], в останньому використовується вже інформація, перевірена на попередніх кроках (наприклад, кроках ітераційної процедури інтегрування (1)). Відповідні *екстраполяційний* та *інтерполяційний* контрольні алгоритми, запропоновані в роботі [9], виглядають так:

$$\bar{y}_{i+1} = \sum_{p=0}^{p_1} a_p y_{p-1} + h\sum_{s=1}^{s_1} b_s f\left(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_{i-s}\right), \tag{7}$$

$$\bar{y}_i = \sum_{p=-1}^{p_1} a_p y_{i-p} + h\sum_{s=-1}^{s_1} b_s f\left(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_{i-s}\right), \tag{8}$$

де $h = t_{i+1} - t_i$ – крок інтегрування, $a_p$, $b_s$ – коефіцієнти.

Інтерполяційна формула контролю (4), на відміну від екстраполяційної (7), ураховує *зміну розв'язку на кроці обчислень, який контролюється*, що *зменшує різницю* між величинами $y$ та $\bar{y}$ в алгоритмах $A_{\text{b}}$ та $A_k$ відповідно.

Зазначимо, що коефіцієнти контрольних алгоритмів виду (7) та (8) визначаються з умови отримання точного результату за контрольним алгоритмом $A_k$ для розв'язку $y_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, який являє собою багаточлен якомога більшого ступеня. Такий вибір коефіцієнтів $a_p$ та $b_s$ дозволяє отримати заданий порядок похибки контролю за відносно невеликого обсягу обчислень за контрольним алгоритмом $A_k$ у процесі підрахунку.

## Мета дослідження

Метою роботи є розроблення та дослідження адаптивного методу контролю достовірності обчислювальної реалізації математичних моделей динамічних систем у розв'язуванні задач їх моделювання та управління, а також розроблення відповідних критеріїв перевірки достовірності контролю обчислень, виконаних за адаптивним методом.

## Виклад основного матеріалу дослідження

Коефіцієнти контрольних алгоритмів виду (7) та (8) визначаються з умови отримання точного результату за контрольним алгоритмом $A_k$ для розв'язку $y_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, який являє собою багаточлен якомога більшого ступеня. Такий вибір коефіцієнтів $a_p$ та $b_s$ дозволяє отримати заданий порядок похибки контролю за відносно невеликого обсягу обчислень за контрольним алгоритмом $A_k$ у процесі підрахунку. Фактично точність контролю, що визначається залишком ряду Тейлора для контрольних формул, коливається від кроку до кроку, залежно від гладкості розв'язку $y_j(t)$, $j = \overline{1,n}$.

Нижче запропоновано метод організації контролю розв'язування системи рівнянь (1) за допомогою контрольного алгоритму $A_{\text{k}}$, що *перебудовується* залежно від поведінки контрольованого розв'язку $y_j(t)$, $j = \overline{1,n}$. Особливість даного підходу полягає в тому, що проконтрольовані на черговому кроці результати використовуються для визначення параметрів контрольного алгоритму $A_{\text{k}}$ (тобто коефіцієнтів $a_p$, $b_s$). Параметри визначаються з умови мінімуму деякої міри близькості результатів, отриманих за контрольним $A_{\text{k}}$ і основним $A_{\text{b}}$ алгоритмами на ділянці розв'язку, що включає останній проконтрольований крок обчислень. Отриманий алгоритм, що позначимо як $A_{\text{a}}$, використовується для контролю наступного кроку обчислень. Після цього параметри знову уточнюються.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

Очевидно, що описану процедуру методу та реалізуючий її алгоритм $A_{\text{a}}$, зважаючи на вищесказане, можна вважати *адаптивними*.

