

Міністерство освіти і науки України  
Херсонський національний технічний університет

# **ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

# **1**

Рекомендовано до друку Вченою радою  
Херсонського національного технічного університету  
(протокол № 1 від 29 серпня 2018 року)

---

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:  
Google Scholar.

**Херсон 2018**

## **Редакційна рада**

### **Головний редактор**

Бардачов Ю.М.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України,  
ректор Херсонського національного технічного університету.

### **Заступники головного редактора**

Розов Ю.Г.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України,  
перший проректор Херсонського національного технічного  
університету.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки  
України, завідувач кафедри прикладної і вищої математики  
Чорноморського національного університету ім. П. Могили.

### **Відповідальний секретар**

Омельчук А.А.

к.т.н., ст. викладач кафедри технічної кібернетики  
Херсонського національного технічного університету.

## **Члени редакційної колегії за спеціальностями:**

### **Іноземні фахівці**

Бабічев С.О.

Гучек П.Й.

к.т.н., доцент (Чехія)

д.т.н., доцент (Польща)

## **05.13.07 – Автоматизація процесів керування**

Алексєєв М.О.

Бардачов Ю.М.

Головко В.І.

Кондратець В.О.

Мещеряков Л.І.

Осадчий С.І.

Рожков С.О.

Рудакова Г.В.

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

## 05.13.06 – Інформаційні технології

Аль-Амморі А.Н.	д.т.н., професор
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Литвиненко О.І.	к.т.н., доцент
Стеценко І.В.	д.т.н., професор
Томашевський В.М.	д.т.н., професор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., професор
Якунін А.О.	д.т.н., професор

## 05.01.01 – Прикладна геометрія, інженерна графіка

Борисенко В.Д.	д.т.н., професор
Ванін В.В.	д.т.н., професор
Вірченко Г.А.	д.т.н., професор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., професор
Гумен О.М.	д.т.н., професор
Корчинський В.М.	д.т.н., професор
Мартин Є.В.	д.т.н., професор
Найдиш А.В.	д.т.н., професор
Несвідомін В.М.	д.т.н., професор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., професор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., професор
Устенко С.А.	д.т.н., професор
Шоман О.В.	д.т.н., професор

## Інші спеціальності

Астіоненко І.О.	к.ф.-м.н., доцент
Крак Ю.В.	д.ф.-м.н., професор
Литвиненко В.І.	д.т.н., професор
Ляшенко В.П.	д.т.н., професор
Мельник І.В.	д.т.н., професор
Мороз Б.І.	д.т.н., професор
Різник В.В.	д.т.н., професор
Розов Ю.Г.	д.т.н., професор
Хомченко А.Н.	д.ф.-м.н., професор

Министерство образования и науки Украины  
Херсонский национальный технический университет

# **ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

# **1**

Рекомендовано к печати Ученым советом  
Херсонского национального технического университета  
(протокол № 1 от 29 августа 2018 года)

---

Журнал включен в наукометрические базы, электронные библиотеки и репозитории:  
Google Scholar.

**Херсон 2018**

## **Редакционный совет**

### **Главный редактор**

Бардачев Ю.Н.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины,  
ректор Херсонского национального технического университета.

### **Заступники головного редактора**

Розов Ю.Г.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины,  
первый проректор Херсонского национального технического университета.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины,  
заведующий кафедры прикладной и высшей математики Черноморского  
национального университета им. П. Могилы.

### **Ответственный секретарь**

Омельчук А.А.

к.т.н., ст. преподаватель кафедры технической кибернетики Херсонского  
национального технического университета.

## **Члены редакционной коллегии по специальностям:**

### **Иностранные специалисты**

Бабичев С.А.

Гучек П.И.

к.т.н., доцент (Чехия)

д.т.н., доцент (Польша)

## **05.13.07 – Автоматизация процессов управления**

Алексеев М.А.

Бардачев Ю.Н.

Головко В.И.

Кондратец В.А.

Мещеряков Л.И.

Осадчий С.И.

Рожков С.А.

Рудакова А.В.

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

## 05.13.06 – Информационные технологии

Аль-Аммори А.Н.	д.т.н., профессор
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Литвиненко Е.И.	к.т.н., доцент
Стеценко И.В.	д.т.н., профессор
Томашевский В.Н.	д.т.н., профессор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., профессор
Якунин А.А.	д.т.н., профессор

## 05.01.01 – Прикладная геометрия, инженерная графика

Борисенко В.Д.	д.т.н., профессор
Ванин В.В.	д.т.н., профессор
Вирченко Г.А.	д.т.н., профессор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., профессор
Гумен Е.Н.	д.т.н., профессор
Корчинский В.М.	д.т.н., профессор
Мартин Е.В.	д.т.н., профессор
Найдыш А.В.	д.т.н., профессор
Несвидомин В.Н.	д.т.н., профессор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., профессор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., профессор
Устенко С.А.	д.т.н., профессор
Шоман О.В.	д.т.н., профессор

## Другие специальности

Астионенко И.А.	к.ф.-м.н., доцент
Крак Ю.В.	д.ф.-м.н., профессор
Литвиненко В.И.	д.т.н., профессор
Ляшенко В.П.	д.т.н., профессор
Мельник И.В.	д.т.н., профессор
Мороз Б.И.	д.т.н., профессор
Ризнык В.В.	д.т.н., профессор
Розов Ю.Г.	д.т.н., профессор
Хомченко А.Н.	д.ф.-м.н., профессор

Ministry of Education and Science of Ukraine  
Kherson National Technical University

# **APPLIED QUESTIONS OF MATHEMATICAL MODELING**

# **1**

Recommended for publication by the Academic Council of  
Kherson National Technical University  
(minutes № 1 on 29th August 2018)

---

The journal is included in the scientometric bases, electronic libraries and repositories:  
Google Scholar.

**Kherson 2018**

## **Editorial Board**

### **Editor-in-Chief**

Bardachov Yu.M.

Doctor of Engineering Science, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine,

Rector of Kherson National Technical University

### **Deputies Editor-in-Chief**

Rozov Yu.H.

Doctor of Engineering Science, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine,

First Vice-Rector of Kherson National Technical University

Khomchenko A.N.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine,

Head of the Department of Applied and Higher Mathematics of the Petro Mohyla Black Sea National University.

### **Executive Secretary**

Omelchuk A.A.

Ph.D., Senior Lecturer of the Department of Technical Cybernetics of Kherson National Technical University.

## **Members of Editorial Board by Specialties:**

### **Foreign Specialists**

**Babichev S.O.**

**Huchek P.Y.**

Ph.D., Associate Professor (Czech Republic)

Doctor of Engineering Science, Associate Professor (Republic of Poland)

## **05.13.07 – Automation of Control Processes**

**Aleksieiev M.O.**

**Bardachov Yu.M.**

**Holovko V.I.**

**Kondratets V.O.**

**Meshcheriakov L.I.**

**Osadchyi S.I.**

**Rozhkov S.O.**

**Rudakova H.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor



## **05.13.06 – Information Technology**

<b>Al-Ammori A.N.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Ben A.P.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Lytvynenko O.I.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Stetsenko I.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Tomashevskyi V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Sherstiuk V.H.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Yakunin A.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## **05.01.01 – Applied Geometry, Engineering Graphics**

<b>Borysenko V.D.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Vanin V.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Virchenko H.A.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Hnatushenko V.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Humen O.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Korchynskyi V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Martyn Ye.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Naidysh A.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Nesvidomin V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Pylypaka S.F.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Tuluchenko H.Ya.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Ustenko S.A.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Shoman O.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## **Other Specialties**

<b>Astionenko I.O.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Krak Yu.V.</b>	Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
<b>Lytvynenko V.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Liashenko V.P.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Melnyk I.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Moroz B.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Riznyk V.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rozov Yu.H.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Khomchenko A.N.</b>	Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

***Шановні читачі та автори  
журналу "Прикладні питання  
математичного моделювання"!***

З особливими почуттями представляємо Вашій увазі перший номер журналу, який сподіваємося отримає Вашу позитивну оцінку і згодом стане відомою площадкою для діалогу між представниками наукової спільноти!



Випуск першого номера став визначною подією для всього колективу кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету та всіх науковців, які долучилися до його створення.

Появі журналу передував великий досвід проведення міжнародної конференції з математичного моделювання, яка започаткована у 1996 році д.ф.-м.н., професором Хомченком Анатолієм Никифоровичем. Саме йому належить вдала ідея назви журналу "ППММ", яка дозволяє на сторінках журналу публікувати матеріали із різних галузей науки, техніки, інформаційних технологій і фундаментальних досліджень.

Дякуємо членам редакційної колегії, які підтримали створення нового журналу, і своїм авторитетом заклали перші цеглинки до наукового визнання видання.

Гортаючи сторінки видання, будемо знайомитися із думками наших колег із дискусійних питань, першими успіхами наших учнів, обговорювати сучасні технології, знаходити однодумців для започаткування спільних творчих проєктів.

Ми очікуємо Ваших статей, оглядів сучасних методів моделювання, дискусійних матеріалів, результатів експериментальних досліджень, які дадуть поштовх науковому пошуку і розвитку математичного моделювання в Україні і світі.

З найкращими побажаннями,  
головний редактор журналу "Прикладні питання математичного моделювання, ректор Херсонського національного технічного університету  
Бардачов Ю.М.

## ЗМІСТ

### ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

Караєв А.О., Стрельникова О.О. Сингулярні інтеграли в аксіально-симетричних задачах теорії потенціалу.....	10
Кузьмич В.І., Валько М.І., Валько П.М., Яковенко Т.О. Про спільну точку операторів .....	19
Човнюк Ю.В., Броварець О.О. Моделювання і аналіз ефективних електромагнітних біанізотропних/біізотропних параметрів капілярних систем електропровідності ґрунтів сільськогосподарського призначення як біооб'єктів .....	27

### ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Бардачов Ю.М., Тулущенко Г.Я. Чисельне розв'язання задачі Вебера із застосуванням сплайнової апроксимації .....	49
Гумен О.М., Лясковська С.Є., Мартин Є.В. Достатність проєкційних зображень 1-багатовидів n-просторів стану технічних систем .....	58
Найдиш А.В., Спірінцев Д.В., Лазаренко М.В. Розробка технології проєктування та виготовлення робочих коліс турбокомпресора .....	68
Несвідоміна О.В. Відображення растрових зображень на плоскі ізометричні сітки .....	75
Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю., Кресан Т.А. Моделювання смуг розгортних поверхонь, дотичних до поверхні кулі .....	81
Протектор Д.О. Безсітковий підхід при комп'ютерному моделюванні двовимірних нестационарних задач теплопровідності з використанням атомарних радіальних базисних функцій .....	89

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Ковч О.І., Стрельникова О.О. Аналіз схем прикладання навантажень при моделюванні міцності зварних швів з урахуванням взаємного впливу різних дефектів.....	99
Крюченко Д.В. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань рідини в призматичному резервуарі .....	107
Килиник В.Ю., Гнітько В.І., Науменко Ю.В., Розова Л.В. Чисельне моделювання коливань рідини в складених оболонках обертання при перевантаженнях .....	115
Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О., Гучек П.И. Квазіметод Монте-Карло і кубатури для серендипових поліномів .....	122

### ІНЖЕНЕРНІ НАУКИ

Єдинович М.Б., Байрак І.В., Карпенко С.Л. Застосування моделей дискретних автоматів при програмуванні програмованих логічних контролерів .....	128
Луб'яний П.В., Селіверстов І.А., Калімбет Р.В. Організація управління роботою маршрутної системи міста на основі оцінки якості перевезень пасажирів .....	136
Мартинів В.Л., Вірченко Г.А. Визначення раціональної орієнтації вікон енергоефективних будівель кампусів .....	143
Омельчук А.А., Лебеденко Ю.О., Поливода О.В. Комп'ютеризовані системи управління у інтегрованих пташиних і рибних господарствах.....	150
Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Кобець М.С. Вибір робочої частоти генератора при моніторингу і контролі процесів вологопереносу у музейних експонатах/картинах методом поглинання НВЧ/КВЧ енергії .....	158

### ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Климович А.Н., Шуть В.Н. Адаптивний алгоритм управління перекрестком на основі оптимізації настройки дорожньої розмітки .....	168
Хошаба О.М. Дослідження процесів навантажувальних впливів і відновлення продуктивності обчислювальних систем .....	178

## СОДЕРЖАНИЕ

### ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

Караев А.А., Стрельникова Е.А. Сингулярные интегралы в осесимметричных задачах теории потенциала .....	10
Кузьмич В.И., Валько Н.И., Валько П.Н., Яковенко Т.А. Об общей точке операторов .....	19
Човнюк Ю.В., Броварец А.А. Моделирование и анализ эффективных электромагнитных бианизотропных/биизотропных параметров капиллярных систем электропроводности грунтов сельскохозяйственного предназначения как биообъектов .....	27

### ПРИКЛАДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Бардачев Ю.Н., Тулученко Г.Я. Численное решение задачи Вебера с использованием сплайновой аппроксимации .....	49
Гумен Е.Н., Лясковская С.Е., Мартын Е.В. Достаточность проекционных изображений 1-многообразий n-пространств состояния технических систем .....	58
Найдыш А.В., Спирицев Д.В., Лазаренко М.В. Разработка технологии проектирования и изготовления рабочих колес турбокомпрессора .....	68
Несвидомина А.В. Отображение растровых изображений на плоские изометрические сетки .....	75
Пилипака С.Ф., Грищенко И.Ю., Кресан Т.А. Моделирование полос разветвляющихся поверхностей, касательных к поверхности шара .....	81
Протектор Д.О. Бессеточный подход при компьютерном моделировании двумерных нестационарных задач теплопроводности с использованием атомарных радиальных базисных функций .....	89

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ковч О.И., Стрельникова Е.А. Анализ схем приложения нагрузок при моделировании прочности сварных швов с учетом взаимного влияния различных дефектов .....	99
Крютченко Д.В. Компьютерное моделирование вынужденных колебаний жидкости в призматическом резервуаре .....	107
Кылыннык В.Ю., Гнигтько В.И., Науменко Ю.В., Розова Л.В. Численное моделирование колебаний жидкости в составных оболочках вращения при перегрузках .....	115
Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Астионенко И.А., Гучек П.И. Квазиметод Монте-Карло и кубатуры для серендиповых полиномов .....	122

### ИНЖЕНЕРНЫЕ НАУКИ

Единович М.Б., Байрак И.В., Карпенко С.Л. Применение моделей дискретных автоматов при программировании программируемых логических контроллеров .....	128
Лубяный П.В., Селиверстов И.А., Калимбет Р.В. Организация управления работой маршрутной системы города на основе оценки качества перевозок пассажиров .....	136
Мартынов В.Л., Вирченко Г.А. Определение рациональной ориентации оконных проемов энергоэффективных зданий кампусов .....	143
Омельчук А.А., Лебеденко Ю.А., Поливода О.В. Компьютеризированная система управления в интегрированных птицеводческих и рыбноводческих хозяйствах .....	150
Човнюк Ю.В., Диктерук М.Г., Кобец М.С. Выбор рабочей частоты генератора при мониторинге и контроле процессов влагопереноса в музейных экспонатах/картинах методом поглощения СВЧ/КВЧ энергии .....	158

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Климович А.Н., Шуть В.Н. Адаптивный алгоритм управления перекрестком на основе оптимизации настройки дорожной разметки .....	168
Хошаба А.М. Исследование процессов нагрузочных воздействий и восстановлений производительности вычислительных систем .....	178

---

---

## CONTENS

---

---

### FUNDAMENTAL SCIENCES

<b>Karaiev A.O., Strelnikova E.A.</b> Singular integrals in axisymmetric tasks of potential theory .....	10
<b>Kuzmych V.I., Valko M.I., Valko P.M., Yakovenko T.O.</b> The solution to the classical equations of motion for the anharmonic oscillators with a power-law nonlinearity based on the of Lindstedt-Poincare method and their quantization is .....	19
<b>Chovnyuk Y.V., Brovarets A.A.</b> Modeling and analysis of effective electromagnetic bi-anisotropic/bi-isotropic parameters of capillary systems of electrical conductivity of agricultural soils as bioobjects .....	27

### APPLIED GEOMETRY AND COMPUTER TECHNOLOGIES

<b>Bardachov Yu.M., Tuluchenko H.Ya.</b> Numerical solution of the Weber problem with the use of spline approximation .....	49
<b>Gumen O.M., Ljaskovska S.Ye., Martyn Ye.V.</b> Sufficiency of 1-manifolds projection images of n-spaces of technical systems state .....	58
<b>Naidysh A., Spiritsev D., Lazarenko M.</b> Development of technology of designing and manufacturing of turbokompresora working wheels .....	68
<b>Nesvidomina A.</b> The mapping of raster images on plane isometric grid .....	75
<b>Pylypaka S.F., Grischenko I.Yu., Kresan T.A.</b> Modelling of bands of unrolled surfaces, tangential to the sphere surface .....	81
<b>Protektor D.O.</b> Computer simulation of two-dimensional nonstationary heat conduction problems by meshless approach using atomic radial basis functions .....	89

### MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL AND TECHNOLOGICAL PROCESSES AND TECHNICAL SYSTEMS

<b>Kovch O.I., Strelnikova E.A.</b> Analysis of schemes of load applications for modeling the strength of weld seams with the account of mutual influence of various defects.....	99
<b>Kriutchenko D.</b> Computer modeling liquid forced vibrations in a prismatic tank .....	107
<b>Kylynnik V.Yu., Gnitko V.I., Naumenko Yu.V., Rozova L.V.</b> Numerical simulation of liquid vibration in composite shells of revolution under overloads .....	115
<b>Khomchenko A.N., Litvinenko O.I., Astionenko I.O., Guchek P.I.</b> Monte-Carlo quasi-method and cubatures for serendipic polinomials .....	122

### ENGINEERING SCIENCES

<b>Yedynovych M.B., Bairak I.V., Karpenko S.L.</b> Application of discrete automata models at programming of programmable logic controllers .....	128
<b>Lubiany P.V., Seliverstov I.A., Kalimbet R.V.</b> Organization of management of the work of the route system of the city on the basis of assessment of quality of transport of passengers .....	136
<b>Martynov V.L., Virchenko G.A.</b> Determination of the rational orientation of windows of energy efficient buildings of campus .....	143
<b>Omelchuk A.A., Lebedenko Yu.O., Polyvoda O.V.</b> Computerized control system for integrated poultry and fish farming.....	150
<b>Chovnyuk Y.V., Dikteruk M.G., Kobetz M.S.</b> Choice of generator's working frequency during the monitoring and control of moisture transfer in museum's exhibits/pictures with the help of UHF/EHF energy absorption method .....	158

### INFORMATION TECHNOLOGIES

<b>Klimovich A., Shuts V.</b> Adaptive algorithm of road-crossing regulation on the basis of adjustment optimization of road marking .....	168
<b>Khoshaba O.M.</b> Investigation of processes of loading effects and recovery of computer systems performance .....	178

---

---

**ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ**

---

---

УДК 518.13

А.О. КАРАЄВ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

**СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛИ В АКсіАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ  
ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ**

*У наведеному дослідженні проаналізовані існуючі підходи до розв'язання аксіально-симетричної задачі теорії потенціалу та наведені й доведені власні алгоритми і схеми. У кусково-лінійному наближенні проаналізовані сингулярні інтеграли та отримані квадратурні формули для їх програмного розв'язання, що виникають під час обчислення коефіцієнтів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Зокрема, інтеграли з логарифмічною особливістю були порівняні з існуючими аналітичними виразами для деяких функцій, а загальна схема для сингулярного інтеграла була протестована на прикладі поверхневого інтеграла Гаусса з фіксованою точкою на поверхні.*

*Ключові слова: інтегральні рівняння, сингулярні інтеграли, теорія пружності, еліптичні інтеграли.*

А.А. КАРАЕВ

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

**СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ  
ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА**

*В приведенном исследовании проанализированы существующие подходы к решению осесимметричной задачи теории потенциала, также приведены и доказаны собственные алгоритмы и схемы. В кусочно-линейном приближении проанализированы сингулярные интегралы и получены квадратурные формулы для их программной реализации, которые возникают при вычислении коэффициентов матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Интегралы с логарифмической особенностью были сравнены с аналитическими выражениями для некоторых функций, а общая схема для сингулярного интеграла была протестирована на примере поверхностного интеграла Гаусса с фиксированной точкой на поверхности.*

*Ключевые слова: интегральные уравнения, сингулярные интегралы, теория упругости, эллиптические интегралы.*

А.О. KARAIEV

V.N. Karazin Kharkiv National University

Е.А. STRELNIKOVA

V.N. Karazin Kharkiv National University

The A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine

## SINGULAR INTEGRALS IN AXISYMMETRIC TASKS OF POTENTIAL THEORY

*Axisymmetric structures are widely used in the chemical and aerospace industries, logistics, power engineering and other engineering sectors. Usually these structures and their components work at high loads, interact with moving fluids and are exposed to high temperatures. Therefore, the main tasks are assessment of critical loads, identification and separation of hazardous resonance frequencies, and prediction of a reliable safety forecast for equipment operation. Experimental research in this area is financially costly, complex and sometimes impossible for a number of reasons. That is why the methods of mathematical and computer modeling are the most effective engineering tools for assessing the strength characteristics of existing and projected objects. The calculation of elements of a matrix of a system of linear algebraic equations does not cause difficulties, since the integral functions are continuous and for them it is possible to use standard Gaussian quadratures. However, in the case where the collocation point coincides with the boundary element on which the integration occurs, the argument of the complete elliptic integral becomes at the point of collocation equal to one, so the calculated integral becomes an improper integral of the second kind. It is necessary to investigate its convergence and develop quadrature formulas for its calculation. In the above study, the existing approaches to solving the axisymmetric problem of the theory of potential are analyzed and their own algorithms and schemes are presented and proved. In the piecewise linear approximation, singular integrals are analyzed and quadrature formulas are obtained for their program realization that arise when calculating the matrix coefficients of a system of linear algebraic equations. Integrals with a logarithmic singularity were compared with analytic expressions for some functions, and the general scheme for the singular integral was tested using the surface Gaussian integral with a fixed point on the surface.*

*Keywords: integral equations, singular integrals, theory of elasticity, elliptic integrals.*

### Постановка проблеми

Аксіально-симетричні структури широко застосовуються у хімічній та аерокосмічній промисловості, логістиці, енергетиці та інших інженерних галузях. Зазвичай ці структури та їх компоненти працюють при великих навантаженнях, взаємодіють з рідинами, що рухаються та перебувають під дією високих температур. Тому основними задачами є оцінка критичних навантажень, ідентифікація та відділення небезпечних резонансних частот і передбачення надійного прогнозу безпеки експлуатації обладнання.

### Аналіз попередніх досліджень і публікацій

Експериментальні дослідження у цій сфері є фінансово затратними, складними та іноді навіть неможливими через низку причин. Саме тому методи математичного та комп'ютерного моделювання є найбільш ефективними інженерними засобами для оцінки міцнісних характеристик існуючих об'єктів та тих, що тільки проектуються [1, 3–6].

Граничне інтегральне рівняння в теорії потенціалу має наступний вигляд [1]:

$$C(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) + \int_S u(\vec{r})q^*(\vec{\xi}, \vec{r})dS(\vec{r}) = \int_S q(\vec{r})u^*(\vec{\xi}, \vec{r})dS(\vec{r}), \quad (1)$$

де  $u(\vec{\xi})$  – шукана величина,  $q(\vec{r})$  – її нормальна похідна,  $u^*(\vec{\xi}, \vec{r})$  – функція Гріна,  $q^*(\vec{\xi}, \vec{r})$  – нормальна похідна від функції Гріна.

Функція Гріна в теорії потенціалу – це наступна величина:

$$u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{r}|}. \quad (2)$$

Вираз для її нормальної похідної:

$$q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{r}|} = \left( \vec{n}, \nabla \frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{r}|} \right) = -\frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{r}|^3} (\vec{n}, \vec{\xi} - \vec{r}). \quad (3)$$

Скористаємося аксіальною симетрією задачі, тобто шукана величина та її нормальна похідна не залежить від кутової змінної. Від кутової змінної залежать лише компоненти функції Гріна та її нормальної похідної, тому інтегрування за кутом можна провести одразу:

$$\tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \int_0^{2\pi} u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) d\varphi = \frac{4K(m)}{\sqrt{(\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2}}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) d\varphi = \frac{2}{\rho(\vec{r}) \sqrt{(\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2}} \times \\ &\times \left[ \left( \frac{\rho^2(\vec{\xi}) - \rho^2(\vec{r}) + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2}{(\rho(\vec{\xi}) - \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2} E(m) - K(m) \right) \rho(\vec{n}) + \right. \\ &\left. + \frac{2\rho(\vec{r})(z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))}{(\rho(\vec{\xi}) - \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2} E(m) z(\vec{n}) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де  $m^2 = \frac{4\rho(\vec{\xi})\rho(\vec{r})}{(\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2}$  – аргумент еліптичного інтеграла першого роду.

Наступним кроком є процедура дискретизації. Границя тіла розбивається на певну кількість граничних елементів, на кожному з яких обирається точка колокації. Для кожної точки колокації застосовується граничне інтегральне рівняння, в результаті чого ми отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язуючи цю систему, ми знаходимо всі невідомі величини на границі.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

##### Діагональні елементи матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Обчислення елементів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь не викликає труднощів, тому що підінтегральні функції є неперервними і для них можна використовувати стандартні гауссові квадратури. Однак у випадку, коли точка колокації співпадає з граничним елементом, на якому відбувається інтегрування, аргумент повного еліптичного інтеграла стає в точці колокації рівним одиниці, тому інтеграл, що обчислюється, стає невласним інтегралом другого роду. Необхідно дослідити його збіжність та розробити квадратурні формули для його обчислення.

Ми користуємося кусково-лінійним наближенням, тобто граничні елементи є відрізками прямих. Лінійна залежність граничного елемента задається формулою  $z = k(\rho - \rho_p) + z_p$ , де  $(\rho_p, z_p)$  – координати точки колокації. Тоді нескінченно малий



елемент контуру має наступний вигляд:  $d\Gamma = \sqrt{1+k^2} d\rho$ . Вектор нормалі представляється через кутовий коефіцієнт наступним чином:  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k, -1)$ . У такому випадку діагональні елементи визначаються наступними інтегралами:

$$\begin{cases} \sqrt{1+k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{4K(m)}{\sqrt{(\rho_P + \rho)^2 + k^2(\rho_P - \rho)^2}} \rho d\rho, \\ \sqrt{1+k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{2n_\rho(E(m) - K(m))}{\sqrt{(\rho_P + \rho)^2 + k^2(\rho_P - \rho)^2}} d\rho, \end{cases} \quad (6)$$

де точки  $A$  та  $B$  – границі відрізка інтегрування.

### Розкладання повного еліптичного інтеграла першого роду

У випадку наближення аргументу до одиниці повний еліптичний інтеграл першого роду може бути представлений у вигляді нескінченної суми [2]:

$$\begin{aligned} K(m) = & \ln \frac{4}{m'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{m'} - \frac{2}{1 \cdot 2}\right) m'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{m'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) m'^4 + \\ & + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{m'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2}{5 \cdot 6}\right) m'^6 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

де  $m'^2 = 1 - m^2$  – додатковий модуль еліптичного інтеграла.

Згрупувавши суми, отримаємо компактний вид розкладання:

$$K(m) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{m'} K(m') + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m'^{2n} \left( \psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) \right). \quad (8)$$

Остання сума може бути обчислена використовуючи інтеграли з логарифмічною вагою:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m'^{2n} \left( \psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) \right) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-m'^2 x^2)(1-x^2)}} \ln \frac{1}{x} dx. \quad (9)$$

Отримуємо еквівалентний вид розкладання:

$$K(m) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{m'} K(m') + \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-m'^2 x^2)(1-x^2)}} \ln \frac{1}{x} dx. \quad (10)$$

З розкладання видно, що при наближенні аргументу до одиниці єдиною сингулярною функцією є логарифм.

### Обчислення сингулярних інтегралів

У розділі вище ми отримали розкладання повного еліптичного інтеграла першого роду за степенями  $m'$ . В такому випадку зручно перейти в інтегруванні від змінної  $\rho$  до  $m'$ .

Розіб'ємо інтеграли точкою колокації:

$$\int_{\rho_A}^{\rho_B} f(\rho_p, \rho) K(m) \rho d\rho = \int_{\rho_A}^{\rho_p} f(\rho_p, \rho) K(m) \rho d\rho + \int_{\rho_p}^{\rho_B} f(\rho_p, \rho) K(m) \rho d\rho. \quad (11)$$

Перехід від змінної  $\rho$  до  $m'$  визначається формулою:

$$\rho = \rho_p \frac{\left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right)^2}{(1+k^2)(1-m'^2)}, \quad (12)$$

$$d\rho = \frac{d\rho}{dm'} dm' = \pm 2\rho_p \frac{\left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right)^2}{(1+k^2)(1-m'^2)^2 \sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} dm'. \quad (13)$$

Ми отримали два корені, оскільки точки з однаковим значенням  $m'$  відповідають різним розташуванням відносно точки колокації.

Тоді сингулярний інтеграл (11) спрощується:

$$\begin{aligned} & \int_{\rho_A}^{\rho_B} f(\rho_p, \rho) K(m) \rho d\rho = \\ & = \int_0^{m'_B} (f(\rho_-(m')) A_-(m') + f(\rho_+(m')) A_+(m')) K(m) dm' + \int_{m'_B}^{m'_A} f(\rho_-(m')) A_-(m') K(m) dm'. \end{aligned} \quad (14)$$

Функції  $A_-(m')$  та  $A_+(m')$  визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} A_-(m') = \frac{2\rho_p^2 \left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} - m'\right)^4}{(1+k^2)^2 (1-m'^2)^3 \sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \\ A_+(m') = \frac{2\rho_p^2 \left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} + m'\right)^4}{(1+k^2)^2 (1-m'^2)^3 \sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \end{cases} \quad (15)$$

З рівняння (14) лише перший інтеграл має особливість. Зробимо заміну  $f(\rho_-(m')) A_-(m') + f(\rho_+(m')) A_+(m') = B(m')$  для спрощення. Використаємо отримане нами вище розкладання повного еліптичного інтеграла першого роду:

$$\int_0^{m'_B} B(m') K(m) dm' = \frac{2}{\pi} \int_0^{m'_B} B(m') K(m') \ln \frac{1}{m'} dm' + \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1}{x} \int_0^{m'_B} \frac{B(m')}{\sqrt{1-m'^2 x^2}} dm'. \quad (16)$$

У першому інтегралі проведемо лінійну заміну, щоб проводити інтегрування на проміжку  $[0,1]$ :

$$\int_0^{m'_B} B(m')K(m') \ln \frac{1}{m'} dm' = \ln \frac{1}{m'_B} \int_0^{m'_B} B(m')K(m') dm' + m'_B \int_0^1 B(m'_B x)K(m'_B x) \ln \frac{1}{x} dx. \quad (17)$$

Тоді інтеграл (16) перетворюється:

$$\int_0^{m'_B} B(m')K(m') dm' = \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{1}{m'_B} \int_0^{m'_B} B(m')K(m') dm' + \int_0^1 \left( m'_B B(m'_B x)K(m'_B x) + 2 \frac{\tilde{B}(m'_B, x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) \ln \frac{1}{x} dx \right),$$

$$\text{де } \tilde{B}(m'_B, x) = \int_0^{m'_B} \frac{B(m')}{\sqrt{1-m'^2 x^2}} dm'.$$

Наступним кроком є дослідження інтегралів з логарифмічною особливістю.

### Інтеграл з логарифмічною особливістю

Інтегралом з логарифмічною особливістю називається наступний інтеграл:

$$\int_0^1 f(x) \ln \frac{1}{x} dx, \quad (18)$$

де  $f(x)$  – неперервна функція на проміжку  $[0,1]$ .

Неперервну функцію в точці  $x$  можна розкласти в степеневий ряд  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ ,

тому фундаментальною задачею є доказ збіжності наступного інтеграла:

$$\int_0^1 x^n \ln \frac{1}{x} dx = \frac{1}{(n+1)^2}. \quad (19)$$

Оскільки цей інтеграл збігається, можна розробити квадратурні формули, що програмно обчислюють такі інтеграл з вузлами у коренях ортогональних многочленів з логарифмічною вагою:

$$\int_0^1 f(x) \ln \frac{1}{x} dx \approx \sum_{n=1}^N w_n f(x_n). \quad (20)$$

Ортогональні многочлени з логарифмічною вагою визначаються наступним визначником:

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{n}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{5}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+3}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{1}{n}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 & \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}. \quad (21)$$

**Обчислення сингулярних інтегралів в задачах теорії потенціалу**

Використаємо отримані співвідношення для задач теорії потенціалу. Для цього підставимо конкретні значення функції:

$$u^* \Rightarrow f(\rho_{\pm}(m')) = \frac{4}{\sqrt{(\rho_p + \rho)^2 + k^2(\rho_p - \rho)^2}} = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{\rho_p} \frac{1-m'^2}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2) \pm m'}};$$

$$B(m') = 8\rho_p \frac{(1+k^2(1-m'^2) + 3m'^2)}{(1+k^2)^2(1-m'^2)^2} \tilde{B}(m'_B, x) = \frac{8\rho_p}{(1+k^2)^2} \int_0^{m'_B} \frac{(1+k^2(1-m'^2) + 3m'^2)}{(1-m'^2)^2 \sqrt{1-m'^2} x^2} dm';$$

$$q^* \Rightarrow f(\rho_{\pm}(m')) = -\frac{1}{\rho_p^2} \frac{2n_p}{\sqrt{(\rho_p + \rho)^2 + k^2(\rho_p - \rho)^2}} = -\frac{n_p}{\rho_p^2} \frac{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}}{(\sqrt{1+k^2(1-m'^2) \pm m'})^3};$$

$$B(m') = -\frac{4n_p}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \tilde{B}(m'_B, x) = -\frac{4n_p}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \int_0^{m'_B} \frac{dm'}{(1-m'^2)\sqrt{1-x^2m'^2}}.$$

Підставивши отримані функції в загальний вираз (17), отримаємо явний вид обчислення сингулярного інтеграла.

**Обчислення поверхневого інтеграла Гаусса**

Для перевірки результатів у ході дослідження було обчислено поверхневий інтеграл Гаусса. Цей інтеграл має наступний вигляд:

$$H = \int_s \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS(\vec{r}). \quad (22)$$

Цей інтеграл можна обчислити, використовуючи властивості дельта-функції Дірака:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS(\vec{r}) &= -\int_s \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} dS(\vec{r}) = -\int_s \left( \vec{n}, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} \right) dS(\vec{r}) = \\ &= -\int_s \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} d\vec{S}(\vec{r}) = -\int_v \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} dV(\vec{r}) = 4\pi \int_v \delta(\vec{r} - \vec{\xi}) dV(\vec{r}) = \begin{cases} 4\pi, \vec{\xi} \in V; \\ 2\pi, \vec{\xi} \in \partial V; \\ 0, \vec{\xi} \notin V. \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

У той же час підінтегральна функція є відомою нам функцією  $q^*$  з теорії потенціалу, для якої ми отримали всі необхідні формули у розділі вище.

В якості поверхні в ході моделювання була обрана поверхня тору з фіксованими точками на його границі.

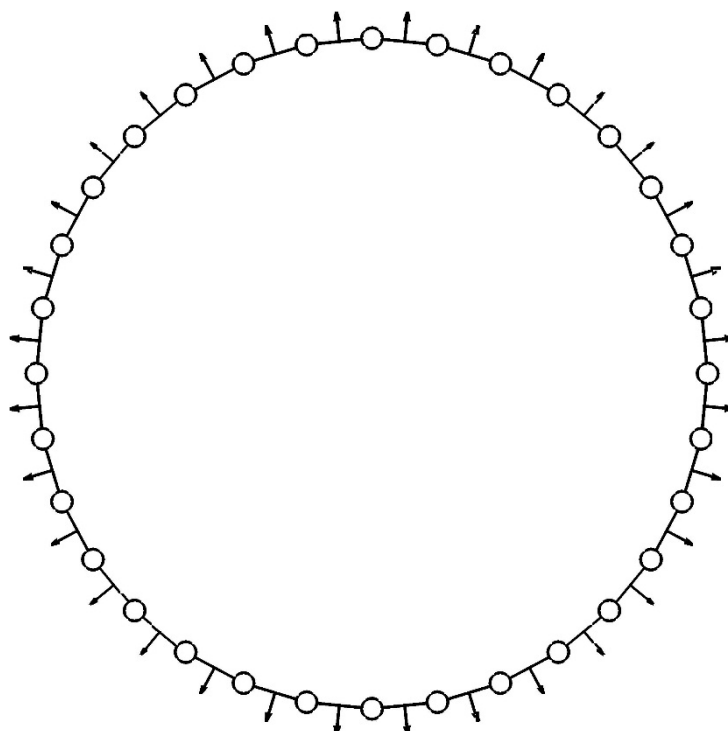


Рис. 1. Контур інтегрування у циліндричній системі координат

У таблиці нижче наведено результати обчислень.

Кількість граничних елементів	Відхилення результату від $2\pi$
64	0.00001786398571
128	0.00001324899562
256	0.00001205818183
512	0.00001175149209
1024	0.00001167145814
2048	0.00001165002835

### Висновки

У ході дослідження отримані квадратурні формули для обчислення сингулярних інтегралів у задачах теорії потенціалу. Для перевірки було обчислено поверхневий інтеграл Гаусса, точність обчислення якого зростала зі збільшенням кількості граничних елементів.

### Список використаної літератури

1. Brebbia C.A. Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering / C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel. — Berlin and New York: Springer-Verlag, 1984. — 464 p.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. — 1108 с.
3. Gnitko V. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles / V. Gnitko, K. Degtyarev, V. Naumenko, E. Strelnikova // Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. — 2017. — Vol. 5. — I. 3. — P. 317-328.

4. Rizzo F.J. A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions / F.J. Rizzo, D.J. Shippy // *Mech. Res. Comm.* — 1979. — Vol. 6. — P. 99-103.
5. Ravnik, J. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank / J. Ravnik, E. Strelnikova, V. Gnitko, K. Degtyarev, U. Ogorodnyk // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* — 2016. — Vol.67.— P. 13-25.
6. Gnitko V. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks / V. Gnitko, K. Degtyarev, V. Naumenko, E. Strelnikova // *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements.* — 2018. — Vol. 6(6). — P. 976-988.

#### **References**

1. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering.* Springer-Verlag. Berlin and New York. (1984)
2. Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. *Tablicy integralov, summ, ryadov i prizvedeniy.* Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury. Moscow. (1963)
3. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., Strelnikova, E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements.* **5** (3), 317-328. (2017)
4. Rizzo, F. J., Shippy, D. J. A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions. *Mech. Res. Comm.* **6**, 99-103. (1979)
5. Ravnik, J. Gnitko, V., Degtyarev, K., Ogorodnyk, U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* **67**, 13-25. (2016)
6. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements.* **6**(6), 976-988. (2018)

УДК 517.98

В.І. КУЗЬМИЧ

Херсонський державний університет

М.І. ВАЛЬКО, П.М. ВАЛЬКО, Т.О. ЯКОВЕНКО

Херсонський національний технічний університет

## ПРО СПІЛЬНУ ТОЧКУ ОПЕРАТОРІВ

*Робота продовжує дослідження класичного принципу стискаючого відображення. Цей принцип має численні теоретичні та практичні застосування у різноманітних областях математики. Отримані результати вказують на те, що класичні результати можна розповсюдити на випадок декількох операторів, маючи на увазі існування спільної для них точки. Крім того, в окремих випадках, умову того, що оператор повинен робити стискаюче відображення, можна ослабити. Для цього його достатньо розбити на декілька простих операторів і шукати спільну точку цих операторів. Зокрема, у роботі доведена теорема про існування спільної точки двох операторів, що відображають повний метричний простір на себе. При цьому, між образами, що створюють ці оператори, повинно виконуватись певне співвідношення, яке аналогічне умові стискаючого відображення. Аналогічний результат встановлено і для випадку, коли між образами операторів виконується умова, протилежна умові стискаючого відображення.*

*Ключові слова: метричний простір, оператор, стискаюче відображення, нерухома точка оператора.*

В.И. КУЗЬМИЧ

Херсонский государственный университет

Н.И. ВАЛЬКО, П.Н. ВАЛЬКО, Т.А. ЯКОВЕНКО

Херсонский национальный технический университет

## ОБ ОБЩЕЙ ТОЧКЕ ОПЕРАТОРОВ

*Работа продолжает исследования классического принципа сжимающего отображения. Этот принцип имеет многочисленные теоретические и практические применения в различных областях математики. Полученные результаты указывают на то, что классические результаты можно распространить на случай нескольких операторов, имея в виду существование общей для них точки. Кроме того, в отдельных случаях, условие того, что оператор должен делать сжимающее отображение, можно ослабить. Для этого его достаточно разбить на несколько простых операторов и искать общие точки этих операторов. В частности, в работе доказана теорема о существовании общей точки двух операторов, отражающие полное метрическое пространство на себя. При этом между образами, которые создают эти операторы, должно выполняться определенное соотношение, аналогичное условию сжимающего отображения. Аналогичный результат установлен и для случая, когда между образами операторов выполняется условие, противоположное условию сжимающего отображения.*

*Ключевые слова: метрическое пространство, оператор, сжимающее отображение, неподвижная точка оператора.*

V.I. KUZMYCH  
Kherson State University  
M.I. VALKO, P.M. VALKO, T.O. YAKOVENKO  
Kherson National Technical University

## ABOUT THE GENERAL POINT OF OPERATORS

*The work continues the study of the classical principle of contraction mapping. This principle has numerous theoretical and practical applications in various fields of mathematics. The results obtained indicate that classical results can be extended to the case of several operators, bearing in mind the existence of a common point for them. In addition, in some cases, the condition that the operator must make a contraction mapping can be weakened. To do this, it is enough to break it into several simple operators and look for common points of these operators. In particular, we prove a theorem on the existence of a common point of two operators that reflect a complete metric space on itself. In this case, between the images that these operators create, a certain relationship must be satisfied, which is analogous to the condition of the contracting mapping. A similar result is established for the case when the condition opposite to the condition of the contracting mapping is fulfilled between the images of the operators.*

*In applications of the method of successive approximation, a situation often arises when the operator carrying out the reflection of the total space on himself does not satisfy the classical condition for the compression operator. Sometimes you can use the inverse operator if it exists. In some cases, this inconvenience can be bypassed by conducting certain analytical transformations. In particular, majorant operators of contraction can be used. In the work, a sufficient condition is established for the use of such operators to search for a fixed point of an operator that is not a compression operator. This result can also be used in the case where the operator is not continuous. The graphic diagrams of application of the method of successive approximation in the above cases are presented in the work.*

*The results obtained in the work can be used to search for fixed points of individual operators, which are not compression operators, but allow for their replacement by simpler operators that or either have an inverse operator or are compression operators.*

*Keywords: metric space, operator, contracting map, fixed point of the operator.*

### Постановка проблеми

Потреби практичної діяльності людини обумовили виникнення спеціальних наукових методів, основою яких є математичні. Математичні методи дослідження широко проникають у різні сфери сучасної науки – економіки, фізики, екології, соціології, прикладної лінгвістики, природознавства тощо, які розвиваються на зламі кількох наукових напрямів. Важливою, невід’ємною частиною таких досліджень є обробка експериментальних даних з використанням математичної статистики, створення математичних моделей та їх систем для опису явищ, чинників певного середовища та їх взаємодії. Одним із найефективніших методів побудови математичних моделей, що описують динаміку фізичних, хімічних, екологічних, біологічних, технологічних систем як між окремими їх елементами, так і зовнішніми факторами середовища, в якому перебувають ці елементи, є використання методів теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Класичними задачами такого типу є, наприклад, задачі про охолодження тіла, радіоактивний розпад, поперечні коливання натягнутої струни, швидкість розмноження бактерій, збільшення кількості ферменту, концентрацію розчину, швидкість хімічної реакції, динаміку чисельності популяції, теорію епідемій, ріст дерева та листя на ньому та багато інших.



