

УДК 539.3

С.І. ГОМЕНЮК, С.М. ГРЕБЕНЮК, Н.І.-В. МАНЬКО, О.Г. СПИЦЯ
Запорізький національний університет

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ШТАМПІВ ТА ГУМОВОКОРДНОЇ СМУГИ

Розглянуто гумовокордні матеріали, що складаються із слабкостисливої гумової матриці та металевих волокон. Наявність різних матеріалів унеможливило безпосередні розрахунки для переважної більшості задач, тому, попередньо, за відомими співвідношеннями проведено гомогенізацію даних матеріалів. Для цього використано співвідношення для ефективних пружних сталих волокнистих композитів на основі формул Ваніна Г. А.

Для визначення напружено-деформованого стану тіла використано моментну схему скінченних елементів. У зоні контакту дискретизацію проведено просторовими шестигранними скінченними елементами скінченних розмірів. Для моделювання нескінченних розмірів гомогенізованого матеріалу застосовано спеціальні апроксимуючі функції, які дозволяють відобразити скінченні розміри скінченного елемента в локальній системі координат у нескінченні в глобальній системі координат. Для розробленого скінченного елемента армування волокнами відбувається у площинах, паралельних одній із граней елемента, що має нескінченний розмір.

Моделювання контактної взаємодії штампів із багатошаровими середовищами здійснено на основі тривимірного методу скінченних елементів. Розв'язання задачі проведено в ітераційному процесі за умови непроникнення одного тіла в інше, що забезпечувалося підбором вектору додаткового навантаження.

За допомогою програмного комплексу «МІРЕЛА+» розв'язано низку контактних задач для багатошарових середовищ. Для тришарової гумовокордної смуги визначено напружено-деформований стан в умовах контакту із системою штампів у вигляді двох еліптичних параболоїдів. Досліджено розподіл максимальних стискаючих (контактних) напружень та деформацій бічної поверхні смуги для різних значень об'ємної долі волокна у композиті. Проведено порівняння напружено-деформованого стану гумовокордної смуги при різних відстанях між штампами та різних схем укладання волокон у шарах смуги.

Ключові слова: контактна задача, напружено-деформований стан, моментна схема, метод скінченних елементів, «нескінченний» скінченний елемент, гумовокордний матеріал.

С.И. ГОМЕНЮК, С.Н. ГРЕБЕНЮК, Н.И.-В. МАНЬКО, О.Г. СПИЦА
Запорожский национальный университет

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ШТАМПОВ И РЕЗИНОКОРДНОЙ ПОЛОСЫ

Рассмотрены резинокордные материалы, состоящие из слабосжимаемой резиновой матрицы и металлических волокон. Наличие разнородных материалов исключает непосредственные расчеты для подавляющего большинства задач, поэтому предварительно, по известным соотношениям, проведена гомогенизация данных материалов. Для этого использовано соотношение для эффективных упругих постоянных волокнистых композитов на основе формул Ванина Г. А.

Для определения напряженно-деформированного состояния тела использована моментная схема конечных элементов. В зоне контакта дискретизация проведена пространственными шестигранными конечными элементами конечных размеров. Для моделирования бесконечных размеров гомогенизированного материала использованы специальные аппроксимирующие функции, позволяющие отображать конечные размеры конечного элемента в локальной системе координат в бесконечные в глобальной системе координат. Для разработанного конечного элемента армирование волокнами происходит в плоскостях, параллельных одной из граней элемента, имеющей бесконечный размер.

Моделирование контактного взаимодействия штампов с многослойными средами осуществлено на основе трехмерного метода конечных элементов. Решение задачи проведено в итерационном процессе при условии непроникновения одного тела в другое, что осуществлялось подбором вектора дополнительной нагрузки.

С помощью программного комплекса "Мирела+" решен ряд контактных задач для многослойных сред. Для трехслойной резинокордной полосы определено напряженно-деформированное состояние в условиях контакта с системой штампов в виде двух эллиптических параболоидов. Исследовано

распределение максимальных сжимающих (контактных) напряжений и деформаций боковой поверхности полосы для различных значений объемной доли волокна в композите. Проведено сравнение напряженно-деформированного состояния резинокордной полосы при различных расстояниях между штампами и различных схемах укладки волокон в слоях полосы.