Адаптивний метод, який пропонується, допускає таке трактування: на основі проконтрольованої інформації про фізичний процес (тобто динаміки останнього, що описується системою (1), і припущення, що поведінка розв'язку $y_j(t)$, $j=\overline{1,n}$ від кроку до кроку змінюється досить повільно) розв'язується задача *параметричної ідентифікації* за заданої структури математичного опису процесу (тобто системи (1)). Отримана модель, у даному випадку контрольна формула у вигляді алгоритму $A_{\text{a}}$, використовується для наступного контролю. Інакше, згідно з надходженням проконтрольованої інформації, модель, яка використовується для контролю (алгоритм), уточнюється (або адаптується). Надалі визначення параметрів контрольного алгоритму, яким розглядається вже алгоритм $A_{\text{a}}$, будемо використовувати методи параметричної ідентифікації безінерційних об'єктів [10; 11].

За допомогою результатів обчислень за основним алгоритмом $A_{\text{b}}$, отриманих до $(i+1)$-ого кроку обчислень, можна визначити параметри контрольного алгоритму $A_{\text{a}}$ на $(i+1)$-му кроці зі системи алгебраїчних рівнянь.

Тобто

$$\mathbf{CQ}=\mathbf{B}. \tag{9}$$

Наприклад, для ектраполяційного способу контролю, що використовують оцінку розв'язку в точці $t_{i-1+\alpha}$, величини, що входять у вираз (9), визначаються на $(i+1)$-му кроці обчислювальної процедури так:

$$\mathbf{Q}=\left(a_{-1},a_1,...,a_{p_1},...,b_0,b_1,...,b_{s_1}\right)^{\text{T}},$$

$$\mathbf{B}=\left(y_i,y_{i-1},...,y_{i-k+1}\right)^{\text{T}},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} y_{i-1} \cdots y_{i-p_1-1} & \dot{y}_{i-2+\alpha} & \dot{y}_{i-2} \cdots \dot{y}_{i-s_1-1} \\ y_{i-2} \cdots y_{i-p_1-2} & \dot{y}_{i-3+\alpha} & \dot{y}_{i-3} \cdots \dot{y}_{i-s_1-2} \\ \cdots \quad \cdots . \quad .. \quad \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_{i-k} \cdots y_{i-p_1-k} & \dot{y}_{i-k-1+\alpha} & \dot{y}_{i-k-1} \cdots \dot{y}_{i-s_1-k} \end{bmatrix}.$$

Якщо матриця $\mathbf{C}$ не вироджена, число її рядків дорівнює розмірності вектора параметрів (для екстраполяційного методу $\Pi_{\text{ers}}=\left(a_{-1},a_1,a_2,...,a_p,b_0,b_1,...,b_s\right)$ та інтерполяційного методу $\Pi_{\text{int}}=\left(a_1,a_2,...,a_p,\ b_1,...,b_s\right)$, відповідно), що визначається значенням $k$, то оцінкою $\hat{\mathbf{Q}}$ матриці параметрів $\mathbf{Q}$ (як для екстраполяційного, так і для інтерполяційного методів) є розв'язок системи алгебраїчних рівнянь

$$\hat{\mathbf{Q}}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B},$$

і результати, отримані за основним алгоритмом $A_{\text{b}}$ та контрольним алгоритмом $A_{\text{a}}$ на послідовності $y_i,y_{i-1},...,y_{i-k+1}$ збігаються. Якщо матриця $\mathbf{C}$ прямокутна, то для визначення оцінки вектора параметрів можна скористатися методом найменших квадратів [12].

