УДК 532.516

О.Б. ПОЛЬОВИЙ
Інститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України
Д.О. РЕДЧИЦЬ
Інститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України;
Дніпровський державний технічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ КОНІЧНОГО НАБЛИЖЕННЯ РІВНЯНЬ НАВ'Є – СТОКСА ДО КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТРУКТУРИ НАДЗВУКОВИХ ВІДРИВНИХ ТЕЧІЙ

Дослідження надзвукових турбулентних відривних течій є однією з основних проблем сучасної аеродинаміки, яка має як фундаментальне, так і практичне значення. Із практичного погляду просторові розподіли газодинамічних параметрів впливають на аеродинамічні характеристики надзвукових літальних апаратів, компресорів і турбін. Теоретичний інтерес до цього класу течій зумовлений тим, що тут виникають всі основні явища, властиві в'язко-нев'язким взаємодіям: значні градієнти параметрів, відрив потоку, турбулентність, інтенсивний теплообмін з поверхнею, що обтікається. Окремого значення набувають дослідження фізичних особливостей взаємодій ударних хвиль з турбулентним примежовим шаром (SWBLI – Shock Wave/Boundary Layer Interactions).

Відомі результати досліджень взаємодії ударних хвиль із прикордонними шарами отримані переважно експериментальними методами. Однак проведення продувок в аеродинамічних трубах або натурних випробувань пов'язане як з великими фінансовими витратами, так і з обмеженим обсягом даних, що вимірюються.

Рівняння Нав'є – Стокса, середні за Рейнольдсом чи Фавром (RANS), нині є основою обчислювальної аеродинаміки. Повна інформація про течію надає досліднику більше можливостей виявити характерні фізичні особливості потоків, що взаємодіють. Застосування сучасних чисельних методів, диференціальних моделей турбулентності, докладних розрахункових сіток дозволяють відтворювати течії, що досліджуються, з високим ступенем достовірності.

Конічне наближення рівнянь Нав'є – Стокса стисливого газу дозволяє застосовувати для моделювання надзвукових течій із відповідною симетрією відриву потоку більш детальну розрахункову сітку, що приводить до можливості комп'ютерної реконструкції дрібних деталей взаємодії. Неявна кінцево-об'ємна методика другого порядку за простором цієї роботи заснована на схемі Roe. Розглянуто реалізацію диференціальної моделі турбулентності Spalart – Allmaras, адаптованої до надзвукових течій. Верифікацію розроблених х алгоритмів та комплексу програм проведено на задачі надзвукового турбулентного обтікання гострого конуса за закритичного кута атаки.

Ключові слова: *конічне наближення рівнянь Нав'є – Стокса, ударні хвилі, турбулентний примежовий шар, відрив потоку, комп'ютерне моделювання.*

O.B. POLEVOY
Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine
D.O. REDCHYTS
Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine;
Dniprovsky State Technical University

APPLICATION OF THE CONICAL APPROXIMATION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS TO COMPUTER MODELLING OF THE STRUCTURE OF SUPERSONIC SHEAR FLOWS

The study of supersonic turbulent separation flows is one of the main problems of modern aerodynamics, which has both fundamental and practical significance. From a practical point of view, the spatial distributions of gas-dynamic parameters affect the aerodynamic characteristics of supersonic aircraft, compressors, and turbines. The theoretical interest in this class of flows is due to the fact that all the main phenomena characteristic of viscous-inviscid interactions occur here: significant parameter gradients, flow separation, turbulence, intensive heat exchange with the flowing surface. Investigation of the physical features of the shock waves/turbulent boundary layers interactions (SWBLI) acquires special importance.

Known results of studies of the interaction of shock waves with boundary layers were obtained mainly by experimental methods. However, the conducting of the blowing in wind tunnels or full-scale flight tests is associated with both large financial costs and a limited amount of measured data.

The Navier – Stokes equations, Reynolds or Favre averages (RANS), are currently the basis of computational aerodynamics. Complete information about the flow provides the researcher with more opportunities to identify the characteristic physical features of the interacting flows. The use of modern numerical methods, differential turbulence models, and detailed computational grids allows the flow under study to be reproduced with a high degree of reliability.

The conical approximation of the compressible gas Navier – Stokes equations makes it possible to use a more detailed calculation grid for modeling supersonic flows with the appropriate symmetry of the flow separation, which in turn leads to

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

the possibility of computer reconstruction of small details of the interactions. The implicit finite-volume technique in present paper is based on the second order Roe scheme. The implementation of the Spalart – Allmaras differential turbulence model adapted to supersonic flows is considered. Verification of the developed algorithms and the program complex was carried out on the problem of supersonic turbulent flow around a sharp cone at a supercritical angle of attack.

Key words: *conical approximation of Navier – Stokes equations, shock waves, turbulent boundary layer, flow separation, computer simulation.*

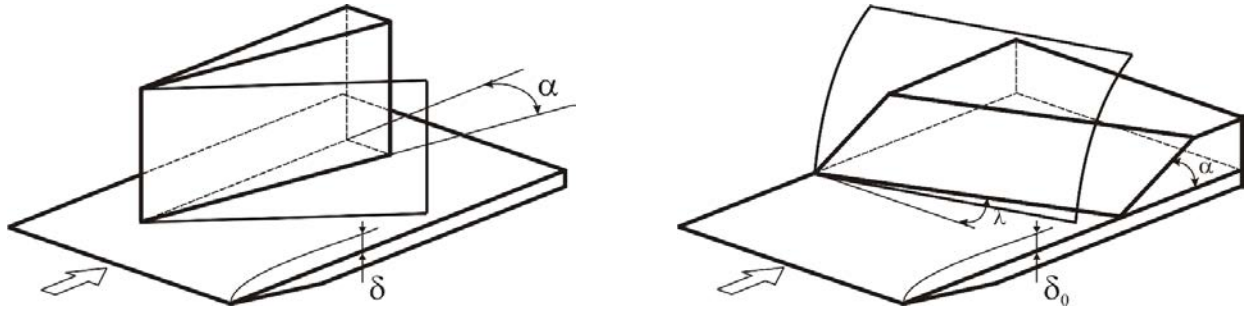
Постановка проблеми

Розглядаються два типи просторових надзвукових течій, у яких виникає взаємодія ударних хвиль із турбулентним примежовим шаром (рис. 1) – гострий вертикальний клин, який установлено на пластині, та просторовий кут стиснення.