У задачах знаходження точного або наближеного розв'язку диференціального або інтегрального рівнянь важливим етапом є доведення існування цього розв'язку. Одним із найуживаніших методів дослідження цих рівнянь на існування розв'язку є метод, що опирається на класичну теорему Каччіополлі-Банаха про оператор стискування. Цей оператор є неперервним і має єдину нерухому точку, знаходження якої проводиться методом послідовних наближень [1, С. 605-606]. Якщо оператор, який відповідає досліджуваному рівнянню, не є оператором стискування, то пошук розв'язку ускладнюється. З іншого боку, диференціальне або інтегральне рівняння можна записати у вигляді рівності двох операторів, а пошук розв'язку цього рівняння привести до пошуку точки, в якій обидва оператори приймають однакове значення, тобто до пошуку спільної точки операторів. Особливо це зручно, якщо кожен з отриманих операторів простіший ніж досліджуваний оператор.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Оператори стискування широко використовуються в теоремах про існування розв'язків диференціальних та інтегральних рівнянь [1, С. 620-629], [2, С. 465-470]. Існують теореми і методи пошуку нерухомих точок оператора, які не використовують умови теореми Каччіополлі-Банаха. Це, наприклад, принцип Шаудера [1, С. 616], теорема Какутані [1, С. 630], яку використовують у теорії ігор. Однак, вони справедливі лише на компактних просторах, та істотно використовують властивості неперервності або замкнутості оператора. У роботах [3], [4] і [5] були отримані умови, що розширюють межі застосування принципу стискаючого відображення.

#### Мета дослідження

Метою цієї роботи є визначення умов, достатніх для існування спільної точки двох операторів, які відображають повний метричний простір на себе, а також побудова методу пошуку цієї точки.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Надалі будемо розглядати повний метричний простір  $X$  з метрикою  $\rho$  в ньому. Спільною точкою двох операторів  $u$  і  $v$ , які означені на просторі  $X$ , будемо називати таку точку  $x^*$  цього простору, в якій виконується рівність  $u(x^*) = v(x^*)$ .

**Теорема 1.** *Нехай оператори  $u$  і  $v$  відображають повний метричний простір  $X$  на себе, і для оператора  $v$  на цьому просторі існує обернений оператор.*

*Якщо для довільних точок  $x'$  і  $x''$  простору  $X$  виконується нерівність*

$$\rho(u(x'); u(x'')) \leq \alpha \rho(v(x'); v(x'')), \quad (1)$$

де  $0 \leq \alpha < 1$ , то існує єдина спільна точка операторів  $u$  і  $v$ .

**Доведення.** Візьмемо довільну точку  $x_0$  простору  $X$  і знайдемо точку  $x_1$  з рівняння  $v(x_1) = u(x_0)$ . Оскільки за умовою теореми оператор  $v$  відображає простір  $X$  на себе і для нього існує обернений оператор  $v^{-1}$ , то така точка  $x_1$  існує, причому вона єдина і знаходиться за формулою  $x_1 = v^{-1}(u(x_0))$ . Аналогічно, з рівності  $v(x_2) = u(x_1)$  знаходимо точку  $x_2$ :  $x_2 = v^{-1}(u(x_1))$ . Продовжуючи цей процес до нескінченності, з рівності:

$$v(x_n) = u(x_{n-1}) \quad (2)$$

будуємо послідовність  $\{x_n\}$  точок  $x_n = v^{-1}(u(x_{n-1}))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . З огляду на рівність (2), з нерівності (1) послідовно отримуємо:

$$\begin{aligned} \rho(v(x_2); v(x_1)) &= \rho(u(x_1); u(x_0)) \leq \alpha \rho(v(x_1); v(x_0)), \\ \rho(v(x_3); v(x_2)) &= \rho(u(x_2); u(x_1)) \leq \alpha \rho(v(x_2); v(x_1)) \leq \alpha^2 \rho(v(x_1); v(x_0)), \\ &\dots\dots\dots \\ \rho(v(x_n); v(x_{n-1})) &\leq \alpha^{n-1} \rho(v(x_1); v(x_0)), \\ &\dots\dots\dots, n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

З цих нерівностей випливає, що послідовність  $\{v(x_n)\}$  є збіжною в собі [1, С. 606], і, внаслідок повноти простору  $X$ , збігається до деякої точки  $x'$  цього простору. З рівності (2) отримуємо, що послідовність  $\{u(x_n)\}$  теж збігається до точки  $x'$ .

Нехай точка  $x^*$  простору  $X$  така, що  $v(x^*) = x'$ . Тоді з нерівності (1) для цієї точки отримаємо нерівність:

$$\rho(u(x_n); u(x^*)) \leq \alpha \rho(v(x_n); v(x^*)) = \alpha \rho(v(x_n); x').$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при  $n \rightarrow \infty$ , отримаємо:  $\rho(x'; u(x^*)) \leq \alpha \rho(x'; x') = 0$ .

Таким чином, справедлива рівність:  $u(x^*) = x'$  і, отже,  $x^*$  - спільна точка операторів  $u$  і  $v$ . Єдиність цієї точки можна отримати з нерівності (1), так само, як і при доведенні теореми Каччіополлі-Банаха.

Якщо в умови Теорема 1 в якості оператора  $v$  взяти одиничний оператор:  $v(x) = x$  для будь-якої точки  $x$  простору  $X$ , то отримаємо вищезгадану теорему Каччіополлі-Банаха про нерухому точку оператора стискування. В цьому випадку оператор  $u$ , за теоремою Каччіополлі-Банаха, буде неперервним у кожній точці простору  $X$ .

Приклад побудови послідовних наближень, у разі, якщо  $u = k_1x, v = k_2x$  ( $k_1 < k_2$ ), показаний на рис. 1.

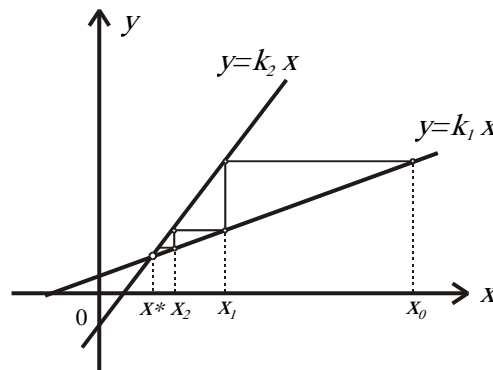


Рис. 1. Схема послідовних наближень до спільної точки.

Умова (1), взагалі кажучи, не обов'язкова для існування спільної точки двох операторів. На це вказує наступний результат.

**Теорема 2.** *Нехай оператори  $u$  і  $v$  відображають повний метричний простір  $X$  на себе, і для оператора  $v$  на цьому просторі існує обернений оператор.*

*Якщо для довільних точок  $x'$  і  $x''$  простору  $X$  виконується нерівність*

$$\rho(u(x'); u(x'')) \geq \alpha \rho(v(x'); v(x'')), \tag{3}$$

де  $\alpha > 1$ , то існує єдина спільна точка операторів  $u$  і  $v$ .

**Доведення.** З нерівності (3) випливає, що для оператора  $u$  на просторі  $X$  існує обернений оператор  $u^{-1}$ . Дійсно, за умовою теореми 2 оператор  $u$  відображає простір  $X$  на себе. Припустимо, що у двох різних точках  $x'$  і  $x''$  простору оператор  $u$  приймає однакове значення:  $u(x') = u(x'') = x$  і  $\rho(x'; x'') \neq 0$ . Тоді з нерівності (3) для цих точок отримаємо:

$$\rho(u(x'); u(x'')) = \rho(x; x) \geq \alpha \rho(v(x'); v(x'')),$$

або  $\rho(v(x'); v(x'')) = 0$ . Отже, оператор  $v$  в точках  $x'$  і  $x''$  теж приймає однакове значення, що суперечить умові існування оберненого оператора. З нерівності (3) знаходимо:

$$\rho(v(x'); v(x'')) \leq \frac{1}{\alpha} \rho(u(x'); u(x'')), \quad (4)$$

Так як справедливі нерівності  $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ , то, з огляду на нерівність (4), маємо, що оператори  $u$  і  $v$  задовольняють умови теореми 1, тому для них існує єдина спільна точка.

Якщо в умові Теореми 2 в якості оператора  $v$  взяти одиничний оператор, то умова (3) набере вигляду:

$$\rho(u(x'); u(x'')) \geq \alpha \rho(x'; x''). \quad (5)$$

У цьому випадку, Лема 1 роботи [4, С. 167] є частинним випадком Теореми 2. Наведемо приклад оператора, що задовольняє умову (5).

**Приклад 1.** Розглянемо повний метричний простір  $R_0^2$  [6, С. 43], точками якого є упорядковані пари дійсних чисел:  $x(x_1; x_2)$ . Відстань між точками  $x'(x'_1; x'_2)$  та  $x''(x''_1; x''_2)$  цього простору означається за допомогою рівності:  $\rho(x'; x'') = \max_{1 \leq k \leq 2} \{|x'_k - x''_k|\}$ .

Матричний оператор  $u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$  відображає простір  $R_0^2$  на себе за правилом:  $u(x) = y(y_0; y_2)$ , де  $y_i = \sum_{k=1}^2 u_{ik} x_k$  ( $i = 1, 2$ ). Для того, щоб оператор  $u$  був оператором стискування, необхідно і достатньо, щоб для деякого числа  $\alpha$  виконувались нерівності:  $\sum_{k=1}^2 |u_{ik}| \leq \alpha < 1$  ( $i = 1, 2$ ) [6, С. 66-67].

Оператор  $u = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  не задовольняє вказаній вище умові, і тому не є оператором стискування. З іншого боку, цей оператор задовольняє умову (5), якщо покласти:  $\alpha = 2 > 1$ . Отже, за Теоремою 2, для цього оператора існує єдина спільна точка з одиничним оператором, тобто нерухома точка оператора  $u$ .

Знайдемо нерухому точку оператора  $u$  методом послідовних наближень. Для цього використаємо обернений оператор:  $u^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ . Наближення розпочнемо, наприклад, з точки  $x_0(1; 1)$ . Застосувавши послідовно  $n$  разів обернений оператор, за правилом:  $x_{n+1} = u^{-1}(x_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), отримаємо послідовність  $\{x_n\}$  точок  $x_n = (u^{-1})^n(x_0) = (u^n)^{-1}(x_0)$ . Далі будемо мати:

$u^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ ,  $(u^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix}$ . Тепер знаходимо елементи послідовності:

$$x_n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5^n \\ 0,5^n \end{pmatrix} (n = 1, 2, \dots).$$

Перейшовши у цій рівності до границі при  $n \rightarrow \infty$ , отримуємо нерухому точку:  $x^*(0; 0)$ .

Використовуючи теореми 1 і 2, можна робити висновок про існування спільної точки трьох операторів.

**Наслідок 1.** Якщо для операторів  $u$  і  $v$ , що задовольняють умови теореми 1, або теореми 2, і для оператора  $f$ , що відображає повний метричний простір  $X$  на себе, виконується рівність:

$$\rho(u(x); f(x)) + \rho(f(x); v(x)) = \rho(u(x); v(x)) \quad (6)$$

в кожній точці  $x$  простору  $X$ , то оператори  $u$ ,  $v$  і  $f$  мають єдину спільну точку.

**Доведення.** За Теоремою 1 або 2 оператори  $u$  і  $v$  мають єдину спільну точку  $x^*$  в просторі  $X$ . Тобто, справедлива рівність:  $u(x^*) = v(x^*)$ . Для цієї точки рівність (6) набуде вигляду:

$\rho(u(x^*); f(x^*)) + \rho(f(x^*); v(x^*)) = \rho(u(x^*); v(x^*))$ , або  $\rho(v(x^*); f(x^*)) = 0$ . Тому справедлива рівність:  $v(x^*) = f(x^*)$ , і точка  $x^*$  є спільною точкою операторів  $v$  і  $f$ , а отже, і операторів  $u$ ,  $v$  і  $f$ .

Наслідок 1, по аналогії з властивістю границі проміжної послідовності, можна було б назвати властивістю спільної точки проміжного оператора.

**Наслідок 2.** Якщо оператор стискування  $u$  і оператор  $f$ , що відображають повний метричний простір  $X$  на себе, задовольняють рівність:

$$\rho(u(x); f(x)) + \rho(f(x); x) = \rho(u(x); x) \quad (7)$$

для будь-якої точки  $x$  простору  $X$ , то оператор  $f$  має єдину нерухому точку.

**Доведення.** Цей наслідок отримуємо з Наслідку 1, вибравши в якості оператора  $v$  одиничний оператор:  $v(x) = x$ .

Наслідок 2 цікавий тим, що оператор  $f$  не обов'язково повинен бути оператором стискування, або мати обернений оператор. Однак, якщо припустити неперервність оператора  $u$  в нерухомій точці, то можна зробити висновок і про неперервність оператора  $f$  у цій точці.

**Теорема 3.** Нехай оператор  $u$  і оператор  $f$  відображають повний метричний простір  $X$  на себе. Нехай, крім того, оператор  $u$  має нерухому точку  $x^*$  у просторі  $X$ , і є неперервним у цій точці.

Якщо у кожній точці простору  $X$  виконується рівність (7), то оператор  $f$  є неперервним у точці  $x^*$ , і вона є для нього нерухомою точкою.

**Доведення.** Нехай точка  $x^*$  є нерухомою точкою оператора  $u$ . У цьому випадку буде виконуватись рівність:  $u(x^*) = x^*$ . Підставивши це значення у рівність (7), будемо мати:

$$\begin{aligned} \rho(u(x^*); f(x^*)) + \rho(f(x^*); x^*) &= \rho(x^*; f(x^*)) + \rho(f(x^*); x^*) = \\ &= 2\rho(x^*; f(x^*)) = \rho(u(x^*); x^*) = \rho(x^*; x^*) = 0. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо рівність:  $\rho(x^*; f(x^*)) = 0$ , а це означає, що точка  $x^*$  є нерухомою точкою оператора  $f$ .

Для доведення неперервності оператора  $f$  у точці  $x^*$  візьмемо довільну послідовність  $\{x_n\}$  точок простору  $X$ , що збігається до точки  $x^*$ . Для довільного елемента  $x_n$  цієї послідовності виконується рівність (7):

$$\rho(u(x_n); f(x_n)) + \rho(f(x_n); x_n) = \rho(u(x_n); x_n).$$

З цієї рівності знаходимо:

$$\rho(f(x_n); x_n) = \rho(u(x_n); x_n) - \rho(u(x_n); f(x_n)) \leq \rho(u(x_n); x_n).$$

Перейшовши у цій нерівності до границі при  $n \rightarrow \infty$ , і використовуючи неперервність оператора  $u$  в точці  $x^*$ , будемо мати:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_n); x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u(x_n); x_n) = \rho(x^*; x^*) = 0.$$

Використаємо нерівність трикутника:  $\rho(f(x_n); x^*) \leq \rho(f(x_n); x_n) + \rho(x_n; x^*)$ .  
Перейшовши у цій нерівності до границі при  $n \rightarrow \infty$ , і використавши при цьому попередню нерівність, будемо мати:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_n); x^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_n); x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n; x^*) = 0.$$

Оскільки відстань є невід'ємною величиною, то отримана нерівність означає справедливість рівності:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_n); x^*) = 0$ , а це, внаслідок збіжності послідовності  $\{x_n\}$  до точки  $x^*$ , означає неперервність оператора  $f$  у цій точці.

Сутність Теорема 3 можна графічно продемонструвати на прикладі функції  $u(x) = kx$  ( $k > 1$ ), та функції  $f(x)$ , що задовольняє нерівності:  $x < f(x) < u(x)$  (рис. 2).

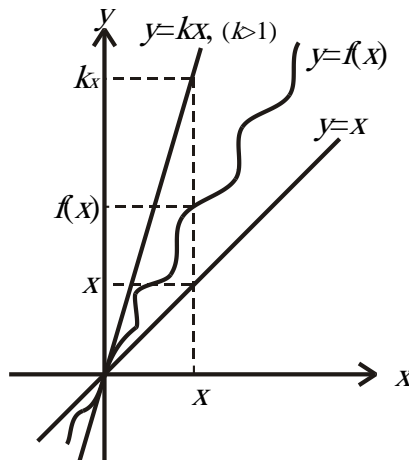


Рис. 2. Властивість спільної точки проміжного оператора.

У цьому випадку, за метрикою простору  $R^1$ , рівність (7) буде мати вигляд:

$$\rho(u(x); f(x)) + \rho(f(x); x) = |kx - f(x)| + |f(x) - x| = |kx - x| = \rho(u(x); x).$$

Таким чином, рівність (7) виконується, і отже функція  $f(x)$  має, як і функція  $u(x) = kx$ , нерухому точку  $x = 0$ .

### Висновки

При дослідженні існування розв'язку диференціальних та інтегральних рівнянь відповідні оператори, у випадку, якщо вони не є операторами стискування, можна розбивати на декілька більш простих операторів і шукати їхню спільну точку. Якщо оператор  $f$  не є неперервним і не має оберненого, то можна шукати такий оператор стискування  $u$ , щоб вони обидва задовольняли рівність (6), а потім шукати нерухому точку оператора  $u$ . За Наслідком 1 ця точка буде нерухомою точкою оператора  $f$ .

У подальшому важливо, використовуючи результати роботи, отримати нові умови існування і єдиності розв'язків конкретних типів диференціальних та інтегральних рівнянь.

#### Список використаної літератури

1. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. Кузьмич В.И. Дополнение к теореме Банаха об операторе сжатия / В.И. Кузьмич // Труды XII международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". – Харьков-Херсон, 2005. – С. 189-192.
4. Кузьмич В.И. О неподвижной точке оператора / В.И. Кузьмич // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. Харків, 2005. – № 661. – Вип. 4. – С. 167-173.
5. Кузьмич В.И. Об общей точке операторов / В.И. Кузьмич // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности Сб. науч. тр. – СПб.: Санкт – Петербургское отделение МАН ВШ, 2005. – С. 58-61.
6. Колмогоров А.М. Элементы теории функций і функціонального аналізу / А.М. Колмогоров, С.В. Фомін. – К.: Видавниче об'єднання "Вища школа", 1974. – 456 с.

#### References

1. Kantorovich L.V., Akilov G.P. (1977). *Funktsionalnyi analiz*. M.: Nauka (in Russ.)
2. Natanson I.P. (1974). *Teoriia funktsii veshchestvennoi peremennoi*. M.: Nauka (in Russ.)
3. Kuzmich V.I. (2005). Dopolnenie k teoreme Banakha ob opereatore szhatiia. *Trudy XII mezhdunarodnogo simpoziuma "Metody diskretnykh osobennostei v zadachakh matematicheskoi fiziki"*, 189-192. Kharkov-Kherson (in Russ.)
4. Kuzmich V.I. (2005). O nepodvizhnoi tochke operatora. *Visnuk Kharkivskogo natsionalnogo universytetu. Serii: Matematychni modeliuвання. Informatsiini tekhnologii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*, **666(4)**, 167-173 (in Russ.)
5. Kuzmich V.I. (2005). Ob obshchei tochke operatora. *Matematicheskoe modelirovanie v obrazovanii, nauke i promyshlennosti. Sbornik nauchnykh trudov*, 58-61. SPb.: Sankt-Peterbyrgskoe otdelenie MAN VSH (in Russ.)
6. Kolmogorov A.M., Fomin S.V. (1974). *Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analizu*. K.: Vyshcha shkola (in Ukr.)

УДК 550.837; 621.391

Ю.В. ЧОВНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

А.А. БРОВАРЕЦ

Киевский кооперативный институт бизнеса и права

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ БИАНИЗОТРОПНЫХ/БИИЗОТРОПНЫХ ПАРАМЕТРОВ КАПИЛЛЯРНЫХ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ГРУНТОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРЕДНАЗНАЧЕНИЯ КАК БИООБЪЕКТОВ**

*Приведены модели капиллярных систем электропроводности грунтов сельскохозяйственного назначения как биообъектов, обладающие эффектом бианизотропии в диапазоне миллиметровых электромагнитных волн. Анализ эффективных электромагнитных бианизотропных/биизотропных параметров указанных объектов проведен для коэффициентов отражения и прохождения, позволяющий оценивать их состояние и реакцию на поляризованное электромагнитное излучение. Рассмотрены приемно-передающие устройства полевых информационных машин, предназначенных для исследования почв сельскохозяйственного назначения, которые определяют их эффективные электромагнитные параметры, в частности, капиллярной системы. Исследована задача дифракции плоской волны, которая нормально падает на пустой анизотропный цилиндр с малым электрическим радиусом и идеальной проводимостью, которая существует в нём вдоль винтовых линий, составляя малый угол с осью цилиндра. Найдены условия возникновения добротного низкочастотного резонанса, который приводит к конечному возмущению диаграммы рассеяния.*

*Ключевые слова: моделирование, анализ, электромагнитные волны, миллиметровый диапазон, биизотропность, бианизотропность, параметры, капиллярные системы, электропроводность, биообъект, модели, анализ, электропроводность, параметры, капиллярная система, почва сельскохозяйственного назначения, низкочастотные резонансы, цилиндр, круговое сечение, винтовая линия, полевая информационная машина, приемно-передающее устройство.*

Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

О.О. БРОВАРЕЦЬ

Київський кооперативний інститут бізнесу і права

## **МОДЕЛЮВАННЯ І АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ БІАНИЗОТРОПНИХ/БІИЗОТРОПНИХ ПАРАМЕТРІВ КАПІЛЯРНИХ СИСТЕМ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ ГРУНТІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ ЯК БІООБ'ЄКТІВ**

*Наведені моделі капілярних систем електропровідності ґрунтів сільськогосподарського призначення як біооб'єктів, котрі мають ефект біанізотропії у діапазоні міліметрових електромагнітних хвиль. Аналіз ефективних електромагнітних біанізотропних/біізотропних параметрів вказаних об'єктів проведений для коефіцієнтів відбиття та проникнення, що дозволяє оцінювати їх стан та реакцію на поляризоване електромагнітне випромінювання. Розглянуто приймально-передавальні пристрої польових інформаційних машин, призначених для дослідження ґрунтів*

сільськогосподарського призначення, які визначають їх ефективні електромагнітні параметри, зокрема, капілярної системи. Досліджено задачу дифракції плоскої хвилі, яка нормально падає на порожній анізотропний циліндр з малим електричним радіусом і ідеальною провідністю, яка існує у ньому вповдовж гвинтових ліній, складаючи малий кут з віссю циліндра. Знайдено умови виникнення добротного низькочастотного резонансу, який призводить до кінцевого збурення діаграми розсіювання.

Ключові слова: моделювання, аналіз, електромагнітні хвилі, міліметровий діапазон, біізотропність, біанізотропність, параметри, капілярні системи, електропровідність, біооб'єкт, моделі, аналіз, електропровідність, параметри, капілярна система, ґрунт сільськогосподарського призначення, низькочастотні резонанси, циліндр, круговий перетин, гвинтова лінія, польова інформаційна машина, приймально-передавальний пристрій.

Y.V. CHOVNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

A.A. BROVARETS

Kyiv Cooperative Institute of Business and Law

### MODELING AND ANALYSIS OF EFFECTIVE ELECTROMAGNETIC BI-ANISOTROPIC/BI-ISOTROPIC PARAMETERS OF CAPILLARY SYSTEMS OF ELECTRICAL CONDUCTIVITY OF AGRICULTURAL SOILS AS BIOOBJECTS

*The models of capillary systems of electrical conductivity of agricultural soils as bioobjects with the effect of bi-anisotropic at the millimeter range of electromagnetic waves is proposed. The analysis of the electromagnetic effective bi-anisotropic/bi-isotropic parameters of mentioned objects is made for the coefficients of reflection and transmission. It gives the possibility to know the state and reaction of these objects on polarized electromagnetic emission. Transmission devices of field information machines for the study of agricultural soils which determine their effective electromagnetic parameters, in particular, the capillary system, are considered. The problem of the diffraction of a plane wave, which normally falls on an empty anisotropic cylinder with a small electric radius and ideal conductivity, which exists in it along the helical lines, forming a small angle with the axis of the cylinder, is studied. The authors have found conditions which give rise to a solid low-frequency resonance and leads to a finite perturbation of the scattering diagram. The main properties of the millimeter electromagnetic waves in a biisotropic media such as agricultural soils are determined with the help of the special new field's vectors. Such vectors give one the possibility to posses' two independent systems of ordinary differential equations of the first order. This is like factorization procedure for the vector's wave field equation. The main properties of the millimeter electromagnetic waves in a "omega-like" medium are discussed as well. One may have the algorithm for the analysis of dates obtained with the help of EHF (extremely high frequency) reflectometers which use waveguides with biisotropic/chiral filling. The results of this work may be used for the refinement and for the improvement of the engineer's methods of calculation for the receiver set and the transmitter as well, which are used at the field information machines. These machines are useful usually just for the investigation of the electromagnetic parameters of the capillary conductivity systems of the agricultural soils at all stages: projection, design and at the regimes of the real exploitation.*

Keywords: modeling, analysis, electromagnetic waves, millimeter range, bi-isotropic, bi-anisotropic, parameters, capillary systems, electrical conductivity, bioobjects, model, analysis, electrical conductivity, parameters, capillary system, agricultural soil, low-frequency resonances, cylinder, circular cross-section, screw line, field information machine, receiving and transmitting device.



### Постановка проблеми

Электропроводность биообъектов живой природы определяется в основном электропроводностью флюида, находящегося в поровом пространстве. Одним из типов порового пространства является капиллярная система (т.н. открытая пористость), обеспечивающая не только электропроводность, но и гидромеханическую проницаемость биообъекта. Вычисление эффективных электромагнитных параметров такой системы представляет актуальную задачу физики живого, решение которой сопряжено с проблемой осреднения уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}^{cm}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \vec{B}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{J}$  – плотность электрического тока;  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля;  
 $\vec{E}, \vec{H}$  – напряжённости соответственно электрического и магнитного полей;  
 $\vec{J}^{cm}$  – плотность стороннего электрического тока неэлектромагнитного происхождения;  
 $\omega$  – частота;  $i$  – символ мнимой единицы.

Как будет показано ниже, осреднение капиллярной системы электропроводности биообъектов со сложной геометрией капилляров приводит к материальным уравнениям вида:

$$\begin{cases} \vec{J}(\vec{E}, \vec{H}) = \hat{\sigma} \cdot \vec{E} + \hat{\xi} \cdot \vec{H}, \\ \vec{B}(\vec{E}, \vec{H}) = \hat{\mu} \cdot \vec{H} + \hat{\zeta} \cdot \vec{E}, \end{cases} \quad (2)$$

где в общем случае  $\hat{\sigma}, \hat{\mu}, \hat{\xi}, \hat{\zeta}$  – матрицы  $\dim[3 \times 3]$ . Параметры  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{\mu}$  (соответственно удельная электропроводность и магнитная проницаемость среды) широко используются в электромагнитобиологии, в диагностике живой материи. Параметры  $\hat{\xi}$  и  $\hat{\zeta}$ , не получившие пока строго определённых названий, являются новыми в теории и практике диагностики/исследования живой материи. В совокупности с  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{\mu}$  они определяют наиболее общие линейные материальные уравнения. Такие (био-)среды, получившие название бианизотропных [1, 2], описывают наиболее общие линейные электромагнитные свойства веществ.

Эффективные параметры  $\hat{\xi}$  и  $\hat{\zeta}$  необходимы для адекватного описания электромагнитных свойств живой материи со сложной системой токопроводящих путей в миллиметровом диапазоне электромагнитных волн. Их введение является следствием извилистости поровых каналов, заполненных проводящим флюидом (вода, ионы). Их физический смысл заключается в возникновении электрического тока за счёт электродвижущей силы индукции (параметр  $\hat{\xi}$ ) и появлении магнитных диполей (параметр  $\hat{\zeta}$ ) при наличии в биосреде замкнутых проводников. Такие замкнутые проводники (или замкнутые токи) формируются при разделении сложной геометрии капиллярной системы биообъекта на более простые геометрические объекты. Если рассматривать объём биообъекта, в котором отсутствуют непротяжённые (ограниченной длины) капилляры (т.н. закрытая пористость), и считать, что электропроводность биосреды обеспечивается исключительно электропроводностью флюида, находящегося в тонких протяжённых капиллярах, то каждый отдельный капилляр живого можно

представить, например, в виде прямой линии тока, гальванически связанного с петлеобразной, имеющей форму греческой буквы  $\Omega$  [2]. Вмещающая биосреда полагается изолятором, магнитная проницаемость везде одинакова и равна магнитной проницаемости вакуума (т.н.  $\Omega$  – структура).

Задача осреднения уравнений Максвелла состоит в вычислении эффективных параметров для такой модели электропроводности биообъекта. Для этого прежде всего необходимо преобразовать некоторым образом сложную систему электрических токов  $\vec{J}$  с целью получения системы токов более простой конфигурации. После этого можно детально исследовать различные физические эффекты, в частности, изменение ориентации плоскости поляризации при прохождении/отражении от биообъекта электромагнитных волн миллиметрового диапазона нетепловой интенсивности.

#### **Анализ последних исследований и публикаций**

Электродинамике сложных (искусственно созданных) сред, обладающих биизотропными, бианизотропными, киральными свойствами посвящена работа [2]. Бианизотропные/биизотропные параметры объектов исследования несут дополнительную информацию об их строении/структуре. Их изучение может быть полезным при диагностике живого, анализе и интерпретации данных электромагнитного зондирования биообъекта (коэффициентов отражения/прохождения). Например, важным следствием бианизотропных свойств биосреды является то обстоятельство, что распространение электромагнитного поля [3] в таких средах приводит к новым эффектам (в частности, к нарушению принципа взаимности [4]). Киральные среды и такие явления, как оптическая активность и круговой дихроизм, были известны с начала прошлого столетия, и оптические свойства гиротропных сред хорошо исследованы [1, 5]. Гармонические во времени электромагнитные поля в киральных и биизотропных средах изучены в [6, 7], а в бианизотропных – в [8, 9]. В живой материи подобные явления и эффекты не изучались.

Следует отметить, что в данном исследовании частично использованы результаты работ [2, 6–9]. Отметим, что грунты сельскохозяйственного назначения (ГСП) можно отнести к биообъектам, ввиду наличия в них множества микроорганизмов органического происхождения. Поэтому в дальнейшем изложении будут использованы термины, понятия и представления, присущие физике живого.

#### **Цель исследования**

Обоснование электродинамических моделей ГСП как биообъектов посредством понятийного аппарата, представлений и концепций, присущих и развитых в физике живого, учитывающих их киральные, биизотропные и бианизотропные свойства, является целью данного исследования. На основании указанных моделей проведен анализ электродинамических эффектов/явлений, возникающих в подобных биосредах, и, в частности, получены аналитические зависимости для коэффициентов отражения/прохождения при облучении ГСП (как биообъектов) электромагнитными волнами нетепловой интенсивности миллиметрового диапазона.

#### **Изложение основного материала исследования**

##### **1. Общие линейные соотношения для киральных биосред.**

Общие линейные соотношения, связывающие векторы электромагнитного поля в произвольной (линейной) биосреде можно записать в виде (2). (В данном исследовании используются диадные обозначения.) Диадные функции обозначены двумя чертами сверху символа. Диадное произведение векторов обозначается как  $ab$ , скалярное произведение –  $a \cdot b$ , и векторное произведение  $a \times b$ ). При этом материальные параметры  $\varepsilon, \mu, \xi, \zeta$  – диадные функции частоты. Запись (2) предполагает гармоническую зависимость полей от времени (записываем её в виде  $\exp(j\omega t)$ ,  $j^2 = -1$ ,  $t$  – время). Как было указано выше, такие линейные биосреды общего вида называются

бианизотропними. Соотношения (2) описывают линейные анизотропные биосреды и учитывают эффекты пространственной дисперсии первого порядка по волновому вектору плоских волн [1]. В изотропных биосредах материальные параметры – скаляры или псевдоскаляры. В этом случае материальные соотношения удобно записывать в виде:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} + (\chi - j\kappa)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\vec{H}, \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} + (\chi + j\kappa)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\vec{E}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\varepsilon, \mu, \chi, \kappa$  – безразмерные комплексные параметры (они становятся вещественными для биосред без потерь),  $\varepsilon_0, \mu_0$  – абсолютная диэлектрическая или магнитная проницаемость вакуума, соответственно. Биосреды, описываемые соотношениями (3), называются биизотропными. В соответствии с обобщённой теоремой взаимности [10] во взаимных биосредах выполняются соотношения:

$$\varepsilon = \varepsilon^T, \mu = \mu^T, \zeta = -\zeta^T, \quad (4)$$

где индекс  $T$  означает операцию транспонирования диадной функции (или матрицы, при матричной форме записи).

Следовательно, во взаимных биизотропных средах коэффициент  $\chi$  равен нулю, поэтому его называют параметром невзаимности. Другое название параметра  $\chi$  – параметр Теллегена, т.к. модель искусственной невзаимной среды с отличным от нуля параметром  $\chi$  была предложена Теллегеном [2].

Таким образом, наиболее общая изотропная взаимная линейная биосреда характеризуется тремя комплексными материальными параметрами  $\varepsilon, \mu, \kappa$ . Параметр связи электрического и магнитного полей  $\kappa$  называется параметром киральности, а сама биосреда – киральной. Термин "киральный" происходит от греческого слова "рука" (типичный зеркально-асимметричный объект). Такие среды хорошо исследованы в оптике, включая кристаллооптику [1], где они называются оптически активными или гиротропными. Параметр  $\kappa$  может быть отличен от нуля только в биосредах, содержащих элементы, не обладающие зеркальной симметрией. Действительно, при инверсии пространственных координат аксиальный вектор напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  изменяет знак, а полярные векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  не изменяются. Следовательно, параметр  $\kappa$  должен изменять свой знак. Если сама биосреда не изменяется при таком преобразовании координат, параметр киральности должен быть нулём.

Итак, в изотропных киральных биосредах при взаимодействии с электромагнитным излучением (ЭМИ) мм-диапазона в качестве зеркально-асимметричных элементов чаще всего могут выступать небольшие спиралевидные структуры (нити). Частные случаи бианизотропных биосред (2) могут быть реализованы, если они включают в себя структурные элементы (частицы) сложной формы (например, частицы в форме греческой буквы  $\Omega$ ). Бианизотропные или одноосные биосреды с такими включениями (последние могут возникать при взаимодействии близлежащих клеток, при их межклеточном взаимодействии – в т.н. межщелевых контактах (мостиковых структурах), либо при функционировании мембран клеток) обладают новыми интересными электродинамическими свойствами и являются базовыми элементами для функционирования в живой материи взаимных фазовращателей, электрически управляемых ответвителей, сканирующих внутренних антенн живого, могут служить

основой для существования в биосреде тонких неотражающих ЭМИ (мм-диапазона) покрытий (как и укрытий для антенн живого организма (биологически активных точек – БАТ), функционирующих в указанном диапазоне электромагнитных волн, совпадающим с рядом характерных частот  $H_2O$ , которой насыщен любой биообъект) и, наконец, способом передачи информации между кластерами клеток живого.

2. Электромагнитные волны мм-диапазоа в биизотропных биосредах.

Рассмотрим основные электродинамические свойства биизотропных биосред, описываемых материальными соотношениями вида (3). По-видимому, наиболее рациональный способ анализа электромагнитных полей в биизотропных биосредах основан на введении новых векторов поля, для которых уравнения Максвелла распадаются на две независимых (для случая однородной биосреды) системы дифференциальных уравнений первого порядка. Этот подход основан на факторизации векторного волнового уравнения.

Ограничиваясь случаем гармонической зависимости полей от времени, запишем уравнения Максвелла в виде:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -jk_0\eta_0\mu\vec{H} + k_0(\kappa - j\chi)\vec{E}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = j\frac{k_0}{\eta_0}\varepsilon\vec{E} + k_0(\kappa + j\chi)\vec{H}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ . Исключая вектор магнитного поля  $\vec{H}$ , приходим к векторному уравнению Гельмгольца:

$$H \cdot \vec{E} = 0, \quad (6)$$

где оператор  $H$  представляется в следующем виде:

$$H = [\nabla \times I - k_0(\kappa + j\chi)I] \cdot [\nabla \times I - k_0(\kappa - j\chi)I] - k_0^2\varepsilon\mu I, \quad (7)$$

где  $I$  – единичная диада. Оператор  $H$  (7) может быть представлен в виде произведения двух операторов первого порядка:

$$H = H_+ \cdot H_- = (\nabla \times I - k_+ \cdot I) \cdot (\nabla \times I + k_- \cdot I), \quad (8)$$

где

$$k_{\pm} = k_0 \left( \sqrt{n^2 - \chi^2} \pm \kappa \right), \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (9)$$

Операторы  $H_+$  и  $H_-$ , как легко проверить, коммутируют.

Пусть теперь две векторные функции  $E_+$  и  $E_-$  удовлетворяют уравнениям первого порядка:

$$H_+ \cdot \vec{E}_+ = 0, \quad H_- \cdot \vec{E}_- = 0, \quad (10)$$

т.е.

$$\nabla \times \vec{E}_+ = k_+ \cdot \vec{E}_+, \quad \nabla \times \vec{E}_- = -k_- \cdot \vec{E}_-. \quad (11)$$

Новые переменные  $\vec{E}_{\pm}$  можно назвать волновыми полями. Очевидно, любая линейная комбинация функций  $\vec{E}_{+}, \vec{E}_{-}$  удовлетворяет исходному уравнению Гельмгольца (6). Поэтому будем искать решение исходного уравнения для электрического поля  $\vec{E}$  в виде суммы:

$$\vec{E} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-}. \quad (12)$$

Выражение для магнитного поля через новые переменные получается из уравнения Максвелла:

$$\vec{H} = \frac{j}{k_0 \eta_0 \mu} \cdot [\nabla \times I - k_0 (\kappa - j\chi) I] \cdot (\vec{E}_{+} + \vec{E}_{-}) = \frac{j}{\eta} \cdot [\exp(j\varphi) \cdot \vec{E}_{+} - \exp(-j\varphi) \cdot \vec{E}_{-}], \quad (13)$$

где  $\sin \varphi = \chi / n$  – нормированный параметр невзаимности и  $\eta = \eta_0 \cdot \sqrt{\mu / \varepsilon}$ . Для взаимных биосред параметр  $\chi$  равен нулю и уравнение (13) упрощается:

$$\vec{H} = \frac{j}{\eta} \cdot (\vec{E}_{+} - \vec{E}_{-}). \quad (14)$$

Таким образом, задача для однородной биизотропной биосреды сводится к решению двух несвязных задач для двух обычных изотропных биосред. Действительно, уравнения (11) имеют такой же вид, как соответствующие волновые уравнения для изотропных биосред. Более того, вводя ещё два новых вектора  $\vec{H}_{+}$  и  $\vec{H}_{-}$  и обозначая:

$$\varepsilon_{+} = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot (\cos \varphi + \kappa) \cdot \exp(j\varphi), \quad \varepsilon_{-} = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot (\cos \varphi - \kappa) \cdot \exp(-j\varphi), \quad (15)$$

$$\mu_{+} = \mu_0 \mu \cdot (\cos \varphi + \kappa) \cdot \exp(-j\varphi), \quad \mu_{-} = \mu_0 \mu \cdot (\cos \varphi - \kappa) \cdot \exp(j\varphi), \quad (16)$$

уравнениям для новых переменных можно придать форму обычных уравнений Максвелла для двух эквивалентных изотропных биосред с параметрами  $\varepsilon_{\pm}, \mu_{\pm}$ :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\pm} + j\omega \mu_{\pm} \cdot \vec{H}_{\pm} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}_{\pm} - j\omega \varepsilon_{\pm} \cdot \vec{E}_{\pm} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Векторы сторонних электрических и магнитных токов также могут быть разбиты на соответствующие волновые составляющие.

Итак, собственные волны в безграничных однородных биизотропных биосредах оказываются циркулярно поляризованными плоскими волнами с постоянными распространения (9). Две собственные волны в невзаимных биосредах также имеют различные волновые сопротивления.

Разумеется, в неоднородных биосредах волновые поля  $\vec{E}_{\pm}$  оказываются связанными. Граничные условия на поверхности, разделяющей две разные биосреды, требуют непрерывности касательных составляющих полных полей  $\vec{E}, \vec{H}$ , а на волновых полях – в отдельности.

Для решения задач отражения и прохождения волн через слоистые биизотропные биосреды можно воспользоваться методами векторных цепей и векторных линий

передачі [11–14]. Эти методы обобщают известный подход эквивалентных линий передачи, широко применяющийся при решении задач о слоистых структурах из изотропных слоёв.

Рассмотрим плоский слой биизотропного материала (элемент биосреды) толщиной  $d$ . Единичный вектор нормали к слою обозначим посредством  $\vec{n}$ . Преобразуем уравнения для полей в слое по Фурье. Двумерное преобразование Фурье выполняется по касательным координатам (в плоскости слоя). Двумерную переменную Фурье обозначим посредством вектора  $\vec{k}_t$ . Обозначая преобразованные по Фурье касательные компоненты электрического и магнитного полей на нижней границе слоя через  $\vec{E}_{t-}, \vec{H}_{t-}$  и соответствующие компоненты на верхней границе через  $\vec{E}_{t+}, \vec{H}_{t+}$ , введём т.н. матрицу передачи, связывающую эти граничные значения касательных компонент:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_{t+} \\ \vec{n} \times \vec{H}_{t+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{E}_{t-} \\ \vec{n} \times \vec{H}_{t-} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Элементы матрицы представляют собой диадные функции, т.к. они связывают между собой двумерные векторы касательных полей. Найти матрицу передачи можно, разложив поля на волновые компоненты (12) и решив соответствующие граничные задачи для уравнений первого порядка (11). Волновые компоненты полей на двух границах раздела связаны посредством диадных функций  $D_{\pm}$  [11, 13]:

$$D_{\pm} = \cos(\beta_{\pm} d) \cdot I_t \mp \sin(\beta_{\pm} d) \cdot \left\{ \frac{k_{\pm}}{\beta_{\pm}} \cdot \frac{[\vec{n} \times \vec{k}_t \vec{k}_t]}{k_t^2} + \frac{\beta_{\pm}}{k_{\pm}} \cdot \frac{[\vec{k}_t \vec{k}_t \times \vec{n}]}{k_t^2} \right\}, \quad (19)$$

где  $\beta_{\pm} = \sqrt{k_{\pm}^2 - k_t^2}$ , и  $I_t$  – двумерная единичная диада. Элементы матрицы  $a_{lm}$ ,  $(l, m) = (1, 2)$ , легко выражаются через диады  $D_{\pm}$  [11]:

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{2} \cdot [D_+ + D_- - j \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (D_+ - D_-)], & a_{12} = \frac{j\eta}{2 \cos \varphi} \cdot [(D_+ - D_-) \times \vec{n}], \\ a_{21} = \frac{j}{2\eta \cos \varphi} \cdot [\vec{n} \times (D_+ - D_-)], & a_{22} = -\frac{1}{2} \cdot [\vec{n} \times [D_+ + D_- + j \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (D_+ - D_-)] \times \vec{n}]. \end{cases} \quad (20)$$

Матрица передачи многослойной биоструктуры находится как произведение матриц передачи отдельных биослоёв.