Ключевые слова: контактная задача, напряженно-деформированное состояние, моментная схема, метод конечных элементов, «бесконечный» конечный элемент, резинокордный материал.

S.I. HOMENYUK, S.M. GREBENYUK, N.I.-V. MANKO, O.G. SPYTSIA
Zaporizhzhia National University

NUMERICAL MODELLING OF CONTACT INTERACTION STAMPS AND RUBBER-CORD STRIP

Rubber-cord materials consisting of a weakly compressible rubber matrix and metal fibers have been considered. The presence of different materials makes it impossible to direct calculations for the vast majority of problems therefore before this by known ratios has been carried out homogenization of these materials. For this purpose, the relations for effective elastic stable fibrous composites constants on the formulas of Vanin G. A. have been used.

The moment scheme of finite elements has been used to determine the stress-strain state of the body. In the contact zone, the sampling has been performed by spatial hexahedral finite elements of finite dimensions. For modeling of infinite dimensions of the homogenized material, according to the moment scheme of a finite element, are used the special approximating functions, which allow to display the finite dimensions of the finite element in the infinite global coordinate system. For the developed finite element, fiber reinforcement takes place in planes parallel to one of the faces of the element, which has an infinite size.

Modeling of contact interaction of stamps with multilayer environments has been carried out on the basis of the finite element method. The solution of the problem has been carried out in the iterative process under the condition of non-penetration of one body into another, which was provided with the selection of the vector of additional load.

A number of contact problems for multilayer environments have been solved with the help of the MIRELA + software package. The stress-strain state in the conditions of contact with the system of stamps in the form of two elliptical paraboloids has been determined for the three-layer rubber-cord strip. The distribution of maximum compressive (contact) stresses and deformations of the side surface of the strip for different values of the volume fraction of fiber in the composite has been studied. A comparison of the stress-strain state of the rubber cord strip at different distances between stamps and different schemes of laying fibers in the layers of the strip has been made.

Keywords: contact problem, stress-strain state, moment scheme, finite element method, “infinite” finite element, rubber-cord material.

Постановка проблеми

Унікальне поєднання механічних властивостей композиційних матеріалів дозволяє їм знаходити нові сфери застосування у різноманітних галузях промисловості: енергетиці, аерокосмічній техніці, будівництві, транспорті тощо. Так, однією із ніш, де вони використовуються, є застосування композиційних матеріалів при створенні транспортних стрічок, ескалаторів, конвеєрних полотен, спортивних та транспортних дорожніх покриттів.

Визначення напружено-деформованого стану таких конструкцій стикається із низкою складнощів математичного та обчислювального характеру. Так, наявність композиційного матеріалу, який за своєю структурою є неоднорідним, призводить до ускладнення математичної моделі конструкції, яка певним чином повинна враховувати наявність значної кількості армуючих елементів. Окрім цього, описані конструкції представляють собою елементи із особливими геометричною формою та розмірами. Це, як правило, замкнені смуги або смуги із дуже значною довжиною, які можна вважати нескінченними. В процесі експлуатації такі конструкції випробовують навантаження у локальній області, яка за розмірами значно поступається довжині

конструкції. Тому моделювання нескінченних розмірів є важливою проблемою при розв'язанні практичних задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Метод скінченних елементів був застосований для дослідження нескінченних площ в одновимірних та двовимірних формулюваннях. Застосування «нескінченного» скінченного елемента з використанням ANSYS для вирішення динамічної задачі показано в одно- та двовірних випадках [1]. У статті [2] запропоновано підвищення точності розрахунків за допомогою спеціальних апроксимаційних функцій для «нескінченного» скінченного елемента. Дослідження нескінченного двовимірного середовища з нескінченим кінцевим елементом описано у монографії [3]. У статті [4] представлено вирішення статичних задач для нескінченних площ через «нескінченні» скінченні елементи. Аналіз підземних розкопок для необмежених площ на основі методу нескінченних елементів наведено в [5]. Побудова матриці жорсткості нескінченного скінченного елемента для ізотропного слабкого пружного матеріалу розроблена у тривимірному випадку [6].

Мета дослідження

Метою дослідження є чисельне моделювання контактної взаємодії системи штампів із гумовокордною смугою нескінченного розміру та аналіз впливу параметрів задачі (схема армування, розташування штампів, об'ємний вміст волокна у композиті) на напружено-деформований стан смуги.