Геометричним параметром вертикального клина є кут нахилу в горизонтальної площині α. Відповідно до експериментальних даних [1], $\alpha = 20^0$ для числа Маха незбуреного потоку $M_\infty = 3.03$. Число Рейнольдса, яке визначалось за товщиною примежового шару перед клином δ_0, дорівнювало $\mathrm{Re}_{\delta o} = 2.72 \cdot 10^5$.

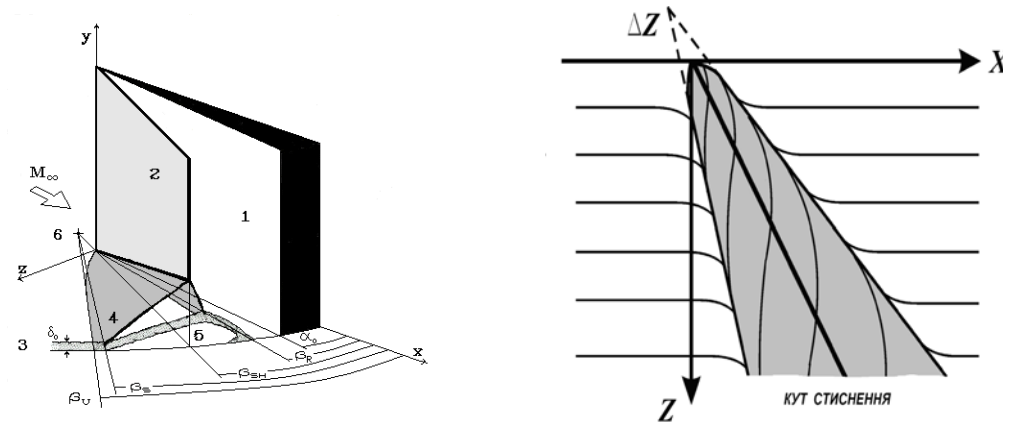
Для просторового кута стиснення геометрія задавалася кутом стиснення $\alpha = 24^0$ та кутом скосу $\lambda = 60^0$. Параметри незбуреного потоку дорівнювали $M_\infty = 2.95$, $\mathrm{Re}_{\delta 0} = 1.42 \cdot 10^6$ [2].

В обох випадках експериментально [1; 2] було зафіксовано наявність конічного режиму розвитку відривної течії турбулентного примежового шару (рис. 2). Цей факт є основою для застосування конічного наближення рівнянь Нав'є – Стокса стисливого газу до комп'ютерного моделювання структури течій, що розглядаються.



а) вертикальний клин б) просторовий кут стиснення

Рис. 1. Генератори просторової взаємодії квазіконічних стрибків ущільнення з турбулентним примежовим шаром



а) вертикальний клин б) просторовий кут стиснення

Рис. 2. Режим розвитку відривної течії турбулентного примежового шару

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Експериментальні дослідження двовимірних взаємодій ударних хвиль із примежовими шарами (далі – SWBLI) почалися ще в 1950-ті рр., що було пов'язано з розвитком ракетно-авіаційної техніки. Вивчалися такі класи течій, як відбиття падаючого стрибка ущільнення; надзвукові кути стиснення та розрідження; відрив поблизу сходинок, звернених униз чи вгору за потоком; вдув струменя в надзвуковий потік, що набігає; відкрита каверна. Дослідження плоско-паралельних надзвукових взаємодій дозволило виявити основні елементи, властиві всім класам SWBLI. Огляди ранніх досліджень даного класу течій можна знайти у [3–5].

Просторові взаємодії ударних хвиль із примежовими шарами вирізняються великою розмаїтістю видів. Широкий діапазон тривимірних взаємодій зумовлений насамперед складною криволінійною геометрією обтічних поверхонь та їх перетинів. У зв'язку із цим у дослідженнях зазвичай використовують модельні конфігурації зі спрощеною геометрією генераторів стрибків і поверхонь, які обтікаються. Єдину натепер класифікацію просторових SWBLI для модельних задач виконано в роботі [6]. Класифікація роботи [6] заснована на аналізі розмірності, що виникає із зіставлення лінійних розмірів генераторів ударних хвиль і масштабів примежового шару, які визначаються числами Маха та Рейнольдса незбуреного потоку.

Натепер кількість наукових статей на тему SWBLI обчислюється сотнями [7–9]. На основі їх огляду можна виділити головні сучасні напрями досліджень:

– вибір тестових випадків на основі експериментальних даних для верифікації методів обчислювальної аеродинаміки;

– поширення області знань SWBLI на гіперзвуковий діапазон швидкостей;

– уточнення та розвиток моделей турбулентності;

– дослідження процесів тепло- та масообміну з поверхнею, що обтікається;

– задачі керування відривом потоку;

– розроблення надійних методів обчислювальної аеродинаміки для моделювання течій у надзвуковому та гіперзвуковому діапазоні швидкостей.

Мета дослідження

Розглянути реалізацію диференціальної моделі турбулентності Spalart – Allmaras, адаптованої до надзвукових течій. Виконати верифікацію розроблених алгоритмів та комплексу програм на задачі надзвукового турбулентного обтікання гострого конуса за закритичного кута атаки.

Виклад основного матеріалу дослідження

Тривимірні рівняння Навье – Стокса стисливого газу. Тривимірні рівняння Нав'є – Стокса в'язкого стисливого газу в довільних криволінійних координатах, пов'язаних з обтічним тілом, можуть бути представлені як [10; 11]:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left\{ \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}_v}{\partial \zeta} \right\}. \tag{1}$$

Тут $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{G}}$, $\hat{\mathbf{E}}_v$, $\hat{\mathbf{F}}_v$, $\hat{\mathbf{G}}_v$ – п'ятикомпонентні вектори, як-от:

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{J}, \quad \mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T, \tag{2}$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e + p) U \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{E}}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} + \xi_z \tau_{xz} \\ \xi_x \tau_{yx} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{yz} \\ \xi_x \tau_{zx} + \xi_y \tau_{zy} + \xi_z \tau_{zz} \\ \xi_x \beta_x + \xi_y \beta_y + \xi_z \beta_z \end{bmatrix}, \tag{3}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (e+p)V \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{F}}_v = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x \tau_{zx} + \eta_y \tau_{zy} + \eta_z \tau_{zz} \\ \eta_x \beta_x + \eta_y \beta_y + \eta_z \beta_z \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (e+p)W \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{G}}_v = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{yx} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x \tau_{zx} + \zeta_y \tau_{zy} + \zeta_z \tau_{zz} \\ \zeta_x \beta_x + \zeta_y \beta_y + \zeta_z \beta_z \end{bmatrix}, \tag{5}$$