Розглянемо два варіанти побудови конструктивних алгоритмів адаптивного методу контролю точності обчислень під час розв'язування задач моделювання та управління динамічними системами.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

Нехай, для конкретності викладення, але без порушення його загальності, розглядається задача моделювання динамічного об'єкта, за ММ якого вибрано рівняння Вольтерри другого роду, останнє записано в еквівалентній формі:

$$y(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{K_t'(t,s)}{K(t,t)}y(s)\,ds=\frac{f'(t)}{K(t,t)}, \tag{10}$$

Відшукаємо резольвенту $R_p(t,s)$ ядра $K(t,s)$ рівняння (10). За числового розв'язування рівняння (10) можна використати метод квадратурних формул, що в підсумку дає змогу записати розв'язок так:

$$y_1=\frac{1}{K_{1,1}}\left[\frac{f_1}{h_1}-\frac{1}{2}K_{1,0}y_0\right],\ \dots,$$

$$y_i=\frac{2}{K_{i,i}}\left[\frac{f_i}{h_i}-\frac{h_1}{2h_0}K_{i,0}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{h_j+h_{j-1}}{h_i}K_{ij}y_j\right)\right], \tag{11}$$

де $t_1=t_0+h_1$, $t_2=t_1+h_2$, ..., $t_n=T$; а кроки дискретизації $h_i$ визначаються як $h_i=t_i-t_{i-1}$, $i=\overline{0,n-1}$.

Після виконаної постановки задачі із записом рівняння динаміки (наприклад, у формі (10), (11)) перший алгоритм виглядає так.

**Алгоритм** $A_{\text{a}k}^{1}$.

1. Зведення розв'язку вихідної задачі (10), (11) до виду

$$\begin{gathered}k_1=h_i f(y_i,u_i,t_i),\\ k_2=h_i f\left[y_i+\beta k_1,u(t_i+\alpha h),t_i+\alpha h_i\right],\\ y_{i+1}=y_i+\sum_{r=1}^{i}\gamma_r k_r;\ i=\overline{0,n-1},\end{gathered} \tag{12}$$

де $\alpha,\beta,\gamma$ – параметри алгоритму.

2. Визначення контрольного значення функції за екстраполяційною формулою (7) першого порядку точності:

$$\bar{y}_{i+1}=ay_i-h_i b\dot{y}_{i-1+\alpha};\quad i=\overline{0,n-1}, \tag{13}$$

де $\dot{y}_{i-1+\alpha}=f\left[y_i+\beta k_1,u(t_i+\alpha h_i),t_i+\alpha h_i\right]$ – значення оцінки прирощення, отримане за алгоритмом $A_{\text{b}}$ на $i$-му кроці обчислень. На першому кроці обчислень коефіцієнти $a$, $b$ визначаються з умови отримання точного результату за контрольним алгоритмом $A_{\text{k}}$ для багаточлена першого ступеня точності.

3. Визначення величини

$$\xi=\left|y_{i+1}-\bar{y}_{i+1}\right|.$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

4. Перевірка умови

$$\xi \le \xi_{\sup}, \tag{14}$$

де $\xi_{\sup}$ – допустиме значення $\xi$. Якщо умову (14) не дотримано, то виконати корегування розв'язку (наприклад, заміною $y_{i+1}$ на $\bar{y}_{i+1}$). Якщо $t < (t_n = T)$, то перейти до п. 5, інакше здійснити завершення процесу обчислень.

5. Сформувати матрицю

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_{i+1} & \dot{y}_{i-2+\alpha} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{i-k} & \dot{y}_{i-k-1+\alpha} \end{bmatrix},$$

де $\dot{y}_{i-k-1+\alpha}$ – значення оцінки прирощення, отримане за процедурою (13) на $(i-k-1)$-му кроці обчислень. Величина $k$ визначає число рядків матриці $\mathbf{C}$.

6. Сформувати вектор

$$\mathbf{B} = (y_i, \dots, y_{i-k-1})^{\mathrm{T}}.$$

7. Визначити коефіцієнти $a, b$ контрольного алгоритму (9) із системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{CQ} = \mathbf{B},$$

де $\mathbf{Q} = (a, b)^{\mathrm{T}}$.

Для продовження розв'язування перейти до п. 1.