Викладення основного матеріалу дослідження

Для моделювання нескінченного у одному напрямку середовища із волокнистого композиційного матеріалу використаємо шестигранний просторовий скінченний елемент.

Початок системи координат скінченного елемента розмістимо у центрі куба, осі розташуємо так, щоб вони були паралельні ребрам скінченного елемента, причому вісь x_3 відповідає нескінченному напрямку. Введемо дві локальні системи координат: локальну систему координат скінченного елемента та локальну систему армування. Армування проводиться у площині x_2Ox_3 . Система координат скінченного елемента $Ox_1x_2x_3$ і система координат армування $Ox_1''x_2''x_3''$ зв'язані кутом α , який визначає напрям укладки волокна відносно осі x_2 (рис. 1).

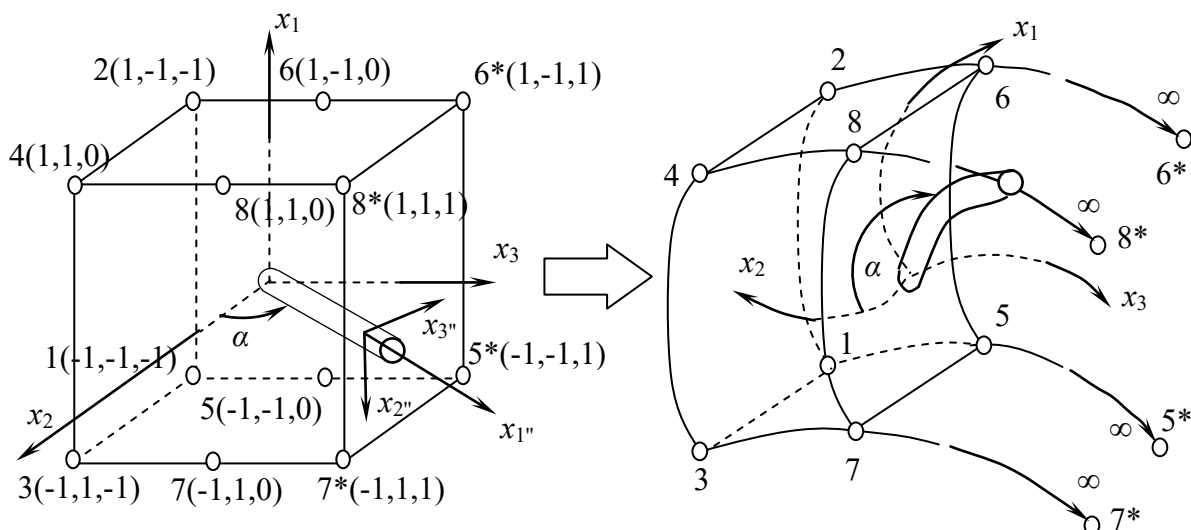


Рис. 1. «Нескінченний» скінченний елемент для волокнистого композиційного матеріалу

За допомогою спеціальних апроксимуючих функцій змодуємо нескінченність у глобальній декартовій системі координат $(O'z'_1z'_2z'_3)$. Спеціальні апроксимуючі функції підберемо так, щоб вузли 5^* , 6^* , 7^* , 8^* відображалися на нескінченності у напрямку осі z'_3 .

Побудуємо матрицю жорсткості «нескінченного» скінченного елемента на основі варіаційного принципу Лагранжа: $\delta\tilde{\Pi} = \delta\tilde{W} - \delta\tilde{A}$, де $\tilde{\Pi}$ – потенційна енергія конструкції, \tilde{W} – енергія пружної деформації конструкції, \tilde{A} – робота зовнішніх сил.

Розглянемо варіацію енергії пружної деформації окремого скінченного елемента у матричній формі:

$$\delta W = \iiint_V \{\delta \varepsilon_{ij}\}^T [C^{ijkl}] \{\varepsilon_{kl}\} dV, \quad (1)$$

де $\{\varepsilon_{kl}\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}\}$ – вектор деформацій, $[C^{ijkl}]$ – матриця пружних сталей матеріалу у системі координат скінченного елемента x_i .