Таким образом, плоский биизотропный слой можно моделировать эквивалентным четырёхполосником с известной матрицей передачи. Касательные компоненты электрического и магнитного полей на границах слоя играют роль эквивалентных векторных напряжений и токов соответственно.

Коэффициенты отражения и прохождения плоских волн через многослойные биоструктуры выражаются через элементы матрицы передачи. Пусть с одной из сторон биоструктуры на границе раздела выполняются импедансные граничные условия, связывающие Фурье-компоненты касательных полей:

$$\vec{E}_{t-} = z'_c \cdot [\vec{n} \times \vec{H}_{t-}], \quad (21)$$

где  $z'_c$  – импеданс "нагрузки". Такая модель описывает как поверхности биосред с заданным импедансом, в том числе анизотропным, так и границы с изотропным полупространством. Обозначим посредством  $z_c$  диадный волновой импеданс [11, 13] изотропной биосреды, в которой находится источник плоской волны, возбуждающей биизотропную биоструктуру. Входное сопротивление четырёхполюсника, моделирующего биоструктуру, с учётом импеданса "нагрузки"  $z'_c$  находится через элементы матрицы передачи  $\|a\|$  [11]:

$$\vec{E}_{t+} = z_{eq} \cdot [\vec{n} \times \vec{H}_{t+}], \quad z_{eq} = (a_{11} \cdot z'_c + a_{12}) \cdot (a_{21} \cdot z'_c + a_{22})^{-1}. \quad (22)$$

Тогда диадный коэффициент отражения, связывающий касательные компоненты падающей и отражённой волны, находится по формуле:

$$R = (z_{eq} - z_c) \cdot (z_{eq} + z_c)^{-1}. \quad (23)$$

Соответствующий коэффициент прохождения:

$$T = [a_{11} + a_{12} \cdot (z'_c)^{-1}]^{-1} \cdot (I_t + R). \quad (24)$$

Следует отметить, что невзаимный характер преобразования поляризации при прохождении плоских волн через биизотропный биослой приведен в [11]. Так, для значений параметров:  $k_0 d = 10$  (нормированная толщина слоя);  $\varepsilon = 5$ ;  $\mu = 1$ ;  $\chi = 0,3$ ;  $k = 0,01$  – поляризованная волна после отражения от биослоя оказывается поляризованной в ортогональном направлении.

3. Электромагнитные волны мм-диапазона в бианизотропных ("омега" - подобных) биосредах.

Поскольку собственными волнами в изотропных киральных биосредах являются циркулярно поляризованные волны, взаимодействие этих биосред с линейно поляризованными электромагнитными волнами оказывается, вообще говоря, менее эффективным, чем с волнами круговой поляризации. Если в биосреде преобладают не спиралевидные структуры, а структуры в форме греческой буквы  $\Omega$ , то располагаясь (в биосреде) так, чтобы электрическое поле плоской волны было направлено вдоль прямых отрезков провода ("омега-частицы"), а магнитное поле перпендикулярно петлям, эффективность дополнительного магнитоэлектрического взаимодействия существенно возрастает. Материальные соотношения, описывающие такую биосреду, будут бианизотропными. Их удобно записывать в виде [15]:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} + j\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot K_{em} \cdot \vec{H}, \\ \vec{B} = \mu \vec{H} - j\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot K_{me} \cdot \vec{E}. \end{cases} \quad (25)$$

Во взаимных биосредах выполняются соотношения (4). В частности, если прямые отрезки расположить вдоль оси  $X$ , а петли – в плоскости  $(X - Z)$ , то диадные коэффициенты будут иметь вид:

$$K_{em} = K\bar{x}_0\bar{y}_0, \quad K_{me} = K\bar{y}_0\bar{x}_0, \quad (26)$$

где  $K$  – безразмерный коэффициент связи, а  $\bar{x}_0, \bar{y}_0$  – орты соответствующих осей.

Если в биосреде обеспечивается эффективное взаимодействие с линейно поляризованными волнами независимо от направления поляризации или с неполяризованными волнами, то это, в частности, может быть вызвано существованием двух ортогональных решёток (или каркасов) из «омега-частиц». Такая биосреда обладает единственным физически выделенным направлением (ортогональным плоскости, в которой лежат прямые отрезки проводников). Материальные соотношения принимают вид:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\vec{E} + j \cdot K \cdot \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \cdot \vec{J} \cdot \vec{H}, \\ \vec{B} = \mu\vec{H} - j \cdot K \cdot \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \cdot \vec{J} \cdot \vec{E}, \end{cases} \quad (27)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  – одноосные диады:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_t I_t + \varepsilon_n \cdot \bar{z}_0 \bar{z}_0), \quad \mu = \mu_0 \cdot (\mu_t I_t + \mu_n \cdot \bar{z}_0 \bar{z}_0). \quad (28)$$

Здесь:  $I_t = (\bar{x}_0\bar{x}_0 + \bar{y}_0\bar{y}_0)$  – двумерная единичная диада,  $\vec{J} = \bar{z}_0 \times I_t = (\bar{y}_0\bar{x}_0 - \bar{x}_0\bar{y}_0)$  – оператор поворота двумерного вектора в плоскости  $(X - Y)$  на  $90^\circ$ .

Одноосная "омега-биосреда" оказывается таковой, содержащей участки в виде неотражающих покрытий (поглощающих энергию, в частности, в мм-диапазоне либо прозрачных в широком диапазоне частот и углов падения).

Для анализа электромагнитных свойств в биосредах с одноосной симметрией удобно разбить векторы поля на продольные и поперечные компоненты по отношению к единичному вектору оси  $Z$ :

$$\vec{E} = E_n \cdot \bar{z}_0 + \vec{E}_t, \quad \vec{H} = H_n \cdot \bar{z}_0 + \vec{H}_t. \quad (29)$$

После исключения продольных компонент уравнения Максвелла позволяют получить волновое уравнение для преобразованной по Фурье в плоскости  $(X - Y)$  поперечной компоненты электрического поля:

$$\frac{d^2 \vec{E}_t}{dz^2} + \left( \beta_{TM}^2 \cdot \frac{\bar{k}_t \bar{k}_t}{k_t^2} + \beta_{TE}^2 \cdot \frac{[\bar{z}_0 \times \bar{k}_t \bar{z}_0 \times \bar{k}_t]}{k_t^2} \right) \cdot \vec{E}_t = 0, \quad (30)$$

где  $\bar{k}_t$  – двумерная переменная Фурье,



$$\begin{cases} \beta_{TM}^2 = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_n} \cdot (k_0^2 \cdot \varepsilon_n \cdot \mu_t - k_t^2) - k_0^2 \cdot K^2, \\ \beta_{TE}^2 = \frac{\mu_t}{\mu_n} \cdot (k_0^2 \cdot \varepsilon_t \cdot \mu_n - k_t^2) - k_0^2 \cdot K^2 \end{cases} \quad (31)$$

– квадраты Z-компонент постоянных распространения двух собственных волн в биосреде. Собственные волны представляют собой линейно поляризованные ТМ- и ТЕ- волны. Соответствующими индексами отмечены собственные числа [11].

Интересно отметить, что хотя биосреда взаимна, волновые сопротивления для волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси Z, различны. Электрическое и магнитное поля распространяющихся волн связаны соотношением:

$$\vec{E}_t = \mp z_{\pm} \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{H}_t], \quad (32)$$

где диадная функция импеданса диагональна:

$$z_{\pm} = z_{\pm}^{TM} \cdot \frac{\vec{k}_t \vec{k}_t}{k_t^2} + z_{\pm}^{TE} \cdot \frac{[\vec{z}_0 \times \vec{k}_t \vec{z}_0 \times \vec{k}_t]}{k_t^2}, \quad (33)$$

а индексы  $\pm$  относятся к волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях оси Z, соответственно. Скалярные коэффициенты соответствуют линейно поляризованным ТМ- и ТЕ- волнам и их вычисление даёт [9]:

$$\begin{cases} z_{\pm}^{TM} = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_t}{\varepsilon_t}} \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{k_t^2}{k_0^2 \varepsilon_n \mu_t}} - K_r^2 \pm j \cdot K_r \right), \\ z_{\pm}^{TE} = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_t}{\varepsilon_t}} \cdot \frac{k_0^2 \varepsilon_t \mu_n}{(k_0^2 \varepsilon_t \mu_n - k_t^2)} \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{k_t^2}{k_0^2 \varepsilon_t \mu_n}} - K_r^2 \pm j \cdot K_r \right), \end{cases} \quad (34)$$

где нормированный коэффициент связи:

$$K_r = K / \sqrt{\varepsilon_t \mu_t}. \quad (35)$$

Свойства "омега-биосред" существенно отличаются от свойств биизотропных (невзаимных с параметром киральности  $\kappa = 0$ ). В "омега-биосредах" физически выделена не только ось Z, но и направление вдоль оси, однако теорема взаимности выполняется и, кроме того, существенную роль играет одноосная симметрия структуры биосреды. (По-видимому, в высоко организованной живой материи эти выделенные направления позволяют безотражательно, т.е. без существенных потерь на отражение, распространяться электромагнитным сигналам/волнам, в т.ч. мм-диапазона. Такие пути распространения электромагнитных волн можно отождествить с т.н. "китайскими" меридианами в теле человека, животного).

В связи с этим представляет интерес исследование свойств коэффициентов отражения и пропускания плоских линейно поляризованных электромагнитных волн мм-диапазона через плоский слой "омега-биосреды". Так как плоские ТЕ- и ТМ- волны

являются собственными волнами биосреды, можно построить простую скалярную теорию, рассматривая эти две собственные поляризации отдельно. Простое обобщение теории длинных линий на случай, когда волны в противоположных направлениях имеют разные волновые импедансы, позволяет найти коэффициент отражения от биослоя толщиной  $d$  [9]:

$$R = - \frac{(z_1 - z_+)(z_2 + z_-) - (z_1 + z_-)(z_2 - z_+) \cdot \exp(-2j\beta d)}{(z_1 + z_+)(z_2 + z_-) - (z_1 - z_-)(z_2 - z_+) \cdot \exp(-2j\beta d)}. \quad (36)$$

Здесь  $z_1$  – волновое сопротивление биосреды с той стороны, с которой на слой падает плоская волна (мм-диапазона),  $z_2$  – волновое сопротивление биосреды с обратной стороны биослоя и  $z_{\pm}$  – волновые сопротивления для волн в биослое [13]. В зависимости от поляризации в (36) следует подставить значения  $z_{\pm}^{TM}$  или  $z_{\pm}^{TE}$ . Волновые сопротивления изотропных биосред  $z_{1,2}$  могут быть получены как частные случаи формулы, представленной в [13].

Коэффициент прохождения  $T$  даётся формулой:

$$T = \frac{2 \cdot (z_- + z_+) \cdot z_2 \cdot \exp(-j\beta d)}{(z_1 + z_+) \cdot (z_2 - z_1) - (z_1 - z_-) \cdot (z_2 - z_+) \cdot \exp(-2j\beta d)}. \quad (37)$$

Наибольший интерес представляет исследование условий, при которых коэффициент отражения  $R$  в биосреде обращается в нуль. Как видно из (36), для случая биослоя в воздухе ( $z_1 = z_2$ ) отражение отсутствует при любой толщине слоя, если  $z_+ = z_1 = z_2$ . В терминах материальных параметров,  $R = 0$  для ТМ-поляризованных волн при выполнении соотношения:

$$K = \frac{j}{2 \cos \varphi} \cdot \left( \mu_t - \varepsilon_t \cdot \cos^2 \varphi - \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \sin^2 \varphi \right) \quad (38)$$

и для ТЕ-поляризации волн (мм-диапазона) – при:

$$K = \frac{j}{2 \cos \varphi} \cdot \left( \mu_t \cdot \cos^2 \varphi - \varepsilon_t + \frac{1}{\mu_n} \cdot \sin^2 \varphi \right), \quad (39)$$

где  $\varphi$  – угол падения. При нормальном падении на биосреду плоской волны (мм-диапазона) оба условия (38) и (39), конечно, совпадают и записываются в очень простом виде:

$$K = \frac{j}{2} (\mu_t - \varepsilon_t). \quad (40)$$

В предельном случае обычного диэлектрического слоя  $K = 0$  условие (40) сводится к тривиальному требованию равенства относительных диэлектрических и магнитных проницаемостей [2].

4. Алгоритм анализа данных КВЧ- рефлектометрии при использовании волноводов с биизотропным/киральным заполнением.

При анализе данных рефлектометрии биосред в крайне высокочастотном диапазоне (КВЧ) с несущей частотой  $f \approx 60 ГГц$  обычно используются волноводы, внутрь которых помещена конкретная биосреда (или биообъект). Предположим, что этот биообъект обладает биизотропными/киральными свойствами. По-видимому, наиболее эффективный подход к анализу киральных и биизотропных волноводов основан на введении волновых полей и разбиении их на продольные и поперечные компоненты. Постоянные распространения волн в плоских волноводах могут быть определены с помощью метода векторных цепей [11,13].

Для произвольного цилиндрического волновода, заполненного однородной биизотропной биосредой, запишем волновые компоненты полей (12) в виде волн вдоль оси волновода:

$$\vec{E}_{\pm}(r) = \left[ \vec{E}_{t\pm}(\rho) + \vec{z}_0 \cdot E_{z\pm}(\rho) \right] \cdot \exp(-j\beta d), \quad (41)$$

где индексами  $t$  и  $z$  помечены поперечные и продольные компоненты волновых полей, соответственно;  $\rho$  – радиус-вектор в поперечной плоскости.

Исключая поперечные компоненты из уравнений (11), можно получить два уравнения Гельмгольца для продольных волновых полей:

$$\left( \nabla_t^2 + k_{c\pm}^2 \right) \cdot E_{z\pm} = 0, \quad (42)$$

где  $\nabla_t$  – двумерный оператор градиента в поперечной плоскости и  $k_{c\pm}^2 = k_{\pm}^2 - \beta^2$ .

Поперечные компоненты могут быть выражены через продольные [2]:

$$\vec{E}_{t\pm} = \frac{1}{k_{c\pm}} \cdot \left( -j \cdot \beta \cdot I_t \mp k_{\pm} \cdot \vec{z}_0 \times I_t \right) \cdot \nabla_t E_{z\pm}. \quad (43)$$

Далее, граничные условия на стенках волновода с помощью (43) выражаются через продольные компоненты волновых полей. В простейшем случае идеально проводящих стенок граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} E_{z+} + E_{z-} = 0, \\ \left( \frac{\beta}{k_{c+}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} + j \cdot \frac{k_+}{k_{c+}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \right) \cdot E_{z+} + \left( \frac{\beta}{k_{c-}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} - j \cdot \frac{k_-}{k_{c-}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \right) \cdot E_{z-} = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Здесь ось  $\vec{n}$  направлена по нормали к стенке волновода, а ось  $\tau$  – по касательной к ней. Подстановка соответствующих решений уравнений Гельмгольца (43) в граничные условия приводит к дисперсионным уравнениям для постоянных распространения собственных волн.

Следует отметить, что все волны, распространяющиеся в волноводах, заполненных киральными биосредами, являются гибридными. Характерной особенностью их является т.н. бифуркация мод – обычное для изотропных волноводов вырождение снимается.

5. Моделирование и анализ эффективных электромагнитных параметров дисперсных материалов (грунтов сельскохозяйственного предназначения). Использование

низкочастотных резонансов в пустых цилиндрах кругового сечения с идеальной проводимостью поверхности вдоль винтовых линий (модель приёмно-передающего устройства электромагнитных волн полевой информационной машины).

Электропроводимость грунтов сельскохозяйственного назначения (ГСП), как, скажем, и горной породы определяется в основном электропроводимостью флюида, который находится в **поровом** пространстве. Скелет (основа), например, большинства горных пород в электрическом отношении есть, вообще говоря, непроводящим. Одним из типов **порового** пространства, в частности, и в ГСП, является капиллярная система (т.н. открытая пористость), которая обеспечивает не только электропроводимость, но и гидромеханическую проницаемость ГСП (как, кстати, и в горных породах). Вычисление эффективных электромагнитных параметров такой системы представляет актуальную задачу анализа и исследования ГСП с помощью полевых информационных машин. Эффективные электромагнитные параметры капиллярной системы электропроводимости горной породы исследованы ранее. Бианизотропные среды, которые описывают их наиболее общие линейные электропроводные свойства, изучены в [1, 2]. Однако подобные свойства (киральность, биизотропия, бианизотропия), присущие, по нашему мнению ГСП, до сих пор не исследованы. Наличие таких особых свойств ГСП требует специальных приёмно-передающих устройств, зондирующих ГСП поляризованными электромагнитными волнами определённого частотного диапазона. Необходимо обосновать модель для анализа эффективных электромагнитных параметров капиллярной системы электропроводности ГСП, которая позволяет исследовать разнообразные электропроводные, киральные и биизотропные свойства указанных почв как биообъектов (ввиду наличия в них множества микроорганизмов органического происхождения). Объектом исследования в данном пункте работы является полый диэлектрический цилиндр, имеющий анизотропную электропроводность. Размеры линий проводимости на этом цилиндре пренебрежимо малы по сравнению с габаритами самого цилиндра (например, с его внутренним и внешним радиусами). Используем такой цилиндр, изображённый на рис. 1, в качестве приёмно-передающего устройства полевой информационной машины (ПИМ).

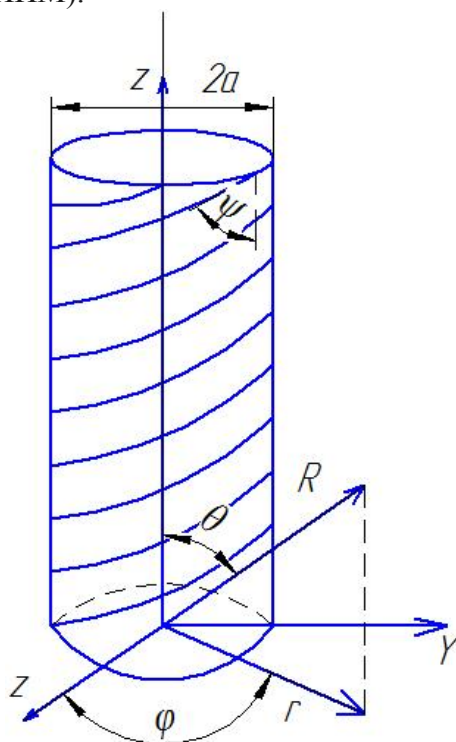


Рис. 1. Цилиндр с анизотропной проводимостью.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитного поля с временной зависимостью  $\exp(i \cdot \omega \cdot t)$ ,  $i^2 = -1$  на анизотропном цилиндре. Поверхность цилиндра имеет идеальную проводимость винтовых линий, каждая из которых описывается уравнением  $z = a \cdot \varphi \cdot \operatorname{ctg} \psi + \operatorname{const}$ . Угол  $\psi$  образован направлением проводимости и осью цилиндра. Для определенности поставленной задачи допустим, что винтовые линии проводимости имеют правое вращение, при этом  $0 < \psi < \pi/2$ . Граничные условия при  $r = a$  являются известными условиями анизотропной идеально проводящей поверхности:

$$\begin{cases} E_z^+ = E_z^-, E_\varphi^+ = E_\varphi^-, E_z \cdot \cos \psi + E_\varphi \cdot \sin \psi = 0, \\ \left( H_z^+ - H_z^- \right) \cdot \cos \psi + \left( H_\varphi^+ - H_\varphi^- \right) \cdot \sin \psi = 0. \end{cases} \quad (45)$$

Далее рассмотрим случай, когда падающее поле не зависит от  $z$ . Поскольку свойства цилиндра также не зависят от этой координаты, задача оказывается двумерной. Заметим, что падающее поле имеет круговую поляризацию, а  $ka \ll 1, \psi \ll 1$ , где наблюдаются низкочастотные резонансы, которые и являются предметом исследования в данном пункте настоящей работы.

Используем уравнения Максвелла для описания взаимодействия падающей электромагнитной плоской волны круговой поляризации с таким цилиндром в ближней зоне ( $ka \ll 1$ ), где  $k$  – волновой вектор электромагнитной волны (падающей),  $a$  – внешний радиус цилиндра. При этом также будем считать, что рассматривается случай малых углов  $\psi$ , т.е.  $\psi \ll 1$ . Наличие полого цилиндра в задаче дифракции электромагнитных волн на нём позволяет использовать цилиндрическую систему координат, функции Бесселя и Ганкеля для описания падающего и рассеянного на полом цилиндре электромагнитных полей. (Это классический подход к решению подобных дифракционных задач в электродинамике. При разложении функций Бесселя и Ганкеля в ряд используем асимптотику этих функций при малом значении аргумента).

Представим  $z$ -компоненты падающего электромагнитного поля, через которые можно выразить все другие компоненты, в виде рядов по функциям Бесселя с заданными коэффициентами:

$$\begin{cases} E_z^0(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_1^{(n)} \cdot I_n(kr) \cdot \exp(in\varphi), \\ H_z^0(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_2^{(n)} \cdot I_n(kr) \cdot \exp(in\varphi) \end{cases} \quad (46)$$

Полное поле везде является суммой падающего и рассеянного полей:  $E_z = E_z^0 + E_z^S, H_z = H_z^0 + H_z^S$ .

Рассеянные поля поданы в виде рядов по цилиндрическим функциям с неизвестными коэффициентами:

$$E_z^S(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\varphi) \cdot \begin{cases} B_1^{(n)} \cdot H_n^{(2)}(kr), r \geq a, \\ C_1^{(n)} \cdot I_n(kr), r \leq a. \end{cases} \quad (47^*)$$

$$H_Z^S(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\varphi) \cdot \begin{cases} B_2^{(n)} \cdot H_n^{(2)}(kr), r \geq a, \\ C_2^{(n)} \cdot I_n(kr), r \leq a. \end{cases} \quad (47^{**})$$

Удовлетворяя граничным условиям (45), можно установить, что двумерные векторы  $\vec{B}^{(n)} = \{B_1^{(n)}, B_2^{(n)}\}$  и  $\vec{C}^{(n)} = \{C_1^{(n)}, C_2^{(n)}\}$ , которые характеризуют внешние и внутренние рассеянные поля, связаны с парциальным вектором падающего поля  $\vec{A}^{(n)} = \{A_1^{(n)}, A_2^{(n)}\}$  соотношениями:

$$\vec{B}^{(n)} = L^{(n)} \cdot \vec{A}^{(n)}, \quad \vec{C}^{(n)} = M^{(n)} \cdot \vec{A}^{(n)}. \quad (48)$$

Элементы матриц  $L^{(n)}$  и  $M^{(n)}$  принимают следующие значения:

$$\begin{cases} L_{11}^{(n)} = -I_n^2(ka) \cdot \cos^2 \psi / D_n, L_{12}^{(n)} = -I_{21}^{(n)} = -i \cdot I_n'(ka) \cdot I_n(ka) \cdot \sin \psi \cdot \cos^2 \psi / D_n, \\ L_{22}^{(n)} = -[I_n'(ka)]^2 \cdot \sin^2 \psi / D_n, M_{11}^{(n)} = -I_n(ka) \cdot H_n^{(2)}(ka) \cdot \cos^2 \psi / D_n, \\ M_{12}^{(n)} = -i \cdot I_n'(ka) \cdot H_n^{(2)}(ka) \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi / D_n, M_{21}^{(n)} = I_n'(ka) \cdot H_n^{(2)'}(ka) \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi / D_n, \\ M_{22}^{(n)} = -I_n'(ka) \cdot H_n^{(2)'}(ka) \cdot \sin^2 \psi / D_n, \end{cases} \quad (49)$$

где

$$D_n = I_n'(ka) \cdot H_n^{(2)'}(ka) \cdot \sin^2 \psi + I_n(ka) \cdot H_n^{(2)}(ka) \cdot \cos^2 \psi. \quad (50)$$

Исследуем поведение внешнего рассеянного поля. Матрица  $L(n)$  имеет два собственных вектора:

$$\vec{\ell}_1^{(n)} = \{I_n'(ka) \cdot \sin \psi, i \cdot I_n(ka) \cdot \cos \psi\}, \quad \vec{\ell}_2^{(n)} = \{I_n(ka) \cdot \cos \psi, -i \cdot I_n'(ka) \cdot \sin \psi\}. \quad (51)$$

Отметим, что вектору  $\vec{\ell}_1^{(n)}$  отвечает собственное значение, которое равняется нулю. Это означает, что если падающее поле имеет вид:  $\vec{A}^{(n)} = \vec{\ell}_1^{(n)}$ , тогда  $\vec{B}^{(n)} = 0$ , то есть в рассеянном поле отсутствует гармоника с номером  $n$ . Вектору  $\vec{\ell}_2^{(n)}$  отвечает собственное значение  $\lambda^{(n)}$ , то есть  $L^{(n)} \vec{\ell}_2^{(n)} = \lambda^{(n)} \cdot \vec{\ell}_2^{(n)}$ , которое удобно записать в виде:

$$\lambda^{(n)} = (-1) \left/ \left( 1 - i \cdot \frac{I_n'(ka) \cdot N_n'(ka) \cdot \sin^2 \psi + I_n(ka) \cdot N_n(ka) \cdot \cos^2 \psi}{(I_n'(ka))^2 \cdot \sin^2 \psi + I_n^2(ka) \cdot \cos^2 \psi} \right) \right. \quad (52)$$

Величина  $|\lambda^{(n)}|$ , как функция частоты, имеет бесконечное число максимумов, равных единице. Рассмотрим случай  $ka \ll 1$ ,  $\psi \ll 1$ .

Тогда первый резонанс возникает при выполнении условия:

$$ka = |n| \cdot \text{tg} \psi. \quad (53)$$

Используя асимптотику бесселевых функций при малых аргументах в (51) и (53), будем иметь простой вид собственных векторов в условиях заданного резонанса:

$$\vec{\ell}_1^{(n)} = \{1, i\}, \quad \vec{\ell}_2^{(n)} = \{1, -i\}. \quad (54)$$

Нетрудно видеть, что вектор  $\vec{\ell}_1^{(n)}$  отвечает левой круговой поляризации, а вектор  $\vec{\ell}_2^{(n)}$  – правой круговой.

На рис. 2 представлена, рассчитанная на ПЭВМ численно, зависимость полной мощности рассеивания  $\delta$  от параметра  $ka$  для анизотропного цилиндра с углом  $\psi = 18^\circ$  при падении на него плоских волн с круговой поляризацией:

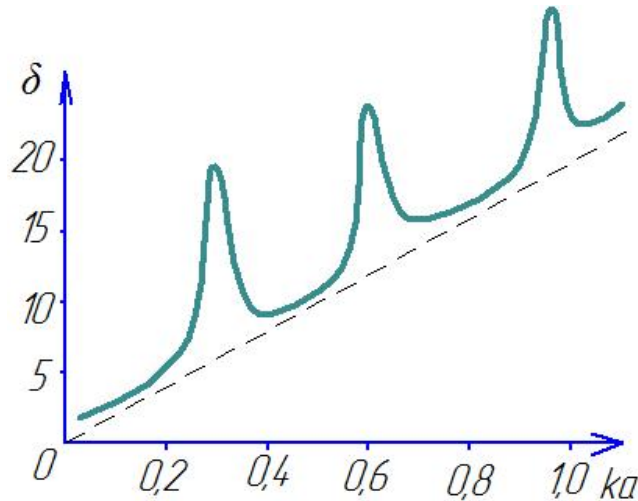
$$E_z^0 = \exp(-ikx), H_z^0 = \pm i \cdot \exp(-ikx). \quad (55)$$

Величина  $\delta$  определена как:

$$\delta = \int_0^{2\pi} (|F_E|^2 + |F_H|^2) d\varphi, \quad (56)$$

где диаметры  $F_E(\varphi)$  и  $F_H(\varphi)$  связаны с соответствующими полями в дальней зоне соотношениями:

$$E_z^s \approx F_E(\varphi) \cdot \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{k \cdot r}}, H_z^s \approx F_H(\varphi) \cdot \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{k \cdot r}}. \quad (57)$$



**Рис. 2. Зависимость полной мощности рассеивания анизотропного цилиндра от частоты при облучении плоской волной с правой поляризацией (сплошная кривая) и с левой поляризацией (штриховая линия)**

Из рис. 2 видно, что действительно резонансы проявляются при падении волны с правой круговой поляризацией и отсутствуют при падении волны с левым круговым вращением. Благодаря резонансу даже при  $ka \ll 1$  остается эффект конечного возмущения полной рассеянной мощности (при  $ka \rightarrow 0$  в резонансе  $\delta \rightarrow 16$ ).

Отметим, что при первом резонансе диаметры имеют вид  $F_E(\varphi) = i \cdot F_H(\varphi) \approx \cos \varphi$ . При этом все рассеянное поле, в том числе и поле обратного рассеивания, имеет то же направление вращения поляризации, что и падающее поле.

Исследуем поведение поля внутри цилиндра  $r \leq a$ . Матрица  $M^{(n)}$ , которая определяет коэффициент рассеяния внутреннего поля через падающее поле, имеет два собственных вектора. Один из них  $\vec{m}_1^{(n)}$  совпадает с  $\vec{\ell}_1^{(n)}$  и тоже имеет нулевое собственное значение. Потому, если возбуждается поле вида  $\vec{A}^{(n)} = \vec{\ell}_1^{(n)}$ , тогда и внутри цилиндра рассеянное поле не имеет гармоники с номером  $n$ . Второму собственному вектору:

$$\vec{m}_1^{(n)} = \left\{ H_n^{(2)}(ka) \cdot \cos \psi, -i \cdot H_n^{(2)'}(ka) \cdot \sin \psi \right\} \quad (58)$$

отвечает собственное значение  $\mu^{(n)} = -1$ . Таким образом, в случае возбуждающего поля  $\vec{A}^{(n)} = \vec{m}_2^{(n)}$  справедливым будет соотношение  $\vec{A}^{(n)} + \vec{C}^{(n)} = 0$ , то есть происходит исчезновение гармоники с номером  $n$  из полного поля внутри цилиндра, а в окрестности низкочастотного резонанса (9) векторы  $\vec{m}_1^{(n)}$  и  $\vec{m}_2^{(n)}$  близки к одному и тому же вектору  $\{1, i\}$ . Поэтому, при облучении цилиндра лево-поляризованной волной вблизи резонанса (53) происходит резкая, но конечная перестройка внутреннего поля. Она заключается в том, что внутри цилиндра гармоника с номером  $n$  или присутствует в суммарном поле в той же мере, что и в падающем (полное просветления цилиндра на этой гармонике), или отсутствует (полное экранирование).

Рассмотрим поведение внутреннего поля при право-поляризованном возбуждении, то есть когда парциальный вектор падающего поля имеет вид  $\vec{A}^{(n)} = \{1, -i\}$ . Раскладывая этот вектор по векторам  $\vec{m}_1^{(n)}$  и  $\vec{m}_2^{(n)}$ , нетрудно показать, что в условиях резонанса (9) вектор  $\vec{C}^{(n)}$  имеет вид:

$$\vec{C}^{(n)} = \frac{-i \cdot |n|! \cdot (|n| - 1)! \cdot 2^{2|n|}}{\pi \cdot (ka)^{2|n|}} \cdot \{1, i\}. \quad (59)$$

Рассмотрим структуру внутреннего поля при падении плоской волны с правой круговой поляризацией (см. (55)) и с нижним знаком в  $H_z^{(0)}$ , в условиях резонанса (53), при  $n = \pm 1$ . В этом случае векторы имеют вид:

$$\vec{A}^{(\pm 1)} = \{\pm i, \pm 1\}, \quad \vec{C}^{(\pm 1)} = \frac{(-4)}{\pi \cdot (ka)^2} \cdot \{\pm i, \pm 1\}. \quad (60)$$

При этом внутреннее поле приближенно равняется:

$$E_z^+ = -i \cdot H_z^+ \cong -\frac{4}{\pi \cdot (ka)^2} \cdot kr \cdot \cos \varphi. \quad (61)$$

Вычисляя с помощью (60) поперечные компоненты в декартовых координатах, будем иметь:



$$E_y^+ = (-i \cdot H_y^+) \cong \frac{4}{\pi(ka)^2}. \quad (62)$$

Компоненты  $E_x, H_x$  в  $(1/ka)$  раз меньше соответствующих компонент, выписанных в (61).

Отметим, что в падающей волне также присутствуют "компоненты" игрека:

$$E_y^0 = i \cdot H_y^0 = -i \cdot \exp(-ikx). \quad (63)$$

Таким образом, анизотропный резонанс особенно чувствителен именно к этим компонентам. При таком возбуждении рассматриваемый анизотропный цилиндр эквивалентен бесконечной системе размещенных вдоль оси  $Z$  электрических и магнитных диполей, ориентированных в направлении  $Y$ .

Можно показать, что внешние поперечные поля в близкой к цилиндру зоне равняются:

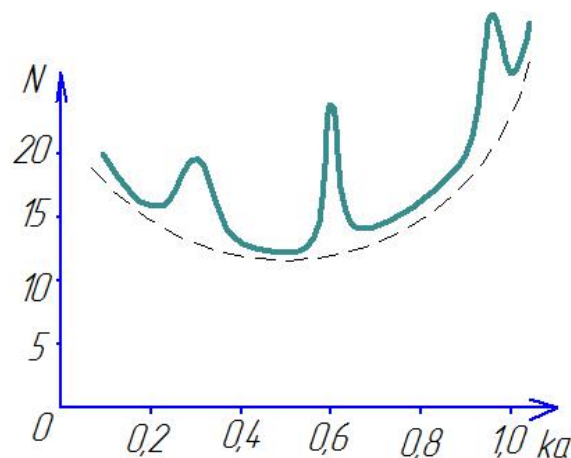
$$E_x^- = i \cdot H_x^- = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{(kr)^2} \quad E_y^- = i \cdot H_y^- = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos 2\varphi}{(kr)^2}. \quad (64)$$

Отметим, что реактивная мощность, которая запасается в условиях резонанса, одинакова во внутренней и внешней областях. Кроме того, электрическое и магнитное поле сдвинуты по фазе на  $\pi/2$  в противоположные стороны вне и внутри цилиндра (сравнить (61) и (63)). Это обеспечивает замкнутость силовых линий магнитного поля.

На рис.3 изображена зависимость от  $ka$  величины нормы тока:

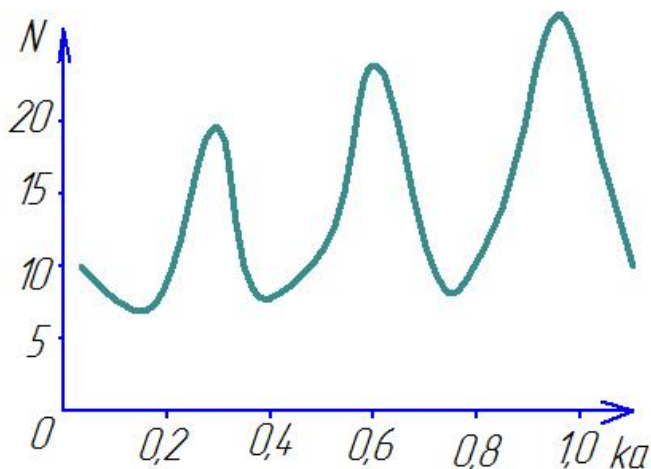
$$N = k \cdot a \cdot \int_0^{2\pi} \left[ |H_z^+ - H_z^-|^2 + |H_\varphi^+ - H_\varphi^-|^2 \right] d\varphi \quad (65)$$

при падении левополяризованной плоской волны. Как видно из рис. 3, в местах резонанса происходит резкое, но конечное изменение нормы тока.



**Рис. 3. Зависимость нормы тока  $N$  от частоты при падении левополяризованной волны на цилиндр.**

На рис. 4 представлена норма тока при падении плоской волны с правой поляризацией. Отметим, что для этого случая в условиях первого резонанса норма тока растет на два порядка.



**Рис. 4. Зависимость нормы тока  $N$  от  $ka$  при падении плоской право-поляризованной волны на цилиндр с  $\psi = 18^\circ$ .**

#### Выводы

1. Обоснована физико-математическая модель, используемая для адекватного описания эффективных электромагнитных биизотропных/бианизотропных параметров капиллярных систем электропроводности грунтов сельскохозяйственного предназначения как биообъектов.
2. Для практической реализации в КВЧ-рефлектометрии полученных результатов нужно уметь рассчитывать значения материальных параметров по размерам отдельных включений (спиралей или омега-частиц, "омега – биоструктур"). Эта задача требует отдельного дополнительного исследования, которое будет проведено в ближайшем будущем.
3. Для решения проблемы измерения материальных параметров указанных выше грунтов как биообъектов/биосред предложены способы нахождения материальных констант по результатам измерений коэффициентов отражения и прохождения плоской волны определённой поляризации через плоский слой в волноводе/свободном пространстве (в миллиметровом диапазоне электромагнитных волн).
4. Теоретически найден и исследован эффект низкочастотного резонанса нового типа, принципиально отличающийся от известных аналогов низкочастотного резонанса Гельмгольца нетрадиционной структурой и амплитудой внутреннего поля, а также тем, что рассеянное поле имеет круговую поляризацию.
5. Полученные в работе результаты могут быть в последующем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчета приёмно-передающих устройств полевых информационных машин для изучения и исследования электромагнитных параметров капиллярных систем электропроводимости, присущих почвам сельскохозяйственного предназначения, как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

**Список использованной литературы**

1. Фёдоров Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Фёдоров. – Минск: Наука и техника, 1976. – 456 с.
2. Третьяков С.А. Электродинамика сложных сред: киральные, би-изотропные и некоторые би-анизотропные материалы / С.А. Третьяков // Радиотехника и электроника. – 1994. – Т. 39. – Вып. 10. – С. 1457-1470.
3. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
4. Шимони К. Теоретическая электротехника / К. Шимони. – М.: Мир, 1964. – 774 с.
5. Lowry T.M. Optical rotatory power / T.M. Lowry. – N.Y.: Dover, 1964. – 400 p.
6. Lakhtakia A. Time-harmonic electromagnetic fields in chiral media / A. Lakhtakia, V.K. Varadan, V.V. Varadan. – Berlin: Springer – Verlag, 1989. – 420 p.
7. Lindell I.V. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media / I.V. Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen. – London: Artech House, 1994. – 352 p.
8. Proceedings of "Bianisotropics'93" / Eds. A. Sihvola, S. Tretyakov, I. Semchenko. Electromagnetics Lab., Helsinki University of Technology. – Report 159. – December 1993. – 210 p.
9. Tretyakov S.A. Novel uniaxial bianisotropic materials: Reflection and transmission in planar structures / S.A. Tretyakov, A.A. Sochava // Special Issue of "Progress in Electromagnetics Research on bi-isotropic media and applications" / Ed. A. Priou. – Elsevier, 1994. – 200 p.
10. Kong A.J. Electromagnetic waves theory / A.J. Kong. – N.Y.: Wiley, 1986. – 350 p.
11. Tretyakov, S. A., Oksanen, M. I. Electromagnetic Waves in Layered General Biisotropic Structures. J. Electromagnetic Waves and Applications. **6**, 10, 1393-1411. (1992)
12. Lindell, I.V., Tretyakov, S. A., Oksanen, M. I. Vector Transmission-Line and Circuit Theory for Bi-Isotropic Layered Structures. J. Electromagnetic Waves and Applications. **7**, 1, 147-173. (1993)
13. Oksanen, M. I., Tretyakov, S. A., Lindell, I. V. Vector Circuit Theory for Isotropic and Chiral Slabs. J. Electromagnetic Waves and Applications. **4**, 7, 613-643. (1990)
14. Lindell I.V. Methods For Electromagnetic Field Analysis. Clarendon Press. Oxford: (1992)
15. Tretyakov S. A. Thin pseudochiral layers: Approximate boundary conditions and potential applications. Microwave and Optical Technol. Letters. **6**, 2, 112-115. (1993)

**References**

1. Fyodorov, F. I. Teoriya girotropii. Nauka i tehnika. Minsk. (1976)
2. Tretyakov, S. A. Elektrodinamika slozhnyh sred: kiralnye, biizotropnye i nekotorye bianizotropnye materialy. Radiotekhnika i elektronika. **39**, 10, 1457-1470. (1994)
3. Nikolskiy, V. V., Nikolskaya, T. I. Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln. Nauka. Moscow. (1989)
4. Shimoni, K. Teoreticheskaya elektrotehnika. Mir. Moscow. (1964)
5. Lowry T.M. Optical rotatory power. Dover. N.Y. (1964)
6. Lakhtakia, A., Varadan, V. K., Varadan, V. V. Time-harmonic electromagnetic fields in chiral media. Springer–Verlag. Berlin. (1989)
7. Lindell, I. V., Sihvola, A. H., Tretyakov, S. A., Viitanen, A. J. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media. Artech House. London. (1994)
8. Proceedings of "Bianisotropics'93". Eds. A. Sihvola, S. Tretyakov, I. Semchenko. Electromagnetics Lab., Helsinki University of Technology. Report 159. December (1993)
9. Tretyakov, S. A., Sochava, A. A. Novel uniaxial bianisotropic materials: Reflection and transmission in planar structures. Special Issue of "Progress in Electromagnetics Research on bi-isotropic media and applications". Ed. A. Priou. Elsevier. (1994)

10. Kong, A. J. Electromagnetic waves theory. Wiley. N.Y. (1986)
11. Tretyakov, S. A., Oksanen, M. I. Electromagnetic Waves in Layered General Biisotropic Structures. *J. Electromagnetic Waves and Applications*. **6**, 10, 1393-1411. (1992)
12. Lindell, I.V., Tretyakov, S. A., Oksanen, M. I. Vector Transmission-Line and Circuit Theory for Bi-Isotropic Layered Structures. *J. Electromagnetic Waves and Applications*. **7**, 1, 147-173. ( 1993)
13. Oksanen, M. I., Tretyakov, S. A., Lindell, I. V. Vector Circuit Theory for Isotropic and Chiral Slabs. *J. Electromagnetic Waves and Applications*. **4**, 7, 613-643. (1990)
14. Lindell I.V. *Methods For Electromagnetic Field Analysis*. Clarendon Press. Oxford: (1992)
15. Tretyakov S. A. Thin pseudo-chiral layers: Approximate boundary conditions and potential applications. *Microwave and Optical Technol. Letters*. **6**, 2, 112-115. (1993)

## ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.632.4

Ю.М. БАРДАЧОВ, Г.Я. ТУЛУЧЕНКО  
Херсонський національний технічний університет

### ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВЕБЕРА ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СПЛАЙНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

*Дана стаття присвячена порівняльному аналізу впливів різних форм подання інтерполяційних сплайнів на характеристики розв'язку задачі Вебера у полярній системі координат методом Бубнова-Гальоркіна.*

*Шуканий розв'язок має форму добутку двовимірного сплайна та допоміжного множника. Допоміжний множник є неявним рівнянням границі області. У такий спосіб забезпечується виконання вимог до базисних функцій у методі Бубнова-Гальоркіна, а саме, задоволення ними нульових граничних умов у досліджуваній задачі. Двовимірний сплайн, в свою чергу, складається із тензорних добутків двох одновимірних сплайнів (кожний із яких є В-сплайном за своєю полярною координатою). Для опису базисних функцій цих В-сплайнів використані дві досліджувані форми опису. Розв'язання вказаної задачі виконується засобами системи комп'ютерної математики Maple.*

*У результаті виконаних досліджень практично показано, що в системах символічної математики певні переваги має застосування опису сплайнів єдиним виразом.*

*Ключові слова: задача Вебера, сплайн-апроксимація, метод Гальоркіна.*

Ю.Н. БАРДАЧЕВ, Г.Я. ТУЛУЧЕНКО  
Херсонский национальный технический университет

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЕБЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

*Данная статья посвящена сравнительному анализу влияния различных форм представления интерполяционных сплайнов на характеристики решения задачи Вебера в полярной системе координат методом Бубнова-Галеркина.*

*Искомое решение имеет форму произведения двумерного сплайна и вспомогательного множителя. Вспомогательный множитель является неявным уравнением границы области. Таким образом обеспечивается выполнение требований к базисным функциям в методе Бубнова-Галеркина, а именно, удовлетворение ими нулевых граничных условий в исследуемой задаче. Двумерный сплайн, в свою очередь, состоит из суммы тензорных произведений одномерных сплайнов (каждый из которых является В-сплайном по своей полярной координате). Для описания базисных функций этих В-сплайнов использованы две исследуемые формы описания. Решение указанной задачи выполняется средствами системы компьютерной математики Maple.*

*В результате выполненных исследований практически показано, что в системах символьной математики определенные преимущества имеет применение описания сплайнов единым выражением.*

*Ключевые слова: задача Вебера, сплайновая аппроксимация, метод Галеркина.*

Yu.M. BARDACHOV, H.Ya. TULUCHENKO  
Kherson National Technical University

## NUMERICAL SOLUTION OF THE WEBER PROBLEM WITH THE USE OF SPLINE APPROXIMATION

*In computer math systems for the description of different types of interpolation splines the fragmentary method is used. In the tasks of mathematical physics, when searching the solution in the spline form, the traditional way for the presenting of latter leads to a significant slowdown in the implementation of the corresponding numerical methods. From the spline theory, it is known that an interpolation spline can be described by one formula – a linear combination of basic functions. This article is devoted to the comparative analysis of the impacts of these forms of the interpolation splines representation on the characteristics of the solution of the Weber problem in a polar coordinate system by the Bubnov-Galyorkin method. Weber's historic problem about the torsion of a cylindrical shaft with a circular twist currently is still used as a test problem for the approbation of new numerical methods for solving second-order elliptic problems owing to the existence of an exact solution.*

*The proposed solution is presented as a product of a two-dimensional spline and an auxiliary factor. The auxiliary factor is the implicit equation of the domain boundary. In this way the fulfillment of the requirements for the basic functions in the Bubnov-Galyorkin method, namely, the satisfaction of the boundary conditions in the investigated problem, is ensured. One-dimensional splines (each on its polar coordinate) are B-splines. To describe the basic functions of these B-splines, two exploratory forms of representation are used. The solution of this task is carried out by means of the system of computer mathematics Maple. The timing of the implementation of the algorithm for solving the Weber problem by the Bubnov-Galyorkin method on a polar grid is carried out. The practical convergence of the Bubnov-Galyorkin method was also evaluated for the approximate performance of the necessary operations of integration and its comparison with the theoretical rate of convergence of the method is completed.*

*As a result of the performed research it is practically shown that in the systems of symbolic mathematics the use of the description splines as the only expression has certain advantages.*

*Keywords: Weber problem, spline approximation, Galyorkin method.*

### Постановка проблеми

У системах комп'ютерної математики для опису інтерполяційних сплайнів різних видів традиційно використовують фрагментарний спосіб. У задачах математичної фізики (та їх узагальненнях) при пошуку розв'язку у вигляді сплайна традиційний спосіб подання останнього приводить до суттєвого уповільнення виконання відповідних чисельних методів. Із теорії сплайнів відомо, що інтерполяційний сплайн може бути описаний однією формулою – лінійною комбінацією базисних функцій. Результати порівняльного аналізу впливів вказаних форм подання інтерполяційних сплайнів на характеристики чисельних методів розв'язання крайових і граничних задач, що реалізуються в системах комп'ютерної математики, представлені окремими публікаціями і потребують як кількісного накопичення, так і систематизації та узагальнення.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Історична задача Вебера про кручення циліндричного стержня із круговою виточкою [1, С. 309] і в теперішній час використовується в якості тестової задачі для апробації нових чисельних методів розв'язання еліптичних задач другого порядку завдяки наявності точного розв'язку [2].