Як видно з наведеної процедури розв'язування, необхідні додаткові обчислення щодо визначення поточного значення коефіцієнтів $a, b$. Спростити процедуру контролю можна визначенням не всього вектора $\mathbf{Q}$, а його частини, уважаючи інші компоненти вектора такими, що рівні за значеннями, та такими, що отримані з умови точного результату за контрольною формулою для багаточлена як можливо високого ступеня. Так, у процедурі, яка аналізувалася, можна було визначати перший коефіцієнт $a$, уважати інший $b = 1$. Це відповідає перетворенню моделі (усічення моделі за параметрами).

Відмінність другого алгоритму полягає у способі визначення різниці між значеннями величин, отриманих за основним $A_{\mathrm{b}}$ та контрольним (екстраполяційний або інтерполяційний) алгоритмами, яка і являє собою похибку контролю. Зокрема, для екстраполяційного алгоритму виду (7) похибка $\xi$ визначається різницею залишкових членів основного $A_{\mathrm{b}}$ та контрольного $A_{\mathrm{k}}$ алгоритмів.

Припустимо, що для задачі виду (10), (11) основний алгоритм $A_{\mathrm{b}}$ реалізує однокрокову процедуру, залишковий член якої має вигляд

$$r_0 = G_0 h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_0, \quad t_i \le \varepsilon_0 \le t_{i+1}; \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{15}$$

де $k_0$ – порядок точності основного алгоритму $A_{\mathrm{b}}$, $G_0$ – деякий постійний коефіцієнт. Тоді для значення функції, отриманого за алгоритмом $A_{\mathrm{b}}$ на $(i+1)$-му кроці обчислень, можна записати

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

$$y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} + G_0 h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_0 ; \quad i = \overline{0, n-1} , \tag{16}$$

де $\tilde{y}_{i+1}$ – точне значення функції на $(i+1)$-му кроці обчислень за умови точного результату на попередніх кроках (у даному разі враховується тільки *локальна* похибка на кроці, що визначається методичною похибкою числового методу).

**Алгоритм** $A_{\text{a}k}^2$.

1. Записуються вирази виду (15), (16) для контрольного алгоритму:

$$r_k = G_k h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_k , \quad t_i \le \varepsilon_k \le t_{i+1} ; \quad i = \overline{0, n-1} ,$$

$$\bar{y}_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} + G_0 h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_0 ; \quad i = \overline{0, n-1} ,$$

де $r_k$ – порядок точності контрольного алгоритму, $G_k$ – постійний коефіцієнт.

2. Обчислюється різниця значень, отриманих за основним $A_{\text{b}}$ та контрольним $A_{\text{k}}$ алгоритмами:

$$R_{i+1} = y_{i+1} - \bar{y}_{i+1} = G_0 h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_0 - G_k h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_k , \quad i = \overline{0, n-1} . \tag{17}$$

3. Після проведення контролю на $i$-му кроці обчислень за відсутності збоїв (що встановлюється контролем) визначається оцінка різниці залишкових членів $R_i$ основного $A_{\text{b}}$ та контрольного $A_{\text{k}}$ алгоритмів:

$$R_i = y_i - \bar{y}_i , \quad i = \overline{0, n-1} . \tag{18}$$

Величину $R_i$ можна використовувати для компенсації різниці залишкових членів $R_{i+1}$ на $(i+1)$-му кроці обчислень, якщо

$$R_i = R_{i+1} . \tag{19}$$

4. Для екстраполяційного алгоритму (7) контрольна формула з компенсацією різниці залишкових членів має вигляд:

$$\bar{y}_{i+1}^R = \bar{y}_{i+1} + R_i , \quad i = \overline{0, n-1} . \tag{20}$$

Для інтерполяційного алгоритму (8) різниця (18) визначає оцінку залишкового члена контрольної інтерполяційної формули. Контрольний інтерполяційний алгоритм із компенсацією має вигляд:

$$\bar{y}_i^R = \bar{y}_i + R_{i-1} , \quad i = \overline{0, n-1} . \tag{21}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

Контрольні алгоритми *з компенсацією* виду (20) та (21) можна записати через значення, отримані за основним алгоритмом $A_b$. Для цього необхідно величину $R_i$ у (20) або (21) представити у вигляді (18), записавши замість величини $\bar{y}_i$ алгоритм її отримання (екстраполяційний або інтерполяційний).