У системі координат армування композиційний матеріал представляється однорідним транстропним. Ефективні пружні властивості транстропного матеріалу визначаються п'ятьма механічними характеристиками: E_1, E_2 – модулями пружності (повздожнім та поперечним, відповідно), G_{12}, G_{23} – модулями зсуву та ν_{12} – коефіцієнтом Пуассона. Тут перший напрямок визначається напрямком армування волокнами, а другий і третій визначають площину ізотропії матеріалу. Інші пружні сталі визначаються так: $\nu_{21} = \nu_{12}E_2/E_1, \nu_{23} = E_2/(2G_{23}) - 1, \nu_{13} = \nu_{12}, \nu_{31} = \nu_{21}, \nu_{32} = \nu_{23}, E_3 = E_2, G_{13} = G_{12}$.

Компоненти тензора пружних сталей $C^{i^*j^*k^*l^*}$ для транстропного середовища в системі координат армування x_{m^*} визначаються за такими формулами [7]:

$$\begin{aligned} C^{1^*1^*1^*1^*} &= E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})/\Delta^*, \quad C^{1^*1^*2^*2^*} = E_2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})/\Delta^*, \quad C^{1^*1^*3^*3^*} = E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})/\Delta^*, \\ C^{2^*2^*1^*1^*} &= E_1(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{32})/\Delta^*, \quad C^{2^*2^*2^*2^*} = E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})/\Delta^*, \quad C^{2^*2^*3^*3^*} = E_3(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})/\Delta^*, \\ C^{3^*3^*1^*1^*} &= E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})/\Delta^*, \quad C^{3^*3^*2^*2^*} = E_2(\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12})/\Delta^*, \quad C^{3^*3^*3^*3^*} = E_3(1 - \nu_{21}\nu_{12})/\Delta^*, \\ C^{1^*2^*1^*2^*} &= G_{12}/2, \quad C^{1^*3^*1^*3^*} = G_{13}/2, \quad C^{2^*3^*2^*3^*} = G_{23}/2, \\ \Delta^* &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32}, \end{aligned}$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності у відповідних напрямках системи армування, G_{ij} – модулі зсуву транстропного матеріалу, ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона.

При розв'язанні просторових задач використовують ефективні пружні сталі, отримані на основі різних теорій. Так, формули Ваніна Г. А. [8], мають наступний вид:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_c f + E_m(1 - f), \quad \nu_{12} = \nu_m - \frac{gf(\chi_m + 1)(\nu_m - \nu_c)}{(1 - f)(\chi_c - 1) + g(2 - f + f\chi_m)}, \\ E_2 &= \left\{ \frac{\nu_{12}^2}{E_1} + \frac{\chi_m + 1}{8G_m} \left[\frac{\chi_c - 1 + 2g}{(1 - f)(\chi_c - 1) + g(2 - f + f\chi_m)} - \frac{2(g - 1)f}{1 - f + g(f + \chi_m)} \right] \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

$$G_{12} = \frac{1-f+g(f+1)}{f+1+g(1-f)} G_m, \quad G_{23} = \frac{1-f+g(f+\chi_m)}{\chi_m(f+g(1-f))+1} G_m,$$

де $\chi_c = 3 - 4\nu_c$.

Для перетворень пружних сталих $C^{i'j'k'l'}$ із системи координат армування у систему координат скінченного елемента використовують тензор перетворень:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Згідно моментної схеми скінченного елемента апроксимація переміщень прийме вигляд:

$$u_{k'} = \{\psi_{ij}\} \{\omega_{k'}\}^T, \quad (2)$$

де $\{\omega_{k'}\} = \{\omega_{k'}^{(000)}, \omega_{k'}^{(100)}, \omega_{k'}^{(010)}, \omega_{k'}^{(110)}, \omega_{k'}^{(001)}, \omega_{k'}^{(101)}, \omega_{k'}^{(011)}, \omega_{k'}^{(111)}\}$ – вектор коефіцієнтів розкладання, $\{\psi_{ij}\} = \{1, x_1, x_2, x_1x_2, x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$ – вектор степеневих функцій.