де:

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \qquad V = \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \qquad W = \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w, \tag{6}$$

$$\tau_{xx} = \mu\Big[4\left(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta\right) - \tag{7}$$

$$-2\left(\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta + \xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta\right)\Big]/3,$$

$$\tau_{yy} = \mu\Big[4\left(\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta\right) - \tag{8}$$

$$-2\left(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta + \xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta\right)\Big]/3,$$

$$\tau_{zz} = \mu\Big[4\left(\xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta\right) - \tag{9}$$

$$-2\left(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta + \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta\right)\Big]/3,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\Big[\left(\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta + \zeta_y u_\zeta\right) + \left(\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta + \zeta_x v_\zeta\right)\Big], \tag{10}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu\Big[\left(\xi_z v_\xi + \eta_z v_\eta + \zeta_z v_\zeta\right) + \left(\xi_y w_\xi + \eta_y w_\eta + \zeta_y w_\zeta\right)\Big], \tag{11}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\Big[\left(\xi_x w_\xi + \eta_x w_\eta + \zeta_x w_\zeta\right) + \left(\xi_z u_\xi + \eta_z u_\eta + \zeta_z u_\zeta\right)\Big], \tag{12}$$

$$\beta_x = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \frac{1}{(\gamma-1)}\left(\frac{\mu_\ell}{\mathrm{Pr}_\ell} + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\left(\xi_x \frac{\partial a^2}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial a^2}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial a^2}{\partial \zeta}\right), \tag{13}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

$$\beta_y = u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \frac{1}{(\gamma-1)}\left(\frac{\mu_\ell}{\mathrm{Pr}_\ell} + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\left(\xi_y \frac{\partial a^2}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial a^2}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial a^2}{\partial \zeta}\right), \tag{14}$$

$$\beta_z = u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + \frac{1}{(\gamma-1)}\left(\frac{\mu_\ell}{\mathrm{Pr}_\ell} + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\left(\xi_z \frac{\partial a^2}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial a^2}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial a^2}{\partial \zeta}\right). \tag{15}$$

У рівняннях (1–15) прийнято такі позначення: *u, v, w* – компоненти вектора швидкості в напрямках *x, y, z*; ρ, p, e – густина, тиск і повна енергія одиниці об'єму газу; a – швидкість звуку; γ – співвідношення сталих теплоємкостей; μ_ℓ, μ_t – динамічні коефіцієнти молекулярної та турбулентної в'язкості; $\mu = \mu_\ell + \mu_t$ – динамічний коефіцієнт «ефективної» в'язкості; Re – число Рейнольдса; $\mathrm{Pr}_\ell = 0.72$, $\mathrm{Pr}_t = 0.9$ – числа Прандтля для ламінарного та турбулентного режимів течії відповідно.

Система рівнянь (1) доповнюється рівнянням стану ідеального газу:

$$e = \frac{p}{\gamma-1} - \frac{\rho}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right). \tag{16}$$

Метричні коефіцієнти та якобіан перетворення координат визначаються зі співвідношень:

$$\xi_x = J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), \quad \xi_y = -J(x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta), \quad \xi_z = J(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta), \tag{17}$$

$$\eta_x = -J(y_\zeta z_\zeta - y_\zeta z_\zeta), \quad \eta_y = J(x_\zeta z_\eta - x_\zeta z_\eta), \quad \eta_z = -J(x_\zeta z_\zeta - x_\zeta z_\zeta), \tag{18}$$

$$\zeta_x = J(y_\zeta z_\eta - y_\eta z_\zeta), \quad \zeta_y = -J(x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta), \quad \zeta_z = J(x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta), \tag{19}$$

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Рівняння Нав'є – Стокса для течій газу з конічною симетрією

У припущенні про конічність течії декартові координати подаємо так [12]:

$$\begin{cases} x = \zeta \cdot x_1(\xi, \eta) \\ y = \zeta \cdot y_1(\xi, \eta) \\ z = \zeta \cdot z_1(\xi, \eta) \end{cases}. \tag{21}$$

Тут функції $x_1(\xi, \eta)$, $y_1(\xi, \eta)$, $z_1(\xi, \eta)$ відповідають розрахунком області за $\zeta = 1$. Начало координат збігається із «джерелом» конічної симетрії.

Рівняння Нав'є – Стокса (1) для конічних течій можна записати так:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} + \hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_v}{\partial \eta}\right). \tag{22}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

Усі вектори $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{E}}_v$, $\hat{\mathbf{F}}_v$ відповідають тривимірним рівнянням (1) – (15). Джерельний доданок $\hat{\mathbf{H}}$ у припущенні режиму конічності течії має вигляд:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}}{\partial \zeta} = \frac{2}{\zeta}\hat{\mathbf{G}}\,. \tag{23}$$

Диференціальна модель турбулентності Spalart – Allmaras

Для розрахунку коефіцієнта турбулентної в'язкості μ_t використовується однопараметрична диференційна модель Spalart – Allmaras [13]:

$$\mu_t = \rho\tilde{\nu} f_{v1}\,, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}\,, \quad \chi = \frac{\rho\tilde{\nu}}{\mu_\ell}\,, \quad \nu = \frac{\mu_\ell}{\rho}\,. \tag{24}$$

Значення робочої змінної $\tilde{\nu}$ визначається рішенням диференціального рівняння:

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma}\left[\nabla(\nu+\tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu} + c_{b2}(\nabla\tilde{\nu})^2\right] - \\ -c_{w1}f_w\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2 - c_5\frac{\tilde{\nu}^2}{a^2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^2. \tag{25}$$

Останній доданок у рівнянні (25) є додатковим до оригінальної моделі Spalart – Allmaras і призначений для обліку стисливості в надзвукових потоках [12].