Наприклад, у разі використання компенсації в контрольному алгоритмі (13) величина $R_i$ для (18) визначається як (для простоти, за умови $a = b = 1$)

$$R_i = y_i - y_{i-1} - h_i \dot{y}_{i-2+\alpha}, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{22}$$

Контрольний алгоритм із компенсацією (20) набуде вигляду:

$$\bar{y}_{i+1}^R = \bar{y}_{i+1} + R_i = \left(2y_i - y_{i-1}\right) + h_i\left(\dot{y}_{i-1+\alpha} + y_{i-2+\alpha}\right), \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{23}$$

На рис. 1 і 2 показано залежності математичного очікування та середнього квадратичного значення величини $\xi$, що визначалася для прикладної задачі (10) за формулою:

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|y_{j,i} - \bar{y}_{j,i}\right|}{\max\limits_t \left|y_j\right|}, \quad j = \overline{1,6}.$$

За використання для контролю числового розв'язку екстраполяційної формули першого порядку точності виду

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h_i y_{i-1+\alpha},$$

без компенсації різниці залишкових членів, і формули (23) з компенсацією відповідно. Як випливає із графіків, точність контролю з компенсацією різниці залишкових членів на порядок вище точності контролю без компенсації.

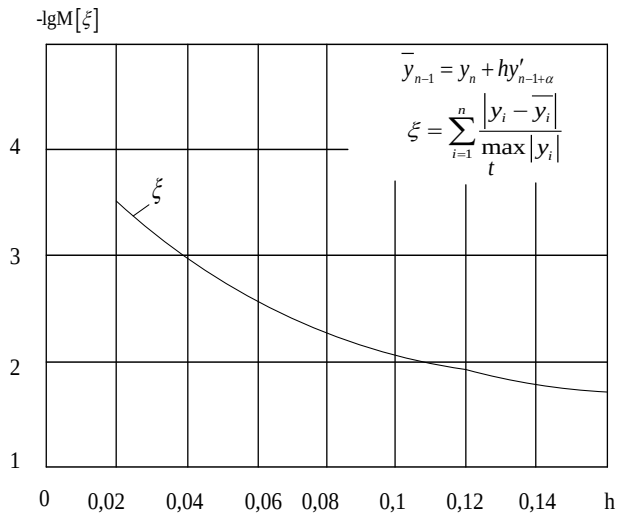


**Рис. 1. Залежність математичного очікування $M[\xi]$ величини $\xi$ від кроку $h$**

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

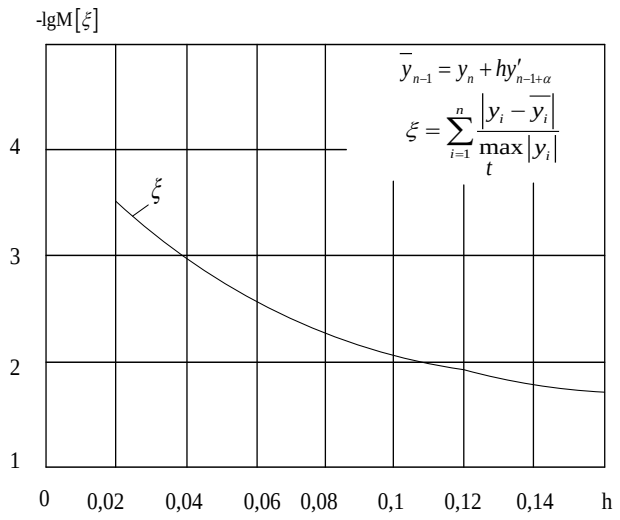


**Рис. 2. Залежність середнього квадратичного відхилення $\sigma[\xi]$ величини $\xi$ від кроку $h$**

Зазначимо, що критеріями щодо ухвалення рішення про факт наявності або відсутності похибок (збою), тобто *критеріями перевірки достовірності* обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, пропонується вибрати вирази (14) або (17) (для кожного з адаптивних алгоритмів $A^1_{ak}$ або $A^2_{ak}$ відповідно).