Тензор деформацій також розкладемо за степеневими функціями:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{\psi_{ij}\} \{e_{ij}\}. \quad (3)$$

Коефіцієнти розкладання e_{ij} можна записати через коефіцієнти апроксимації переміщень $\omega_{k'}^{(pqr)}$ таким чином:

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (4)$$

Враховуючи наведені залежності, варіація пружної енергії деформації (1) прийме вид:

$$\delta W = \iiint_V \{\delta e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} \{e_{kl}\} dV.$$

Координату довільної точки конструкції можна представити через координати вузлових точок скінченного елемента та функції форми $z_{k'} = \sum_{L=0}^8 N_L(x_1, x_2, x_3) \bar{z}_{k'}^L$. Тут $z_{k'}^L$ – k' -а координата L -ого вузла в базисній системі координат (рис. 1), $k' = 1, 2, 3$; $L = \overline{1, 8}$, $N_L(x_1, x_2, x_3)$ – функції форми L -ого вузла. Для нескінченного скінченного елемента вони матимуть вид:

для вузлів 1-4:

$$N_L(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4} (1 + x_1 x_1^L) (1 + x_2 x_2^L) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \quad (5)$$

для вузлів 5-8:

$$N_L(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4} (1 + x_1 x_1^L) (1 + x_2 x_2^L) \left(1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right), \quad (6)$$

де x_i^L – i -а координата L -ого вузла в системі координат скінченного елемента; $i = 1, 2, 3$; $L = \overline{1, 8}$.

Згідно правил моментної схеми остаточно для деформацій (3) будемо мати:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)} \psi^{010} + e_{11}^{(001)} \psi^{001} + e_{11}^{(011)} \psi^{011}, \quad \varepsilon_{22} = e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)} \psi^{100} + e_{22}^{(001)} \psi^{001} + e_{22}^{(101)} \psi^{101}, \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)} \psi^{100} + e_{33}^{(010)} \psi^{010} + e_{33}^{(110)} \psi^{110}, \quad \varepsilon_{12} = e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)} \psi^{001}, \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)} \psi^{010}, \quad \varepsilon_{23} = e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \psi^{100}. \end{aligned}$$

Тут $e_{ij}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладання деформацій [9].

Враховуючи ці розкладання та співвідношення (3) та (4), варіація енергії пружної деформації запишеться так:

$$\delta W = \{\delta \omega_{k'}\}^T [F_{ij}^{k'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{m'}] \{\omega_{m'}\}.$$

Тут $[H^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{ij}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3$ – матриця пружних сталей волокнистого композиційного матеріалу з урахуванням метрики нескінченного скінченного елемента.

Компоненти вектору переміщень у глобальній системі координат мають вид:

$$u_{k'} = \{N_L\} \{u_{k'}^*\}^T, \quad (7)$$

де $\{u_{k'}^*\} = \{u_{k'}^{(1)}, u_{k'}^{(2)}, u_{k'}^{(3)}, u_{k'}^{(4)}, u_{k'}^{(5)}, u_{k'}^{(6)}, u_{k'}^{(7)}, u_{k'}^{(8)}\}$ – вектор вузлових переміщень, $\{N_L\} = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8\}$ – вектор функцій форми виду (5), (6).

Із співвідношень (2) та (7) визначаємо елементи матриці $[A]$ так, щоб виконувалась рівність:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]^T \{u_{k'}^L\}. \quad (8)$$

Враховуючи (8), можемо записати варіацію енергії пружної деформації:

$$\delta W = \{\delta u_{k'}^L\}^T [K^{k'm'}] \{u_{m'}^L\}.$$

В останній рівності співвідношення $[K^{k'm'}]$ визначатиме матрицю жорсткості нескінченного скінченного елемента на основі моментної схеми для волокнистого композиційного матеріалу:

$$[K^{k'm'}] = [A] [F_{ij}^{k'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{m'}] [A]^T.$$

Описану матрицю жорсткості реалізовано у програмному комплексі «МІРЕЛА+» [10]. За його допомогою розв'язано задачі про вдавлення штамів у багатошарове середовище.

Маємо симетрично розташовані два штампи у вигляді еліптичних параболоїдів, що описуються рівнянням $x = y^2 / 2 + z^2$.