У безрозмірному вигляді для довільних криволінійних координат диференціальне рівняння (25) можна подати так:

$$\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial t} + U\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\xi} + V\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\eta} + W\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\zeta} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} - c_{w1}f_w\left[\frac{\tilde{\nu}}{d}\right]^2 - \right. \\ \left. -c_5\frac{\tilde{\nu}^2}{a^2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{(1+c_{b2})}{\sigma}L_1 - \frac{c_{b2}}{\sigma}L_2\right\}. \tag{26}$$

Оператори L_1 і L_2 в довільних координатах можна записати як:

$$L_1 = \xi_x\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\nu+\tilde{\nu})\xi_x\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\xi}\right] + \eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\nu+\tilde{\nu})\eta_x\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\eta}\right] + \zeta_x\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(\nu+\tilde{\nu})\zeta_x\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\zeta}\right] + \\ +\xi_y\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\nu+\tilde{\nu})\xi_y\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\xi}\right] + \eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\nu+\tilde{\nu})\eta_y\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\eta}\right] + \zeta_y\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(\nu+\tilde{\nu})\zeta_y\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\zeta}\right] + \\ +\xi_z\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\nu+\tilde{\nu})\xi_z\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\xi}\right] + \eta_z\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\nu+\tilde{\nu})\eta_z\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\eta}\right] + \zeta_z\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(\nu+\tilde{\nu})\zeta_z\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\zeta}\right], \tag{27}$$

$$L_2 = (\nu+\tilde{\nu})\left[\xi_x\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi_x\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\xi}\right) + \xi_y\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi_y\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\xi}\right) + \xi_z\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi_z\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\xi}\right) + \right. \\ +\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta_x\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\eta}\right) + \eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta_y\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\eta}\right) + \eta_z\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta_z\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\eta}\right) + \tag{28}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

$$+\zeta_x \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta_x \frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\zeta}\right)+\zeta_y \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta_y \frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\zeta}\right)+\zeta_z \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta_z \frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial\zeta}\right)\Bigg].$$

Функції та константи у правій частині рівняння (25):

$$\tilde{S} \equiv S \cdot \mathrm{Re} + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1+\chi f_{v1}}, \tag{29}$$

$$S = \left|rot\bar{V}\right| = \sqrt{\left|\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right|^2}, \tag{30}$$

$$f_w = g\left[\frac{1+c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6}\right], \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}k^2 d^2}, \tag{31}$$

d – відстань до найближчої стінки. Значення констант моделі Spalart – Allmaras: $c_{b1} = 0.1355$, $c_{v2} = 5.0$, $\sigma = 2/3$, $c_{b2} = 0.622$, $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{(1+c_{b2})}{\sigma}$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2$, $c_5 = 3.5$.

Для розрахунку конічних надзвукових течій рівняння (26) спрощуються двовимірні за припущенням $\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv 0$. Оскільки модель Spalart – Allmaras є лінійною щодо робочої змінної $\tilde{\nu}$, то, на відміну від рівнянь Нав'є – Стокса, джерельний доданок тут не створюється.

Чисельний алгоритм та його верифікація

Неявний чисельний алгоритм базувався на схемі Roe в рамках кінцево-об'ємного підходу [14]. Другий порядок точності за простором забезпечувався симетричними обмежувачами потоку [15]. Стаціонарне рішення здобувалось методом установлення за часом.

Чисельний алгоритм, який використовувався, було багаторазово верифіковано на двовимірних і тривимірних задачах дозвукового та надзвукового обтікання тіл різної геометрії [16–18]. Він інтегрований із власним програмно-методичним забезпеченням обчислювальної аеродинаміки, яке розроблено в Інституті транспортних систем і технологій Національної академії наук України [17].

Для верифікації алгоритму розрахунку конічного наближення рівнянь Нав'є – Стокса виконано чисельне моделювання турбулентного обтікання кругового конуса з кутом між віссю та поверхнею $\theta = 12{,}5^0$ за числа Маха $M_\infty = 1{,}8$ незбуреного потоку, за умовами експериментальної роботи [19]. Кут атаки становив $\alpha = 22{,}7^0$, що відповідало закритичному режиму обтікання ($\alpha > \theta$). Вимірювання проводилися у площині перпендикулярної осі конуса й розташованої на відстані L = 876 мм від вершини конуса. Число Рейнольдса, визначене за величиною L, становило $\mathrm{Re} = 2{,}125 \cdot 10^7$. Температурні умови експерименту відповідали наближеній теплоізоляції. В експерименті було зафіксовано строго конічний характер обтікання. Ламінарно-турбулентний перехід відбувався поблизу вершини конуса й не впливав на конічність течії.

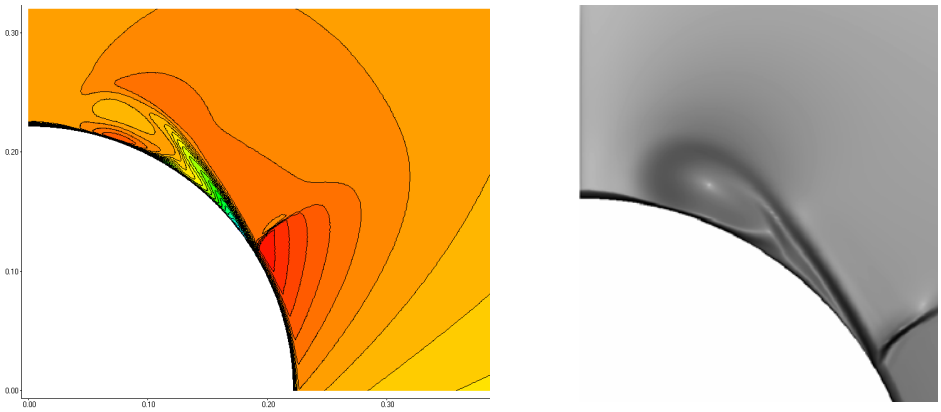
Розрахункова сітка була побудована у правій напівплощині через симетрію течії і містила 700 x 500 вузлів. Із 700 вузлів на поверхні конуса приблизно 500 були на підвітряному боці. Згущення сітки до твердої поверхні забезпечувало умову для безрозмірної координати в найближчій точці $\Delta y^+ < 0{,}3$.

Результати чисельного моделювання ілюструються за допомогою розподілу локальних чисел Маха, чисельної «шлірен-фотографії» в області взаємодії, а також коефіцієнтів тиску та тертя на поверхні конуса (рис. 3–5).