## Висновки

Виконане аналітичне дослідження показало, що застосування адаптації дозволяє підвищити достовірність і точність екстраполяційного й інтерполяційного контрольних алгоритмів. Відповідно до цього запропоновано критерії, які дозволяють установлювати факт наявності (або відсутності) похибки в основному алгоритмі числової реалізації ММ динамічної системи, що дає змогу виявляти збої в роботі основного обчислювального алгоритму. Останнє дозволило розробити адаптивний метод контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем, який забезпечує визначення параметрів контрольного алгоритму з умови мінімуму вибраної міри (тобто критерію достовірності) близькості результатів, отриманих за контрольним і основним алгоритмами.

## Список використаної літератури

1. Промислові мережі та інтеграційні технології в автоматизованих системах / О.М. Пупена та ін. Київ : Ліра-К, 2011. 500 с.
2. Гліненко Л.К., Гліненко А.В., Сухоносов О.Г. Основи моделювання технічних систем. Львів : Бескид Біт, 2003. 176 с.
3. Костюшко І.А., Любашенко Н.Д., Третиник В.В. Методи обчислень. Київ : Політехніка, 2021. 243 с.
4. Чабанюк Я.М., Яковина В.С., Федасюк Д.В. Побудова і дослідження моделі надійності програмного забезпечення з індексом величини проекту. *Інженерія програмного забезпечення*. 2010. Вип. 1. С. 1–6.
5. Коссак О.М., Тумашова О.В. Методи наближених обчислень. Львів : Бак, 2003. 168 с.
6. Катаєва Є.Ю., Одокієнко С.М., Люта М.В. Практичний аналіз якості програмного забезпечення з відкритим кодом. *Управління розвитком складних систем*. 2020. № 44. С. 49–55.
7. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. Київ : Видавнича група BHV, 2006. 480 с.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

8. Положаєнко С.А., Прокофьєв А.Ю. Моделі визначення надійності динамічних систем, функціонування яких характеризується режимом профілактики. *Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського.* Серія «Технічні науки». 2024. Т. 35 (74). № 1. С. 280–286.
9. Положаєнко С.А., Прокофьєв А.Ю. Параметрична редукція по точності математичних моделей динамічних об'єктів систем. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2024. Вип. 6 (149). С. 125–131.
10. Foidl H., Felderer M. Integrating software quality models into risk-based testing. *Software Quality Journal.* 2018. Vol. 26. P. 809–847.
11. Polozhaenko S.A., Prokofieva L.L. Planning of the diagnostic experiment in the localization of troubleshooting failures of single-free systems. *Informatics and Mathematical Methods in Simulation*. 2018. Vol. 8. № 1. P. 5–16.
12. Ляшенко Б.М., Кривонос О.М., Вакалюк Т.А. Методи обчислень. Житомир : Вид-во ЖДУ, 2014. 228 с.