**Задача Вебера.** При крученні стержня з перерізом  $\Omega$  знайти функцію напружень  $U(x; y)$ , яка задовольняє рівнянню:

$$\Delta U = -2 \quad (1)$$

із граничними умовами:

$$U(x; y) \Big|_G = 0, \quad (2)$$

де  $G$  – границя області  $\Omega$ , яка в полярних координатах  $(r; \varphi)$  описується рівнянням (рис. 1):

$$(r^2 - b^2) \left( 1 - \frac{2a \cos \varphi}{r} \right) = 0. \quad (3)$$

Як відомо [1–2], задача Вебера дозволяє знайти точний розв'язок, який у декартових координатах має вигляд:

$$U(x; y) = a \cdot \left( x - b^2 \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{b^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2). \quad (4)$$

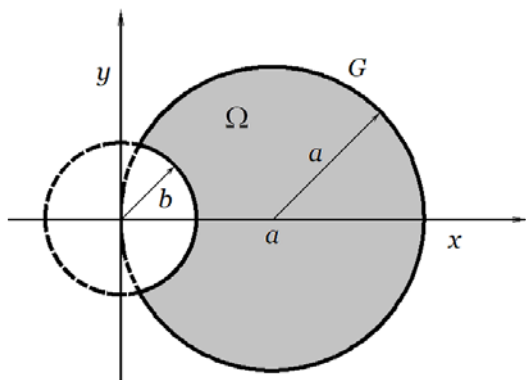


Рис. 1. Переріз циліндричного стержня із круговою виточкою.

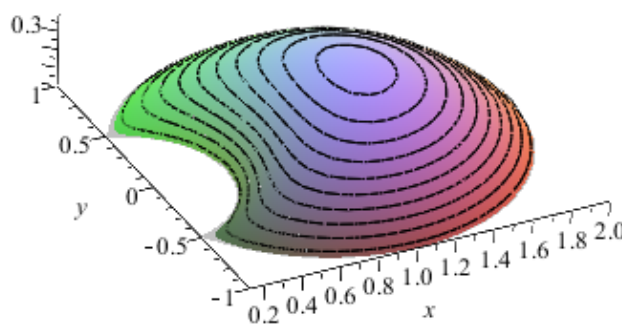


Рис. 2. Графік функції напружень  $U(x; y)$  (4), коли  $a=1$ ;  $b=0,5$ .

У роботі [2] отримано наближений розв'язок цієї задачі за допомогою методу найменших квадратів, коли в якості звуження на  $\Omega$  скінченновимірного підпростору базисних функцій Соболевського простору  $S_{m,r}^h(\Omega)$  розглядається підпростір двовимірних кубічних апроксимуючих сплайнів, які є результатом тензорного добутку одновимірних сплайнів. При цьому апроксимація виконувалася на прямокутних сітках, які неузгоджені із досліджуваною областю. Досягнута практична швидкість збіжності методу співпадає із теоретичною  $O(h^4)$ .

У роботі [3] розглядається наближений метод розв'язання рівняння Софі Жермен-Лагранжа вимушених коливань жорстко закріпленої кругової пластинки, а в роботах [4–5] за тим же методом розв'язується задача Діріхле для рівняння Пуассона. Вказаний метод є методом Бубнова-Гальоркіна з представленням шуканого розв'язку за допомогою двовимірних напівлокальних згладжуючих сплайнів на рівномірній сітці у полярній системі координат. Двовимірний сплайн, що використовується у роботах [3–5] є сумою добутків одновимірних неперіодичних напівлокальних сплайнів за радіальною змінною та одновимірних періодичних напівлокальних сплайнів за змінним полярним кутом. Але надалі автори переходять до використання традиційних В-сплайнів, спираючись на відому теорему Каррі і Шонберга [6, С. 90–91] про можливість представлення будь-якого інтерполяційного сплайна через лінійну комбінацію В-сплайнів.

У роботах [7–8] обговорюються недоліки фрагментарного опису ланок сплайнів, коли вони застосовуються в системах символічної комп'ютерної математики, зокрема в Maple. З метою усунення цих недоліків у роботі [7] її автором пропонуються власні програмні процедури роботи із сплайнами [7, С. 260–276]. У роботі [8] з тією ж метою пропонується використовувати форму опису сплайна за допомогою однієї формули.

#### Мета дослідження

Метою дослідження є вивчення практичної доцільності використання в системах символічної математики опису інтерполяційних сплайнів єдиним виразом порівняно із традиційним фрагментарним описом. Для цього проводиться хронометрування реалізації алгоритму розв'язання задачі Вебера методом Бубнова-Гальоркіна на полярній сітці. В якості базисних функцій пропонується використовувати тензорні добутки В-сплайнів по кожній полярній координаті. Необхідно виконати порівняння швидкості знаходження розв'язку задачі та його точності при застосуванні двох способів опису одновимірних сплайнів: традиційного фрагментарного та єдиним виразом. Також підлягає оцінюванню практична збіжність методу Бубнова-Гальоркіна при наближеному виконанні необхідних операцій інтегрування та її зіставлення із теоретичною швидкістю збіжності метода.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Рівняння Пуассона (1) у полярній системі координат набуває вигляду:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2. \quad (5)$$

Для зручності проведення розрахунків помножимо рівняння (5) на  $r$ :

$$r \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2r. \quad (6)$$

Для реалізації методу Бубнова-Гальоркіна в якості скінченновимірного простору базисних функцій використаємо простір двовимірних кубічних В-сплайнів. У відповідності до цього розв'язок рівняння (6) із граничними умовами:

$$U(r; \varphi) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (7)$$

де  $\Gamma$  – границя області  $\bar{\Omega}$ , на яку відображається область  $\Omega$  при переході до полярної системи координат, –

будемо шукати у вигляді ряду з додатковим множником, який дорівнює лівій частині рівняння (3):



$$S(r; \varphi) \approx g(r; \varphi) \cdot \sum_{i=1}^{Q_\varphi} \sum_{j=1}^{Q_r} u_{ij} C_i(\varphi) D_j(r), \quad (8)$$

де  $u_{ij}$  – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню;  $C_i(\varphi)$  і  $D_j(r)$  – одновимірні фундаментальні В-сплайни за відповідною змінною п'ятого степеня;  
 $g(r; \varphi) = \left( r^2 - b^2 \right) \left( 1 - \frac{2a \cos \varphi}{r} \right)$ .

Наявність множника  $g(r; \varphi)$  в виразі шуканого розв'язку (8) забезпечує виконання відомої вимоги до базисних функцій в методі Бубнова-Гальоркіна щодо задоволення ними нульових граничних умов. Окремо прокоментуємо, що в роботах [3–5] при виборі базисних функцій умовою задоволення ними граничних умов нехтується, натомість після процесу ортогоналізації нев'язки до базисних функцій по внутрішніх вузлах області вимагається, щоб базисні функції  $C_i(\varphi) D_j(r)$  дорівнювали нулю тільки в граничних вузлах. На областях у вигляді круга або частини круга з узгодженими полярними сітками таке відхилення від теоретичних положень метода Бубнова-Гальоркіна не позначилося на якості та адекватності розв'язків, що отримані для граничних задач в роботах [3–5]. Наші ж власні попередні дослідження показали, що на областях більш складної геометричної форми, ніж коло та його частини, при використанні неузгоджених сіток обговорюваною вимогою нехтувати не можна.

Введемо в області  $\bar{\Omega}$  рівномірну сітку із вузлами  $(r_k; \varphi_l)$ .

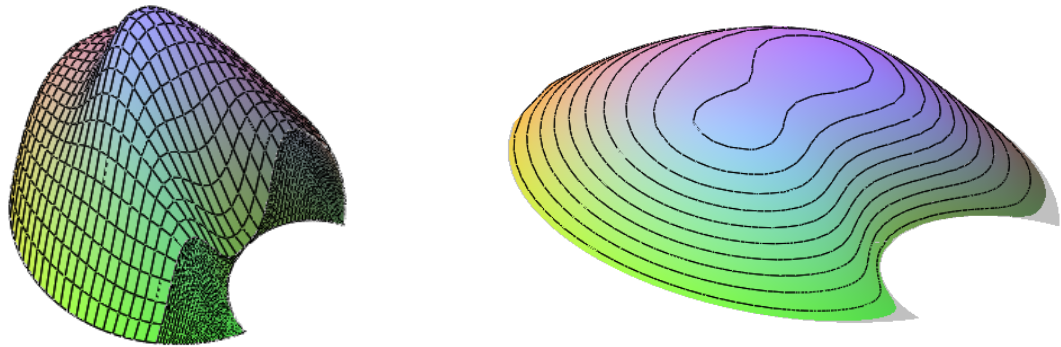
Згідно метода Бубнова-Гальоркіна підставимо вираз (8) до рівняння (6) та обчислимо нев'язку:

$$N(r; \varphi) = r \cdot \sum_{i=1}^{Q_\varphi} \sum_{j=1}^{Q_r} u_{ij} C_i(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} (g(r; \varphi) \cdot D_j(r)) + \sum_{i=1}^{Q_\varphi} \sum_{j=1}^{Q_r} u_{ij} C_i(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} (g(r; \varphi) \cdot D_j(r)) + \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{Q_\varphi} \sum_{j=1}^{Q_r} u_{ij} D_j(r) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (g(r; \varphi) \cdot C_i(\varphi)) + 2r. \quad (9)$$

Коефіцієнти  $u_{ij}$  у виразі нев'язки (9) будемо знаходити із умови ортогональності нев'язки до базисних функцій  $g(r; \varphi) \cdot C_i(\varphi) D_k(r)$  в усіх вузлах  $(r_k; \varphi_l)$  сітки області  $\bar{\Omega}$ . За скалярний добуток природно обрати подвійний інтеграл по області  $\bar{\Omega}$ :

$$\iint_{\bar{\Omega}} g(r; \varphi) \cdot C_i(\varphi) D_k(r) N(r; \varphi) r dr d\varphi = 0. \quad (10)$$

Обчислювальні експерименти показали, що за прийнятний час обчислення для одного вузла  $(r_k; \varphi_l)$  подвійного інтеграла (9) вбудованими методами СКМ Maple (навіть з використанням опції *numeric*) неможливо. Авторські реалізації методу Монте-Карло для обчислення інтегралів виду (10) хоча і дозволили отримати розв'язок задачі (6–7), але показали його сильну залежність від точності проведення операцій інтегрування (рис. 3). Як відомо з загальної теорії методу Бубнова-Гальоркіна, система рівнянь (10) для знаходження невідомих коефіцієнтів  $u_{ij}$  є погано обумовленою. При реалізації обчислювального процесу із процесором Intel(R) Core (TM) i-3-6006U CPU @ 2.00 GHz ОЗП 8ГБ обчислення коефіцієнтів одного рівняння із системи (10) (матриця системи мала вимірність  $12 \times 12$ ) тривало від 100 до 300 с при виконанні операцій обчислення подвійних інтегралів методом Монте-Карло.



**Рис. 3. Приклади фізично неправдоподібних розв'язків задачі (6–7), поява яких викликана недостатньою точністю виконання операції інтегрування.**

Таким чином, фактором, що суттєво уповільнює виконання розрахунків, є фрагментарний опис сплайнів та похідних від них. Тому доцільно дослідити ефективність опису інтерполяційного сплайна однією функцією:

$$S_{m,r}(x) = \sum_{k=0}^m a_k (x-x_0)^k + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=m-r+1}^m c_{ij} (x-x_i)_+^j, \quad (11)$$

де  $(n+1)$  – кількість вузлів сітки,  $m$  – степінь сплайна,  $r$  – дефект сплайна,

$$(x-x_i)_+^j = \frac{1}{2^j} \cdot (x-x_i + |x-x_i|)^j = \begin{cases} (x-x_i)^j, & x > x_i \\ 0, & x \leq x_i \end{cases}.$$

Опишемо у вигляді (11) базисні функції В-сплайна п'ятого степеня, які використаємо для формування розв'язку (8). Покладемо у формулі (10)  $m=5$ ,  $r=1$ , тоді  $n=6$ , а сітка складається із семи вузлів. Розглянемо випадок рівномірного розташування вузлів із кроком  $h$ . Отже, така базисна функція має фрагментарний опис:

$$B_{5,1}(x) = \begin{cases} 0 & x < -3h, \\ \frac{1}{120h^5} (x+3h)^5, & -3h \leq x < -2h, \\ -\frac{1}{120h^5} (5x^5 + 45x^4h + 150x^3h^2 + 210x^2h^3 + 75xh^4 + 51h^5), & -2h \leq x < -h, \\ \frac{1}{60h^5} (5x^5 + 15x^4h - 30x^3h^2 + 33h^5), & -h \leq x < 0, \\ \frac{1}{60h^5} (-5x^5 + 15x^4h - 30x^3h^2 + 33h^5), & 0 \leq x < h, \\ \frac{1}{120h^5} (5x^5 - 45x^4h + 150x^3h^2 - 210x^2h^3 + 75xh^4 + 51h^5), & h \leq x < 2h, \\ -\frac{1}{120h^5} (x-3h)^5, & 2h \leq x < 3h, \\ 0, & x \geq 3h. \end{cases} \quad (12)$$

Базисна функція  $B_{5,1}(x)$  набуває в своїх вузлах значення, що наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Значення базисної функції  $B_{5,1}(x)$

$x$	$-3h$	$-2h$	$-h$	$0$	$h$	$2h$	$3h$
$B_{5,1}(x)$	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{1}{120}$	0

Тоді для функції (11) вираз (12) набуває вигляду:

$$S_{5,1}(x) = \sum_{k=0}^5 a_k (x+3h)^k + \sum_{i=1}^5 c_i (x+(3-i)h)_+^5. \quad (13)$$

У роботі [7] показано, що вираз (13) може бути спрощений до вигляду:

$$S_{5,1}(x) = \sum_{k=0}^5 a_k (x+3h)^k + \sum_{i=1}^5 c_i (x+(3-i)h)^4 \cdot |x+(3-i)h|. \quad (14)$$

Знайдемо коефіцієнти з виразу (14) для сплайна (12). Очевидно, що для цього необхідно скласти систему із 11 рівнянь. Сім рівнянь отримаємо з умови рівності значень  $B_{5,1}(x)$  та  $S_{5,1}(x)$  у вузлах сітки ( $x_j = -3h + jh$ ,  $j = 0..6$ ). Ще чотири рівняння отримаємо за рахунок традиційних вимог для сплайнів щодо рівності значень перших та других похідних на кінцях проміжків інтерполяції. Враховуючи викладене, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} S_{5,1}(x_j) = B_{5,1}(x_j), & j = 0..6, \\ S'_{5,1}(x_0) = B'_{5,1}(x_0), \\ S''_{5,1}(x_0) = B''_{5,1}(x_0), \\ S'_{5,1}(x_6) = B'_{5,1}(x_6), \\ S''_{5,1}(x_6) = B''_{5,1}(x_6). \end{cases} \quad (15)$$

Для довільного значення  $h$  ( $h > 0$ ) система (15) виявилася визначеною. Коефіцієнти із розвинення (14) мають значення:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{162}{5}; a_1 = -\frac{27}{h}; a_2 = \frac{9}{h^2}; a_3 = -\frac{3}{2h^3}; a_4 = \frac{1}{8h^4}; a_5 = 0; \\ c_1 &= -\frac{1}{40h^5}; c_2 = \frac{1}{16h^5}; c_3 = -\frac{1}{12h^5}; c_4 = \frac{1}{16h^5}; c_5 = -\frac{1}{40h^5}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким чином, фрагментарний опис В-сплайнів (12) може бути замінений на опис (14) із коефіцієнтами (16).

### Висновки

Обчислювальні експерименти показали, що подання В-сплайна у вигляді (14) приводить до скорочення вдвічі часу розрахунків інтегралів  $\iint_{\Omega} g(r; \varphi) \cdot C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi = 0$ , які входять до складу формули (10), порівняно з фрагментарним поданням виду (12). Відзначимо, що в цьому випадку при застосуванні методу Монте-Карло для обчислення вказаних інтегралів відбувається обчислення значень самого сплайна. Інші доданки формули нев'язки (9) містять похідні від В-сплайна. При обчисленні подвійних інтегралів від таких доданків застосування обох форм опису В-сплайна приводили приблизно до однакової швидкості виконання розрахунків. Аналітичне інтегрування СКМ Maple за прийнятний час не було виконано. Тому очевидною є доцільність застосування кубатурних формул для наближеного виконання операції інтегрування доданків із формули нев'язки (9) по неконцентричному кільцевому сектору, окремим випадком якого є луночка (3). Але дана задача є темою окремого дослідження.

Таким чином, в результаті виконаних досліджень практично показано, що в системах символічної математики певні переваги має застосування опису сплайнів єдиним виразом.

### Список використаної літератури

1. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1979. — 560 с.
2. Марченко Н.А. О численном решении эллиптических задач порядка  $2m$  методом наименьших квадратов с использованием сплайн-аппроксимации на прямоугольных сетках / Н.А. Марченко, В.И. Павлов // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2. — № 4. — С. 121-132.
3. Федосова А.Н. Решение задач теории упругости с применением S-сплайнов / А.Н. Федосова, Д.А. Силаев // Вестник МГСУ. — 2013. — № 10. — С. 75-84.
4. Силаев Д.А. Применение дважды непрерывно дифференцируемого S-сплайна / Д.А. Силаев, Д.О. Коротаев, С.В. Капустин // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, физика, химия. — 2009. — Вып. 12. — № 10. — С. 41-47.
5. Силаев Д.А. Решение краевых задач с помощью S-сплайна / Д.А. Силаев, Д.О. Коротаев // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009. — Т. 1. — № 2. — С. 161-171.
6. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам / К. де Бор. — М.: Радио и связь, 1985. — 304 с.
7. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple / Ю.Г. Игнатъев. — Казань: Казанский университет, 2013. — 298 с.
8. Доля П.Г. Об одном способе представления полиномиальных сплайнов в системах символічної математики / П.Г. Доля // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. — 2007. — № 775. — С. 130-139.

### References

1. Timoshenko S.P., Goodyear J.N. Teoriya uprugosti. Nauka. Moscow. (1979)
2. Marchenko N.A. , Pavlov V.I. O chislennom reshenii ellipticheskikh zadach poryadka  $2m$  metodom naimenshih kvadratov s ispolzovaniem splayn-approksimatsii na pryamougolnyih setkah. Matematicheskoe modelirovanie. 2, 4, 121-132 (1990)

3. Fedosova A.N., Silaev D.A. Reshenie zadach teorii uprugosti s primeneniem S-splaynov. Vestnik MGSU. **10**, 75-84 (2013)
4. Silaev D.A., Korotaev D.O., Kapustin S.V. Primenenie dvazhdy nepreryivno differentsiruemogo S-splayna. Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematika, fizika, himiya. **12**, 10, 41-47 (2009)
5. Silaev D.A., Korotaev D.O. Reshenie kraevyih zadach s pomoschyu S-splayna. Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie. **1**, 2, 161-171 (2009)
6. De Boor K. Prakticheskoe rukovodstvo po splaynam. Radio i svyaz. Moscow. (1985)
7. Ignatev Yu.G. Matematicheskoe modelirovanie fundamentalnyih ob'ektov i yavleniy v sisteme kompyuternoy matematiki Maple. Kazanskiy universitet. Kazan (2013)
8. Dolya P.G. Ob odnom sposobe predstavleniya polinomialnyih splaynov v sistemah simvolnoy matematiki. Visnyk Harkivskoho natsionalnoho universytetu. Seriya: Matematichne modelyuvannya. Informatsiyni tehnologiyi. Avtomatizovani systemy upravlinnya. **775**, 130-139 (2007)

УДК 514.18

О.М. ГУМЕН  
Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"  
С.Є. ЛЯСКОВСЬКА  
Національний університет "Львівська політехніка"  
Є.В. МАРТИН  
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

### **ДОСТАТНІСТЬ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ 1-БАГАТОВИДІВ $n$ -ПРОСТОРІВ СТАНУ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ**

*Приведені результати дослідження достатнього числа зображень інтегральних кривих і фазових траєкторій просторів стану як моделей процесів багатопараметричних технічних систем засобами прикладної багатовимірної геометрії. Обґрунтовані умови зображення багатопросторових кривих у площинах різної вимірності комплексних креслеників багатовимірних евклідових просторів. Показана можливість комп'ютерної візуалізації мінімальним числом проекцій кривих ліній у лінійні координатні дво- і тривимірні підпростори. Обґрунтовані достатні умови формування проекцій кривих у дво- і тривимірні площини проекцій багатовимірних просторів стану і фазових просторів технічних систем.*

*Ключові слова: технічна система, інтегральні криві, фазові траєкторії, прикладна геометрія, комп'ютерна графіка.*

Е.Н. ГУМЕН  
Национальный технический университет Украины  
"Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"  
С.Е. ЛЯСКОВСКАЯ  
Национальный университет "Львовская политехника"  
Е.В. МАРТЫН  
Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности

### **ДОСТАТОЧНОСТЬ ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ 1-МНОГООБРАЗИЙ $n$ -ПРОСТРАНСТВ СОСТОЯНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Приведены результаты исследования достаточного числа полноты изображения интегральных кривых и фазовых траекторий пространств состояния как моделей процессов многопараметрических технических систем средствами прикладной многомерной геометрии. Обоснованы условия изображения многопространственных кривых в плоскостях разной размерности комплексных чертежей многомерных евклидовых пространств. Показана возможность компьютерной визуализации минимальным числом проекций кривых линий в линейные координатные двух- и трехмерные подпространства. Обоснованы достаточные условия формирования проекций кривых в двух- и трехмерные плоскости проекций многомерных пространств состояния и фазовых пространств технических систем.*

*Ключевые слова: техническая система, интегральные кривые, фазовые траектории, прикладная геометрия, компьютерная графика.*

O.M. GUMEN  
National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"  
S.Ye. LJASKOVSKA  
National University "Lviv Polytechnic"  
Ye.V. MARTYN  
Lviv State University of Life Safety

## SUFFICIENCY OF 1-MANIFOLDS PROJECTION IMAGES OF $n$ -SPACES OF TECHNICAL SYSTEMS STATE

*The boundless possibilities of modern information technologies, in particular, scientific computer graphics, provide the necessary computer tools for the implementation of models. The influence of the information environment indicates ways to improve the representation models of processes with a minimal, but sufficiently complete representation of the interrelations of parameters. Processes in technical systems are given by the integral curves of state spaces as multi-spatial curve lines of multidimensional Euclidean spaces, projecting of which by means of IT technologies is possible in two- and three-dimensional coordinate planes. One of the ways of their image and research is the use of geometric modeling tools with the opportunities of multidimensional applied geometry.*

*The results of a study of a sufficient number of image completeness of integral curves and phase trajectories of state spaces as models of processes of multiparameter technical systems by means of multidimensional applied geometry are presented. The conditions for the image of multidimensional curves on planes of different dimension of complex drawings of multidimensional Euclidean spaces are justified. The possibility of computer visualization with a minimal number of projections of curved lines into linear coordinate two- and three-dimensional subspaces is shown. Sufficient conditions for the formation of projections of curves in two- and three-dimensional planes of projections of multidimensional state spaces and phase spaces of technical systems are substantiated.*

*It is established on the example of the space  $E^4$  that during the formation of multi-space curve lines it is possible to use only the interconnections of two parameters in two-dimensional coordinate planes. A sufficient minimum number of such interrelations is shown. The projection of a four-spatial curve into a subspace of lower measurements has determined a sufficient minimum number of such projections in a subspace of identical measurements and combinations of subspaces of various measurements.*

*Keywords: technical system, integral curves, phase trajectories, applied geometry, computer graphics.*

### Постановка проблеми

Сучасному стану процесу автоматизованого проектування технічних систем засобами графічних ІТ-технологій властиве, зокрема, зменшення числа допущень, врахування дедалі більшого числа взаємозв'язків істотних параметрів. Етап дослідження перебігу процесів, змушуючи враховувати як потреби у ґрунтовному дослідженні і виявленні впливу на динаміку числових значень окремих параметрів, так і, відповідно, їх впливу на якість функціонування, висуває додаткові вимоги до опису і, звичайно, розбудови їх моделей.

Безмежні можливості сучасних інформаційних технологій, зокрема, наукової комп'ютерної графіки, надають необхідний комп'ютерний інструментарій для реалізації моделей. Вплив інформаційного середовища вказує шляхи удосконалення моделей

представлення процесів з мінімальним, але достатньо повним зображенням взаємозв'язків параметрів. Процеси в технічних системах подаються інтегральними кривими просторів стану як багатопросторовими кривими лініями багатовимірних евклідових просторів  $E^n$ , проєкціювання яких засобами ІТ-технологій можливе у дво- і тривимірні координатні площини. Одним із способів їх зображення і дослідження є використання засобів геометричного моделювання із залученням можливостей багатовимірної прикладної геометрії.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Аналіз останніх досліджень вказує на обмежене число наукових розвідок щодо розбудови моделей процесів із врахуванням взаємозв'язку значного числа змінних параметрів багатопараметричних технічних систем. Одним із здобутків наукової школи прикладної геометрії КПІ ім. Ігоря Сікорського є розвинення графічного інструментарію багатовимірної прикладної геометрії щодо дослідження поведінки багатопараметричних процесів, об'єктів і явищ.

Наукова розвідка [1] подає теоретичні засади прикладної багатовимірної геометрії, розвиває геометричні засоби візуалізації гіперповерхонь і багатовидів охоплюючих багатовимірних евклідових просторів. Важливим етапом у моделюванні багатопараметричних процесів є залучення засобів проєктивної геометрії як узагальнення багатовимірного евклідового простору [2, 3] і використання геометричних моделей із практичною реалізацією засобами наукової комп'ютерної графіки для моделювання багатопараметричних процесів [4, 5]. Зростання числа істотних параметрів досліджуваних багатопараметричних технічних систем і зв'язків між ними є причиною збільшення кількості проєкцій моделей процесів [6, 7]. Тому ще вільною науковою нішею залишається проблема достатності проєкційних зображень багатопросторових кривих ліній за умови залучення мінімальної, але достатньої їх кількості до досліджень процесів багатопараметричних технічних систем.

### **Мета дослідження**

Мета статті полягає у виявленні сутності геометричних моделей багатопросторових кривих ліній евклідових  $n$ -просторів із залученням мінімальної, але достатньої кількості проєкційних зображень щодо моделювання і дослідження процесів багатопараметричних технічних систем засобами графічних ІТ-технологій.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Перебіг процесів у багатопараметричних технічних системах візуалізується кривими лініями, які слугують за інтегральні криві або їх фазові траєкторії. Поняття багатовимірних просторів стану і фазових просторів одержуємо при числі двох і більше змінних істотних параметрів. Для одного істотного параметра, який змінюється в часі, маємо інтегральну криву системи координат як площини стану технічної системи. Для двох змінних параметрів  $x_1, x_2$  одержуємо тривимірний простір. Такий простір містить інтегральні криві у двовимірних координатних площинах як площинах стану і фазові траєкторії також у двовимірній координатній площині як фазовій площині.

Сукупність фазових траєкторій утворює фазовий портрет системи. Криві лінії у двовимірних координатних площинах формують трипросторову криву лінію тривимірного простору стану технічної системи (рис. 1).

Трипросторова крива лінія  $a$  тривимірного простору взагалі розглядається як взаємний перетин двох поверхонь  $z = \alpha(x, y)$  і  $z = \beta(x, y)$  одного тривимірного простору  $Oxyz$ . У випадку дослідження кривих ліній як моделей багатопараметричних процесів маємо, що такими поверхнями слугують ортогонально розташовані до двох площин проєкцій  $Oxt$  і  $Oyt$  циліндри  $\alpha$  і  $\beta$  (рис. 2).



Зазначимо, що положення кожного циліндра  $\alpha$  і  $\beta$  однозначно визначене інтегральною кривою, яка слугує напрямною, і прямими лініями як твірними, паралельними осям тривимірного простору стану (рис. 3).

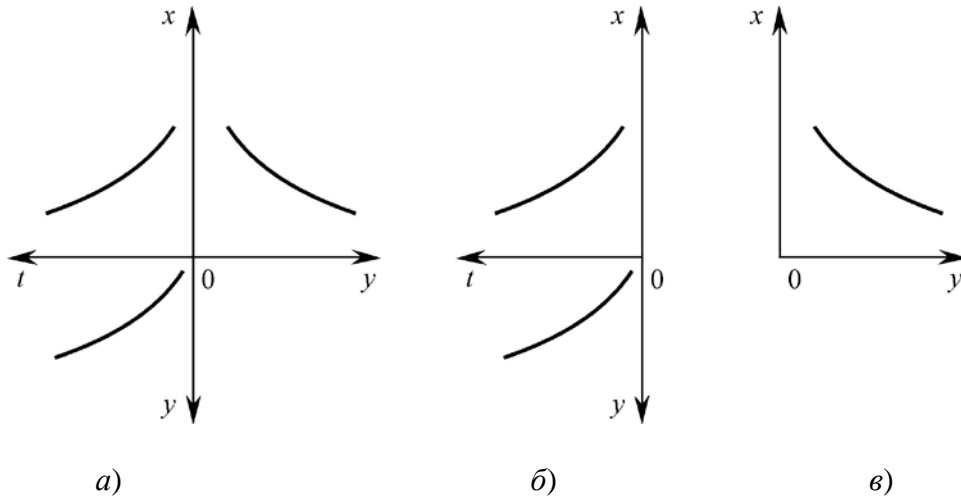


Рис. 1. Зображення проєкцій: а) трипросторової лінії; б) інтегральних кривих; в) фазової траєкторії.

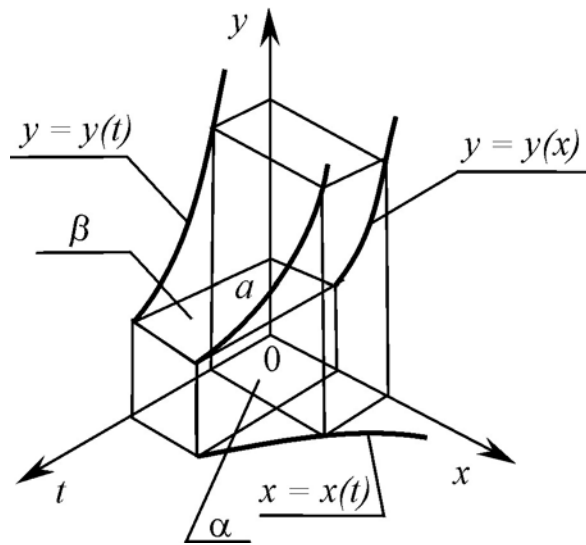


Рис. 2. Формування трипросторової кривої лінії як моделі процесу технічної системи.

Вимірність гіперповерхні чи багатovidу у багатовимірній прикладній геометрії визначається як [1]:

$$v = l + m - n \tag{1}$$

Одержаний геометричний образ розглядається у багатовимірній геометрії як переріз двох геометричних образів вимірностей  $l$  і  $m$  кожний.

Вираз (1) визначає розмаїття геометричних образів багатовимірного евклідового простору.

Зазначимо, що із зростанням вимірності  $n$  простору збільшується одночасно кількість проєкційних зображень. Число проєкцій геометричного образу, зокрема,

багатопросторової кривої лінії обирають найменшим, але достатнім для проведення операцій над моделлю процесу.

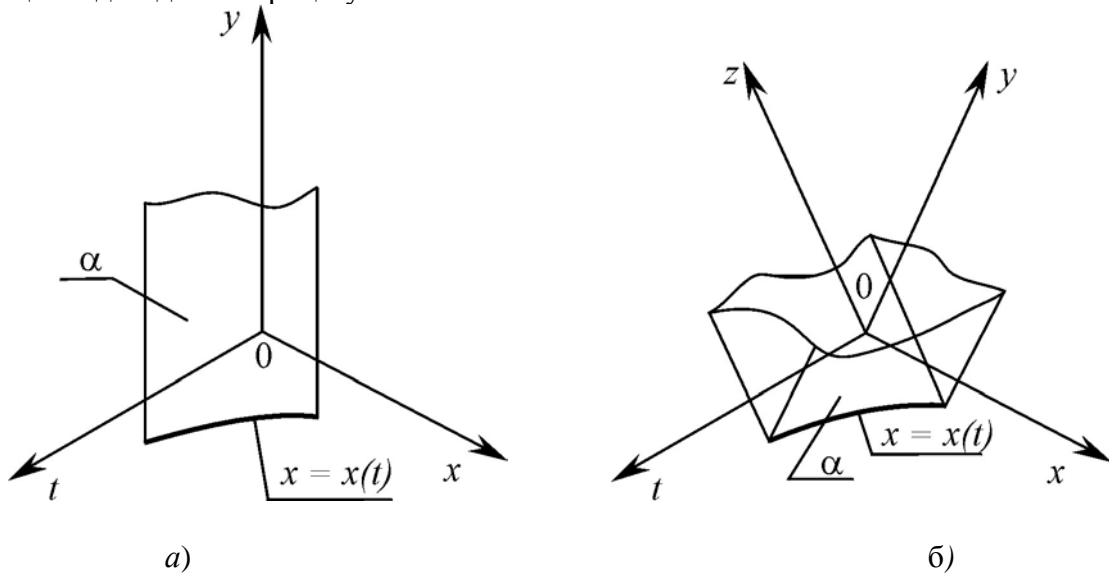


Рис. 3. Циліндричні поверхні: а) тривимірного простору; б) чотиривимірного простору.

У тривимірному просторі лінію як модель процесу формують, використовуючи ортогональні циліндри із напрямними, які описуються складними функціями. Арсенал геометричних засобів багатовимірної геометрії значно багатший, а варіантів формування багатопросторових кривих існує значна кількість. Одночасно збільшується кількість проєкційних зображень ліній як складових моделей процесу.

У чотиривимірному евклідовому просторі  $Oxyzt$  в процесі формування чотирипросторових ліній приймають участь багатовиди, зокрема, двовимірні поверхні та одновимірні лінії.

Розглянемо процес формування кривих ліній попарним накладанням зв'язків між параметрами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  і  $t$ . З-поміж можливих шести зв'язків між змінними для формування кривої лінії оберемо три зв'язки відповідно до [1]:

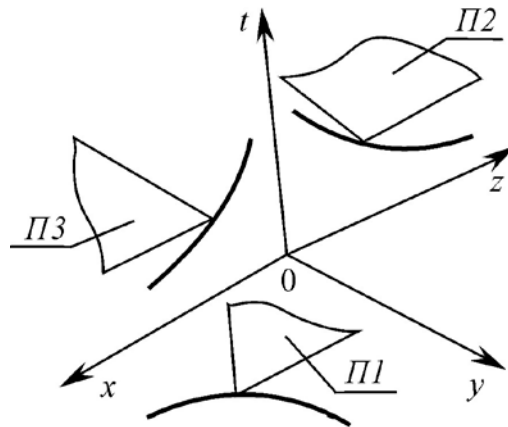
$$v = \sum_{i=1}^d m_i - n(d-1) \quad (2)$$

Для трьох  $d = 3$  багатовидів вимірностей  $m = 3$  кожний вимірність геометричного образу їх взаємного перетину складає  $v = 1$ . Такими багатовидами, геометричними образами чотиривимірного простору, є гіперциліндри, або тривимірні циліндри цього простору.

Направляючими 3-циліндрів слугують лінії, які подають три зв'язки між змінними параметрами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  у довільному порядку(рис. 4), наприклад:

$$\begin{aligned} y &= y(x); \\ z &= z(t); \\ x &= x(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Твірні циліндричних поверхонь являють двовимірні площини відповідно  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ . Такі площини, рухаючись по напрямних, паралельні координатним двовимірним площинам відповідно  $Ozt$ ,  $Oxy$ ,  $Ozy$  тривимірних координатних підпросторів.



**Рис. 4. Засоби формування 1-багатовиду чотиривимірного простору.**

Результатом взаємного перетину трьох циліндричних поверхонь відповідно до (2) є чотирипросторова крива лінія.

Зростання вимірності евклідових просторів надає значно більші можливості формування багатовидів, зокрема, кривих ліній, як геометричного місця точок чотиривимірного простору, яке відповідає (3). Очевидно, що із зростанням вимірності простору відповідно збільшується кількість варіантів побудови геометричних багатовидів.

У тривимірному координатному підпросторі чотиривимірного простору, наприклад,  $Oxyt$ , зв'язкам  $y = y(x)$  і  $x = x(t)$  трьох параметрів відповідають двовимірні циліндричні поверхні  $\Pi_4$ ,  $\Pi_5$ , твірними яких слугують прямі, паралельні осям координат, відповідно  $Ot$  і  $Oy$  (рис. 5 а).

Отже, такі лінії подають проекцію по відношенню до двовимірних площин  $Oxy$  і  $Oxt$  циліндричні поверхні. Їх перетином є однопараметрична трипросторова крива лінія  $a1$  (рис. 5 а). У чотиривимірному просторі  $Oxyzt$  лінія  $a1$  слугує напрямною двовимірного циліндра  $\Pi_6$ , твірні якого паралельні осі  $Oz$  простору (рис. 5 в).

Зв'язкам трьох параметрів  $x = x(t)$  і  $z = z(t)$  у тривимірному підпросторі  $Oxzt$  відповідають проекціючі по відношенню до двовимірних площин цього простору  $Oxt$  і  $Ozt$  циліндричні поверхні  $\Pi_7$  і  $\Pi_8$ . У чотиривимірному просторі  $Oxyzt$  лінія  $a2$  слугує напрямною двовимірного циліндра  $\Pi_9$ , твірні якого паралельні осі  $Oy$  цього простору. Взаємний перетин циліндрів  $\Pi_6$  і  $\Pi_9$  подає шукану чотирипросторову криву лінію.

Аналіз (1) і (2) вказує на інші варіанти формування кривих ліній чотиривимірного простору. Відповідно до (1) перетин гіперповерхні  $z = z(x, y, t)$  вимірності  $l = 3$  та двовимірні поверхні, наприклад,  $y = y(x, t)$  вимірності  $m = 2$  у чотиривимірному просторі  $Oxyzt$  виявляє геометричне місце цього простору як чотирипросторову криву лінію.

Відповідно до (2) для формування чотирипросторової кривої лінії у  $E^4$  необхідні три гіперповерхні  $d = 3$  вимірності  $m = 3$  кожна. Такі гіперповерхні можна формувати, використовуючи різні геометричні образи як направляючі гіперциліндрів.

Зв'язки трьох параметрів з чотирьох  $x, y, z, t$ , наприклад,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_2, x_3); \\ x_1 &= x_1(x_2, x_4); \\ x_3 &= x_3(x_1, x_4). \end{aligned} \quad (4)$$

подають рівняння двовимірних поверхонь у координатних підпросторах відповідно  $Ox_1x_2x_3$ ,  $Ox_1x_2x_4$  та  $Ox_1x_3x_4$  відповідно до (4). Поверхні є напрямними тривимірних циліндрів із твірними, паралельними осям, відповідно  $Ox_4$ ,  $Ox_3$  та  $Ox_2$  чотиривимірного простору.