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

За великого значенння відносного кута атаки (α/θ = 1,82) структура закритичного обтікання кругового конуса стає дуже складною. На підвітряному боці утворюється вихрова система (рис. 3–5), що включає як первинний ($S_1 \div R_1$), так і вторинний ($S_2 \div R_2$) відрив. Збільшення тиску на навітряному боці та ступеня розрідження на підвітряному боці призводять у результаті взаємодії поперечних потоків до формування внутрішнього стрибка ущільнення (рис. 3). Лінії первинного стікання (відриву) S_1 і розтікання (приєднання) R_1 утворюються вище потоком за $\varphi_{S1} = 124^0$ та $\varphi_{R1} = 167^0$ відповідно. Усередині первинного відриву розташовується вторинний відрив з лініями стікання S_2 та розтікання R_2 за $\varphi_{S2} = 150^0$ та $\varphi_{R2} = 144^0$ відповідно (рис. 5). Експериментальне значення положення лінії вторинного відриву становило $\varphi_{S2} = 153^0$. Виникнення вторинного відриву призводить до різкого потовщення прикордонного шару на підвітряному боці та перерозподілу коефіцієнта тиску з характерним «провалом» поблизу осі симетрії.

Зіставлення результатів розрахунків з експериментальними даними [19] (рис. 4, 5) показує, що застосування однопараметричної диференціальної моделі Spalart – Allmaras дозволяє відтворювати деталі складної структури в'язко-нев'язкої взаємодії із прийнятною точністю розташування характерних ліній стікання та розтікання просторового конічного відриву.



а) б)

Рис. 3. Розподіл локальних чисел Маха (а) та чисельна «шлірен-фотографія» (б) течії на підвітряному боці за обтікання кругового конуса під кутом атаки

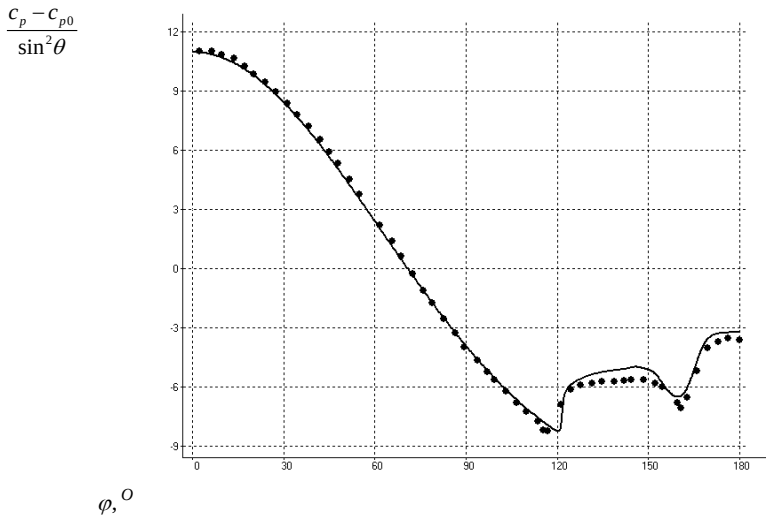


Рис. 4. Розподіл коефіцієнта тиску на поверхні конуса:

● − експериментальні дані [19];

▬ − розрахунок із конічними рівняннями Нав'є – Стокса, сітка 700 x 500

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

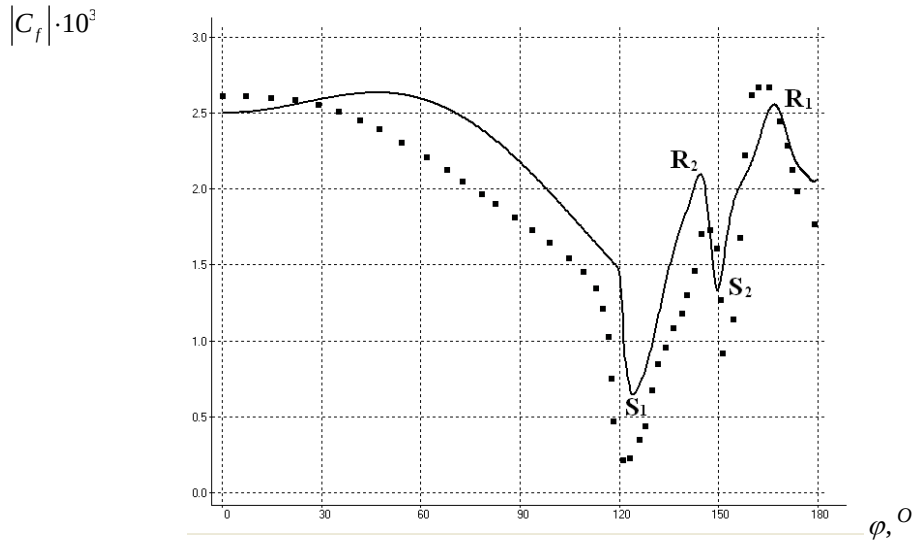


Рис. 5. Розподіл модуля коефіцієнта тертя на поверхні конуса:

■ − експериментальні дані [19];

▬ − розрахунок з конічними рівняннями Нав'є – Стокса, сітка 700 x 500

Основні результати комп'ютерного моделювання

Топологічна структура просторової відривної течії суттєво відрізняється від двовимірного випадку (рис. 2). Для двовимірних течій кожна точка відриву, кожна точка приєднання є особливою точкою граничних ліній струму з нульовим значенням тертя. Для просторового випадку в розподілах граничних ліній струму існують лише дві особливі точки (сідлова та вузлова), які перебувають у площині симетрії XOY за Z = 0. Лінія відриву утворюється як асимптотична лінія стікання граничної лінії струму, а приєднання потоку відповідає асимптотичному розтіканню граничної лінії струму (рис. 2-б). На відміну від двовимірної течії, уздовж ліній відриву та приєднання значення тертя не дорівнює нулю. У просторі формується так званий підковоподібний вихор, який може розширюватися згідно з конічною подобою.

Взаємодія, спричинена гострим вертикальним клином (рис. 1-а, 2-а), є найпростішою з усіх конічних взаємодій. Це пов'язано з тим, що здатність головної ударної хвилі до взаємодії із прикордонним шаром добре відома із класичної теорії косого стрибка ущільнення. Водночас ця взаємодія призводить до фундаментальних змін структури потоку як для головної ударної хвилі, так і для прикордонного шару, після чого течія більше не може розглядатися як «проста».

Загальна структура взаємодії, зумовленої гострим вертикальним клином, може бути представлена схемою (рис. 2-а), отриманою на основі узагальнення експериментальних [1] даних, а також експериментальними та чисельними шлірен-фотографіями (рис. 6).