**References**

1. Pupena, O.M., Elperin, I.V., Lutska, N.M., & Ladaniuk, A.P. (2011). Promyslovi merezhi ta intehratsiini tekhnolohii v avtomatyzovanykh systemakh [Industrial networks and integration technologies in automated systems]. Kyiv: Lira-K [in Ukrainian].
2. Hlinenko, L.K., Hlinenko, A.V., & Sukhonosov, O.H. (2003). Osnovy modeliuvannia tekhnichnykh system [Fundamentals of modeling technical systems]. Lviv: Beskyd Bit [in Ukrainian].
3. Kostiushko, I.A., Liubashenko, N.D., & Tretynyk, V.V. (2021). Metody obchyslen [Computational methods]. Kyiv: Politekhnika [in Ukrainian].
4. Chabaniuk, Ya.M., Yakovyna, V.S., & Fedasiuk, D.V. (2010). Pobudova i doslidzhennia modeli nadiinosti prohramnoho zabezpechennia z indeksom velychyny proektu [Construction and research of a software reliability model with a project magnitude index]. *Inzheneriia prohramnoho zabezpechennia*, 1, 1–6. doi.org/10.32347/2412-9933.2020.44.49-55 [in Ukrainian].
5. Kossak, O., & Tumashova O. (2003). Metody nablyzhenykh obchyslen [Approximate calculation methods]. Lviv: Bak [in Ukrainian].
6. Kataieva, Ye.Yu., Odokiienko, S.M., & Liuta, M.V. (2024). Praktychnyi analiz yakosti prohramnoho zabezpechennia z vidkrytym kodom [Practical analysis of open source software quality]. Upravlinnia rozvytkom skladnykh system, 44, 49–55. doi.org/10.32347/2412-993 3.2020.44.49-55 [in Ukrainian].
7. Feldman, L.P., Petrenko, A.I., & Dmytriieva O.A. (2006). Chyselni metody v informatytsi [Numerical methods in computer science]. Kyiv: Vydavnycha hrupa BHV [in Ukrainian].
8. Polozhaienko, S.A., & Prokofiev A.Yu. (2024) Modeli vyznachennia nadiinosti dynamichnykh system, funktsionuvannia yakykh kharakteryzuietsia rezhymom profilaktyky [Models for determining the reliability of dynamic systems whose operation is characterized by a prevention mode]. *Vcheni zapysky TNU imeni V.I. Vernadskoho. Seriia: Tekhnichni nauky,* 35 (74), 1, 280–286. doi.org/10.32782/2663-5941/2024.1.1/42 [in Ukrainian].
9. Polozhaienko, S.A., & Prokofiev, A.Yu. (2024). Parametrychna reduktsiia po tochnosti matematychnykh modelei dynamichnykh obiektiv system [Parametric reduction in accuracy of mathematical models of dynamic objects of systems]. *Visnyk Kremenchutskoho natsionalnoho universytetu imeni Mykhaila Ostrohradskoho*, 6 (149), 125–131. doi.org/10.32782/1995-051 9.2024.6.15 [in Ukrainian].
10. Foidl, H., & Felderer, M. (2018). Integrating software quality models into risk-based testing. *Software Quality Journal*, 26, 809–847 [in English].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15

11. Polozhaenko, S.A., & Prokofieva L.L. (2018). Planning of the diagnostic experiment in the localization of troubleshooting failures of single-free systems. *Informatics and Mathematical Methods in Simulation*, 8, 1, 5–16 [in English].
12. Liashenko, B.M., Kryvonos, O.M., & Vakaliuk, T.A. (2014). Metody obchyslen [Calculation methods]. Zhytomyr: Vyd-vo ZhDU [in Ukrainian].

Положаєнко Сергій Анатолійович – д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютеризованих систем та програмних технологій Національного університету «Одеська політехніка». E-mail: sanp277@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4082-8270.

Прокофьєв Андрій Юрійович – аспірант кафедри комп'ютеризованих систем та програмних технологій Національного університету «Одеська політехніка». E-mail: fallbrick1985@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4520-4248.

Polozhayenko Serhiy Anatoliyovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computerized Systems and Software Technologies of the Odessa Polytechnic National University. E-mail: sanp277@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4082-8270.

Prokofiev Andriy Yuriyovych – Postgraduate Student at the Department of Computerized Systems and Software Technologies of the Odessa Polytechnic National University. E-mail: fallbrick1985@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4520-4248.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-15