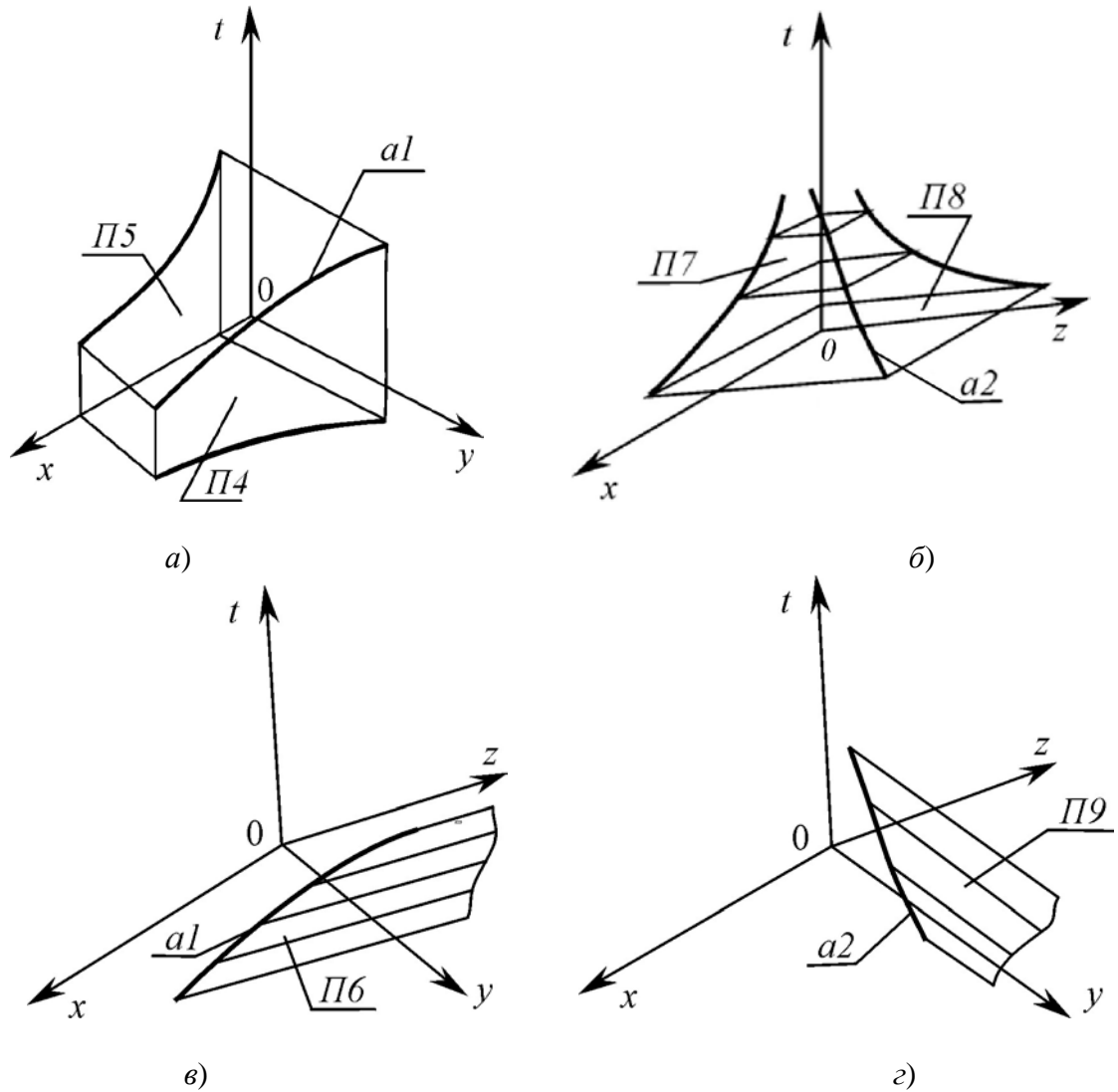


Рис. 5. Формування 1-багатовиду засобами тривимірних підпросторів.

Взаємний перетин трьох гіперциліндрів подає чотирипросторову криву лінію.

Наприклад,

зв'язки двох параметрів:

$$x_1 = x_1(x_2),$$

$$x_3 = x_3(x_1, x_4);$$

і трьох параметрів:

$$x_3 = x_3(x_2, x_4);$$

(5)

є рівняннями гіперциліндрів різної вимірності напрямними. Першому зв'язку (5) параметрів  $x_1$  і  $x_2$  відповідає одновимірна лінія двовимірної координатної площини  $Ox_1x_2$ . У чотирирівимірному просторі вона слугує напрямною тривимірного циліндра з твірними 2-площинами, паралельними двовимірній координатній площині  $Ox_3x_4$ .

Наступні два зв'язки (5) як двовимірні поверхні підпросторів  $Ox_1x_3x_4$  та  $Ox_2x_3x_4$  слугують напрямними тривимірних циліндрів з одновимірними прямими лініями, паралельними осям відповідно  $Ox_2$  та  $Ox_1$  простору.

Взаємний перетин циліндрів подає геометричний образ у вигляді чотирипросторової кривої лінії.

Наприклад,

$$\begin{aligned} \text{зв'язки двох параметрів:} & \quad x_1 = x_1(x_2); \\ & \quad x_3 = x_3(x_4); \\ \text{і трьох параметрів:} & \quad x_3 = x_3(x_2, x_4); \end{aligned} \tag{6}$$

подають тривимірні циліндри із твірними як двовимірними площинами, паралельними координатним площинам, відповідно  $Ox_3x_4$  та  $Ox_1x_2$  для перших двох зв'язків (6), і прямими для зв'язку трьох параметрів (6), паралельними осі  $Ox_1$ , простору. Взаємний перетин циліндрів вимірності  $m = 3$  подає чотирипросторову криву лінію.

Проведений аналіз надає можливість прослідкувати процес проєкціювання чотирипросторової кривої лінії у підпросторі різної вимірності, тобто у дво- і тривимірні площини. Проєкціюванням чотирипросторової кривої лінії у взаємно ортогональних напрямках, паралельних осям відповідно  $Oz$  і  $Oy$ , одержуємо трипросторові криві лінії відповідно  $a1$  і  $a2$  (рис. 5) у тривимірних підпросторах  $Oxyz$  і  $Oxzt$ . Проєкціями ліній  $a1$  і  $a2$  у двовимірні площини  $Oxy$  і  $Oxt$  підпростору  $Oxyz$ , а також у двовимірні площини  $Oxt$  і  $Ozt$  підпростору  $Oxzt$  є криві лінії, які відповідають зв'язкам параметрів  $x, y, z, t$ :

$$\begin{aligned} y &= y(x); \\ z &= z(t); \\ x &= x(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Отже, проєкціями чотирипросторової кривої лінії, поданої складною функцією (7), є криві у підпросторах нижчої вимірності. Достатня кількість проєкцій чотирипросторової кривої лінії становить:

- дві проєкції у двох тривимірних координатних підпросторах;
- одна проєкція у тривимірному підпросторі і дві проєкції відповідно у двох двовимірних координатних підпросторах;
- три проєкції у трьох двовимірних координатних підпросторах.

У другому випадку маємо (рис. 5), що одна з проєкцій – проєкція кривої лінії у двовимірній координатній площині  $Oxt$  – є одночасно складовою трипросторової кривої у тривимірному просторі  $Oxzt$ . З урахуванням повторення однієї з двовимірних проєкцій кривої лінії достатня кількість проєкцій чотирипросторової лінії складається з однієї просторової лінії у тривимірному підпросторі і однієї проєкції у двовимірній координатній площині. Тоді комп'ютерна реалізація засобами наукової комп'ютерної графіки проєкцій чотирипросторової кривої лінії як інтегральної кривої простору стану системи, процеси у якій подаються системою диференціальних рівнянь першого порядку, наприклад,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(y, z); \\ \frac{dy}{dt} &= f(x, z); \\ \frac{dz}{dt} &= f(x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

здійснюється використанням відповідних команд для їх візуалізації у дво- і тривимірні координатні підпростори (рис. 6).

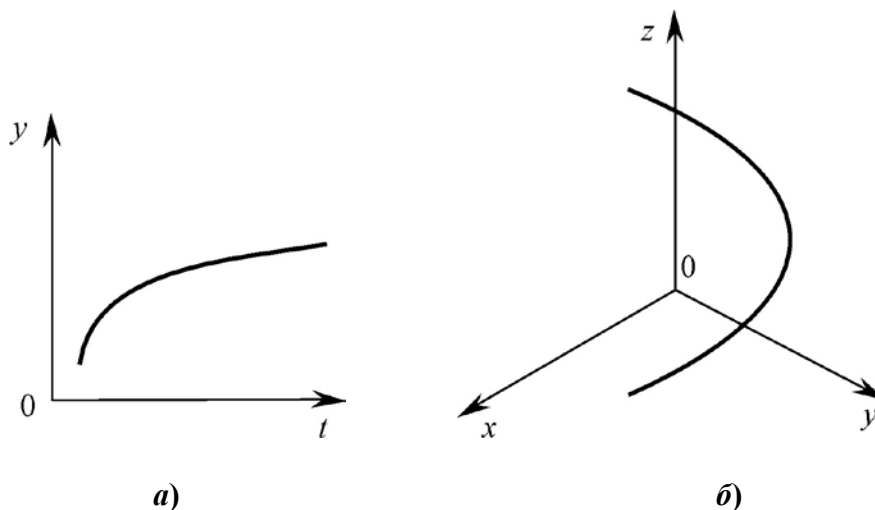


Рис. 6. Проекції інтегральної кривої простору  $E^4$  у а) дво- і б) тривимірні площини.

Збільшення вимірності просторів стану технічних систем вимагає для проведення геометричного і комп'ютерного моделювання та проведення аналізу їх динаміки використання циліндричних поверхонь вищих вимірностей. Зокрема, для п'ятивимірного евклідового простору необхідно використовувати одночасно дво-, три- і чотиривимірні циліндричні поверхні.

#### Висновки

Встановлено на прикладі простору  $E^4$ , що у процесі формоутворення багатопросторових кривих ліній можливе використання тільки взаємозв'язків двох параметрів у двовимірних координатних площинах. Показана достатня найменша кількість таких взаємозв'язків. Проекціюванням чотирипросторової кривої лінії у підпростори нижчих вимірностей визначена достатня мінімальна кількість таких проекцій у підпростори однакових вимірностей та комбінацій підпросторів різних вимірностей.

#### Список використаної літератури

1. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1 / С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С.І. Пустюльга, В.Є. Михайленко, І.Н. Бурчак. – Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256 с.
2. Гумен О.М. Геометрія проєктивних  $n$ -просторів щодо перебігу технологічних процесів у дослідженнях багатопараметричних систем / О.М. Гумен, С.Є. Ляковська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. – Т. 49. – С. 89-94.

3. Ванін В.В. Деякі аспекти застосування засобів геометричного моделювання у проєктивному просторі / В.В. Ванін, О.М. Гумен // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 90-93.
4. Гумен О.М. Багатовимірна геометрія у прикладних задачах / О.М. Гумен, С.Є. Ляковська, Є.В. Мартин // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2016. – Вип. 3(58). – С. 497-500.
5. Гумен О.М. Візуалізація фазових траєкторій  $n$ -вимірних просторів / О.М. Гумен, С.Є. Мартин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 79. – С.121-125.
6. Gumen O. Research of thermal processes in industrial premises with energy-saving technologies of heating / O. Gumen, N. Spodyniuk, M. Ulewicz, Ye. Martyn // Diagnostyka. – 2017. – Vol. 18. – № 2. – P. 43-49.
7. Гумен О.М. Інформаційні графічні засоби подання простору температурного поля промислових будівель / О.М. Гумен, Є.В. Мартин, Н.А. Сподинюк, С.Є. Ляковська // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 3 (62). – Т. 2. – С. 269-273.

#### **References**

1. Kovalov, S. M., Gumen, M. S., Pustiulha, S. I., Mykhailenko, V. Ye., Burchak, I. N. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Spetsialni rozdily. Vypusk 1. Redaktsiino-vydavnychyi viddil LDTU. Lutsk. (2006)
2. Gumen, O. M., Liaskovska, S. Ye. Heometriia proektyvnykh  $n$ -prostoriv shchodo perebihu tekhnolohichnykh protsesiv u doslidzhenniakh bahatoparmetrychnykh system. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. **49**, 4, 89-94. (2011)
3. Vanin, V. V., Gumen, O. M. Deiaki aspekty zastosuvannia zasobiv heometrychnoho modeliuвання u proektyvnomu prostori. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. **87**, 90-93. (2011)
4. Gumen, O. M., Liaskovska, S. Ye., Martyn, Ye .V. Bahatovymirna heometriia u prykladnykh zadachakh. Visnyk Khersonskoho Natsionalnogo Tekhnichnogo Universytetu. **3(58)**, 497-500. (2016)
5. Gumen, O. M., Martyn, S. Ye. Vizualizatsiia fazovykh traiektorii  $p$ -vymirnykh prostoriv. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. **79**, 121-125. (2008)
6. Gumen, O., Spodyniuk, N., Ulewicz, M., Martyn, Ye. Research of thermal processes in industrial premises with energy-saving technologies of heating. Diagnostyka. **18**, 2, 43-49. (2017)
7. Gumen, O. M., Martyn Ye. V., Spodyniuk N. A., Liaskovska S. Ye. Informatsiini hrafichni zasoby podannia prostoru temperaturnoho polia promyslovykh budivel. Visnyk Khersonskoho natsionalnogo tekhnichnogo universytetu. **3 (62)**, 2, 269-273. (2017)

УДК 514.18:536.3

А.В. НАЙДИШ, Д.В. СПІРИНЦЕВ, М.В. ЛАЗАРЕНКО  
Мелітопольський державний педагогічний університет  
імені Богдана Хмельницького

### **РОЗРОБКА ТЕХНОЛОГІЇ ПРОЕКТУВАННЯ ТА ВИГОТОВЛЕННЯ РОБОЧИХ КОЛІС ТУРБОКОМПРЕСОРА**

*Запропоновано методику формування комп'ютерної геометричної моделі робочого колеса турбокомпресора. Технологія передбачає виготовлення робочого колеса на п'ятикоординатному верстаті та забезпечує точність обробки поверхонь, що задовольняє умовам експлуатації турбокомпресора. Запропоновано спосіб поліпшення динамічних якостей міжлопаткового каналу робочого колеса за рахунок оптимізації графіка зміни площ його нормальних перерізів. Площі нормальних перерізів скореговано шляхом зміни форми твірних ліній маточини та кришки.*

*Ключові слова: геометричне моделювання, комп'ютерне моделювання, робоче колесо турбокомпресора, технологія проектування, площі нормальних перерізів лопатки.*

А.В. НАЙДЫШ, Д.В. СПИРИНЦЕВ, М.В. ЛАЗАРЕНКО  
Мелитопольский государственный педагогический университет  
имени Богдана Хмельницкого

### **РАЗРАБОТКА ТЕХНОЛОГИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ИЗГОТОВЛЕНИЯ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОКОМПРЕССОРА**

*Предложена методика формирования компьютерной геометрической модели рабочего колеса турбокомпрессора. Технология предусматривает изготовление рабочего колеса на пятикоординатном станке и обеспечивает точность обработки поверхностей, удовлетворяющей условиям эксплуатации турбокомпрессора. Предложен способ улучшения динамических качеств межлопаточного канала рабочего колеса за счет оптимизации графика изменения площадей его нормальных сечений. Площади нормальных сечений скорректированы путем изменения формы образующих линий ступицы и крышки.*

*Ключевые слова: компьютерное моделирование, рабочее колесо турбокомпрессора, технология проектирования, геометрическое моделирование, площади нормальных сечений лопатки.*

A. NAIDYSH, D. SPIRINTSEV, M. LAZARENKO  
Melitopol State Pedagogical University  
the name of Bogdan Khmelnytsky

### **DEVELOPMENT OF TECHNOLOGY OF DESIGNING AND MANUFACTURING OF TURBOKOMPRESORA WORKING WHEELS**

*In this paper, we propose a technique for forming a computer geometric model of a turbocharger impeller with predefined geometric characteristics developed for the use in the department of the chief designer of limited liability company Melitopol Plant of Turbochargers. This will allow creating geometric models of products that are limited by complex functional surfaces.*

*The method is based on the use of the method developed by us, which allows improving the dynamic qualities of the interblade channel by optimizing the schedule for changing the*



*areas of the normal cross sections of the interlop channel. The cross-sections have been corrected by changing the shape of the generating lines of the turbocharger cover and the impeller hub.*

*The functional surface of the blade of the wheel is formed on the basis of the frame, the linear elements of which according to the working drawings are given by an ordered array of points. Providing a second order of smoothness and monotonous variation of differential geometric characteristics along the lines forming the surface skeleton prevents the occurrence of secondary flows within the interlop channel and contributes to the laminar nature of the flow around the blade surface by the medium.*

*The technology for processing the functional surfaces of the impeller on a Computer Numerical Controlled Lathe machine has been developed. The initial data for the development of the control program is the generated geometric model of the product. The technology provides for the manufacture of the impeller on a five-axis machine and ensures the accuracy of the surface treatment that satisfies the operating conditions of the turbocharger. The impeller part obtained as a result of machining on a Computer Numerical Controlled Lathe machine is used as input data to create a "reverse" model and a mold for making impellers. As a result of the studies proposed in the work, the turbocharger output increased by 6.9%.*

*Keywords: computer simulation, turbocharger impeller, design technology, geometrical modeling, areas of normal sections of the blade, Computer Numerical Controlled Lathe Machine.*

### **Постановка проблеми**

Комп'ютерне моделювання є потужним інструментом розв'язання багатьох науково-виробничих задач. Однією з таких задач є проектування виробів, функціональне призначення яких – взаємодія з середовищем: поверхонь, що обмежують корпусні вироби авіа-, автомобіле-, суднобудування, лопаток турбін і змішувачів, каналів двигунів внутрішнього згорання, робочих органів сільськогосподарських машин та ін. [5].

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Задачу виготовлення виробів, обмежених складними функціональними поверхнями, з високою точністю розв'язують технології, які вимагають використання верстатів з числовим програмним управлінням (ЧПУ) [4]. Обов'язковим етапом такої технології є створення тривимірної комп'ютерної моделі виробу з використанням САД-паketу.

Процес моделювання поверхні, що обмежує технічний виріб, включає наступні етапи:

- на основі вхідного масиву точок формується дискретний лінійчатий каркас поверхні, лінійні елементи якого представлено упорядкованими точковими рядами;
- формуються безперервні обводи, що інтерполюють точкові ряди;
- на основі отриманого лінійчатого каркасу створюється модель поверхні виробу;
- комп'ютерна модель використовується в якості вихідних даних для розробки управляючої програми по обробці виробу на верстаті з ЧПУ.

Формування комп'ютерних моделей поверхонь з призначеними геометричними характеристиками та створення із заданою точністю траєкторій їх обробки ріжучим інструментом – ключові задачі при розробці технології виготовлення виробів, функціональне призначення яких – взаємодія з середовищем.

### **Мета дослідження**

Розробити технологію виготовлення робочих коліс для створення замкнутого циклу виробництва турбокомпресорів на ТОВ "Мелітопольський Завод Турбокомпресорів".

### Викладення основного матеріалу дослідження

При проектуванні поверхонь, що обмежують міжлопатковий канал, необхідно забезпечити виконання наступних вимог [1, 5]:

- площа перерізів уздовж каналу монотонно змінюється;
- під час руху потоку тиск газу у міжлопатковому каналі плавно зростає;
- напрям потоку змінюється з осьового (на вході) на радіальний (на виході з каналу).

На рис.1, б показано графік зміни кривини уздовж горизонтального перетину, сформованого B-сплайном, що інтерполює отриманий точковий ряд; на рис. 1, а представлено графік зміни кривини уздовж перетину, сформованого інструментами SolidWorks.

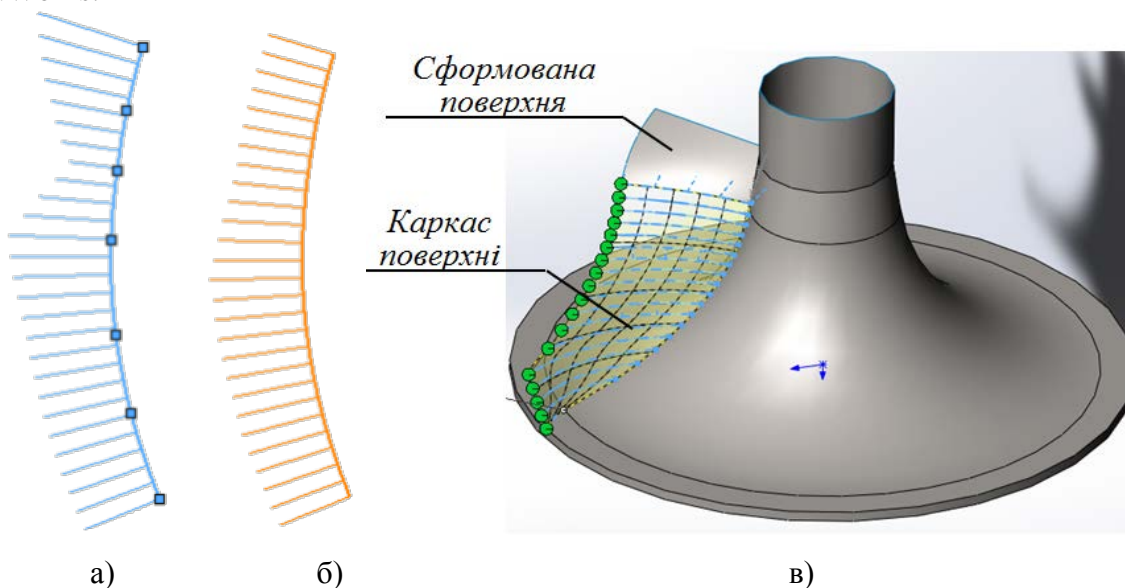


Рис. 1. Формування каркасу лопатки робочого колеса.

Процес моделювання поверхні, що обмежує технічний виріб, включає наступні етапи:

- на основі вхідного масиву точок формується дискретний лінійчатий каркас поверхні, лінійні елементи якого представлено упорядкованими точковими рядами;
- формуються безперервні обводи, що інтерполюють точкові ряди;
- на основі отриманого лінійчатого каркасу створюється модель поверхні виробу;
- комп'ютерна модель використовується в якості вихідних даних для розробки управляючої програми по обробці виробу на верстаті з ЧПУ.

На основі каркасу, що складається з 22 горизонтальних перерізів та двох просторових напрямних кривих, в пакеті SolidWorks сформовано поверхню лопатки (рис. 2).

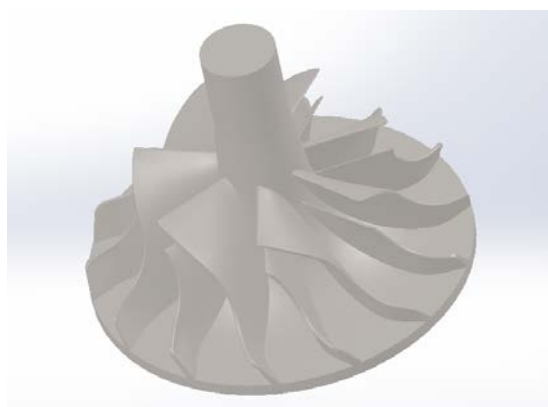


Рис. 2. Геометрична модель робочого колеса турбокомпресора.

Модель робочого колеса розбита на складові частини (рис. 3): маточину, обід і лопатки. Розбиття виконується методом створення шарів. Кожний шар містить одну із складових частин колеса, що дозволяє генерувати окремі частини траєкторії обробки.

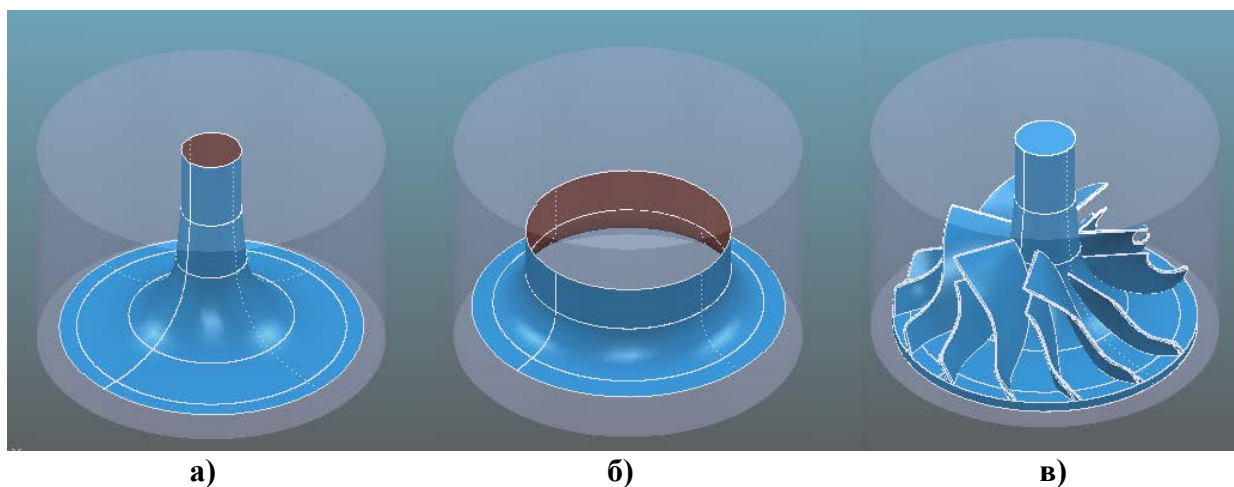


Рис. 3. Складові частини робочого колеса.

Після вибору форми заготовки, серед траєкторій, які запропоновані в системі PowerMill, для чорнової обробки обрано траєкторію "выборка 3Dмодели". Згенеровану траєкторію чорнової та чистової обробки представлено на рис. 4.

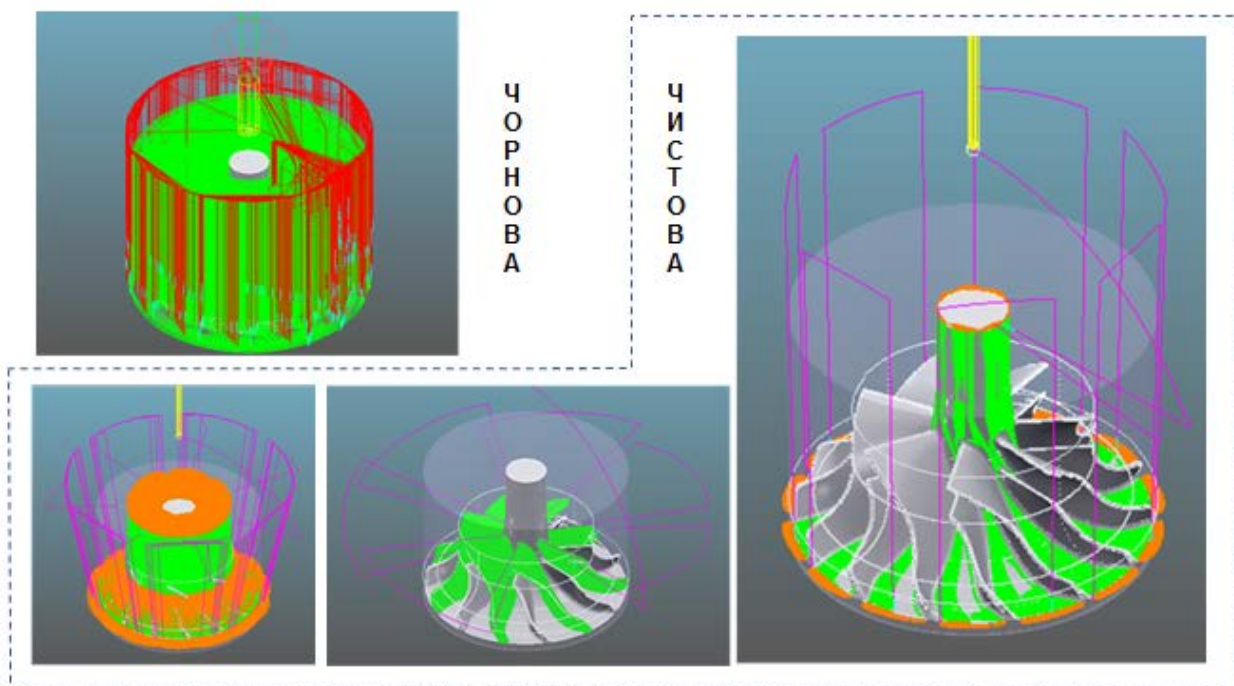
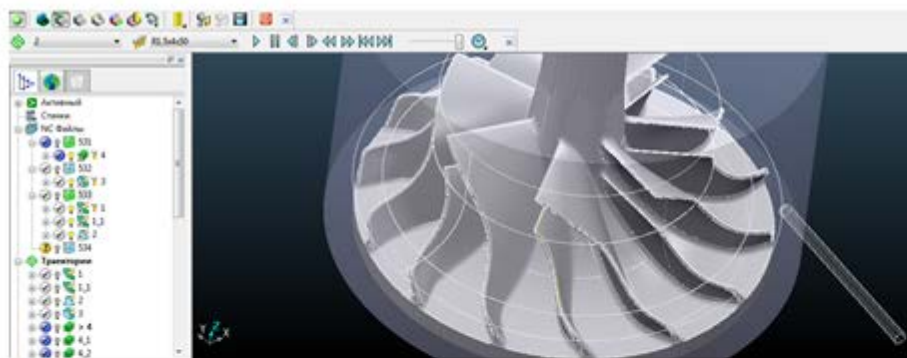


Рис. 4. Траєкторії чорнової та чистової обробки заготовки.

За допомогою модуля ViewMill проведено візуалізацію чорнової та чистової обробок (рис. 5).

Після виготовлення робочого колеса було виконано збірку турбокомпресора та проведено його випробування на стенді типу "замкнутий контур".



Робоче колесо, отримане у результаті  
обробки на верстаті з ЧПУ DMU50v



Рис. 5. Візуалізація обробки.

Збільшити продуктивність турбокомпресора можна шляхом зменшення енергетичних втрат всередині міжлопаткового каналу робочого колеса.

Динамічні якості міжлопаткового каналу можна поліпшити за рахунок оптимізації графіка зміни площ нормальних перетинів.

Формування сімейства нормальних перерізів міжлопаткового каналу виконано за такими етапами:

- моделювання просторової осьової лінії каналу;
- створення сімейства нормальних січних площин;
- формування перетинів поверхонь, що обмежують канал, нормальними площинами.

Вхідними даними для формування осьової лінії каналу є лінії току, що проходять через центри тяжіння вхідного і вихідного перерізів. Лінії току отримані в результаті виконання газодинамічного аналізу потоку в міжлопатковому каналі за допомогою модуля SolidWorks Flow Simulation.

Точковий ряд, що задає осьову лінію, складається з 9 вузлів, рівновіддалених від вихідних ліній току (рис. 6).

У результаті згущення вихідної ДПК отримано точковий ряд, що складається з 72 вузлів, на основі якого сформована просторова осьова лінія з закономірною зміною кривини та скруту [2–3].

Сформовано 7 нормальних перерізів каналу, рівномірно розподілених уздовж осьової лінії.

Графік зміни площ нормальних перерізів показав (рис. 7), що в центральній частині каналу площі перерізів збільшуються. Для забезпечення монотонної зміни площ було проведено корегування форми перерізів 3, 4 і 5 [3]. Площі перерізів відкореговані за рахунок зміни форми твірних ліній кришки турбокомпресора і маточини робочого колеса.

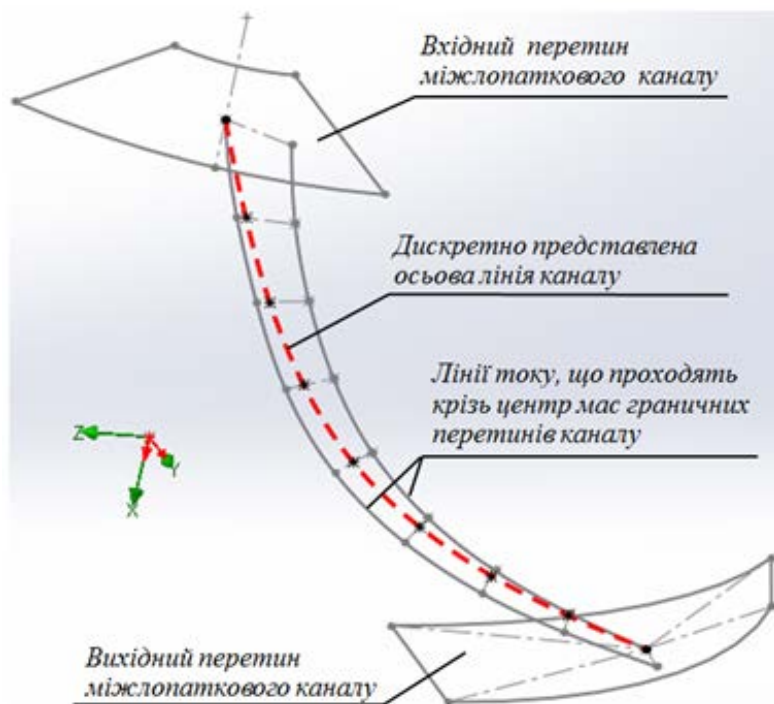


Рис. 6. Вхідні дані.

Закономірна зміна кривини уздовж твірних ліній маточини та кришки запобігає виникненню вторинних потоків всередині міжлопаткового каналу.

На основі отриманих поверхонь була створена оптимізована модель робочого колеса. Керуюча програма для обробки оптимізованого робочого колеса на верстаті з ЧПУ розроблена аналогічно за методикою, описаною для вихідного робочого колеса.

Після виготовлення оптимізованого робочого колеса на верстаті з ЧПУ і випробуванні турбокомпресора тиск потоку на виході склав 1,73 атм. (у порівнянні з 1.67 атмосфери). Таким чином,

продуктивність турбокомпресора, в якому встановлено оптимізоване робоче колесо, в порівнянні з прототипом збільшилася на 0,06 атм., що становить 6,9%.

Заключним етапом розробки технології виготовлення робочих коліс є виготовлення його ливарної форми.

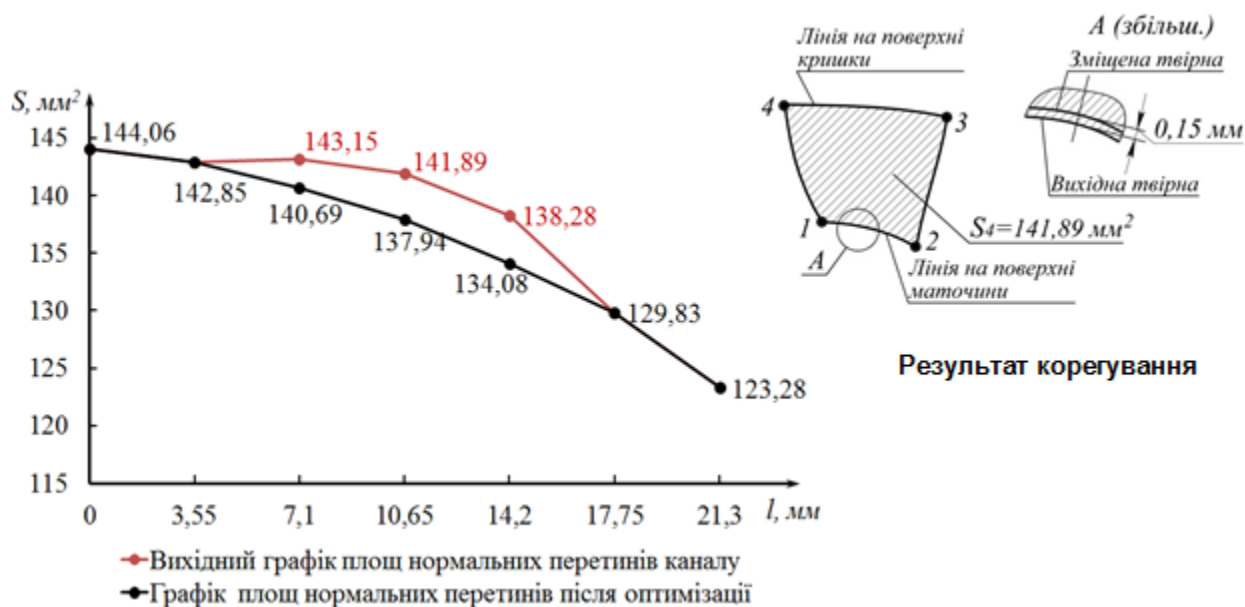


Рис. 7. Графік зміни площ нормальних перерізів.

### Висновки

Запропоновано методику формування комп'ютерної геометричної моделі робочого колеса турбокомпресора. Функціональна поверхня лопатки колеса сформована на основі каркасу, лінійні елементи якого згідно з робочим кресленням задані упорядкованим

масивом точок. Забезпечення другого порядку гладкості і монотонної зміни диференційно-геометричних характеристик уздовж ліній, що утворюють каркас поверхні, сприяє ламінарному характеру обтікання поверхні лопатки середовищем. Технологія передбачає виготовлення робочого колеса на п'ятикоординатному верстаті та забезпечує точність обробки поверхонь, що задовольняє умовам експлуатації турбокомпресора. Запропоновано спосіб поліпшення динамічних якостей міжлопаткового каналу робочого колеса за рахунок оптимізації графіка зміни площ його нормальних перетинів. Площі нормальних перетинів скореговано шляхом зміни форми твірних ліній маточини та кришки. У результаті продуктивність турбокомпресора збільшилась на 6,9%.

#### **Список використаної літератури**

1. Байков Б.П. Турбокомпрессоры для наддува двигателей / Б.П. Байков, В.Г. Бордуков, П.В. Иванов, Р.С. Дейч – Л.: Машиностроение, 1975. – 200 с.
2. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование на основе пространственных угловых параметров дискретно представленной кривой второго порядка гладкости / Е.А. Гавриленко, А.В. Найдыш // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 69-75.
3. Гавриленко Є.А. Програмна реалізація алгоритму моделювання одновимірних обводів по заданим геометричним умовам / Є.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – Луцьк: Луцький НТУ, 2013. – № 13. – С. 4-9.
4. Гжиров Р.И. Программирование подготовки на станках с ЧПУ: справочник / Р.И. Гжиров, П.П. Серебренецкий. – Л.: Машиностроение, 1990. – 588 с.
5. Кампсти Н. Аэродинамика компрессоров [пер. с англ.] / Н. Кампсти. – М.: Мир, 2000. – 688 с.

#### **References**

1. Baykov, B. P., Bordukov, V. G., Ivanov, P. V., Deych, R. S. Turbokompressory dlya nadduva dvigateley. Mashinostroyeniye. Leningrad. (1975)
2. Gavrilenko, E. A., Naydysh, A. V. Variativnoye diskretnoye geometricheskoye modelirovaniye na osnove prostranstvennykh uglovykh parametrov diskretno predstavlennoy krivoy vtorogo poryadka gladkosti. Prikladna heometriya ta inzhenerna hrafika. **91**, 69-75. (2013)
3. Havrylenko, Ye. A., Kholodniak, Yu. V. Prohramna realizatsiia alhorytmu modeliuвання odnovymirnykh obvodiv po zadanykh heometrychnym umovam. Kompiuterno-intehrovani tekhnolohii: osvita, nauka, vyrobnytstvo. **13**, 4-9. (2013)
4. Gzhiron, R. I., Serebrenitskiy, P. P. Programmirovaniye podgotovki na stankakh s ChPU: spravochnik. Mashinostroyeniye. Leningrad. (1990)
5. Kampsti, N. Aerodinamika kompressorov. Mir. Moscow. (2000)

УДК 514.18

О.В. НЕСВИДОМІНА

Національний університет біоресурсів і природокористування України

## ВІДОБРАЖЕННЯ РАСТРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ НА ПЛОСКІ ІЗОМЕТРИЧНІ СІТКИ

*Запропоновано спосіб нанесення растрових зображень на криволінійні області покриті плоскими ізометричними сітками. В основі способу лежить перенесення зчитуваного кольору кожного пікселя вихідного растрового зображення на відповідну квадратну комірку ізометричної сітки. За допомогою розробленої комп'ютерної моделі в середовищі символічної математики Maple проаналізовано вплив параметрів ізометричної сітки на положення та розміри відображених растрових зображень. При виконанні досліджень використовуються можливості потужної бібліотеки ImageTools. Формування ж плоских ізометричних сіток здійснюється за допомогою розробленої автором бібліотеки функцій конструювання ізометричних сіток за різними вихідними умовами.*

*Ключові слова: плоска ізометрична сітка, растрове зображення, колір пікселя.*

А.В. НЕСВИДОМИНА

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

## ОТОБРАЖЕНИЕ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ПЛОСКИЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ СЕТКИ

*Предложен способ нанесения растровых изображений на криволинейные области з плоскими изометрическими сетками. В основе способа лежит перенос считываемого цвета каждого пикселя исходного растрового изображения на соответствующую квадратную ячейку изометрической сетки. При помощи разработанной компьютерной модели в среде символьной математики Maple проанализировано влияние параметров изометрической сетки на положение и размеры отображенных растровых изображений. При выполнении исследований используются возможности мощной библиотеки ImageTools. Формирование плоских изометрических сеток выполняется с помощью разработанной автором библиотеки функций конструирования изометрических сеток с разными начальными условиями.*

*Ключевые слова: плоская изометрическая сетка, растровое изображение, цвет пикселя.*

A. NESVIDOMINA

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

## THE MAPPING OF RASTER IMAGES ON PLANE ISOMETRIC GRID

*The mapping of images onto curvilinear forms with minimal distortion takes place in many design tasks. A method of conformal mapping of arbitrary raster images onto plane curvilinear region is proposed, which are represented by isometric (also called isothermal) grids. Using the developed computer model in the Maple symbolic environment, the effect of the isometric grid parameters on the position and size of the mapped raster images is analyzed. When performing the research, the capabilities of the powerful ImageTools library are used. The*

formation of flat isometric grids is carried out with the help of the author of the library of designing functions of isometric grids with different initial conditions. The essence of the proposed method is as follows. Any raster image, for example, digital photography in jpg format, is characterized by the dimensions  $N \times M$  – the number of pixels in width and height. In addition, each pixel has a color and brightness, which are arranged in rows and columns. To apply a raster image to a curvilinear region, it is also necessary to divide the curvilinear domain into  $N \times M$ , the number of elementary squares, each of which is assigned the corresponding color from the raster.

The influence  $u = [u_1..u_2]$  and  $v = [v_1..v_2]$  arguments of the various isometric grids  $R(u, v)$  constructed on the sizes and positions of an arbitrary raster image are investigated in the article. It is shown how the isometric grid, depending on  $u$  and  $v$  localizes the raster image – it can be located both within the limits of the isometric grid coordinate lines and beyond it, can also be oriented in different directions with respect to the  $u$  and  $v$  coordinate lines. The possibility of scaling a raster image that can be performed relative to the dimensions of an isometric grid is shown. Since there is a correspondence between the pixel matrix of the original raster image and the  $u, v$ - cells of the isometric grid, the rotation of the image will affect its position in the isometric grid. For example, rotating the original bitmap image at an angle 90 degrees will change its location on a plane isometric grids – from along the  $u$  coordinate lines to along the  $v$  coordinate lines. Note that, the curvilinear cells of the constructed isometric grids differ somewhat from the shape of the squares because the values  $du$  and  $dv$  of the corresponding arguments  $u$  and  $v$  of their coordinate lines were taken somewhat too large. Otherwise, cells would degenerate into points and the corresponding grid image would not be so clear.