Розрахункова сітка містила 650 x 600 вузлів у площині, перпендикулярній головному стрибку ущільнення. Для забезпечення значення $\Delta y^+ < 1{,}0$ в області приєднання потоку на пластині згущення сітки вимагало відповідного значення $\Delta y^+ < 0{,}03$ у незбуреному примежовому шарі.

Аналіз експериментальних даних і результатів обчислювальних експериментів, проведених у цій роботі, дозволив виділити ієрархію для елементів структури просторового турбулентного відриву. Первинний рівень визначається поділом головної ударної хвилі на стрибок відриву та тильний стрибок, формуванням характерної лямбда-ніжки, первинного відриву у формі підковоподібного вихору. Варто зазначити, що перебіг усередині відривної зони як для вертикальних клинів, так і для стрілоподібних кутів стиснення був надзвуковим. Наприклад, для вертикального клина з <<Eqn100.eps>> і кутом клина <<Eqn101.eps>> максимальне локальне значення числа Маха у відривній ділянці становило $M_{MAX} = 2{,}31$.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

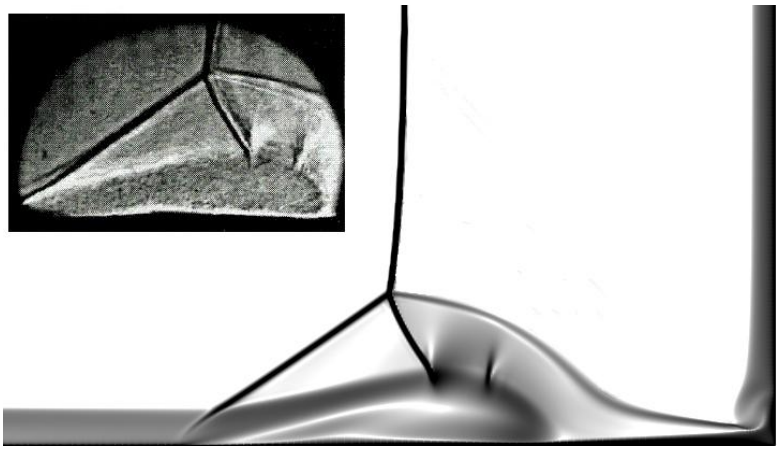


Рис. 6. Експериментальна [1] та чисельна шлірен-фотографії даної роботи з використанням конічних рівнянь Нав'є – Стокса за $\alpha = 20^0$

До явищ, що відповідають другому рівню, можна віднести формування внутрішніх хвиль розрідження та стрибка ущільнення в області між тильним стрибком і зоною приєднання первинного відриву, а також утворення системи кутових вихорів, появу вторинного відриву (рис. 6). За наявності розвиненого вторинного відриву можна назвати третій рівень – виникнення додаткових структур усередині відривної течії.

Задача про надзвукову турбулентну течію у просторовому стрілоподібному куті стиснення (рис. 1-б, 2-б) була розглянута з використанням як тривимірних, так і конічних рівнянь Нав'є – Стокса. Для конічних рівнянь Нав'є – Стокса застосовувалася сітка, що містить 700 х 500 вузлів у площині XOY на відстані $Z = 8 \cdot \delta_0$ від початку взаємодії. Для тривимірних рівнянь Нав'є – Стокса було побудовано сітку розміром $141 \times 211 \times 101 \approx 3{,}0 \cdot 106$ вузлів.

Загальна структура взаємодії ударної хвилі із прикордонним турбулентним шаром поблизу стрілоподібних кутів стиснення представлена розподілами чисел локальних Маха просторових і граничних ліній струму, а також чисельної шлірен-фотографії (рис. 7–9).

Ізолінії локальних чисел Маха (рис. 7) показані на вихідній межі й у площинах, паралельних площині XOY. Виразно видно від'єднану головну ударну хвилю, яка генерується кутом стиснення, турбулентний прикордонний шар, що набігає. Наявність дозвукової зони у прикордонному шарі призводить до передачі збурень вгору потоком. Головна ударна хвиля руйнується з утворенням характерної лямбда-ніжки [2]. Передній стрибок (стрибок відриву) і тильний стрибок утворюються із хвиль стиснення в надзвуковій частині прикордонного шару. З віддаленням від площини початку взаємодії потрійна точка перетину стрибків ущільнення зміщується вгору з формуванням нижче потоку конічноподібної течії.

Перепад тиску на головній ударній хвилі досить великий для розвитку відривної течії. З погляду топології відриву потоку утворюється класичний підковоподібний вихор. Вихрова структура сформованих відривних течій може бути ілюстрована розподілами просторових та граничних ліній струму на рис. 8. Нижня частина незбуреного примежового прикордонного шару залучається у джгутоподібний вихор, який поширюється вздовж лінії кута стиснення. Перехід від прикордонного шару, що набігає, до вихрової структури відбувається вздовж лінії відриву, до якої сходяться граничні лінії струму. Верхня частина прикордонного шару приєднується на похилій поверхні кута стиснення, що проявляється в характерному розтіканні граничних ліній струму. Варто зауважити, що ядро відривного вихору аналогічно вертикальному клину теж є надзвуковим. Максимальне число Маха всередині відриву становило $M_{MAX} = 1{,}99$ для $M_\infty = 2{,}95$ незбуреного потоку.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

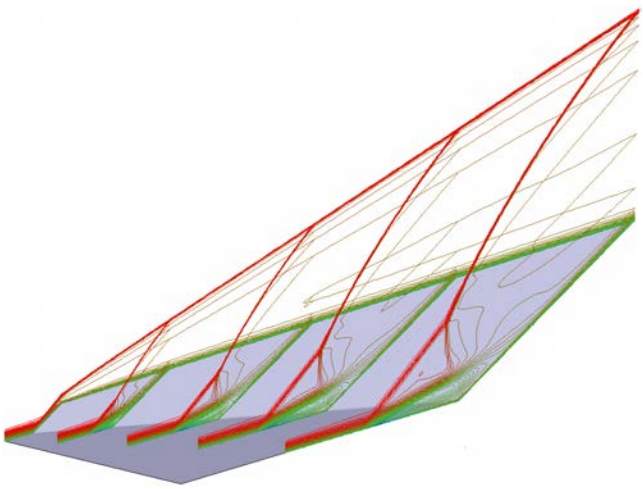


Рис. 7. Розподіл локальних чисел Маха в області взаємодії для стрілоподібного кута стиснення за $\lambda = 60^0$, $\alpha = 24^0$ із застосуванням тривимірних рівнянь Нав'є – Стокса