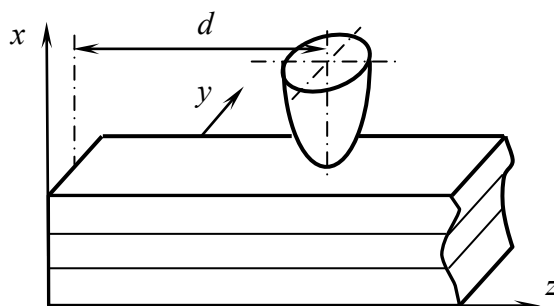


Рис. 2. Схема розташування параболічних штампів

Вихідні данні: ширина середовища – $b = 0,5$ м, товщина кожного з трьох шарів – $0,05$ м, загальна товщина $t = 0,15$ м, довжина нескінченна. Штампів є абсолютно жорсткими. Матеріалом шарів є волокнистий композит із об'ємною долею волокна f . Пружні сталі матеріалу матриці: коефіцієнт Пуассона $\nu_m = 0,49$, модуль пружності $E_m = 5,28$ МПа. Пружні сталі матеріалу волокна: коефіцієнт Пуассона $\nu_c = 0,3$, модуль пружності $E_c = 1277,5$ МПа.

Відстань між штампів приймається $d = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ м. Штампів заглиблюються у середовище на глибину $0,01$ м. Досліджено дві схеми армування волокнами. У першій: $\alpha = 90^\circ$ для нижнього та верхнього шарів, $\alpha = 0^\circ$ для середнього шару (α – кут між напрямом армування та віссю Oy у площині Oyz). У другій: $\alpha = 0^\circ$ для нижнього та верхнього шарів, $\alpha = 90^\circ$ для середнього шару.

На рисунках 3 та 4 показано розподіл максимального випинання бічної поверхні та максимальних контактних тисків для першої схеми армування, а на рисунках 5 та 6 – для другої.

Із аналізу результатів можна зазначити, що для обох схем армування із збільшенням об'ємного вмісту волокна максимальна величина випинання бічної поверхні зменшується, що пояснюється підвищенням жорсткості матеріалу за рахунок більш жорсткого волокна, а максимальні значення контактних тисків навпаки збільшуються. Збільшення відстані між штампів не призводить до суттєвих змін максимальних значень величин випинання бічної поверхні та контактних тисків. А схема армування впливає на якісний характер випинання бічної поверхні. Так, для першої схеми маємо під штампом дві зони значного випинання бічної поверхні у верхньому та у нижньому шарах, причому, у верхньому шарі випинання дещо більші у порівнянні із нижнім. А для другої схеми маємо одну зону випинання у середньому шарі, й максимальні величини цього випинання на 20-25% більші ніж для першої схеми армування. Такий характер випинання пояснюється тим, що поперечним переміщенням при поперечному розташуванні волокон чинять опір саме більш жорсткі волокна, тому бічне випинання незначне. А при поздовжньому армуванні волокнами опір поперечній деформації чинить гума, що має значно меншу жорсткість, ніж волокна, тому у цьому випадку маємо значне випинання бічної поверхні смуги.