Keywords: plane isometric grid, raster image, pixel color.

### Постановка проблеми

Нанесення зображень на криволінійні форми з щонайменшими спотвореннями має місце в багатьох дизайнерських задачах [2]. В більшості способів будують сітку, кожен елементарну чарунку якої зафарбовують заданим кольором. Якщо будь-яке фотографічне зображення, як вихідний растр  $N \times M$  пікселів розглядати як квадрати певного кольору, то необхідно і криволінійну область теж розбити на елементарні квадрати, кожному із яких присвоїти відповідний колір із растра. Таким чином, в поставленій проблемі необхідно вирішити дві основні задачі: перша - здійснити формування заданої криволінійної сітки з елементарними комірками у вигляді квадратів, які називають ізометричні (або ще ізотермічні); друга – зафарбувати кожен комірку криволінійної області відповідним кольором пікселя вихідного растра.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Формування плоских ізометричних сіток за допомогою комплексної змінної показано в праці [3]. Нанесення рисунків на ізометричні сітки наведено в роботі [2].

### Мета дослідження

Розкрити спосіб відображення растрових зображень на плоскі криволінійні області, які представляються ізометричними сітками. За допомогою розробленої комп'ютерної моделі в середовищі символічної алгебри Maple [1] проаналізувати вплив параметрів ізометричної сітки на положення та розміри відображених растрових зображень.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Загальну схему відображення растрових зображень на ізометричні сітки показано на рис.1. Реалізація цієї схеми можлива тільки із залученням сучасних комп'ютерних технологій. Нами була використана система комп'ютерної алгебри Maple [1].

Нехай маємо будь-яке растрове зображення, наприклад, цифрову фотографію у jpg форматі. Растрове зображення характеризується розміром – кількістю пікселів по ширині і



висоті. Кожен піксель має колір та яскравість. Всі ці дані організовані в рядки і стовбці. Щоб растрове зображення нанести на криволінійну область, необхідно його підготувати - масштабувати, повернути, обрізати тощо. Ці операції у середовищі Maple здійснюються операторами потужної бібліотеки ImageTools [1]. Формування ж плоских ізометричних сіток здійснюється за допомогою розробленої нами бібліотеки функцій конструювання ізометричних сіток за різними вихідними умовами [3].

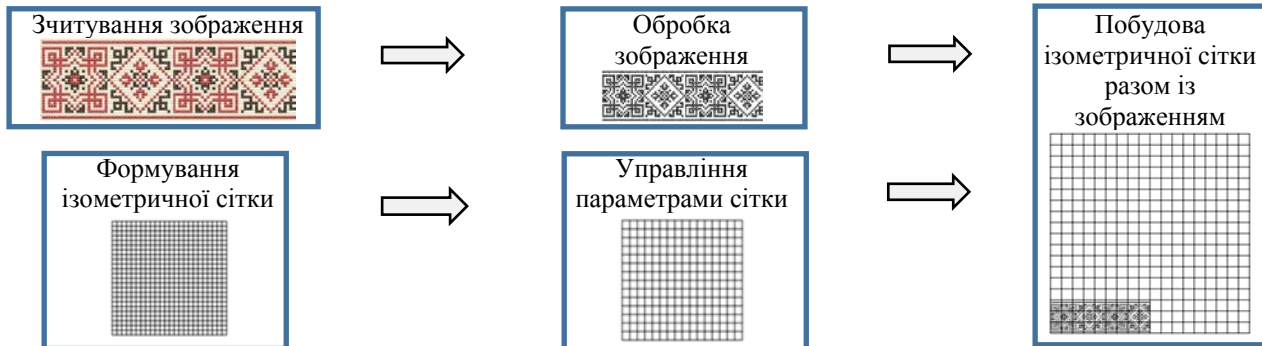


Рис. 1. Схема відображення растрових зображень на ізометричні сітки.

Візьмемо параболічну ізометричну сітку (рис. 2, а), параметричне рівняння якої має вигляд:

$$R(u,v)=R[u^2 - v^2, 2uv, 0], \quad (1)$$

де  $u=[u_1..u_2]$  і  $v=[v_1..v_2]$  – аргументи ізометричної сітки дорівнюють  $u=[-1..1]$  і  $v=[-1..1]$ .

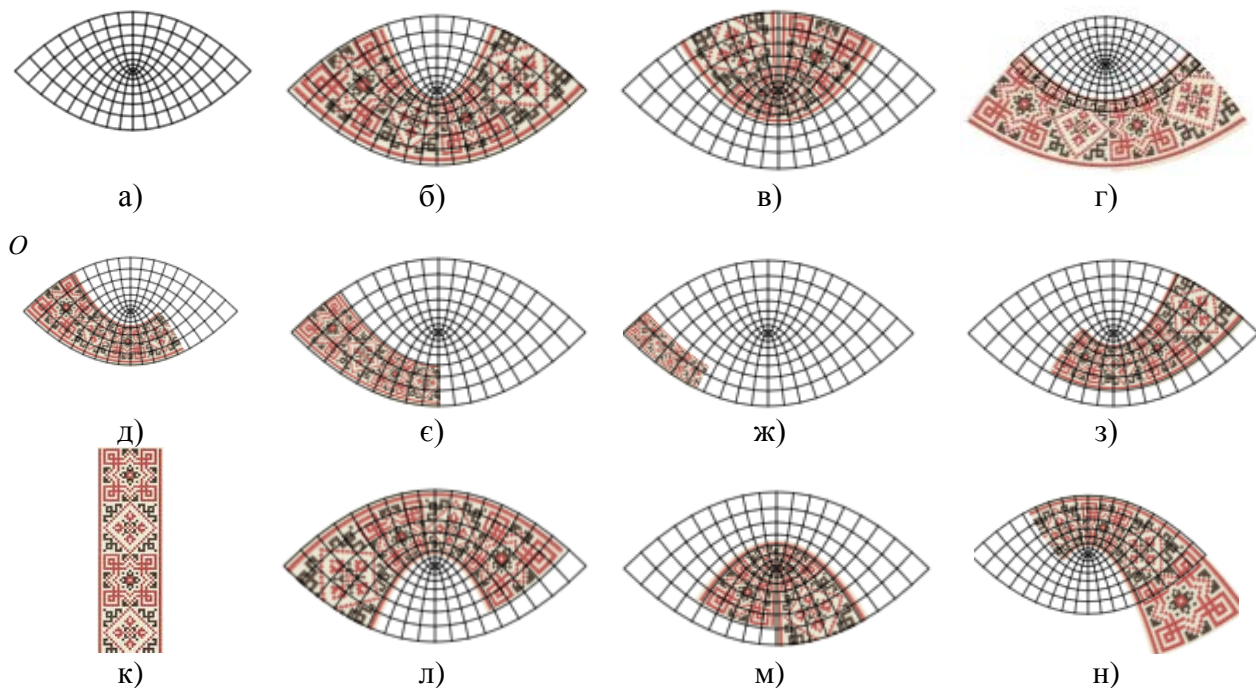


Рис. 2. Приклади нанесення растрових зображень на параболічну ізометричну сітку.

Рівняння (1) параболічної ізометричної сітки було отримане відокремленням дійсної та уявної частин  $R[\text{Re}(f), \text{Im}(f), 0]$  квадратичної функції комплексної змінної

$f(z) = z^2$ , де  $z = u + v\sqrt{-1}$ . Коефіцієнти  $E$  і  $G$  лінійного елементу  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  сітки (1) рівні між собою  $E = G = 4$ , а коефіцієнт  $F = 0$ , що підтверджує її ізометричність.

Управління положенням растрового зображення та його розмірами здійснюється через відповідні параметри розробленої моделі. Рис. 2, б ілюструє растрове зображення накладене на ізометричну сітку, якщо параметри її положення взяти  $u_0 = 0, v_0 = 0$ . Якщо ж прийняти значення  $v_0 = 1$ , то растрове зображення буде зміщеним вздовж  $v$  координатної лінії сітки (рис. 2, в). Растрове зображення може лежати і за межами зображення ізометричної сітки, як це маємо при значенні  $v_0 = -0.5$  (рис. 2, г).

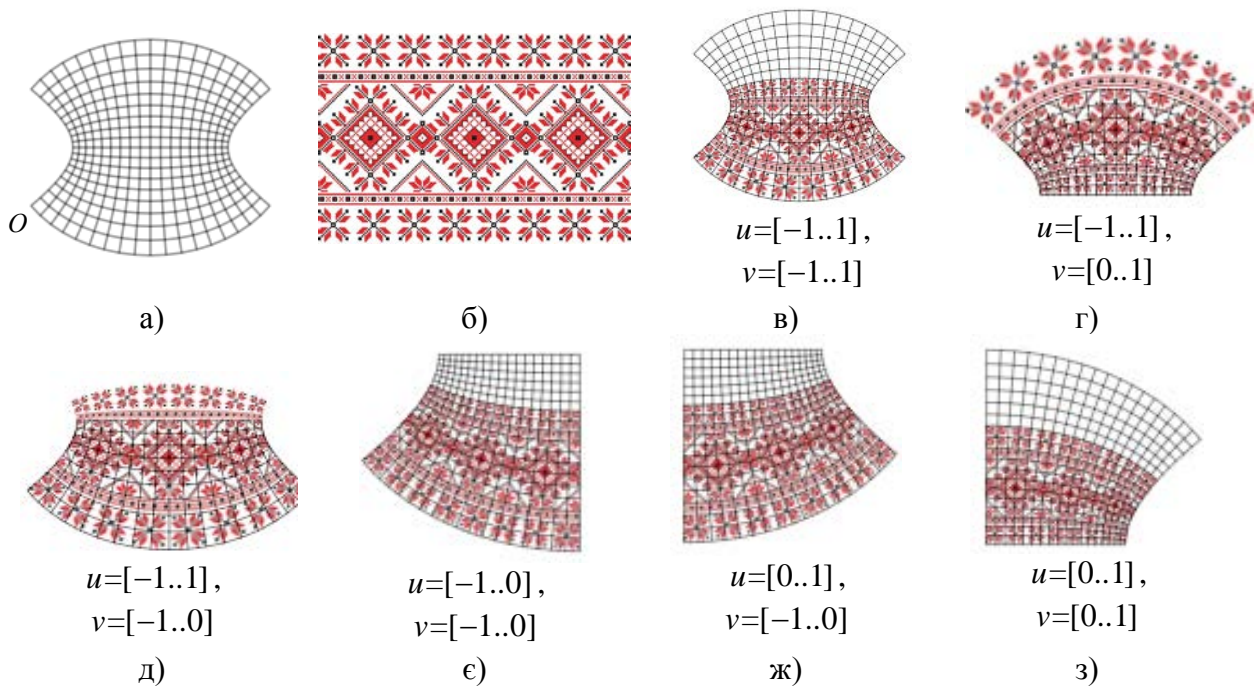
Реалізована можливість масштабування растра, яке можна здійснити по відношенню до відносних розмірів ізометричної сітки (1). Так, рис. 2, д, є, ж ілюструє подібні растрові зображення з коефіцієнтами подібності рівними 0.75, 0.5 і 0.25. Центр подібності в криволінійній системі координат, яка в цьому випадку є параболічна ізометрична сітка (1), знаходиться в точці  $O$  – в початку  $u, v$ - координатних ліній. Одночасно задаючи коефіцієнт подібності рівним величині 0.75 і параметри положення растра  $u_0 = 0.5, v_0 = 0.1$ , можна його розташовувати в заданому місці ізометричної сітки (рис. 2, з). Оскільки існує відповідність між матрицею пікселів вихідного растрового зображення і  $u, v$ -комірками ізометричної сітки, то поворот зображення вплине на його положення в ізометричній сітці. Так, поворот вихідного растрового зображення на кут 90 градусів (рис. 2, к) призведе до того, що для даного зображення кількість пікселів по висоті буде більшою чим по широті. Відтворення повернутого растрового зображення демонструє його розташування вже вздовж  $v$  координатних ліній сітки (рис. 2, л). На рис. 2, м, н побудовано растрові зображення відповідно для параметрів положення  $u_0 = 0.5, v_0 = 0$  і  $u_0 = 0, v_0 = 0.5$ .

Дослідимо вплив аргументів  $u, v$ -координатних ліній ізометричної сітки на відображення растрових зображень. Для цього візьмемо іншу ізометричну сітку (рис. 3, а) з параметричним рівнянням виду:

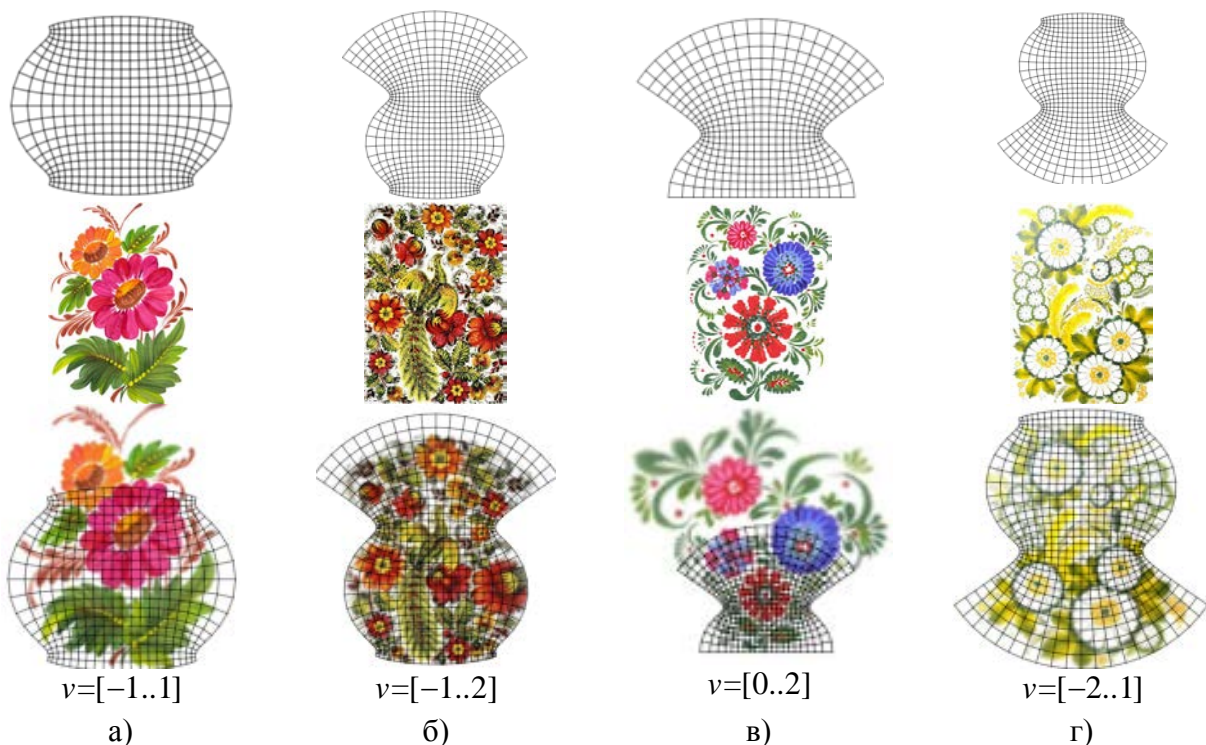
$$R(u, v) = R[\sin(u)\cos(v), \cos(u)\sinh(v), 0], \quad (2)$$

яка була отримана відокремленням дійсної та уявної частин  $R[\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f), 0]$  синусоїдальної функції комплексної змінної  $f(z) = \sin(z)$ .

Якщо прийняти межі зміни аргументів  $u = [-1..1]$  і  $v = [-1..1]$  ізометричної сітки (2) та відобразити на неї вихідне растрове зображення (рис. 3, б) при значеннях параметрів його положення рівними  $u_0 = 0, v_0 = 0$ , то отримаємо рис.3,в. Задамо інші межі зміни аргументів  $u = [-1..1]$  і  $v = [0..1]$  для побудови ізометричної сітки (2). Відображення растрового зображення на цю сітку приводить до того, що воно вже знаходиться у верхній її частині (рис. 3, г). Рис.3,д показує вплив значень меж зміни аргументів  $u = [-1..1]$  і  $v = [-1..0]$  ізометричної сітки (2) на результат відображення растрового зображення. Рис.3,є,ж,з демонструють відображення растрового зображення на  $\frac{1}{4}$  частину ізометричної сітки (2). Вплив аргументів  $u, v$ -координатних ліній на растрові зображення продемонструємо за допомогою ізометричної сітки (рис. 4, а), яка отримана відокремленням дійсної та уявної частин  $R[\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f), 0]$  функції комплексної змінної  $f(z) = \sin(z) + \tan(z)$ . Параметричне рівняння цієї ізометричної сітки є досить громіздким і тому тут не приводиться.



**Рис. 3. Вплив аргументів координатних ліній ізометричної сітки на розміри та положення відображеного растрового зображення.**



**Рис. 4. Приклади взаємозалежності між ізометричною сіткою і нанесеним на неї растрового зображення.**

Всі побудови растрових зображень були виконані для однакових значень аргумента  $u=[-1..1]$ , але для різних меж зміни аргументу  $v$ . Параметри положення растрового зображення дорівнюють  $u_0 = 0$  і  $v_0 = 0$ . Можна бачити (рис. 4), як ізометрична сітка в залежності від  $v=[v_1..v_2]$  локалізує растрове зображення - воно не виходить за межі

$u=[-1..1]$  координатних ліній ізометричної сітки, але може бути витягнутим як вгору, так і донизу.

В побудованих зображеннях звернемо увагу на дві обставини. Перша, всі растрові зображення відтворювалися разом із ізометричною сіткою, щоб можна візуально оцінити її вплив на зміну форми зображення. Друга, криволінійні комірки побудованих ізометричних сіток дещо відрізняються від форми криволінійних квадратів, хоча коефіцієнти  $E$  та  $G$  1-ої квадратичної форми сітки рівні між собою. Це пов'язано з тим, що з метою покращення візуалізації ізометричних сіток значення  $du$  та  $dv$  відповідних аргументів  $u$  та  $v$  їх координатних ліній бралися дещо завеликими, інакше комірки сітки вироджувалися би в точки і отримали б одну затушовану область.

#### **Висновки**

Запропонований спосіб нанесення растрових зображень на криволінійні плоскі області представлених ізометричними сітками характеризується можливістю, по-перше, здійсненням конформного відображення, а по-друге, управлінням місцеположенням та масштабуванням самого растрового зображення через відповідні параметри ізометричної сітки.

#### **Список використаної літератури**

1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple [Текст] / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. – Гродно-Таллин, 2007. – 458 с.
2. Кремец Т.С. Перетворення плоских зображень шляхом нанесення їх на різні ізометричні сітки [Текст] / Т.С. Кремец, В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикладна геом. та інж. граф. – Т. 56. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – С. 158-163.
3. Несвідоміна О.В. Побудова плоских ізометричних сіток за наперед заданими плоскими кривими [Текст] / О.В. Несвідоміна // Вісник Херсонського національного технічного університету – Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 3(62). – Т. 2. – С. 196-199.

#### **References**

1. Aladev, V. Z., Boyko, V. K., Rovba E. A. Programmirovaniye i razrabotka prilozheniy v Maple. Grodno-Tallin. (2007)
2. Kremets, T. S., Nesvidomin, V. M., Pylypaka, T. S. Peretvorennia ploskykh zobrazhen shliakhom nanesenня yikh na rizni izometrychni sitky. Pratsi Tavriiskoho derzhavnogo ahrotekhnolohichnoho universytetu. 4. Prykladna heom. ta inzh. Hraf., 56, 158-163. (2013).
3. Nesvidomina, O. V. Pobudova ploskykh izometrychnykh sitok za napered zadanymy ploskymy kryvymy. Visnyk Khersonskoho Natsionalnoho Tekhnichnoho Universitetu. 3(62), 2, 196-199. (2017)

УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, І.Ю. ГРИЩЕНКО

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Т.А. КРЕСАН

Ніжинський агротехнічний інститут НУБіП України

### МОДЕЛЮВАННЯ СМУГ РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ, ДОТИЧНИХ ДО ПОВЕРХНІ КУЛІ

*Розроблено алгоритм побудови смуги торса, яка є дотичною до кулі одиничного радіуса. Вихідною умовою є аналітична функція одиничного вектора змінного напрямку. Траєкторія його кінця задає сферичну криву, яка є напрямною для торса і лінією дотику його до поверхні кулі. Виведено параметричні рівняння торса та його розгортки. Розглянуто конкретний приклад. За знайденими рівняннями побудовано смугу торса, дотичну до кулі одиничного радіуса. Чисельними методами побудовано його розгортку.*

*Ключові слова: куля одиничного радіуса, сферична крива, дотичний торс, смуга, розгортка.*

С.Ф. ПИЛИПАКА, И.Ю. ГРИЩЕНКО

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Т.А. КРЕСАН

Нежинский агротехнический институт НУБиП Украины

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛОС РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ, КАСАТЕЛЬНЫХ К ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

*Разработан алгоритм построения полосы торса, которая является касательной к шару единичного радиуса. Исходным условием является аналитическая функция единичного вектора переменного направления. Траектория его конца задает сферическую кривую, которая является направляющей для торса и линией касания его к поверхности шара. Выведены параметрические уравнения торса и его развертки. Рассмотрен конкретный пример. По найденным уравнениям построена полоса торса, касательная к шару единичного радиуса. Численными методами построена его развертка.*

*Ключевые слова: шар единичного радиуса, сферическая кривая, касательный торс, полоса, развертка.*

S.F. PYLYPAKA, I.Yu. GRISCHENKO

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

T.A. KRESAN

IS NULES of Ukraine "Nizhyn Agrotechnical Institute"

### MODELLING OF BANDS OF UNROLLED SURFACES, TANGENTIAL TO THE SPHERE SURFACE

*The problem of constructing a torso strip, which is tangent to a non-disjoint surface along a curve on it, arises when the approximating the non-dispersed surface by expansion bays.*

*An algorithm for constructing a torso strip, which is tangent to a sphere of unit radius, is developed. The initial condition is the analytic function of the unit vector of the variable direction. The trajectory of its end defines a spherical curve, which is a guide for the torso and a line of contact with the surface of the ball. The parametric equations of the torso and its sweep*

are derived. A concrete example is considered. By the equations found, a torso strip tangent to a sphere of unit radius is constructed. By numerical methods, its scanning is constructed.

The aim of the paper is to create an algorithm for constructing a torso strip tangential to the surface of a ball along a given curve on it. The problem is solved analytically using differential geometry of surfaces, numerical methods of integration.

When the independent variable of the vector of unit radius changes, its end will describe a spherical curve. Any vector (for example, points of a space curve) can be reduced to a single vector. The form of the spherical curve depends on the functions describing the unit vector. This curve can be taken as the line of contact of the torso to the ball. The straight line generatrix of the torso will pass through this line. The work shows the directing vector of a rectilinear generator. For this, the unit vector is differentiated by an independent variable and reduced to the unit vector. The vector product of the initial and obtained unit vectors will give the guiding vector of the torso generator. All rectilinear torso generators cross the spherical curve at a right angle, that is, the torso obtained is related to the orthogonal grid of coordinate lines that are curvature lines. Examples of construction of explored disjoints are given.

The practical significance of the problem lies in the fact that it allows us to approximate the ball by strips of torsos along a given line on it and obtain the sweeps of these bands.

*Keywords:* sphere of unit radius, spherical curve, tangential torso, strip, sweep.

### **Постановка проблеми**

Задача побудови смуги торса, дотичної до нерозгортної поверхні вздовж заданої на ній кривої, виникає при апроксимації нерозгортної поверхні відсіками розгортних [1]. В умовах малосерійного виробництва та при виконанні ремонтних і експериментальних робіт відсік нерозгортної поверхні можна замінити відповідним відсіком торса, однак при цьому потрібно брати таку лінію на нерозгортній поверхні, вздовж якої дотичний торс буде найбільш щільно прилягати до поверхні. Виготовити потрібний відсік апроксимуючого торса можна простим згинанням плоскої заготовки, контури якої можна знайти точно. Для виготовлення відсіків із нерозгортної поверхні потрібно мати спеціальну оснастку, виготовлення якої для малосерійного виробництва недоцільне.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

В праці [2] показано, що кривою на нерозгортній поверхні, вздовж якої доцільно робити апроксимацію смугою торса, є лінія кривини. При апроксимації нерозгортної поверхні смугою торса вздовж лінії кривини прямолінійні твірні торса будуть перпендикулярними до спільної лінії дотику. Лінія дотику буде також лінією кривини і для торса. Сфера є поверхнею, для якої будь-яка крива на ній є лінією кривини, тому будь-який дотичний до неї торс теж буде віднесений до ліній кривини, оскільки його опис буде здійснюватися на основі спільної кривої дотику.

Типовим прикладом апроксимації нерозгортної поверхні розгортною є полиця плуга. В праці [3] наведена методика розрахунку ступеня відхилення полиці плуга із лінійчатої нерозгортної поверхні від розгортної за сферичним відображенням. На основі сферичного відображення можна знайти відсік торса, який найбільш точно апроксимує полицю із нерозгортної поверхні. Подібними питаннями займалися і інші автори [4, 5]. Апроксимація інших нерозгортних поверхонь торсами розглянута в працях [6, 7].

### **Мета дослідження**

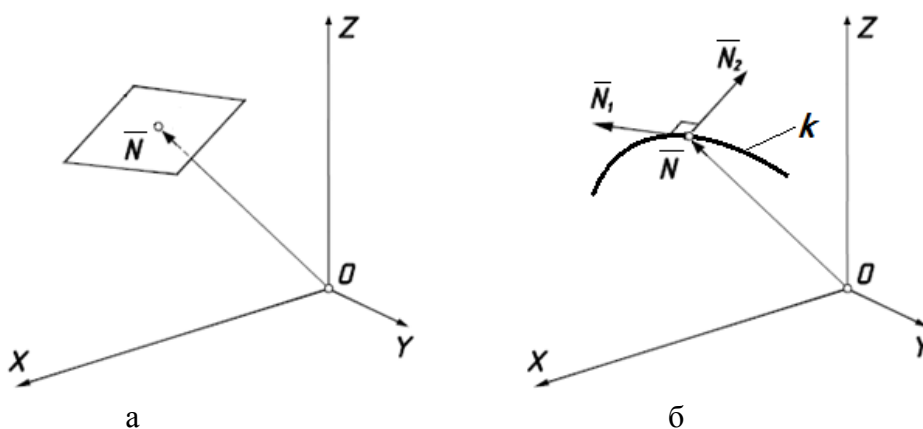
Створити алгоритм побудови смуги торса, дотичного до поверхні кулі вздовж заданої кривої на ній.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Всяку просторову криву, задану параметричними рівняннями, можна розглядати, як траєкторію кінця радіус-вектора змінної довжини і напрямку. Якщо такий вектор привести до одиничного, то його кінець опише криву на поверхні кулі одиничного

радіуса. Задамо в кінці одиничного вектора  $\bar{N}$  перпендикулярну до нього площину (рис. 1, а). Ця площина буде дотичною до поверхні кулі одиничного радіуса. При зростанні незалежної змінної кінець вектора рухатиметься по сферичній кривій і утворюватиме однопараметричну множину дотичних до кулі площин. Обвідною поверхнею цієї множини буде розгортна поверхня (торс), яка буде дотична до кулі вздовж сферичної кривої.

Щоб побудувати окрему площину, що належить вказаній множині, скористаємося схемою, наведеною на рис. 1, б. З кінця вектора  $\bar{N}$ , який є для площини нормальним, проведемо дві прямі, паралельні векторам  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$ , які складають прямий кут із вектором  $\bar{N}$ . Якщо вектори  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$  теж будуть між собою перпендикулярні, то всі три вектори  $\bar{N}$ ,  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$  утворять між собою прямі кути, тобто трійка векторів буде взаємно перпендикулярною. В такому випадку наочне зображення окремої площини можна буде показувати у вигляді квадратів або прямокутників (рис. 1, а).



**Рис. 1. Схема до побудови площини, що належить до однопараметричної множини:**  
**а) відсік площини в кінці вектора  $\bar{N}$ , перпендикулярний до нього;**  
**б) до утворення відсіку площини за допомогою трьох взаємно перпендикулярних векторів.**

Побудувати трійку взаємно перпендикулярних векторів можна за допомогою одиничного вектора, проекції якого залежать від змінної  $t$ , тобто  $l=l(t)$ ,  $m=m(t)$ ,  $n=n(t)$ . Як відомо, диференціювання одиничного вектора по змінній  $t$  дає вектор, перпендикулярний заданому. Наприклад, якщо вектор  $\bar{N}$  (рис. 1, б) одиничний і залежний від  $t$ , то його диференціюванням отримаємо перпендикулярний вектор  $N_1$ , дотичний до сферичної кривої  $k$ . Вектор  $N_2$  можна отримати в результаті векторного добутку векторів  $\bar{N}$  і  $\bar{N}_1$ . Всі три вектори будуть взаємно перпендикулярними.

Параметричні рівняння однопараметричної множини площин, які побудовані за схемою, наведеною на рис. 1, б, запишуться:

$$\begin{aligned} X &= l + ul_1 + vl_2; \\ Y &= m + um_1 + vm_2; \\ Z &= n + un_1 + vn_2, \end{aligned} \tag{1}$$

де  $u, v$  – незалежні змінні;

$l=l(t)$ ,  $m=m(t)$ ,  $n=n(t)$ ;  $l_1=l_1(t)$ ,  $m_1=m_1(t)$ ,  $n_1=n_1(t)$ ;  $l_2=l_2(t)$ ,  $m_2=m_2(t)$ ,  $n_2=n_2(t)$  – проекції векторів  $\bar{N}$ ,  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$  на осі координат.

При  $t=const$  за рівняннями (1) ми отримаємо конкретну площину. Якщо межі зміни параметрів  $u$  і  $v$  однакові, то буде окреслено відсік площини у вигляді квадрата. Збільшуючи параметр  $t$  на певну величину, отримаємо однопараметричну множину квадратів. Це зручно зробити у циклі.

Оскільки вектор  $N \{l, m, n\}$  одиничний, то всі площини, побудовані за рівняннями (1) будуть дотикатися до сфери одиничного радіуса, а обвідна поверхня множини площин буде дотичною до сфери. Лінією дотику буде сферична крива, побудована за рівняннями радіус-вектора  $N: l=l(t), m=m(t), n=n(t)$ .

Розглянемо приклад. Візьмемо відомі параметричні рівняння гвинтової лінії, розташованої на циліндрі одиничного радіуса:

$$x = \cos t; \quad y = \sin t; \quad z = ht, \quad (2)$$

де  $h$  – крок гвинтової лінії – стала величина.

Приведемо радіус-вектор точки гвинтової лінії до одиничного і отримаємо:

$$l = \frac{\cos t}{\sqrt{1+h^2t^2}}; \quad m = \frac{\sin t}{\sqrt{1+h^2t^2}}; \quad n = \frac{ht}{\sqrt{1+h^2t^2}}. \quad (3)$$

Проекції одиничного вектора  $\bar{N}$  (3) є по суті параметричними рівняннями сферичної кривої. Знайдемо їх похідні і отриманий вектор теж приведемо до одиничного. Отримані вирази є проекціями вектора  $\bar{N}_1$ :

$$l' = l_1 = -\frac{\sin t + h^2t(\cos t + t \sin t)}{\sqrt{(1+h^2t^2)}[1+h^2(1+t^2)]}; \quad m' = m_1 = \frac{\cos t - h^2t(\sin t - t \cos t)}{\sqrt{(1+h^2t^2)}[1+h^2(1+t^2)]};$$

$$n' = n_1 = \frac{h}{\sqrt{(1+h^2t^2)}[1+h^2(1+t^2)]}. \quad (4)$$

Проекції вектора  $\bar{N}_2$  знаходимо за правилами векторного множення векторів (3) і (4):

$$l_2 = \frac{h(\sin t - t \cos t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \quad m_2 = -\frac{h(\cos t + t \sin t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}. \quad (5)$$

На рис. 2, а за рівняннями (1) побудовано однопараметричну множину площин, розташування і орієнтація яких визначається векторами (3), (4) і (5). Одиничний вектор (3) задає сферичну криву, вздовж якої площини дотикаються до сфери одиничного радіуса.

Знайдемо рівняння торса, якщо однопараметрична множина площин задана рівняннями у формі (1). Характеристика (твірна торса) є лінією перетину двох суміжних нескінченно близьких площин множини. Знаходячись одночасно в двох площинах, твірна перпендикулярна до нормальних векторів цих площин. Отже, напрямний вектор твірної можна визначити, як векторний добуток двох суміжних нормалей:

$$\bar{I} = \bar{N} \times (\bar{N} + d\bar{N}) = \bar{N} \times d\bar{N}. \quad (6)$$



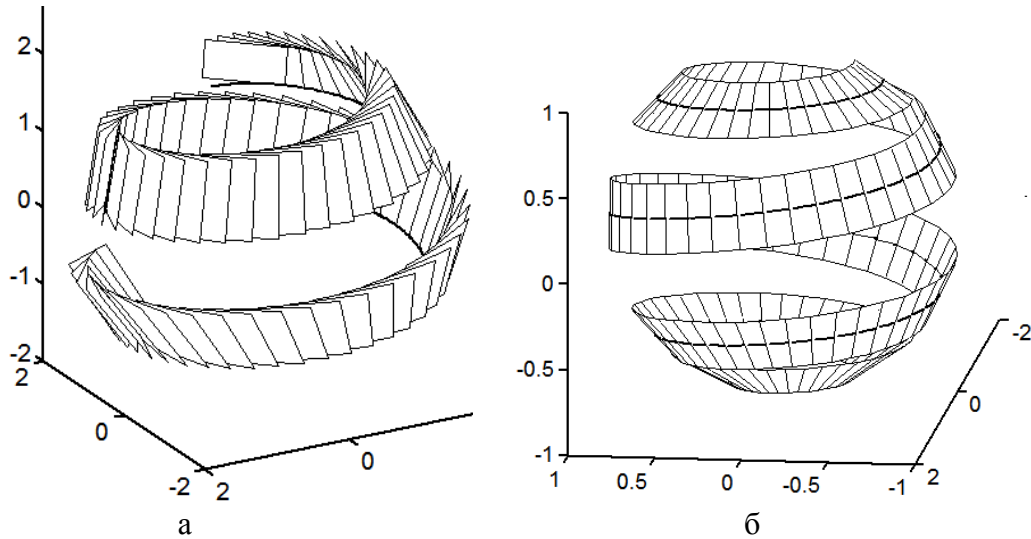


Рис. 2. До побудови смуги торса, дотичного до сферичної кривої, заданої одиничним вектором (3) при  $h=0,15$ :

а) однопараметрична множина площин, дотичних до кулі вздовж заданої кривої;

б) смуга торса із лінією дотику до кулі.

Напрямок векторного добутку не зміниться, якщо вектор  $d\bar{N}$  замінити паралельним йому вектором  $d\bar{N}/dt$ :

$$\bar{i} = \bar{N} \times \frac{d\bar{N}}{dt}. \quad (7)$$

Із знайдених векторів виходить, що в ролі вектора  $\bar{N}_1$  виступає вектор  $d\bar{N}/dt$ , а в ролі вектора  $\bar{N}_2$  – вектор  $\bar{i}$  (7). Твірні торса перетинатимуть напрямну криву під прямим кутом, тобто сітка координатних ліній торса буде ортогональною.

Запишемо параметричні рівняння торса, як множини його прямолінійних твірних, що виходять із кінця вектора  $\bar{N}$ , заданого проєкціями (3) паралельно до вектора  $\bar{N}_2$ , заданого проєкціями (5):

$$\begin{aligned} X &= l + ul_2 = \frac{\cos t}{\sqrt{1+h^2t^2}} + u \frac{h(\sin t - t \cos t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \\ Y &= m + um_2 = \frac{\sin t}{\sqrt{1+h^2t^2}} - u \frac{h(\cos t + t \sin t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \\ Z &= n + un_2 = \frac{ht}{\sqrt{1+h^2t^2}} + u \frac{1}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $u$  – довжина прямолінійної твірної торса.

На рис. 2, б за рівняннями (8) побудовано смугу торса, дотичного до кулі одиничного радіуса вздовж кривої (3) при зміні параметра  $u$  в межах  $u=-0,2 \dots 0,2$ .

Побудуємо розгортку смуги торса. На першому етапі потрібно знайти напрямну криву у розгортці, а потім через кожну її точку потрібно провести прямолінійну твірну під

таким же кутом до неї, як і на поверхні, тобто перпендикулярно. Для побудови напрямної кривої на розгортці скористаємося формулами, наведеними в праці [8]:

$$x_p = \int \left( \frac{ds}{dt} \right) \cos \alpha dt; \quad y_p = \int \left( \frac{ds}{dt} \right) \sin \alpha dt, \quad (9)$$

де  $ds/dt$  – похідна довжини дуги сферичної напрямної кривої;

$\alpha$  – закономірність зміни кута  $\alpha = \alpha(t)$  між прямолінійними твірними торса.

Обидві закономірності  $s = s(t)$  і  $\alpha = \alpha(t)$  є спільними для торса і його розгортки, оскільки не змінюються при згинанні торса.

Знайдемо похідну довжини дуги сферичної кривої (3):

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2} = \frac{\sqrt{1 + h^2(1 + t^2)}}{1 + h^2 t^2}. \quad (10)$$

Відомо, що кут між двома векторами чисельно рівний довжині дуги кола одиничного радіуса, яка розташована між цими векторами. Тому закономірність зростання кута  $\alpha = \alpha(t)$  між прямолінійними твірними будемо знаходити як закономірність зростання довжини дуги на сфері одиничного радіуса, яку опише одиничний вектор  $N_2$ , заданий проекціями (5). Щоб знайти довжину цієї дуги, спочатку продиференціюємо вектор (5) по змінній  $t$ :

$$\begin{aligned} l'_2 &= \frac{ht(1 + h^2 t^2)^{3/2} [\sin t + h^2 t(t \sin t + \cos t)]}{[(1 + h^2 t^2)(1 + h^2(1 + t^2))]^{3/2}}, \\ m'_2 &= -\frac{ht(1 + h^2 t^2)^{3/2} [\cos t + h^2 t(t \cos t - \sin t)]}{[(1 + h^2 t^2)(1 + h^2(1 + t^2))]^{3/2}}, \\ n'_2 &= \frac{ht(1 + h^2 t^2)^{3/2}}{[(1 + h^2 t^2)(1 + h^2(1 + t^2))]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Довжину дуги знаходимо інтегруванням кореня квадратного із суми квадратів виразів (11). Оскільки довжина дуги чисельно рівна куту  $\alpha$ , запишемо:

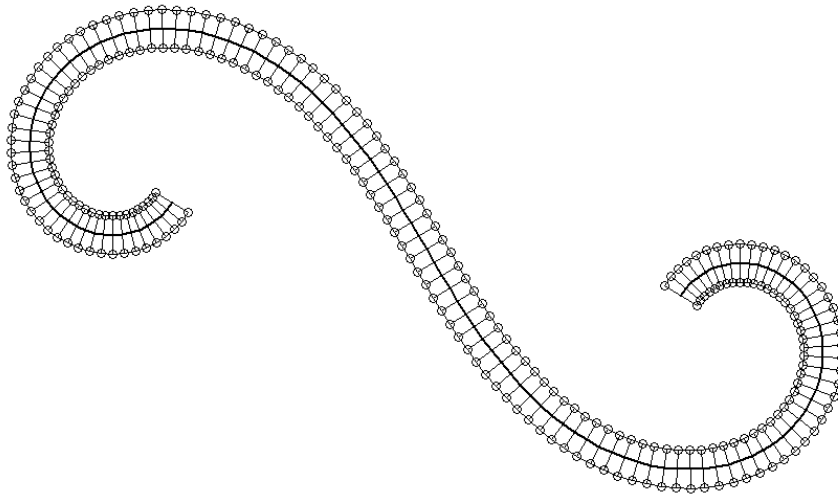
$$\alpha = \int \sqrt{l'_2 + m'_2 + n'_2} dt = \int \frac{ht\sqrt{1 + h^2 t^2}}{1 + h^2(1 + t^2)} dt = \frac{\sqrt{1 + h^2 t^2}}{h} - \text{Arcctg} \frac{h}{\sqrt{1 + h^2 t^2}}. \quad (12)$$

Підстановкою (10) і (12) в (9) отримуємо параметричні рівняння напрямної кривої торса в розгортці. Враховуючи те, що прямолінійні твірні торса перпендикулярні напрямній кривій, можна остаточно записати параметричні рівняння дотичного торса в розгортці:

$$X_p = \int \frac{\sqrt{1 + h^2(1 + t^2)}}{1 + h^2 t^2} \cos \alpha dt - u \sin \alpha; \quad Y_p = \int \frac{\sqrt{1 + h^2(1 + t^2)}}{1 + h^2 t^2} \sin \alpha dt + u \cos \alpha, \quad (13)$$

де  $u$  – довжина прямолінійної твірної торса на розгортці. Вираз для кута  $\alpha$  наведено в (12).

На рис. 3 за рівняннями (13) чисельними методами побудовано розгортку смуги, яка є дотичною до кулі одиничного радіуса. Ця смуга зображена на рис. 2,б.



**Рис. 3. Розгортка смуги торса, показаної на рис. 2,б.**

Можна показати, що перша квадратична форма торса (8) і його розгортки (13) збігаються між собою. Це свідчить про те, що розгортка торса знайдена правильно.

#### **Висновки**

Будь-який радіус-вектор (наприклад, точок просторової кривої) можна привести до одиничного. При зміні незалежного параметра в певних межах його кінець опише криву на поверхні кулі. Виразів проєкцій цього вектора достатньо для побудови смуги торса, дотичного до кулі вздовж цієї кривої. Щоб скласти параметричні рівняння торса за розробленим алгоритмом потрібно знайти другий вектор диференціюванням одиничного вектора по незалежній змінній і привести його до одиничного, потім знайти третій вектор, як результат векторного добутку першого вектора на другий. Для побудови розгортки додатково потрібно продиференціювати третій вектор по незалежній змінній. В загальному випадку розгортку потрібно будувати чисельними методами.

#### **Список використаної літератури**

1. Пилипака С.Ф. Апроксимація гвинтового коноїда смугами торсів вздовж просторових кривих на його поверхні / С.Ф Пилипака, Л.С. Бойко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2011. – Вип. 28. – С. 32-38.
2. Пилипака С.Ф. Апроксимація гвинтового коноїда смугами торсів вздовж ліній кривини на його поверхні / С.Ф Пилипака, Л.С. Бойко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. –Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т. 52.– С. 31-39.
3. Гячев Л.В. Теория лемешно-отвальной поверхности / Л.В. Гячев. – Зерноград, 1961. – 317 с.
4. Кардашевская Ю.Г. О возможности использования торсов в качестве лемешно-отвальных поверхностей / Ю.Г. Кардашевская // Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики. – 1969. – Вып. 44. – С. 50-55.

5. Обухова В.С. Об аппроксимации лемешно-отвальных поверхностей / В.С. Обухова, А.Л. Мартиросов // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1976. – № 21. – С. 145-150.
6. Ковалев С.Н. Аппроксимация каналовой поверхности непрерывной лентой торсов и ее развертка / С.Н. Ковалев, Л.С. Панасюк // Реферат. информ. о законченных научно-исслед. работах в вузах Украинской ССР. – К.: Вища школа, 1977. – Вып. 1. – С. 13.
7. Рыжов Н.Н. Аппроксимация сложных поверхностей развертывающимися поверхностями / Н.Н. Рыжов // Труды ВЗЭИ. Начертательная геометрия. – М., 1953. – Вып. 13. – 95 с.
8. Обухова В.С. Конструирование поверхностей одинакового ската как огибающей однопараметрического семейства круговых конусов / В.С. Обухова, С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1988. – Вып. 46. – С. 13-18.