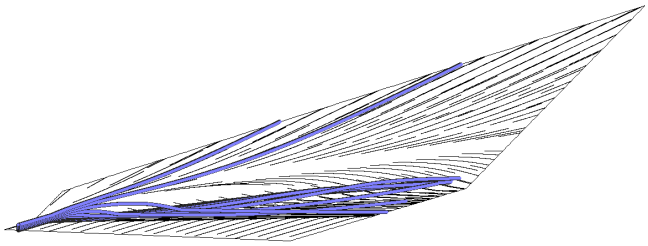


Рис. 8. Розподіли просторових і граничних ліній струму для стрілоподібного кута стиснення за $\lambda = 60^0$, $\alpha = 24^0$, із застосуванням тривимірних рівнянь Нав'є – Стокса

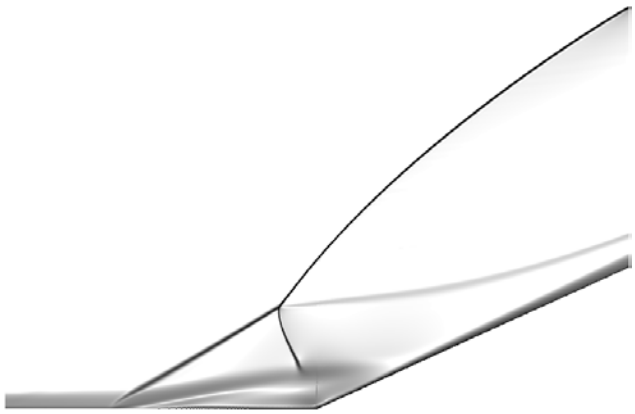


Рис. 9. Чисельна шлірен-фотографія для стрілоподібного кута стиснення за $\lambda = 60^0$, $\alpha = 24^0$, з використанням конічних рівнянь Нав'є – Стокса за $\alpha = 20^0$

Чисельна шлірен-фотографія у вертикальній площині показує (рис. 9) головну ударну хвилю, стрибок відриву, тильний стрибок і відривну зону. Особливістю течії у стрілоподібному куті стиску за $\lambda = 60^0$, $\alpha = 24^0$ є положення тильного стрибка ущільнення, що йде вздовж лінії кута стиснення. Саме таке розташування тильного стрибка призводить до виникнення локального піку тиску всередині відривної області (рис. 10). Характерний прогин тиску перед лінією кута стиснення пов'язаний з утворенням хвиль розрідження над відривною зоною. Окрім того, спостерігається пік тиску в області приєднання, що утворюється за наявності розвиненої конічної течії.

Завдяки застосуванню дрібної сітки під час використання конічних рівнянь Нав'є – Стокса вдалося краще відтворити як цей прогин тиску, так і пік тиску області приєднання потоку.

Висновки

Розроблено та верифіковано неявний чисельний алгоритм розв'язку рівнянь Нав'є – Стокса в конічному наближенні. Проведено комп'ютерне моделювання просторових надзвукових турбулентних течій за обтікання гострого вертикального клина,

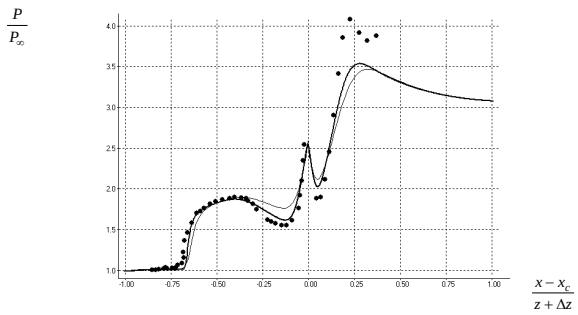


Рис. 10. Розподіл тиску на поверхні стрілоподібного кута стиснення в конічних координатах:

● – експериментальні дані [2];

▬ – розрахунок із конічними рівняннями Нав'є – Стокса, сітка 700 x 500;

— – розрахунок із тривимірними рівняннями Нав'є – Стокса, сітка 141 × 211 × 101

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

який установлено на пластині, та стрілоподібного кута стиснення. Виконано порівняння отриманих результатів із відомими експериментальними даними, а також із розрахунками на основі тривимірних рівнянь Нав'є – Стокса. Показано, що за рахунку застосування дрібної сітки під час використання конічних рівнянь Нав'є – Стокса вдається чисельно реконструювати подробиці взаємодій ударних хвиль із турбулентним примежовим шаром.