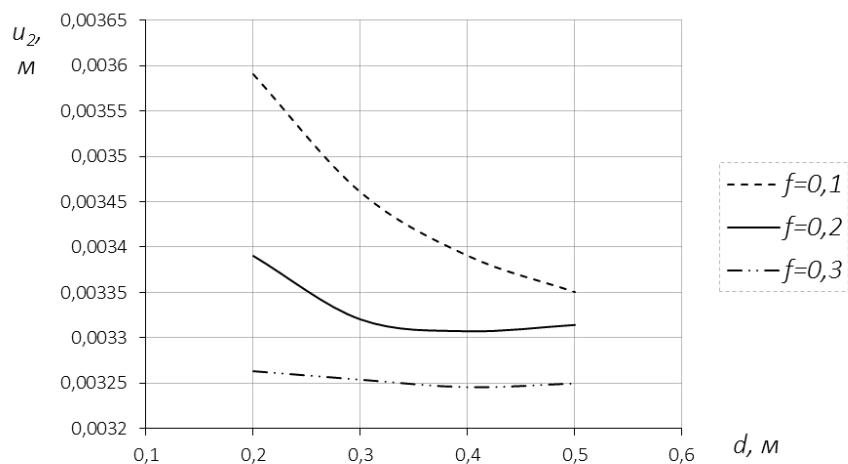


Рис. 3. Максимальне випинання бічної поверхні при першій схемі армування

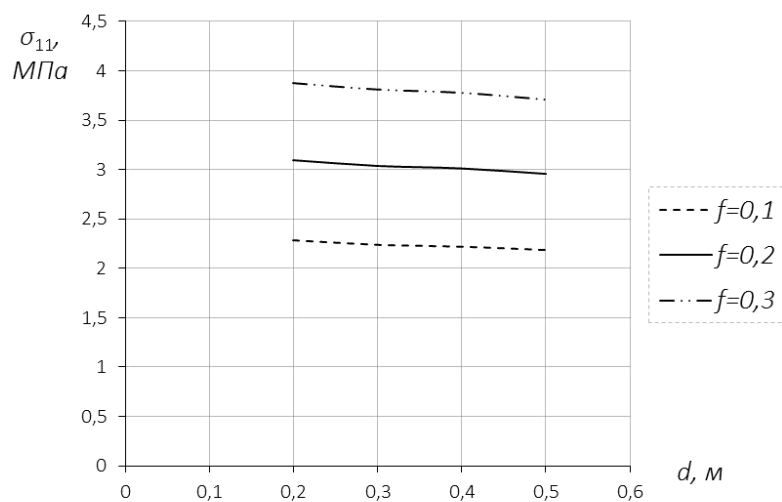


Рис. 4. Максимальні значення контактних тисків при першій схемі армування

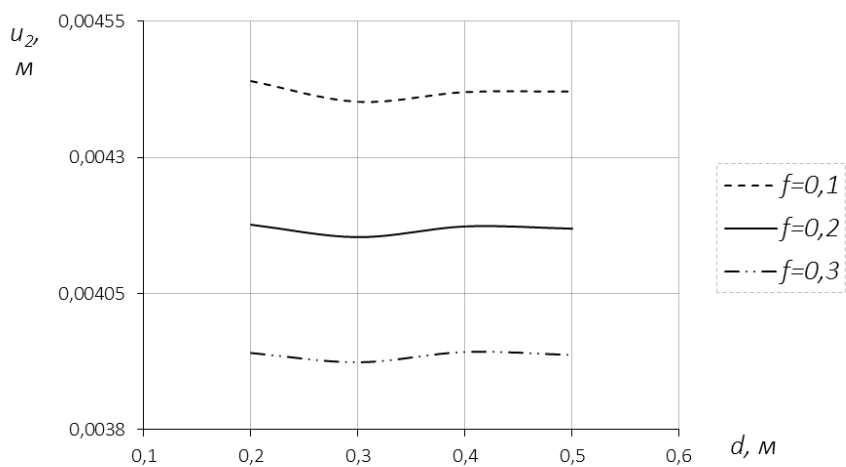


Рис. 5. Максимальне випинання бічної поверхні при другій схемі армування

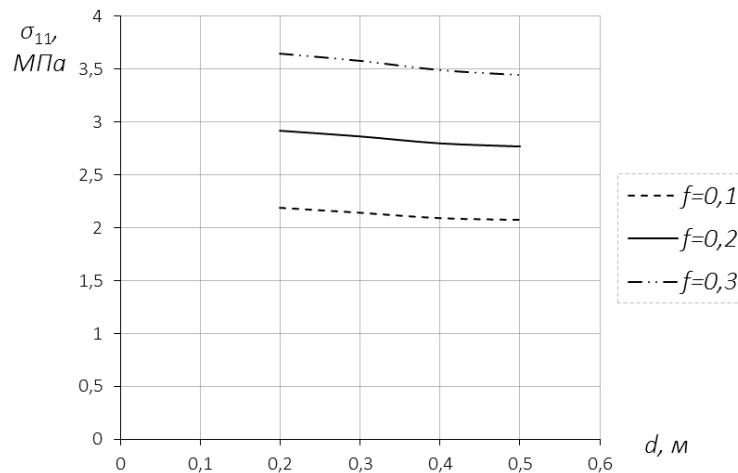


Рис. 6. Максимальні значення контактних тисків при другій схемі армування

Висновки

Таким чином, за допомогою моментної схеми скінченного елемента проведено чисельне моделювання системи двох штампів у вигляді еліптичних параболоїдів із тришаровою гумовокордною смугою. Досліджено вплив схем армування шарів смуги, відстані між штампами та об'ємного вмісту волокна у гумовокордному матеріалі на напружено-деформований стан смуги.