### References

1. Pylypaka, S. F., Boiko, L. S. Aproksymatsiia hvyntovoho konoida smuhamy torsiv vzdovzh prostorovykh kryvykh na yoho poverkhni. Neometrychne ta kompiuterne modeliuвання. Kharkivskiy derzhavnyi universytet kharchuvannia ta torhivli. Kharkiv. **28**, 32-38. (2011)
2. Pylypaka, S. F., Boiko, L. S. Aproksymatsiia hvyntovoho konoida smuhamy torsiv vzdovzh linii kryvyny na yoho poverkhni. Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu. TDATU. Melitopol. **4**. Prykl. heometriia ta inzh. Hrafika, 52, 31-39. (2012)
3. Gyachev, L. V. Teoriya lemeshno-otvalnoy poverhnosti. Zernograd. (1961)
4. Kardashevskaya, Yu. G. O vozmozhnosti ispolzovaniya torsov v kachestve lemeshno-otvalnyih poverhnostey. Trudyi Moskovskogo instituta radiotekhniki, elektroniki i avtomatiki. **44**, 50-55. (1969)
5. Obuhova, V. S., Martirosov, A. L. Ob approksimatsii lemeshno-otvalnyih poverhnostey. Prikl. geometriya i inzh. grafika. Budivel'nik. Kyiv. **21**, 145-150. (1976)
6. Kovalev, S. N., Panasyuk, L. S. Approksimatsiya kanalovoy poverhnosti nepreryivnoy lentoy torsov i ee razvertka. Referat. inform. o zakonchennyih nauchno-issled. rabotah v vuzah Ukrain'skoy SSR. Vischa shkola. Kyiv. (1977)
7. Ryizhov, N. N. Approksimatsiya slozhnyih poverhnostey razvertyivayuschimisya poverhnostyami. Trudyi VZEI. Nachertatelnaya geometriya. M.oscow. 13. (1953)
8. Obuhova, V. S., Pilipaka, S. F. Konstruirovaniye poverhnostey odinakovogo skata kak ogibayuschey odnoparametricheskogo semeystva krugovyih konusov. Prikl. geometriya i inzh. grafika. Budivel'nik. Kyiv. **46**, 13-18. (1988)

УДК 519.6

Д.О. ПРОТЕКТОР

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

### **БЕЗСІТКОВИЙ ПІДХІД ПРИ КОМП'ЮТЕРНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ДВОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ АТОМАРНИХ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ**

*Дана стаття присвячена розробці та програмній реалізації системи комп'ютерного моделювання "МНТ2D", яка призначена для чисельного розв'язання двовимірних нестационарних задач теплопровідності за безсітковою схемою з використанням атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних. Розв'язок крайової задачі теплопровідності в системі комп'ютерного моделювання реалізується на основі комбінації методу подвійного заміщення та методу фундаментальних розв'язків з використанням атомарних радіальних базисних функцій. Метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку, а метод подвійного заміщення з використанням атомарних радіальних базисних функцій – для отримання частинного розв'язку. Розв'язок крайової задачі в "МНТ2D" візуалізується у вигляді поверхні, що представляє собою розподіл температурного поля в поточний момент часу.*

*Ключові слова: безсітковий підхід, атомарні радіальні базисні функції, метод подвійного заміщення, метод фундаментальних розв'язків, крайові задачі, нестационарні задачі теплопровідності, система комп'ютерного моделювання.*

Д.О. ПРОТЕКТОР

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

### **БЕССЕТОЧНЫЙ ПОДХОД ПРИ КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АТОМАРНЫХ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ**

*Данная статья посвящена разработке и программной реализации системы компьютерного моделирования "МНТ2D", которая предназначена для численного решения двумерных нестационарных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием атомарных радиальных базисных функций двух независимых переменных. Решение краевой задачи теплопроводности в системе компьютерного моделирования реализуется на основе комбинации метода двойного замещения и метода фундаментальных решений с использованием атомарных радиальных базисных функций. Метод фундаментальных решений используется для получения однородного решения, а метод двойного замещения с использованием атомарных радиальных базисных функций – для получения частного решения. Решение краевой задачи в "МНТ2D" визуализируется в виде поверхности, представляющей собой распределение температурного поля в текущий момент времени.*

*Ключевые слова: бессеточный подход, атомарные радиальные базисные функции, метод двойного замещения, метод фундаментальных решений, краевые задачи, нестационарные задачи теплопроводности, система компьютерного моделирования.*

D.O. PROTEKTOR  
V. N. Karazin Kharkiv National University

## COMPUTER SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEMS BY MESHLESS APPROACH USING ATOMIC RADIAL BASIS FUNCTIONS

*This article is devoted to the development and implementation of the computer simulation system "MHT2D" is designed to solve numerically two-dimensional nonstationary heat conduction problems by meshless approach using atomic radial basis functions of two independent variables. Solution of the boundary-value problem of heat conduction in the computer simulation system "MHT2D" is based on the combination of the dual reciprocity method and the method of fundamental solutions using atomic radial basis functions. To avoid integration over a domain, the method of partial solutions is used, which divides the solution of an inhomogeneous equation into a partial and a homogeneous ones. The method of fundamental solutions is used to obtain homogeneous solution and the dual reciprocity method with atomic radial basis functions is used to obtain particular solution. As a result, such approach implements the completely meshless method. The input data for the computer simulation system is the PLT file, which contains information about the geometric domain of the boundary-value problem. In the computer simulation system "MHT2D", the following radial basis functions are available: Gaussian, multiquadratic, inverse quadratic and inverse multiquadratic. The computer simulation system "MHT2D" it is possible to set values of initial and boundary conditions. Also, the computer simulation system "MHT2D" it is possible to set value of the internal heat source, thermal conductivity, density and specific heat at constant pressure. In the computer simulation system "MHT2D" it is possible to set the number of interpolation nodes, the number of nodes on the boundary, the time interval, the time step, and the number of nodes on the fictitious boundary. The computer simulation system "MHT2D" performs visualization of the solution of boundary-value problem in form of surface, which is the distribution of the temperature field at the current time. In the computer simulation system "MHT2D" realized an animated visualization of the temperature field distribution on the given time interval for nonstationary boundary-value problems.*

*Keywords: meshless approach, atomic radial basis functions, dual reciprocity method, method of fundamental solutions, boundary-value problems, nonstationary heat conduction problems, computer simulation system.*

### Постановка проблеми

В останні роки все частіше привертає увагу вчених використання безсіткових підходів при комп'ютерному моделюванні різних фізичних процесів. Безсіткові методи використовують набір рівномірно або довільно розподілених вузлів, в межах розглянутої області крайової задачі, до яких "прив'язуються" базисні функції. Безсіткові методи продемонстрували перспективність при розв'язанні задач, які є традиційно складними у випадку застосування сіткових методів. Практичні дослідження показують, що сіткові методи важко застосовувати в ситуаціях, коли об'єкти, які розглядаються в задачах, являють собою набір дискретних фізичних об'єктів (часток) або коли задачі, які розв'язуються, зводяться до дослідження складних процесів. Безсіткові методи є простими в реалізації та обчислювально ефективними. Алгоритми, що реалізують безсіткові схеми, не мають потреби в прив'язці до інтерполяційної сітки на відміну від сіткових методів, і з цієї причини легко інтегруються в системи автоматизованого проектування.

У цій статті викладена концепція безсіткового підходу для чисельного розв'язання двовимірних нестационарних задач теплопровідності з використанням атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних, яка лягла в основу розробленої системи комп'ютерного моделювання "МНТ2D".

#### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Огляди по безсіткових підходах, які засновані на використанні радіальних базисних функцій (РБФ) і атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ) багатьох змінних представлені в статтях [1-8].

#### Мета дослідження

Метою роботи була розробка і програмна реалізація системи комп'ютерного моделювання "МНТ2D" для чисельного розв'язку двовимірних нестационарних задач теплопровідності за безсітковою схемою на основі комбінації методу подвійного заміщення і методу фундаментальних розв'язків з використанням атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

##### Ітераційна схема

Керуюче диференціальне рівняння нестационарної теплопровідності в замкнутій області  $\Omega \subset R^2$  обмеженій  $\Gamma$  має наступний вигляд:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} + g = k \nabla^2 u, \quad (1)$$

де  $\rho$  – щільність;  $c_p$  – питома теплоємність при постійному тиску;  $u$  – температура;  $g$  – щільність джерел і стоків тепла;  $k$  – коефіцієнт теплопровідності. Нехай  $\Gamma = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i$  та  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ . Граничні умови для цієї задачі можуть бути описані за допомогою будь-якої комбінації наступного типу:

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) &= \bar{u}, & \bar{x} &\in \Gamma_1 \\ q(\bar{x}) &= -\bar{q}, & \bar{x} &\in \Gamma_2 \\ q(\bar{x}) &= -h(u - u_\infty), & \bar{x} &\in \Gamma_3 \end{aligned}$$

де  $q$  – потік тепла, який визначається як  $q = k \partial u / \partial n$ ,  $n$  – зовнішній вектор нормалі,  $h$  – коефіцієнт тепловіддачі, а  $u_\infty$  – температура навколишнього середовища.

Початкові умови задані у вигляді:

$$u(\bar{x}, 0) = f(\bar{x}).$$

Диференціальне рівняння теплопровідності (1) може бути зведене до послідовності неоднорідних модифікованих рівнянь Гельмгольца за допомогою процедури дискретизації за часом [9]:

$$\nabla^2 v^n - \lambda^2 v^n = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t} u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k} g^{n-1} + \frac{g^n}{k}, \quad (2)$$

де  $v^n = u^n - \frac{1-\theta}{\theta} u^{n-1}$ ,  $0 < \theta \leq 1$  – ваговий коефіцієнт;  $u^n = u(\bar{x}, n\Delta t)$ ;  $g^n = g(\bar{x}, n\Delta t)$ ;  $\Delta t$  – крок за часом;  $\lambda^2 = \frac{1}{\theta\alpha\Delta t}$ ,  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$  – коефіцієнт теплопровідності.

На кожному часовому кроці буде розв'язуватись крайова задача з керуючим диференціальним рівнянням Гельмгольца, для розв'язання якої застосовується комбінація методу подвійного заміщення [9] з використанням атомарних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків [10].

Розв'язок (2) представляється у вигляді суми однорідного розв'язку  $v_h^n$  та частинного розв'язку  $v_p^n$ :  $v^n = v_h^n + v_p^n$ . Керуюче рівняння для частинного розв'язку має вигляд:

$$\nabla^2 v_p^n - \lambda^2 v_p^n = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t} u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k} g^{n-1} + \frac{g^n}{k}. \quad (3)$$

Частинний розв'язок  $v_p^n$  не повинен задовольняти ніякому набору граничних умов і буде знайдений з використанням методу подвійного заміщення. Керуюча система для однорідного розв'язку  $v_h^n$  запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} \nabla^2 v_h^n(\bar{x}) - \lambda^2 v_h^n(\bar{x}) = 0, & \bar{x} \in \Omega \\ v_h^n(\bar{x}) = \bar{u}(\bar{x}) - v_p^n(\bar{x}), & \bar{x} \in \Gamma_1 \\ q_h^n(\bar{x}) = \bar{q}(\bar{x}) - q_p^n(\bar{x}), & \bar{x} \in \Gamma_2 \\ (kq_h^n + hv_h^n)(\bar{x}) = -kq_p^n(\bar{x}) - hv_p^n(\bar{x}) + hu_\infty(\bar{x}), & \bar{x} \in \Gamma_3 \end{cases}$$

В якості базисних функцій для інтерполяції частинного розв'язку в рівнянні (3) використовуємо атомарні радіальні базисні функції двох незалежних змінних  $\text{Нлор}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Атомарна функція  $\text{Нлор}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in C^\infty$  є фінітним розв'язком функціонально-диференціального рівняння виду:

$$\Delta u(x, y) - \lambda^2 u(x, y) = \delta \oint_{\partial\Omega} u[3(x - \xi), 3(y - \eta)] ds + \mu u(3x, 3y),$$

де  $\partial\Omega$  – коло радіуса 1:  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ , має єдиний фінітний нескінченно диференційований розв'язок, який нормується умовою:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) dx dy = 1$$

тільки при виборі коефіцієнтів  $\mu = \delta 2\pi J_0(i\lambda)$ , та  $\delta = -\frac{9\lambda^2}{2\pi[J_0(i\lambda) - J_0(\lambda)]}$ , де  $J_0(\bar{x})$  – функція Бесселя першого роду нульового порядку, при цьому:

$$1) \text{ носій розв'язку має форму кола, який вписується в квадрат } \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

(рис. 1).



2) перетворення Фур'є розв'язку має вигляд:

$$U(t, s) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{3^{2h} \lambda^2 [J_0(i\lambda) - J_0(3^{-h} \sqrt{t^2 + s^2})]}{[J_0(i\lambda) - J_0(0)](t^2 + s^2 + 3^{2h} \lambda^2)} \quad (4)$$

та є швидко спадаючою при  $t^2 + s^2 \rightarrow \infty$ ,  $(t, s) \in R^2$  функцією експоненціального типу;

3) розв'язок зображується в квадраті  $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$  рядом Фур'є:

4)

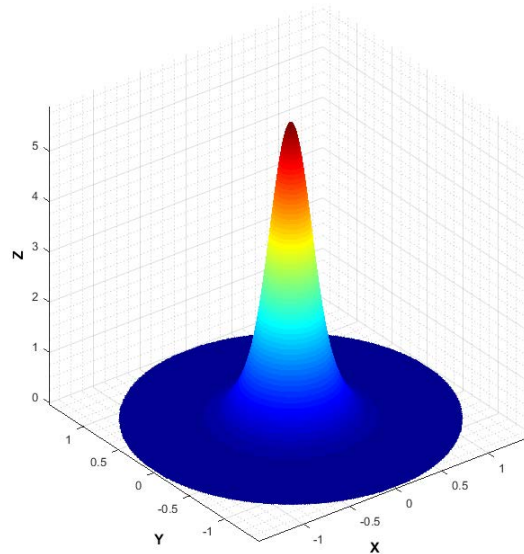
$$u(x, y) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{qr} \cos\left(\frac{2q\pi x}{3}\right) \cos\left(\frac{2r\pi y}{3}\right),$$

коефіцієнти Фур'є якого представляються в наступному вигляді:

$$a_{00} = \frac{4}{9}; \quad a_{q0} = \frac{2}{3} U\left(\frac{2q\pi}{3}, 0\right); \quad a_{0r} = \frac{2}{3} U\left(0, \frac{2r\pi}{3}\right);$$

$$a_{qr} = U\left(\frac{2q\pi}{3}, \frac{2r\pi}{3}\right), \quad q, r = 1, 2, \dots$$

де функція  $U(q, r)$  має вигляд (4).



**Рис. 1. Візуалізація атомарної радіальної базисної функції двох незалежних змінних.**

Нехай  $F^n(\vec{x}) = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t} u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k} g^{n-1} + \frac{g^n}{k}$ . Наближений частинний розв'язок може бути сконструйований за допомогою атомарної радіальної базисної функції  $\Psi_{\text{ор}}(|\vec{x}|)$ . Відповідна ітерація  $F^n(\vec{x})$  представляється у вигляді лінійної комбінації базисних функцій:

$$F^n(\vec{x}) \cong \hat{F}^n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^n \Psi_i(|\vec{x}|), \quad (5)$$

де  $N$  – кількість вузлів колокації,  $\alpha_i^n$  – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню, а функції  $\Psi_i(|\vec{x}|)$  – результат дії оператора Гельмгольца на відповідні функції  $\text{Hlor}_i(|\vec{x}|)$ :

$$\Psi_i(|\vec{x}|) = \Delta \text{Hlor}_i(|\vec{x}|) - \lambda^2 \text{Hlor}_i(|\vec{x}|).$$

Таким чином, (5) являє собою систему з  $N$  лінійних рівнянь відносно невідомих  $\alpha_i^n$ . Тоді частинний розв'язок  $v_p^n$  являє собою лінійну комбінацію базисних функцій:

$$v_p^n(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^n \text{Hlor}_j(|\vec{x}|).$$

Для отримання однорідного розв'язку використовується метод фундаментальних розв'язків. На  $n$ -ому часовому кроці однорідний розв'язок  $v_h^n$  апроксимується у вигляді:

$$v_h^n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^M \beta_i \varphi_F(\vec{x}, \vec{x}_i), \quad (6)$$

де  $\varphi_F(\vec{x}, \vec{x}_i) = \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda r)$  – фундаментальний розв'язок модифікованого оператора Гельмгольца,  $K_0$  – функція Бесселя другого роду нульового порядку,  $r = |\vec{x} - \vec{x}_i|$  – евклідова відстань,  $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^M$  – вузли на фіктивній границі що містить  $\Omega$ .

Оскільки фундаментальний розв'язок диференціального рівняння є сингулярним на початку координат, то вузли, до яких прив'язуються фундаментальні розв'язки, розташовуються на фіктивній границі за межами області розв'язку крайової задачі.

Важливо визначити оптимальне розміщення фіктивної границі. Вона може являти собою коло, центр якої збігається з геометричним центром області розв'язку. Зі збільшенням радіуса кола підвищується точність одержуваного розв'язку, але погіршується обумовленість системи лінійних рівнянь, і навпаки. На практиці, як компроміс, значення радіуса фіктивної границі зазвичай вибирається рівним п'яти розмірам області розв'язку.

У вузлах, рівномірно розташованих на фіктивній границі, розставляються базисні функції, що представляють собою фундаментальні розв'язки однорідного модифікованого рівняння Гельмгольца.

Лінійна комбінація фундаментальних розв'язків  $\varphi_F(\vec{x}, \vec{x}_i)$  за визначенням задовольняє модифікованому рівнянню Гельмгольца у всіх точках області розв'язку. Коефіцієнти  $\beta_i$  обираються таким чином, щоб задовольнити крайовим умовам в обраних вузлах на границі області розв'язку. Здійснивши колокацію (6) в обраних вузлах на границі, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \beta_i \varphi_F(\bar{x}_j, \bar{x}_i) &= \bar{u}(\bar{x}_j) - v_p^n(\bar{x}_j), & 1 \leq j \leq M_1 \\ \sum_{i=1}^M \beta_i \frac{\partial \varphi_F(\bar{x}_j, \bar{x}_i)}{\partial n} &= \bar{q}(\bar{x}_j) - q_p^n(\bar{x}_j), & M_1 + 1 \leq j \leq M_2 \\ \sum_{i=1}^M \beta_i \left( k \frac{\partial}{\partial n} + h \right) \varphi_F(\bar{x}_j, \bar{x}_i) &= -kq_p^n(\bar{x}_j) - hv_p^n(\bar{x}_j) + hu_\infty(\bar{x}_j), & M_2 + 1 \leq j \leq M \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\{x_j\}_1^{M_1} \in \Gamma_1$ ,  $\{x_j\}_{M_1+1}^{M_2} \in \Gamma_2$ ,  $\{x_j\}_{M_2+1}^M \in \Gamma_3$ .

Незважаючи на погану обумовленість системи (7), розв'язок стійкий до досягнення машинної точності [9]. Вважається, що це явище можна пояснити, досліджуючи сингулярне розкладання (SVD) матриці коефіцієнтів системи (7).

Описана вище ітераційна схема лягла в основу створеної системи комп'ютерного моделювання "МНТ2D".

### Опис системи комп'ютерного моделювання "МНТ2D"

Інформація про форму області розв'язку крайової задачі задається в будь-якій системі автоматизованого проектування для роботи з кресленнями (напр. AutoCAD, TurboCAD та інші). Створене креслення зберігається в форматі PLT, після чого може бути завантажено в "МНТ2D". На рис. 2 представлений приклад області розв'язку, завантаженої в СКМ "МНТ2D".

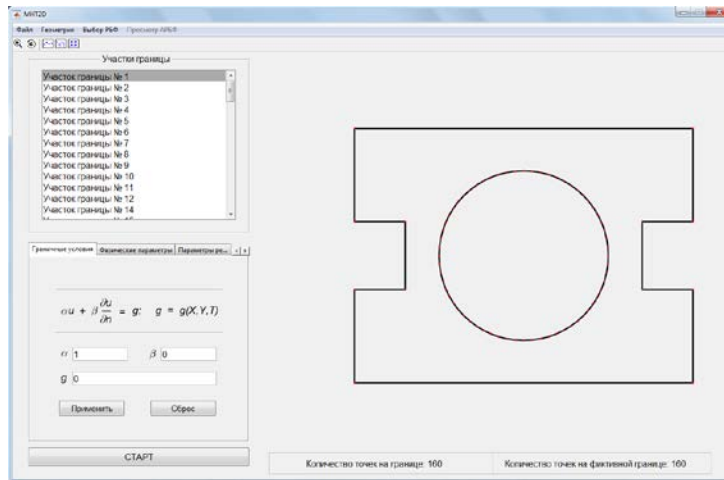


Рис. 2. Приклад візуалізації геометричної області в СКМ "МНТ2D".

Для розв'язку крайових задач, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, необхідно задати значення початкових і крайових умов. На рис. 3 представлена частина робочої області системи, в якій задаються крайові умови для нестационарної задачі теплопровідності, а на рис. 4 – частина робочої області, в якій задаються початкові умови.

У СКМ "МНТ2D" реалізована можливість зазначення внутрішнього джерела тепла як функції від координат і часу, а також значення коефіцієнта теплопровідності  $k$ , щільності  $\rho$  та питомої теплоємності  $c_p$  (Рис. 5). У вкладці "Параметри рішення" задається щільність інтерполяційних вузлів всередині області розв'язку та за її межами, щільність вузлів на границі області, часовий інтервал, на якому буде розв'язуватися

нестационарна крайова задача, крок за часом, а також кількість вузлів на фіктивній границі (рис. 6).

Рис. 3. Зазначення крайових умов в СКМ "МНТ2D".

Рис. 4. Зазначення початкових умов в СКМ "МНТ2D".

Рис. 5. Зазначення фізичних параметрів крайової задачі в СКМ "МНТ2D".

Рис. 6. Зазначення параметрів розв'язку крайової задачі в СКМ "МНТ2D".

Розв'язок крайової задачі візуалізується у вигляді поверхні, що представляє собою розподіл температурного поля в поточний момент часу. Для нестационарних крайових задач реалізована функція анімованої візуалізації розподілу температурного поля на заданому часовому інтервалі.

В якості ілюстрації роботи системи приведена тестова задача на двовимірній області в формі квадрата. Постановка задачі: нестационарна задача теплопроводності з  $k = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $c_p = 1$ ,  $\Delta t = 0.01$ , кількість інтерполяційних вузлів – 400, кількість вузлів на фіктивній границі – 120.

Внутрішнє джерело тепла:

$$g(x, y, t) = -\frac{k}{5} \left( 4 \exp \left( -5(\cos(\pi) - 4y + 2)^2 - 5(\sin(\pi) - 4x + 2)^2 \right) \left( \lambda^2 + 25600x + 25600y - 6400\cos(\pi) - 6400\sin(\pi) + 12800y\cos(\pi) + 12800x\sin(\pi) - 25600x^2 - 25600y^2 - 14080 \right) \right)$$

Крайові умови:  $u|_{\Gamma} = 0$ .

Точний розв'язок в момент часу  $t = 0.01$  має вигляд:

$$u(x, y, t) = 0.8 \exp(-80((x - r(t))^2 + (y - s(t))^2)),$$

де  $r(t) = \frac{1}{4}(2 + \sin(\pi t))$ ,  $s(t) = \frac{1}{4}(2 + \cos(\pi t))$ .

Приведена похибка розв'язку тестової задачі в момент часу  $t = 0.01$  не перевищує  $7 \cdot 10^{-3}$  (рис. 7). На рис. 8 представлена візуалізація розв'язку тестової задачі в різні моменти часу.

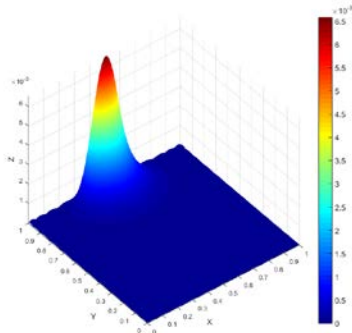


Рис. 7. Приведена похибка розв'язку нестационарної крайової задачі.

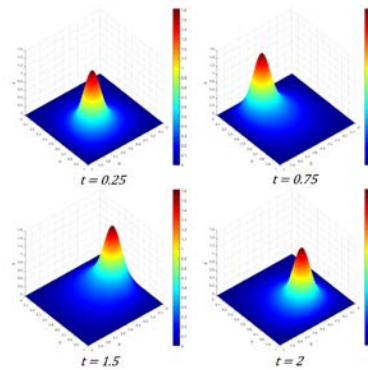


Рис. 8. Розв'язок нестационарної крайової задачі.

### Висновки

У цій статті була викладена концепція безсіткового підходу для чисельного розв'язку двовимірних нестационарних задач теплопровідності з використанням атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних, яка лягла в основу розробленої системи комп'ютерного моделювання "МНТ2D". В СКМ розв'язок крайової задачі реалізується на основі комбінації методу подвійного заміщення та методу фундаментальних розв'язків з використанням атомарних радіальних базисних функцій. Метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку, а метод подвійного заміщення з використанням атомарних радіальних базисних функцій – для отримання частинного розв'язку. Розв'язок крайової задачі в системі візуалізується у вигляді поверхні, що представляє собою розподіл температурного поля в поточний момент часу. Завдяки використанню безсіткового підходу, "МНТ2D" не потребує прив'язки до інтерполяційної сітки, а тому значно спрощує та прискорює розв'язання нестационарних задач теплопровідності на складних багатозв'язних областях. Відсутність в СКМ прив'язки до інтерполяційної сітки, дозволяє уникнути спотворення границь на складних геометричних об'єктах. Використання в "МНТ2D" атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних в якості інтерполяційних функцій, значно знижує обчислювальні витрати при розв'язанні задач математичної фізики.

### Список використаної літератури

1. Belytschko T. Element-free Galerkin methods / T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu // Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. — 1994. — Vol. 37. — P. 229–256.
2. Belytschko T. Meshless methods: an overview and recently developments / T. Belytschko, Y. Rongauz, D. Organ // Computer Methods in Appl. Mech. and Eng. — 1996. — Vol. 139. — P. 3–47.

3. Belytschko T. On the completeness of the meshfree particle methods / T. Belytschko, Y. Rongauz, J. Doblau // Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. — 1998. — Vol. 43(5). — P. 785–819.
4. Fasshauer G.E. Meshfree Approximation Methods with MATLAB / G.E. Fasshauer. — Illinois Institute of Technology, 2007. — 550 p.
5. Колодяжний В. М. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов / В.М Колодяжний, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. — 2010. — Т. 13. — № 3. — С. 67–74.
6. Колодяжний В.М. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ / В.М. Колодяжний, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. — 2010. — Т. 13. — № 4. — С. 49–57.
7. Колодяжний В.М. Бессеточные методы решения нестационарных задач теплопроводности с использованием атомарных радиальных базисных функций / В.М. Колодяжний, Д.А. Лисин // Кибернетика и систем. анализ. — 2013. — Т. 49. — №3. — С. 124–131.
8. Лисин Д.А. Формирование процедуры решения краевой задачи теплопроводности по бессеточной схеме на основе атомарных радиальных базисных функций в комбинации методов фундаментальных решений и двойного замещения / Д.А. Лисин, О.Ю. Лисина // Краевые задачи и мат. моделирование. — Новокузнецк, 2010. — Т. 2. — С. 17–22.
9. Ingber M.S. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations / M.S. Ingber, C.S. Chen, J.A. Tanski // Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. — 2004. — Vol. 60. — № 13. — P. 2183–2201.
10. Bogomolny A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems / A. Bogomolny // SIAM J. on Numerical Analysis. — 1985. — Vol. 22. — P. 644–669.

#### References

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. Element-free Galerkin methods. Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. **37**, 229–256. (1994)
2. Belytschko, T., Rongauz, Y., Organ, D. Meshless methods: an overview and recently developments. Computer Methods in Appl. Mech. and Eng. **139**, 3–47. (1996)
3. Belytschko, T., Rongauz, Y., Doblau, J. On the completeness of the meshfree particle methods. Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. **43**(5), 785–819. (1998)
4. Fasshauer, G. E. Meshfree Approximation Methods with MATLAB. Illinois Institute of Technology. Illinois. (2007)
5. Kolodyazhnyy, V. M., Lisina, O. Yu. Bessetochnyye metody v zadachakh modelirovaniya fizicheskikh protsessov. Problemy mashinostroyeniya. **13**, 3, 67–74. (2010)
6. Kolodyazhnyy, V. M., Lisina, O. Yu. Chislennyye skhemy resheniya krayevykh zadach na osnove bessetochnykh metodov s ispolzovaniyem RBF i ARBF. Problemy mashinostroyeniya. **13**, 4, 49–57. (2010)
7. Kolodyazhnyy, V. M., Lisin, D. A. Bessetochnyye metody resheniya nestatsionarnykh zadach teploprovodnosti s ispolzovaniyem atomarnykh radialnykh bazisnykh funktsiy. Kibernetika i sistemnyy analiz. **49**, 3, 124–131. (2013)
8. Lisin, D. A., Lisina, O. Yu. Formirovaniye protsedury resheniya krayevoy zadachi teploprovodnosti po bessetochnoy skheme na osnove atomarnykh radialnykh bazisnykh funktsiy v kombinatsii metodov fundamentalnykh resheniy i dvoynogo zameshcheniya. Krayevyye zadachi i mat. modelirovaniye. Novokuznetsk. **2**, 17–22. (2010)
9. Ingber, M. S., Chen, C. S., Tanski, J. A. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations. Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. **60**, 13, 2183–2201. (2004)
10. Bogomolny, A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems. SIAM J. on Numerical Analysis. **22**, 644–669. (1985)

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І  
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ**

УДК 531.2

О.І. КОВЧ, О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Державне підприємство "Конструкторське бюро "Південне"  
Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України  
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна**АНАЛІЗ СХЕМ ПРИКЛАДАННЯ НАВАНТАЖЕНЬ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ  
МІЦНОСТІ ЗВАРНИХ ШВІВ З УРАХУВАННЯМ ВЗАЄМНОГО ВПЛИВУ РІЗНИХ  
ДЕФЕКТІВ**

Метою даного дослідження є вивчення концентрації напружень в зварних швах конструкцій, підданих одночасної дії інтенсивних силових і температурних факторів. Розглядаються пластинчасті конструкції. Вважається, що в зварних швах, які з'єднують пластини, можуть знаходитись тріщини, пори та інші дефекти. Зміна тиску і температури по поверхнях пластин може істотно вплинути на розкриття тріщин у звареному шві. В роботі досліджені три розрахункових схеми, що характеризують силовий і температурний впливи на пластинчасту конструкцію. Аналіз величин коефіцієнтів інтенсивності напружень за трьома запропонованими розрахунковим схемам довів, що результати відрізняються в межах від 0,5% до 2%, проте час розрахунку за першою схемою істотно менший, і визначені коефіцієнти інтенсивності напружень відрізняються не більше ніж на 1% від даних, отриманих аналітичним методом. Саме така схема може бути використана для швидкої оцінки стану конструкції.

Ключові слова: силове навантаження, температурне навантаження, включення, пора, зварний шов, метод скінченних елементів

О.И. КОВЧ, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Государственное предприятие "Конструкторское бюро "Южное"  
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины  
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина**АНАЛІЗ СХЕМ ПРИЛОЖЕНИЯ НАГРУЗОК ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ  
ПРОЧНОСТИ СВАРНЫХ ШВОВ С УЧЕТОМ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ  
РАЗЛИЧНЫХ ДЕФЕКТОВ**

Целью данного исследования является изучение концентрации напряжений в сварных швах конструкций, подверженных одновременно воздействию интенсивных силовых и температурных факторов. Рассматриваются пластинчатые конструкции. Предполагается, что в сварных швах, соединяющих пластины, могут находиться трещины, поры и другие дефекты. Изменение давления и температуры по поверхностям пластин может существенно повлиять на раскрытие трещин в сварном шве. В работе исследованы три расчетных схемы, характеризующие силовое и температурное воздействие на пластинчатую конструкцию. Анализ величин коэффициентов интенсивности напряжений по трем предложенным расчетным схемам показал, что результаты отличаются в пределах от 0,5% до 2%, однако время расчета по первой схеме существенно меньше, и определенные коэффициенты интенсивности напряжений отличаются не более чем на 1% от данных, полученных аналитическим методом. Именно такая схема может быть использована для быстрой оценки состояния конструкции.

*Ключевые слова: силовое нагружение, температурное нагружение, включение, пора, сварной шов, метод конечных элементов*

O.I. KOVCH, E.A. STRELNIKOVA

YUZHNOYE design office

A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

Kharkiv National University named after V.N. Karazin

## ANALYSIS OF SCHEMES OF LOAD APPLICATIONS FOR MODELING THE STRENGTH OF WELD SEAMS WITH THE ACCOUNT OF MUTUAL INFLUENCE OF VARIOUS DEFECTS

*The main objective of this research is to study the stress concentration in welded joints of structures subjected to simultaneous action of intensive force and temperature factors. Plate structures are considered. It is assumed that in the welds connecting the plates, there may be cracks, pores and other defects. Three calculation schemes characterizing the force and temperature effects on the plate structure have been studied. Analysis of the stress intensity factors for the three proposed calculation schemes showed that the results differ from 0.5% to 2%. An approach based on the finite element method for determining a stress-strained state in the weld with pores and an inclusion is developed. The method makes it possible to estimate mutual influence of the inclusion on the origin and crack opening in the pore. This method will make it also possible to made recommendation on increasing the period of operation of the welded seams. The special feature of the studies is in creating different loads by time, by the depth of the plates, by the length of the plates and welded seams. Different temperatures are considered. The different types of finite elements are used for modeling the zone of pores. In this paper, we investigate the mutual effect of pores, inclusions, and cracks using various schemes of applying loads to the plates making up the box. For each model, calculations were made for three calculation schemes. Calculation scheme 1 provides maximum values of pressure and temperature over the entire surface of the box. Calculation scheme 2 supposes that the pressure varies both in height and width of the plate during time, the maximal temperature is applied over the entire surface. Calculation scheme 3 supposes that the temperature varies both in height and width of the plate at each moment of time, and the pressure is maximal across the entire plate. The maximum stresses are calculated in the welded seam with pores and inclusion. The comparison of results obtained by the three proposed calculation schemes is accomplished. The maximal stresses in inclusions are slightly influenced and are independent of the finite elements choice. But the maximal stresses near pores are different for different type of elements. Although the difference is not drastic it is testified about necessarily of additional research concern with the choice of the appropriate finite element for welded seam cracking analysis. The classical solid element requires essentially more computational efforts. The mutual influence of defects such as pores, inclusions, cracks on the crack propagation in the welded seam is significant with decreasing the minimum distance between the defects. As shown by calculation, the design scheme 1 gives the largest values of stresses and displacements.*

*Keywords: force loading, thermal loading, inclusion, pore, welded seam, finite element method.*

### Постановка проблемы

Для принятия решения о продолжении дальнейшей эксплуатации силовой конструкции необходимо использовать минимальный временной отрезок. Важную роль в расчетах на прочность занимает метод приложения и анализ действующих нагрузок. Быстро и эффективно дать заключение о состоянии конструкции, работа которой происходит при интенсивных несимметричных силовых и температурных воздействиях является сложной задачей.



### Анализ последних исследований и публикаций

Наиболее опасной в такой конструкции является зона сварных швов, в которой имеются поры, трещины и включения, где наблюдаются максимальные остаточные деформации. Исследование прочности и надежности пластин с трещинами представлены в ряде источников [1–7]. Для определения несимметричных силовых и температурных факторов, используем компьютерный расчет с учетом связанности температурной и силовой компонент [8–11]. Такой расчет позволит учесть влияние изменения давления и температуры на концентрацию напряжений в сварном шве. Отметим, что решение задач в связанной постановке может занимать сотни часов работы компьютера. Оценка величины коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещин в зависимости от вида приложенной нагрузки и соответствующего времени расчета является главной целью проводимого исследования.

### Цель исследования

В статье проведено исследование различных схем приложения нестационарных температурных и силовых воздействий в расчете сварных швов конструкции в связанной термоупругой постановке с учетом взаимного влияния различных дефектов.

Целью данного исследования является определение затрачиваемого времени на решение задачи и точность определения напряженно-деформированного состояния конструкции при различных методах приложения нагрузок.

### Изложение основного материала исследования

Рассмотрим три схемы приложения нагрузок к коробу.

Схема 1. Максимальные температуры и давления прилагаются к пластинам короба аналогично работе [11].

Для тестирования расчетной схемы 2 предлагаем рассмотреть задачу об асимметричном ударе по пластинам короба, затухающие во времени.

Применим следующее асимптотическое решение для компонент напряжения в окрестности вершины трещины [12]:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_1(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + \frac{K_{11}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + \sigma_{ij}^{(R)}(r, \theta, t) + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right), \quad r \rightarrow 0. \quad (1)$$

Здесь  $r, \theta$  – полярные координаты в вершине трещины.

Асимптотическое решение (1) состоит из сингулярной и регулярной частей. Поэтому для оценки направления распространения трещины воспользуемся структурно-временным критерием [12].

Основная особенность расчета динамического разрушения по такому критерию состоит в том, что он позволяет рассчитывать время до разрушения рассматриваемого элемента конструкции. Это дает возможность по-новому и достаточно просто определять направление разрушения в области с трещиной. При этом определяется время до разрушения  $t$  на каждом луче, исходящем из вершины трещины под углом  $\theta$  ( $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ). Предполагается, что трещина разрастается в направлении, на котором время до разрушения  $t$  минимально.

Для исследования расчетной схемы 3 решим тепловую задачу с приложением температурных нагрузок и определим прочность шва в виде сквозной задачи.

Для решения связанной термоупругой задачи требуется также определение следующих параметров: удельной теплопроводности, удельной теплоемкости и температуры короба. С достаточной точностью эти величины могут быть определены по зависимостям (5–7)  $\lambda_0, c_{p0}, T_0$  из [13]:

$$\begin{aligned}\mu(T) &= 3,4 \cdot 10^{-8} \cdot T^{0.69}, \\ \lambda(T) &= \lambda_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0.75}, \\ c_p(T) &= c_{p0} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0.165}.\end{aligned}$$

Тепловой поток, подводимый к пластинам короба, вследствие конвективного теплообмена при натекании струи на пластины короба, определяется по формуле, приведенной в [14]:

$$q_k = \alpha \cdot (T - T_w).$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент теплообмена, (Вт/(м<sup>2</sup>·К));  $T$  – температура газа, (К);  $T_w$  – температура стенки, (К).

В работе исследовано взаимное влияние пор, включений, раковин диаметром (0,0015–0,0025 м) на раскрытие трещин различной длины (0,006–0,012 см), с использованием различных схемы приложения силовых и температурных нагрузок к пластинам, составляющим короб.

Для решения нестационарной задачи предлагается использовать пошаговый алгоритм по времени [11].

Исходные данные по геометрии модели и физико-механическим характеристикам материала используем из работы [11]. Предполагаем, что включения и трещины находятся в сварном шве, соединяющем две пластины толщиной 4 см каждая. Считаем, что трещина имеет длину  $L$ , а микровключение, (раковина, пора) находится на расстоянии  $L_1$  от трещины, рис. 1б).

Построена базовая конечно-элементная модель короба с использованием трехмерных элементов типа "solids". На рис. 1 б) показана конечно-элементная модель конструкции и сварного шва с дефектами, соединяющего две пластины. В работе исследованы три расчетных схемы, характеризующих силовое и температурное воздействие на пластинчатую конструкцию.

Расчетная схема 1 характеризуется тем, что к пластинам приложены максимальные как давление, так и температура, одинаковые по всей поверхности короба. При использовании расчетной схемы 2 предполагается, что величина давления изменяется равномерно как по высоте, так и по ширине пластины в каждый момент времени, а приложенная температура имеет максимальное значение, постоянное по всей поверхности. В расчетной схеме 3 принято, что величина температуры равномерно изменяется как по высоте, так и по ширине пластины в каждый момент времени, а величина приложенного давления максимальна и одинакова по всей поверхности.

Исследование картины растрескивания поверхностей внутри сварного шва при наличии различных дефектов проводилось с использованием трех указанных схем приложения температур и давления.

#### **Анализ результатов численного расчета по теме исследования.**

Рассматривались прямоугольные пластинки с такими размерами: пластина 1  $a=400$  см;  $b=2100$  см, толщиной  $h=4$  см, пластина 2  $a=400$  см;  $b=1100$  см, толщиной  $h=3$  см. Материал пластинок – сталь 10ХСНД. Модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны  $E=2.1 \cdot 10^6$  кгс/см<sup>2</sup>;  $\nu=0.3$ . Плотность материала пластинки равна  $\rho=0.0079$  кг/см<sup>3</sup>.

В табл. 1-3 приведены данные расчетов и приложенная температурная нагрузка. Так, при рассмотрении взаимного влияния трещины и поры по схемам 1 и 2 прикладывалась температура  $210^{\circ}$ , по схеме 3 прикладывалась температура, изменяющаяся в пределах  $110^{\circ}$ – $210^{\circ}$ . Пределы изменения давления во всех рассмотренных расчетных схемах принимались равными  $3000$ – $3360$  кг/см<sup>2</sup>. Расчет по времени проводился в интервале от 0 до 10 сек.

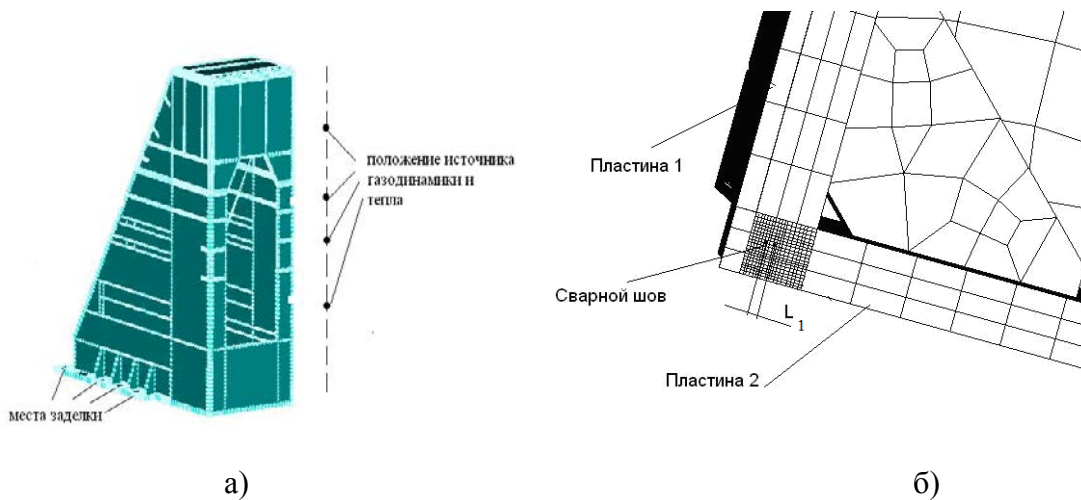


Рис. 1. Схема приложения нагрузок и конечно-элементная модель.