Список використаної літератури

1. Settles G.S., Lu F.K. Conical similarity of shock/boundary-layer interactions generated by swept and unswept fins. *AIAA Journal*. 1985. № 23. P. 1021–1027.
2. Settles G.S., Horstman C.C., McKenzie T.M. Experimental and computational study of a swept compression corner interaction flowfield. *AIAA Journal*. 1986. № 24. P. 744–752.
3. Green J.E. Interactions between shock waves and turbulent boundary layers. *Progress in aerospace sciences*. 1970. № 11. P. 235–340.
4. Adamson T.C., Messiter A.F. Analysis of two-dimensional interaction between shock waves and boundary layers. *Annual review of fluid mechanics.* 1980. № 12. P. 103–138.
5. Dolling D. Fifty years of shock wave boundary layer interaction research: what next? *AIAA Journal*. 2001. № 39. P. 1517–1531.
6. Settles G.S., Dolling D.S. Swept Shock Wave/Boundary-Layer Interactions (Review). In book: Tactical Missile Aerodynamics, Chapter: 8. Publisher: American Institute of Aeronatics and Astronautics. 1986. P. 297–379.
7. Lillard R.P. Turbulence Modeling for Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interactions. *Biblioscholar*. 2013. P. 218.
8. Wagner A. Experimental Hypersonic Shock/Boundary-Layer Interaction Studies on a Flat Plate at Elevated Surface Temperature. DEUTSCHES ZENTRUM FUR LUFT – UND RAUMFAHRT E.V. Report AFRL-AFOSR-UK-TR-2022-0026-45. 2022.
9. Chen Y. Shock Wave-Boundary Layer Interaction: A Survey of Recent Development. *Highlights in Science, Engineering and Technology*. 2024. № 12. P. 422–430.
10. Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H. Computational fluid mechanics and heat transfer. Taylor & Francis. New York. 1997.
11. Pulliam T.H. Efficient solution methods for the Navier-Stokes equations. Lecture notes for the von Karman Institute for Fluid Dynamics. Lecture Series, Von Karman Institute. 1985.
12. Lin A., Rubin S.G. Three-dimensional supersonic viscous flow over cone at incidence. *AIAA Paper.* 1981. P. 192.
13. Spalart P.R. Strategies for turbulence modelling and simulation. Intern. *Journal of Heat and Fluid Flow*. 2000. № 21. P. 252–263.
14. Roe P.L. Approximate Riemann schemes. *Journal of Computational Physics*. 1987. № 43. P. 357–372.
15. Jameson A. Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 1995. № 4. P. 171–218.
16. Pylypenko A.O., Polevoy O.B., Prykhodko O.A. Numerical simulation of Mach number and angle of attack influence on regimes of transonic turbulent flows over airfoils. *TsAGI Science Journal.* 2012. № 43 (1). P. 1–36.
17. Redchyts D.O., Polevoy O.B. Numerical simulation of the conjugate problems of computational aerodynamics. *Internationally-scientific conference "Modern information and technology on transport"*. (Kherson, 15–18.04.2015). Kherson. 2015. P. 217–220.
18. Polevoy O.B., Redchyts, D.O. Two Shock Waves Self-Induced Oscillations over NACA 0012 Airfoil at Low Angles of Attack. *Topical Problems of Fluid Mechanics*. (Prague, 12–14.12.2023). Prague, 2023. P. 137–144. https://doi.org/10.14311/TPFM.2023.019
19. Rainbird W.J. Turbulent boundary-layer growth and separation on a yawed cone. *AIAA Journal*. 1968. № 6 (12). P. 2410–2416.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

References

1. Settles, G.S., & Lu, F.K. (1985). Conical similarity of shock/boundary-layer interactions generated by swept and unwept fins. *AIAA Journal*, 23, 1021–1027 [in English].
2. Settles, G.S., Horstman, C.C., & McKenzie, T.M. (1986). Experimental and computational study of a swept compression corner interaction flowfield. *AIAA Journal*, 24, 744–752 [in English].
3. Green, J.E. (1970). Interactions between shock waves and turbulent boundary layers. *Progress in aerospace sciences*, 11, 235–340 [in English].
4. Adamson, T.C., & Messiter, A.F. (1980). Analysis of two-dimensional interaction between shock waves and boundary layers. *Annual review of fluid mechanics*, 12, 103–138 [in English].
5. Dolling, D. (2001). Fifty years of shock wave boundary layer interaction research: what next? *AIAA Journal*, 39, 1517–1531 [in English].
6. Settles, G.S., & Dolling, D.S. (1986) Swept Shock Wave/Boundary-Layer Interactions (Review). In book: *Tactical Missile Aerodynamics*, Chapter: 8. Publisher: American Institute of Aeronatics and Astronautics, 297–379 [in English].
7. Lillard, R.P. (2013). Turbulence Modeling for Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interactions. *Biblioscholar*. 218 pp. [in English].
8. Wagner, A. (2022) Experimental Hypersonic Shock/Boundary-Layer Interaction Studies on a Flat Plate at Elevated Surface Temperature. DEUTSCHES ZENTRUM FUR LUFT – UND RAUMFAHRT E.V. Report AFRL-AFOSR-UK-TR-2022-0026-45 [in English].
9. Chen, Y. (2024). Shock Wave-Boundary Layer Interaction: A Survey of Recent Development. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 12, 422–430 [in English].
10. Tannehill, J.C., Anderson, D.A., & Pletcher, R.H. (1997). *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Taylor & Francis, New York [in English].
11. Pulliam, T.H. (1985). *Efficient solution methods for the Navier-Stokes equations*. Lecture notes for the von Karman Institute for Fluid Dynamics. Lecture Series, Von Karman Institute [in English].
12. Lin, A., & Rubin, S.G. (1981). Three-dimensional supersonic viscous flow over cone at incidence. *AIAA Paper*, 192 p. [in English].
13. Spalart, P.R. (2000). Strategies for turbulence modelling and simulation. Intern. Journal of Heat and Fluid Flow, 21, 252–263 [in English].
14. Roe, P.L. (1981). Approximate Riemann schemes. *Journal of Computational Physics*, 43, 357–372 [in English].
15. Jameson, A. (1995). Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 4, 171–218 [in English].
16. Pylypenko, A.O., Polevoy, O.B., & Prykhodko, O.A. (2012). Numerical simulation of Mach number and angle of attack influence on regimes of transonic turbulent flows over airfoils. *TsAGI Science Journal*, 43 (1), 1–36 [in English].
17. Redchyts, D.O., & Polevoy, O.B. (2015). Numerical simulation of the conjugate problems of computational aerodynamics. *Internationally-scientific conference "Modern information and technology on transport"*. (Kherson, 15–18.04.2015). Kherson [in English].
18. Polevoy, O.B., & Redchyts, D.O. (2023) Two Shock Waves Self-Induced Oscillations over NACA 0012 Airfoil at Low Angles of Attack. *Topical Problems of Fluid Mechanics*. (Prague, 12–14.12.2023). Prague. https://doi.org/10.14311/TPFM.2023.019 [in English].
19. Rainbird, W.J. (1968). Turbulent boundary-layer growth and separation on a yawed cone. *AIAA Journal*, 6 (12), 2410–2416 [in English].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16

Польовий Олег Борисович – к.ф.-м.н, ст. наук. співр. Інституту транспортних систем і технологій НАН України. E-mail: obp.dnepr@gmail.com, ORCID: 0009-0001-6756-1078.

Редчиць Дмитро Олександрович – д.ф.-м.н., ст. наук. співр., директор Інституту транспортних систем і технологій НАН України; професор кафедри математичного моделювання та системного аналізу Дніпровського державного технічного університету. E-mail: redchits_da@ua.fm, ORCID: 0000-0001-8538-6026.

Polovyi Oleh Borysovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Scientist in the Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: obp.dnepr@gmail.com, ORCID: 0009-0001-6756-1078.

Redchyts Dmytro Oleksandrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher, Director of the Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine, Professor of the Department of Mathematical Modelling and System Analysis of the Dniprovsky State Technical University. E-mail: redchits_da@ua.fm, ORCID: 0000-0001-8538-6026.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-16