Список використаної літератури

1. Edip K., Sheshov V., Bojadjieva J., Demir A., Ozturk H. Development of infinite elements for simulation of unbounded media. *Građevinski materijali i konstrukcije*. 2018. Vol. 61, № 3. P. 3–13.
2. Medina F. Taylor R. L. Finite element techniques for problems of unbounded domains. *International journal for numerical methods in engineering*. 1983. Vol. 19, № 8. P. 1209–1226.
3. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Too J. M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1971. Vol. 3, № 3. P. 275–290.
4. Curnier A. A static infinite element. *International journal for numerical methods in engineering*. 1983. № 19(10). P. 1479–1488.
5. Beer G. 'Infinite domain' elements infinite element analysis of underground excavations. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 1983. Vol. 7, № 1. P. 1–7.
6. Чопоров С. В., Манько Н. І.–В., Спиця О. Г., Гребенюк С. М. Матриця жорсткості «напівнескінченного» скінченного елемента для слабкостисливого матеріалу на основі моментної схеми. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2019. № 1. С. 98–106. DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-13.
7. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва : Наука, 1974. 448 с.
8. Ван Фо Фы Г. А. Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты. *Механика полимеров*. 1966. № 4. С. 593–602.
9. Manko N. I., Sptysia O. G. The stiffness matrix of infinite hexahedral finite element for fiber composite material based on the moment scheme. *Mathematical and computer modelling of engineering systems: monograph*. Riga : Baltija Publishing. 2020. С. 81–93. URL: <http://www.baltijapublishing.lv/omp/index.php/bp/catalog/book/89>.

References

1. Edip, K., Sheshov, V., Bojadjieva, J., Demir, A., & Ozturk, H. (2018). Development of infinite elements for simulation of unbounded media. *Граđевински materijali i konstrukcije*. 61(3), 3–13.
2. Medina, F., & Taylor, R. L. (1983). Finite element techniques for problems of unbounded domains. *International journal for numerical methods in engineering*. 19(8), 1209–1226.
3. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Too, J. M. (1971). Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 3(3), 275–290.
4. Curnier, A. (1983). A static infinite element. *International journal for numerical methods in engineering*. 19(10), 1479–1488.
5. Beer, G. (1983). ‘Infinite domain’ elements infinite element analysis of underground excavations. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 7(1), 1–7.
6. Choporov, S. V., Manko, N. I.–V., Spysia, O. H., & Hrebeniuk, S. M. (2019). Matrytsia zhorstkosti «napivneskinchennoho» skinchennoho elementa dlia slabkostyslyvoho materialu na osnovi momentnoi skhemy. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky*. No. 1, 98–106. DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-13.
7. Ambartsumyan, S. A. (1974). *Obschaya teoriya anizotropnyih obolochek*. Moskva: Nauka.
8. Van Fo Fyi, G. A. (1966). Uprugie postoyannyye i napryazhennoe sostoyanie steklolentyi. *Mehanika polimerov*. No. 4, 593–602.
9. Manko, N. I., & Spysia, O. G. (2020). The stiffness matrix of infinite hexahedral finite element for fiber composite material based on the moment scheme. *Mathematical and computer modelling of engineering systems: monograph*. Riga: Baltija Publishing, pp. 81–93. URL: <http://www.baltijapublishing.lv/omp/index.php/bp/catalog/book/89>.

Гоменюк Сергій Іванович – д.т.н., професор, декан математичного факультету Запорізького національного університету. E-mail: gserega71@gmail.com. ORCID: 0000-0001-7340-5947.

Гребенюк Сергій Миколайович – д.т.н., доцент, завідувач кафедри фундаментальної математики Запорізького національного університету. E-mail: gsm1212@ukr.net. ORCID: 0000-0002-5247-9004.

Манько Наталія Іванівна-Володимирівна – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету. E-mail: manko.nataly2017@gmail.com. ORCID: 0000-0001-8995-7316.

Спиця Оксана Геннадіївна – к.ф.-м.н., доцент кафедри загальної математики Запорізького національного університету. E-mail: spytza.o.g@gmail.com. ORCID: 0000-0002-7150-7736.