В работе анализируется влияние различных схем приложения термосиловой нагрузки на картину развития трещин в сварном шве при наличии различных дефектов, находящихся в непосредственной близости от трещины.

Для первой расчетной схемы коэффициент интенсивности напряжений, полученный методом конечных элементов, обозначен  $K_{Срасч1}$  при максимальной величине как давления, так и температуры.

Для второй расчетной схемы коэффициент интенсивности напряжений, полученный методом конечных элементов, обозначен  $K_{Срасч2}$ . Отметим, что величина этого коэффициента немного меньше полученного по первой расчетной схеме, так как вклад в развитие трещины от давления меньше, чем от температуры.

Для третьей расчетной схемы коэффициент интенсивности напряжений, полученный методом конечных элементов, обозначен как  $K_{Срасч3}$ . Величина этого коэффициента значительно меньше, так как вклад в развитие трещины от температуры значительно выше, чем от давления.

Рассматривались различные положения трещины и поры относительно сварного шва. Введены следующие обозначения:  $T$  – температура;  $L$  – длина трещины;  $L_1$  – расстояние между включением и трещиной;  $K_{Срасч}$  – коэффициент интенсивности напряжений полученный методом конечных элементов (для различных схем нагружения);  $K_{Стаб}$  – критический коэффициент интенсивности напряжений.

Таблиця 1

Результаты расчета: поры и трещина

$T, ^\circ\text{C}$	$L, \text{ м}$	$L_1, \text{ м}$	$K_{\text{Срасч1}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	$K_{\text{Срасч2}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	$K_{\text{Срасч3}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	$K_{\text{Стаб}}, \text{ МПа м}^{1/2}$
110-210	0,006	0,003	25	24,5	24	45,6
	0,008	0,003	37	36,4	36,2	45,11
	0,010	0,003	44	43,6	43,2	46,3
	0,012	0,003	48	47,8	47,5	46,3

Таблиця 2

Результаты расчета: включение и трещина

$T, ^\circ\text{C}$	$L, \text{ м}$	$L_1, \text{ м}$	$K_{\text{Срасч1}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	$K_{\text{Срасч2}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	$K_{\text{Срасч3}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	$K_{\text{Стаб}}, \text{ МПа м}^{1/2}$
110-210	0,006	0,003	24	23,4	23,2	45,6
	0,008	0,003	34	33,6	33,4	45,11
	0,010	0,003	42	41,7	41,5	46,3
	0,012	0,003	49	48,8	48,6	46,3

Таблиця 3

Результаты расчета: раковина и трещина

$T, ^\circ\text{C}$	$L, \text{ м}$	$L_1, \text{ м}$	$K_{\text{Срасч1}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	$K_{\text{Срасч2}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	$K_{\text{Срасч3}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	$K_{\text{Стаб}}, \text{ МПа м}^{1/2}$
110-210	0,006	0,003	29	28,4	28,1	45,6
	0,008	0,003	41	40,5	40,2	45,11
	0,010	0,003	46	45,7	45,3	46,3
	0,012	0,003	47	46,8	46,5	46,3

### Выводы

Результаты проведенных расчетов позволили сделать следующие выводы.

Оценка времени расчетов показала, что применение расчетной схемы 1 дает время расчета 40-50 минут; расчетной схемы 2 – 36-48 часов; расчетной схемы 3 – 18-28 часов.

Качественная оценка показала, что расчетная схема 1 работает в запас прочности; ее использование дает минимальное время расчета, при этом отличие по результатам составляет не более 1% от критического коэффициента интенсивности напряжений, полученного аналитическим методом [15]. Как показали вычисления, расчетная схема 1 дает наибольшие значения напряжений и перемещений. Именно такая схема может быть использована для быстрой оценки состояния конструкции.

Анализ величин критических коэффициентов интенсивности напряжений по трем расчетным схемам показал, что они отличаются в пределах от 0,5% до 2%. Применение расчета в полной связанной постановке по схемам 2 и 3 для определения возможности продления срока службы конструкции для подобных типов нагрузок неприемлемо для быстрой оценки состояния конструкции.

В дальнейшем предполагается оценить математическое ожидание времени до разрушения конструкции при нестационарном нагружении при наличии различных дефектов в сварных швах.

### Список использованной литературы

1. Кит Г.С. Определение трехмерных температурных полей и напряжений в бесконечном теле с разрезами / Г.С. Кит, М.В. Хай // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1982. — № 5. — С. 60-67.
2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. — Киев: Наук. думка, 1970. — 307 с.
3. Станюкович А.В. Хрупкость и пластичность жаропрочных материалов / А.В. Станюкович. — М.: Металлургия, 1967. — 199 с.
4. Кит Г.С. Нестационарная задача термоупругости для пластинки с трещиной при наличии теплоотдачи с боковых поверхностей / Г.С. Кит, О.В. Побережный // Физико-химическая механика материалов. — 1976. — Т. 12. — № 4. — С. 73-78.
5. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
6. Прочность при малоцикловом нагружении / Под. ред. С. В. Серенсена. — М.: Наука, 1975. — 285 с.
7. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1970. — 256 с.
8. Даутов Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов / Р.З. Даутов, М.М. Карчевский. — Казань: Казанский госуд. университет, 2004. — 239 с.
9. Алтухов Е.В. Метод И.И. Воровича в трехмерной теории термодинамики пластин / Е.В. Алтухов // Теорет. и прикл. механика. — Донецк, 2005. — Вып. 41. — С. 3-8.
10. Бородин П.Ю. Динамическая связанная задача термоупругости в различных пространственных приближениях / П.Ю. Бородин // Мат. моделирование. — 1998. — Т. 10. — № 3. — С. 61-82.
11. Стрельникова О. Дослідження взаємного впливу включення на ланцюжку пор в зварному шві під впливом термосилового навантаження / О. Стрельникова, О. Ковч // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2016. — Т. 3. — № 7 (81). — С. 9-14.
12. Морозов Н.Ф. Проблемы динамики разрушения твердых тел / Н.Ф. Морозов, Ю.В. Петров. — СПб, 1997. — 132 с.
13. Беляев Н.М. Управление вектором тяги и теплообмен в ракетных двигателях на твердом топливе / Н.М. Беляев, В.М. Ковтуненко, Ф.И. Кондратенко. — Москва, 1968. — 420 с.
14. Авдуевский В.С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдуевский. — М.: Машиностроение, 1992. — 528 с.
15. Партон В.З. Динамика хрупкого разрушения / В.З. Партон, В.Г. Борисковский. — М.: Машиностроение, 1988. — 240 с.

### References

1. Kit, G. S., Hay, M. V. Opredelenie trehmernyh temperaturnykh poley i napryazheniy v beskonechnom tele s razrezami. Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela. **5**, 60-67. (1982)
2. Kovalenko, A. D. Osnovy termouprugosti. Nauk. Dumka. Kiev. (1970)
3. Stanyukovich, A. V. Hrupkost i plastichnost zharoprochnykh materialov. Metallurgiya. Moscow. (1967)

4. Kit, G. S., Poberezhnyy, O. V. Nestacionarnaya zadacha termouprugosti dlya plastinki s treschinoy pri nalichii teplootdachi s bokovyh poverhnostey. Fiziko-himicheskaya mehanika materialov. **12**, 4, 73-78. (1976)
5. Novackiy, V. Teoriya uprugosti. Mir. Moscow. (1975)
6. Prochnost pri malociklovom nagruzhennii. Pod. red. S. V. Serensena. Nauka. Moscow: (1975).
7. Novackiy, V. Dinamicheskie zadachi termouprugosti. Mir. Moscow. (1970)
8. Dautov, R. Z., Karchevskiy, M. M. Vvedenie v teoriyu metoda konechnykh elementov. Kazanskiy gosud. universitet. Kazan. (2004)
9. Altuhov, E. V. Metod I.I. Vorovicha v trehmernoy teorii termodinamiki plastin. Teoret. i prikl. mehanika. **41**, 3-8. (2005)
10. Borodin, P. Yu. Dinamicheskaya svyazannaya zadacha termouprugosti v razlichnykh prostranstvennykh priblizheniyah. Mat. modelirovanie. **10**, 3, 61-82. (1998)
11. Strelnikova, O., Kovch, O. Doslidzhennya vzaemnogo vplivu vkladyuchennya na lancyuzhku por v zvarnomu shvi pid vplivom termosilovogo navantazhennya. Vostochno-Evropeyskiy zhurnal передовых технологий. **3**, 7 (81), 9-14. (2016)
12. Morozov, N. F., Petrov, Yu. V. Problemy dinamiki razrusheniya tverdykh tel. SPb. (1997)
13. Belyaev, N. M., Kovtunenکو, V. M., Kondratenko, F. I. Upravlenie vektorom tyagi i teploobmen v raketnykh dvigatelyah na tverdom toplive. Moscow. (1968)
14. Avduevskiy, V. S. Osnovy teploperedachi v aviacionnoy i raketno-kosmicheskoy tehnikе. Mashinostroenie. Moscow. (1992)
15. Parton, V. Z., Boriskovskiy, V. G. Dinamika hrupkogo razrusheniya. Mashinostroenie. Moscow. (1988)

УДК 539.3

Д.В. КРЮТЧЕНКО

Институт проблем машиностроения НАН Украины им. А.М. Подгорного

### КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

*Разработан метод исследования свободных и вынужденных колебаний жидкости в жестком призматическом резервуаре. Предполагается, что жидкость в резервуаре идеальная, несжимаемая, а её течение, вызванное действием приложенной нагрузки, безвихревое. Давление жидкости на стенки резервуара определяется из интеграла Коши-Лагранжа. Рассмотрен случай периодического внешнего воздействия в горизонтальном направлении. Определены собственные значения и формы колебаний жидкости в призматическом резервуаре. Определены резонансные частоты. Задача может быть обобщена на случай задачи в нелинейной постановке с учетом нелинейных составляющих в интеграле Коши-Лагранжа.*

*Ключевые слова: резервуар с жидкостью, свободные и вынужденные колебания, периодическое внешнее воздействие.*

Д.В. КРЮТЧЕНКО

Институт проблем машинобудування НАН України ім. А.М. Підгорного

### КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ПРИЗМАТИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ

*Розроблено метод дослідження вільних та вимушених коливань рідини в жорсткому призматичному резервуарі. Вважається, що рідина в резервуарі є ідеальною, нестисливою, а її рух, викликаний дією прикладеного навантаження, є безвихровим. Тиск рідини на стінки резервуара визначається з лінеарізованого інтеграла Коши-Лагранжа. Розглянуто випадок періодичного зовнішнього впливу, що діє в горизонтальному напрямку. Визначені власні значення та форми коливань рідини в призматичному резервуарі. Визначено резонансні частоти. Задача може бути узагальнена на випадок задачі в нелінійній постановці з урахуванням нелінійних складових в інтегралі Коши-Лагранжа.*

*Ключові слова: резервуар з рідиною, вільні та вимушені коливання, періодичний зовнішній вплив.*

D. KRIUTCHENKO

A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems

### COMPUTER MODELING LIQUID FORCED VIBRATIONS IN A PRISMATIC TANK

*The method to simulate free and forced liquid vibrations in a prismatic tank is proposed. The liquid is supposed to be ideal, incompressible, and its current caused by applied loading is irrotational. The problem of force vibrations is solved by using the eigenmodes as basic functions. The resonance frequencies are defined. Thin-walled structure elements are widely used in different engineering areas: chemical and aerospace industries, transportation, oil and gas producing. Usually these structures operate at intensive thermal and stress loadings, in interaction with fluids located in their containers. These loadings can cause the destruction of thin shells containing dangerous liquids that will be a reason of ecological catastrophe. So the*

*topical issue here is a problem of estimation of stress-strain characteristics, frequencies and modes of vibrations of such facilities. Liquid sloshing often occurs when the extremely loads are applied to the structure elements with compartments partially filled with different liquids. Vibration modes are usually affected by liquid sloshing modes, so the coupled problem of fluid-structure interaction is crucial. Since analytic solutions do not exist for tanks and reservoirs with complicated geometrical shapes, in addition to the analytical methods, numerical methods have been employed for solutions of linear boundary value problems of liquid sloshing. Also the presence of baffles can drastically change the dynamical behaviour of fluid-filled structures. This paper is devoted to free and forced vibrations of prismatic and cylindrical tanks filled with an incompressible ideal liquid. The dynamic analysis of shell structures is often performed by use of finite and boundary element programs. The liquid pressure on the walls of the reservoir is defined by Cauchy-Lagrange integral. The external horizontal periodic loading is considered. The eigenvalues and modes of free liquid vibrations in prismatic tank are obtained. The problem can be generalized in the case of the problem in non-linear formulation taking into account non-linear components in Cauchy-Lagrange integral.*

*Keywords: fuel tank, free and forced vibrations, baffle, periodic external loading*

### **Постановка проблемы**

Оболочечные конструкции широко используются в технике как резервуары для хранения жидкости. Плескание жидкости – это интересный физический феномен огромнейшего практического значения, имеющий приложения в широком спектре технологий и технических дисциплин. Это явление наблюдается в движущихся резервуарах, содержащих жидкость, таких как топливные баки ракет, баки, применяющиеся в морском и космическом транспорте, в хранилищах, плотинах, находящихся под сейсмическим воздействием, а также в реакторах и атомных судах. Когда топливный бак заполнен частично, большое количество топлива движется внутри бака с поступательным и вращательным ускорением, и генерирует плескания. Контроль плесканий топлива крайне необходим для обеспечения устойчивости космического корабля. Ряд катастроф в полетах произошел именно вследствие неустойчивости, вызванной плесканиями [1].

### **Анализ последних исследований и публикаций**

Анализ исследований, посвященных проблемам плескания жидкости в резервуарах, дан в работах R. A. Ibrahim's [2]. Свободные и вынужденные колебания цилиндрических резервуаров с жидкостью рассмотрены в работах [3–5].

### **Цель исследования**

Разработать модель свободных и вынужденных колебаний жидкости в жестком призматическом резервуаре при действии периодической горизонтальной нагрузки. Исследовать зависимость уровня подъема жидкости в резервуаре от времени. Установить характер поведения жидкости в резервуаре в зависимости от частоты вынуждающей силы.

### **Изложение основного материала исследования**

**Постановка задачи.** В данной статье рассмотрена задача о колебаниях жидкости в призматическом резервуаре, вид которого показан на рис.1.

Обозначим боковые поверхности призматического резервуара через  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , поверхность днища  $S_b$ , а свободную поверхность  $S_0$ .

Для моделирования области, занятой жидкой средой, разработана математическая модель, основанная на следующих гипотезах: жидкость несжимаемая и невязкая,



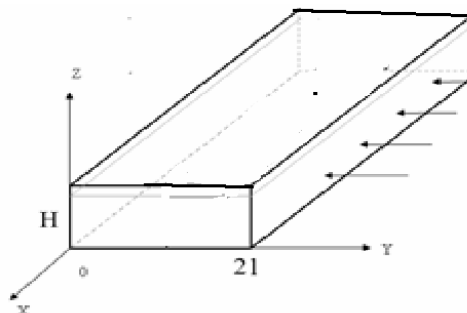


Рис. 1. Призматический резервуар.

движение жидкости безвихревое, необходимо рассматривать только малые колебания (линейная теория). Поэтому можно ввести скалярный потенциал скоростей  $\Phi(x, y, z, t)$ :

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

удовлетворяющий уравнению Лапласа. Предположим, что резервуар движется с постоянной горизонтальной скоростью  $U = (U, 0, 0)$ . Представим потенциал скоростей в виде

$$\varphi = Ux + \Phi,$$

где  $\Phi$  – потенциал возмущенных скоростей. Величину давления  $p$  на стенки оболочки определяем из линеаризованного интеграла Коши-Лагранжа по формуле:

$$p = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + gz \right) + p_0,$$

в которой  $g$  – ускорение свободного падения,  $z$  – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении,  $\rho_l$  – плотность жидкости,  $p_0$  – атмосферное давление.

На смоченной поверхности оболочки и перегородке ставится граничное условие непротекания. На свободной поверхности должны быть выполнены динамическое и кинематическое граничные условия.

$$\text{Обозначим } S_w = S_b \cup S_{s_1} \cup S_{s_2} \cup S_{s_3} \cup S_{s_4}.$$

Граничные условия для потенциала скоростей следующие. На стенках и днище выполнено условие непротекания:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_w} = 0. \tag{1}$$

На свободной поверхности  $S_0$  выполнены кинематическое и динамическое условия:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0$$

где функция  $\zeta$  описывает форму и положение свободной поверхности.

Таким образом, для потенциала скоростей имеем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_w} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{s_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{s_0} = 0. \quad (2)$$

Последнее условие с использованием интеграла Коши-Лагранжа принимает вид:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + gz \right|_{s_0} = 0 \quad (3)$$

Для выполнения условий разрешимости краевой задачи (3)-(4) необходимо также удовлетворить условию Неймана:

$$\int_{s_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS = 0.$$

Продифференцируем уравнение (4) по  $t$ :

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{s_0} = 0. \quad (4)$$

Подставим в уравнение (4) выражение для  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  из уравнения (2):

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} + U \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right|_{s_0} = 0. \quad (5)$$

Требуется определить гармоническую функцию  $\Phi$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа, и функцию  $\zeta(x, y, t)$  из граничных условий (2), (5).

**Определение собственных форм колебаний жидкости в жестком резервуаре.**

Собственные формы и частоты колебаний жидкости в призматическом резервуаре определены методом разделения переменных Фурье.

Сначала находим решение краевой задачи (3), (5).

$$\Psi_{kl} = A_{kl} \operatorname{ch} \lambda_{kl} z \cos \frac{\pi k}{2a} x \cos \frac{\pi l}{2b} y, \quad \lambda_{kl} = \sqrt{\left( \frac{\pi k}{2a} \right)^2 + \left( \frac{\pi l}{2b} \right)^2}.$$

Удовлетворяя условию на свободной поверхности, получим, что  $\lambda_{kl} \operatorname{sh} \lambda_{kl} H = \frac{\omega^2}{g} \operatorname{ch} \lambda_{kl} H$ . Отсюда находим выражение для собственных частот жидкости в призматическом резервуаре:

$$\omega_{kl} = \sqrt{g \lambda_{kl} \tanh(\lambda_{kl} H)}.$$

Приведем также выражения для первых 8 собственных форм колебаний жидкости (это система базисных функция для решения задачи о вынужденных колебаниях):

$$\begin{aligned}
 \Psi_{01}(x) &= C_1 \cos(0 \cdot x) \sin \frac{\pi}{2b} y, & \Psi_{10}(x) &= C_2 \sin \frac{\pi}{2a} x \cos(0 \cdot y), \\
 \Psi_{02}(x) &= C_5 \cos 0x \cos \left(\frac{\pi}{b} y\right), & \Psi_{20}(x) &= C_4 \cos \frac{\pi}{a} x \cos(0y), \\
 \Psi_{12}(x) &= C_7 \sin \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{\pi}{b} y, & \Psi_{21}(x) &= C_6 \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{2b} y, \\
 \Psi_{11}(x) &= C_3 \sin \frac{\pi}{2a} x \sin \frac{\pi}{2b} y, & \Psi_{22}(x) &= C_8 \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

В табл. 1 приведены численные значения частот  $\omega_{ij}$  и частотного параметра  $\lambda_{ij}$  для призматического резервуара в форме куба с геометрическими характеристиками  $a=b=H=1$ м при разных значениях скорости.

Таблица 1

Собственные частоты колебаний жидкости в призматическом резервуаре

$n$	$i$	$j$	$\lambda_{ij}$	$U=0, \omega_{ij}$	$U=15$	$U=30$
1	0	1	1.772453851	4.051164194	3.013608	0.15785737
2	1	0	1.772453851	4.051164194	3.013608	0.15785737
3	1	1	2.506628275	5.710012556	4.140593	0.62512577
4	0	2	3.544907703	5.892165855	4.566877	1.11022302
5	2	0	3.544907703	5.892165855	4.566877	1.11022302
6	2	1	3.963327298	6.233151691	5.562521	4.14059338
7	1	2	3.963327298	6.233151691	5.562521	4.14059338
8	2	2	5.013256550	7.012538645	6.035193	5.99932672

Найдем функцию  $\zeta$ . Используем следующее выражение для потенциала скоростей:

$$\Phi = \sum_{n=1}^M \dot{c}_n(t) \Phi_n,$$

где зависимость  $n = n(i, j)$  показана в табл. 1, функции  $\Phi_n$  определяются по формуле:

$$\Phi_n = \frac{1}{ab} \frac{\cosh(\lambda_{ij}z)}{\cosh(\lambda_{ij}H)} \Psi_{ij}(x, y); \quad n = n(i, j),$$

в которой  $\Psi_{ij}$  находятся по соотношениям (6). Получим форму свободной поверхности:

$$\zeta = \sum_{n=1}^M c_k(t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial n}.$$

Формы колебаний свободной поверхности показаны на рис. 2:

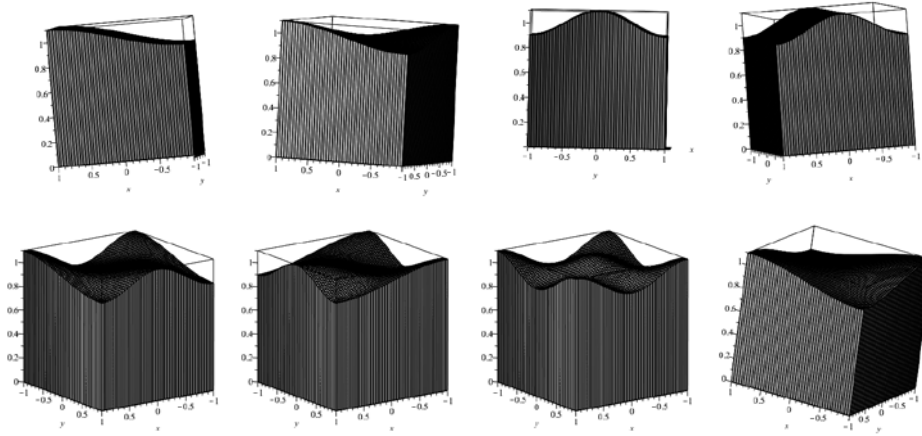


Рис. 2. Формы колебаний свободной поверхности.

**Свободные колебания жидкости в движущемся резервуаре.** Предположим, что в начальный момент времени жидкость в резервуаре находилась в состоянии покоя. На резервуар действует периодическая нагрузка, приложенная в горизонтальном направлении (параллельно оси  $Ox$ ). Составим систему дифференциальных уравнений движения жидкости, исходя из граничного условия на свободной поверхности:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta(x, y) + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + xa_s(t) \right|_{z=H} = 0, \quad \Phi = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \Phi_k(x, y, H). \quad (7)$$

Подставляя выражения (9) в соотношение (8), получим:

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \Phi_k(x, y, H) + g \sum_{k=1}^N c_k(t) \left. \frac{\partial \Phi_k(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=H} + U \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \left. \frac{\partial \Phi_k(x, y, z)}{\partial x} \right|_{z=H} = 0. \quad (8)$$

Умножим равенство (9) скалярно на  $\Phi_n$  и воспользуемся ортогональностью собственных форм. Получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{d}_1(t) + \omega_1^2 d_1(t) - \frac{8}{9\pi^2} \cos \omega t &= 0, & \ddot{d}_2(t) + \omega_2^2 d_2(t) - \frac{8}{25\pi^2} \cos \omega t &= 0, \\ \ddot{d}_3(t) + \omega_3^2 d_3(t) - \frac{8}{121\pi^2} \cos \omega t &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь для удобства введены обозначения  $d_i = c_{i0}$ . Система (10) при нулевых начальных условиях имеет следующее решение:

$$d_1(t) = -\frac{8}{9\pi^2(\omega_1^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_1 t), \quad d_2(t) = -\frac{8}{25\pi^2(\omega_2^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_2 t),$$

$$d_3(t) = -\frac{8}{121\pi^2(\omega_3^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_3 t). \quad (10)$$

Находим изменение уровня подъема свободной поверхности в зависимости от времени в точке  $\zeta$  с координатами  $x=1, y=1, z=1$  в течение 10 сек нагружения. Эта зависимость показана на рис. 3.

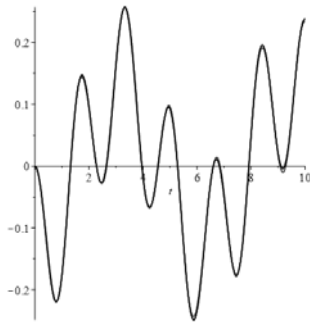


Рис. 3. Изменение уровня подъема свободной поверхности.

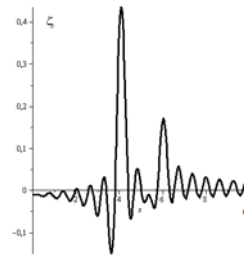


Рис. 4. Изменение уровня подъема свободной поверхности в зависимости от частоты нагружения.

На рис. 4 показано влияние частоты нагружения на уровень подъема свободной поверхности. При этом амплитуда колебаний вычислялась по формуле:

$$\zeta = \sum_{k=1}^3 \dot{d}_k(t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}(x, y, H),$$

в которой коэффициенты  $d_k(t)$  определялись формулами (12) в момент времени  $t = 10$  сек.

Пики на графике соответствуют частотам  $\omega_{10}$  и  $\omega_{20}$  (табл. 1). Эти частоты являются наиболее опасными, например, при транспортировке рассматриваемого бака.

По полученным результатам видно, что вещественная часть частот колебаний для всех рассмотренных случаях равна нулю, что свидетельствует о устойчивости движения резервуара. С увеличением скорости мнимые части наименьших частот стремятся к нулю. Такое явление соответствует потери устойчивости по дивергентной форме.

На рис. 5 приведены три первые формы колебаний, соответствующие наименьшим частотам при скорости и при  $U=30$  м/с. Формы колебаний при наличии скорости изменились существенно.

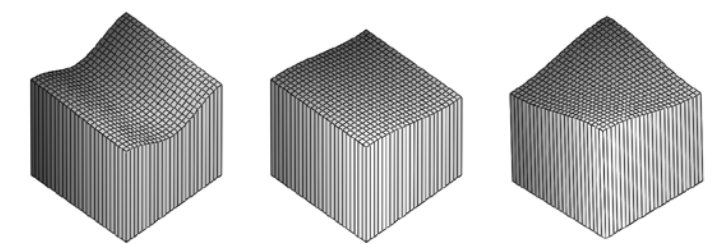


Рис. 5. Форма колебаний свободной поверхности призматического резервуара.

### **Выводы**

Разработан метод расчета призматического резервуара с жидкостью при действии периодической горизонтальной нагрузки. Определена зависимость уровня подъема жидкости в резервуаре от времени. Установлен характер поведения жидкости в резервуаре в зависимости от частоты вынуждающей силы. В дальнейшем предполагается изучить рассматриваемую задачу в нелинейной постановке с учетом нелинейных составляющих в интеграле Коши–Лагранжа.

### **Список использованной литературы**

1. Sidi M.J. *Spacecraft Dynamics and Control* / M.J. Sidi. — New York: Cambridge University Press, 1997. — 409 p.
2. Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing Dynamics* / R.A. Ibrahim. — New York: Cambridge University Press, 2005. — 948 p.
3. Gnitko V. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles / V. Gnitko, K. Degtyariov, V. Naumenko, E. Strelnikova // *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. — 2017. — Vol. 5. — № 3. — P. 317-328.
4. Krutchenko D.V. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs / D.V. Krutchenko, E.A. Strelnikova, Yu.S. Shuvalova // *Вісник Харківського національного університету. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління"*. — 2017. — Т.35. — №1. — С. 31-37.
5. Ravnik J. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank / J. Ravnik, E. Strelnikova, V. Gnitko, K. Degtyarev, U. Ogorodnyk // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. — 2014. — Vol. 57. — P. 13-25.

### **References**

1. Sidi, M. J. *Spacecraft Dynamics and Control*. Cambridge University Press. New York. (1997)
2. Ibrahim, R. A. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press. New York. (2005)
3. Gnitko, V., Degtyariov, K., Naumenko, V., Strelnikova, E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. **5**, 3, 317-328. (2017)
4. Krutchenko, D. V., Strelnikova, E. A., Shuvalova Yu. S. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu. Seriiia "Matematychno modeliuвання. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia"*. **35**, 1, 31-37. (2017)
5. Ravnik, J., Strelnikova, E. , Gnitko, V., Degtyarev, K., Ogorodnyk U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. **57**, 13-25. (2014)

УДК 519.6

В.Ю. КЫЛЫННЫК

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

В.И. ГНИТЬКО, Ю.В. НАУМЕНКО

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного Национальной академии наук Украины

Л.В. РОЗОВА

Харьковский политехнический институт "Национальный технический университет"

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕВАНИЙ ЖИДКОСТИ В СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ПЕРЕГРУЗКАХ

*Исследованы свободные колебания жидкости в составных оболочках вращения, состоящих из цилиндрической и конической частей. Предполагается, что жидкость является идеальной и несжимаемой, а ее движение, вызванное колебаниями оболочки – потенциальное. Использован метод собственных форм. Задача сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Применен метод граничных элементов. Определены частоты и формы колебаний жидкости в составной цилиндрическо-конической оболочке. Сделан анализ влияния перегрузок на частоты колебания составных оболочек.*

*Ключевые слова: составные оболочки вращения, идеальная несжимаемая жидкость, метод конечных элементов, метод граничных элементов, частоты и формы колебаний, свободные колебания жидкости, сингулярные интегральные уравнения.*

В.Ю. КИЛИННИК

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

В.І. ГНІТЬКО, Ю.В. НАУМЕНКО

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного Національної академії наук України

Л.В. РОЗОВА

Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут"

### ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В СКЛАДЕНИХ ОБОЛОНКАХ ОБЕРТАННЯ ПРИ ПЕРЕВАНТАЖЕННЯХ

*Досліджено вільні коливання рідини в оболонках обертання, які складаються з циліндричної та конічної частин. Вважається, що рідина є ідеальною і нестисливою, а її рух, індукований коливаннями оболонки, є потенційним. Застосовано метод власних форм. Задачу зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Використано метод граничних елементів. Визначені частоти і форми коливань рідини в складеній циліндрично-конічній оболонці. Зроблено аналіз впливу перевантажень на частоти коливання складених оболонок.*

*Ключові слова: складові оболонки обертання, ідеальна нестислива рідина, метод скінченних елементів, метод граничних елементів, частоти і форми коливань, вільні коливання рідини, складені оболонки обертання, сингулярні інтегральні рівняння.*

V.Yu. KYLYNNYK

V.N. Karazin Kharkiv National University

V.I. GNITKO, Yu.V. NAUMENKO

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems

L.V. ROZOVA

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

## NUMERICAL SIMULATION OF LIQUID VIBRATION IN COMPOSITE SHELLS OF REVOLUTION UNDER OVERLOADS

*The free fluid vibrations in the shells of revolution having cylindrical and conical parts are considered. To simulation the region occupied by the fluid, a mathematical model is developed based on the following hypotheses: the fluid is incompressible and inviscid, and its motion, caused by shell oscillations-potential, the only small oscillations are considered. In the course of the work, a mixed boundary-value problem is formulated for the Laplace equation. The modes decomposition method is applied. The problem is reduced for the solving of the system of singular integral equations. In the course of the solution, it was revealed that the kernels of integral equations contain complete elliptic integrals of the first and second kind. An elliptic integral of the second kind is calculated using Gauss's standard quadrature formula. For an elliptic integral of the first kind, an approach based on the characteristic property of the arithmetic mean AGM is used. To solve outer integrals, special Gaussian quadrature formulas are applied. The developed method is applied further for the analysis of free vibrations of shell structures. The boundary element method is applied in a straightforward form. At the first stage, a necessary number of boundary elements is determined to find the eigenfrequencies with a given accuracy. The frequencies and forms of fluid oscillations in a compound cylindrical-conical shell are determined. A comparison is made between the frequencies of axisymmetric fluid vibrations in a cylindrical shell obtained using by the method and the analytical formula developed in this work. Also, the values of the first seven vibration frequencies of composite shells are given for different lengths of the cylindrical part. The analysis is made of the effect of overloads on the vibration frequencies of composite shells.*

*Keywords: composite shells of rotation, ideal incompressible fluid, method of the finite elements, method of the boundary elements, frequencies and forms of the oscillations, free vibrations of a liquid, composite shells of the revolution, singular integral equations.*

### Постановка проблемы

Герметичные оболочечные конструкции для хранения и транспортировки жидкости являются предметом интенсивных исследований в течение последних 50 лет. Большое количество различных типов модельных тестовых задач рассмотрено и решено в последнее десятилетие. Исследование свободных колебаний жидкости в составных оболочках вращения представляет большой практический интерес.

### Анализ последних исследований и публикаций

Анализ исследований, посвященных проблемам плескания жидкости в резервуарах, дан в работах R. A. Ibrahim's [1–2]. Оболочкам, состоящим из цилиндрических и конических частей, в научной литературе уделено меньшее внимание, несмотря на то, что такие тонкостенные конструкции широко используются в разных отраслях техники. Обзор исследований по этой теме [2–3] показывает, что большое влияние на динамическое поведение конструкции с жидкостью оказывают вибрации упругих стенок и взаимодействие с плещущейся жидкостью. Свободные и вынужденные колебания цилиндрических резервуаров с жидкостью рассмотрены в работах [4–5]. Отметим, что в большинстве исследований не учитывается влияние силы тяжести, вызывающей плескания.

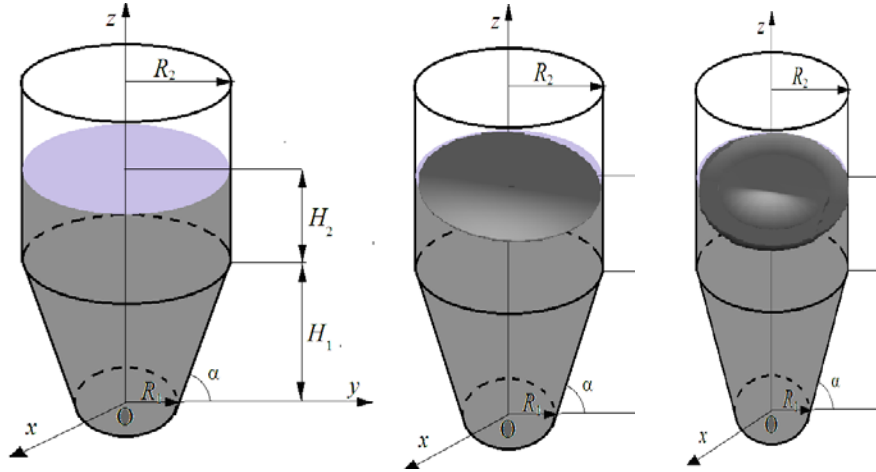
### Цель исследования

**Постановка задачи.** В этой статье рассмотрена задача о колебаниях жидкости в составной оболочке вращения. Предполагается, что оболочка может состоять из цилиндрической и конической частей. Обозначим смоченную часть поверхности оболочки  $S_1$ , а свободную поверхность  $S_0$ . Предположим, что декартова система



координат  $Oxuz$  зв'язана с оболочкой, свободная поверхность совпадает с плоскостью  $z = H = H_1 + H_2$  в состоянии покоя (рис.1).

Для моделирования области, занятой жидкой средой, разработана математическая модель, основанная на следующих гипотезах: жидкость является несжимаемой и невязкой, движение жидкости безвихревое, необходимо рассматривать только малые колебания (линейная теория). Поэтому можно ввести скалярный потенциал скоростей  $\Phi(x, y, z, t)$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа.



**Рис. 1. Оболочки вращения с жидкостью и формы колебаний свободной поверхности.**

Давление жидкости  $p = p(x, y, z, t)$ , действующее на смоченной поверхности, получено из линеаризованного уравнения Бернулли для потенциального потока:

$$p = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right), \quad p_s = -\rho_l gz, \quad p_d = -\rho_l \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $g$  – гравитационное ускорение,  $z$  – вертикальная координата точки в жидкости,  $\rho_l$  – плотность жидкости,  $p_s$  и  $p_d$  – статическая и динамическая компоненты давления жидкости,  $p_0$  – атмосферное давление.

На свободной поверхности жидкости должны быть удовлетворены следующие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{s_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \right|_{s_0} = 0.$$

Функция  $\zeta$  здесь описывает форму и положение свободной поверхности. Таким образом, для потенциала имеем следующую краевую задачу:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{s_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \right|_{s_0} = 0; \quad \nabla^2 \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z^2} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – внешняя единичная нормаль к рассматриваемой поверхности.

Для выполнения условий разрешимости краевой задачи необходимо также удовлетворить условию Неймана:

$$\int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS = 0.$$

Таким образом, сформулирована смешанная краевая задача для уравнения Лапласа.

**Изложения основного материала исследования**

**1. Метод заданных форм и система граничных интегральных уравнений:**

Рассмотрим потенциал  $\Phi$  в виде следующего ряда:

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k.$$

Чтобы определить функции  $\varphi_k$ , используем метод граничных элементов в прямой формулировке. Опуская индекс  $k$ , запишем основное интегральное соотношение в форме [6]:

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S q \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS,$$

где  $S = S_1 \cup S_0$ ; точки  $P$  и  $P_0$  принадлежат поверхности  $S$ . Через  $|P - P_0|$  обозначим декартово расстояние между точками  $P$  и  $P_0$ . Функция  $\varphi$ , определенная на поверхности  $S_1$ , представляет собой давление на смоченной поверхности, а функция  $q$ , определенная на  $S_0$ , – это поток. С использованием граничных условий приходим к системе сингулярных интегральных уравнений в форме, представленной в [3]:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi_1 + \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\chi_k^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) dS_0 = 0, \\ - \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi_k^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\varphi_0$  – значения потенциала на поверхности  $S_0$ .

Численное решение полученной системы сингулярных интегральных уравнений осуществлено методом граничных элементов. В [3] показано, что ядра интегральных уравнений содержат полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Так как эллиптический интеграл 2-го рода представляет собой регулярную функцию, то для его вычисления используется стандартная квадратурная формула Гаусса. Для эллиптического интеграла 1-го рода применяется подход, основанный на следующем характеристическом свойстве среднего арифметического-геометрического значения  $AGM(a, b)$  (см. [7]).

Для определения этого значения существует простой алгоритм Гаусса, описанный ниже.

Таким образом, имеются эффективные численные процедуры для вычисления внутренних интегралов (2), однако внешние интегралы имеют логарифмическую особенность. Для их вычисления применены специальные квадратурные формулы Гаусса

[6], а также подход, описанный в [8]. Разработанный метод был применен далее для анализа свободных колебаний оболочечных конструкций.

## 2. Численный анализ и обсуждение результатов.

Рассмотрены цилиндрическо-конические оболочки (рис. 1.) Здесь  $R_1$  и  $R_2$  – меньший и больший радиусы конической части,  $R_2$  это также радиус цилиндра,  $\theta=90^\circ-\alpha$  – половина угла при вершине конуса,  $H$  – высота составной оболочки,  $H_1$  и  $H_2$  – высоты конической и цилиндрической частей,  $H=H_1+H_2$ . Обе оболочки отнесены к цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$ . Для всех дальнейших вычислений  $\alpha=60^\circ$ ,  $H_1/R_2=1.0$ ,  $R_1=0.5$  м и  $H_1=1$  м. Для  $H_2$  мы рассматриваем следующие значения  $H_2=1, 0.5, 0.25$ , и  $0.1$  м.

На первом этапе определено необходимое число граничных элементов для нахождения собственных частот с заданной точностью. Точность  $\varepsilon=10^{-3}$  достигается, когда число граничных элементов вдоль стенки оболочки равно 100, вдоль днища 120, и вдоль радиуса свободной поверхности также 120. В табл. 1 показано сравнение частот осесимметричных колебаний жидкости в цилиндрической оболочке с  $H_1=1$  м,  $R_1=1$  м, полученных с использованием разработанного здесь метода и аналитической формулы, приведенной в [2].

Таблица 1

Частоты осесимметричных колебаний жидкости в цилиндрической оболочке,  $Hz$

Метод	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
МГЭ	3.815	7.019	10.180	13.333	16.480
Аналитический метод	3.815	7.016	10.173	13.324	16.470

В табл. 2 приведены значения первых семи частот колебаний составных оболочек при разных длинах цилиндрической части  $H_2$ . На рис.1 показаны первая и вторая неосесимметричные формы колебаний свободной поверхности.

Таблица 2

Частоты неосесимметричных колебаний жидкости,  $Hz$

$H_2$	$n$						
	1	2	3	4	5	6	7
1.0	4.247	7.2352	9.1573	10.726	12.089	13.312	14.433
0.5	4.145	7.2305	9.1531	10.721	12.083	13.306	14.425
0.25	4.000	7.2146	9.1491	10.718	12.081	13.303	14.423
0.1	3.831	7.1538	9.1203	10.704	12.073	13.299	14.420

Таблица 3

Частоты при различных значениях параметра перегрузки, Hz

$a/n$	1	2	3	4	5	6	7
1	6.13	8.37	9.45	10.24	10.88	11.42	11.89
2	8.67	11.84	13.37	14.48	15.38	16.14	16.81
3	10.61	14.50	16.37	17.74	18.84	19.77	20.59
7	16.21	22.15	25.01	27.10	28.78	30.20	31.45

В табл. 3 дан анализ изменения частот при различных значениях параметра перегрузки при  $H = 0.1$ .

Результаты вычислений, приведенные в этой таблице, показывают, что при увеличении перегрузок происходит рост частот свободных колебаний жидкости.

#### Выводы

Разработан метод определения частот и форм колебаний составных оболочек вращения. Задача сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Подход основан на применении метода граничных элементов. Отметим, что для данной задачи неизвестны аналитические решения. Исследованы свободные колебания жидкости в составных оболочках вращения, состоящих из цилиндрической и конической частей. Дан анализ влияния перегрузок на частоты колебания составных оболочек. В дальнейшем предполагается учесть эффект упругости стенок.

#### Список использованной литературы

1. Ibrahim R.A. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics / R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, T. Ikeda // Applied Mechanics Reviews. – 2001. – Vol. 54. – № 2. – P. 133-199.
2. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics / R.A. Ibrahim. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 970 p.
3. Degtyarev K. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles / K. Degtyarev, V. Gnitko, V. Naumenko, E. Strelnikova // Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences. – 2016. – Vol. 1. – № 1. – P. 14-27.
4. Ravnik, J. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank / J. Ravnik, E. Strelnikova, V. Gnitko, K. Degtyarev, U. Ogorodnyk // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2016. – Vol. 67. – P. 13-25.
5. Gnitko V. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks / V. Gnitko, K. Degtyarev, V. Naumenko, E. Strelnikova // Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. – 2018. – Vol. 6(6). – P. 976-988.
6. Brebbia, C.A. Boundary element techniques: theory and applications in engineering / C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel. – Berlin and New York: Springer-Verlag, 1984. – 464 p.
7. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss / David A. Cox // L'Enseignement Mathématique. 1984. – T. 30. – P. 275 -330.

8. Naumenko V.V. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods / V.V. Naumenko, H.A. Strelnikova // Engineering analysis with boundary elements. – 2002. – № 26. – P. 95-98. – DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00041-8.

#### References

1. Ibrahim, R. A., Pilipchuck, V. N., Ikeda, T. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics. Applied Mechanics Reviews. **54**, 2, 133-199. (2001)
2. Ibrahim, R. A. Liquid Sloshing Dynamics. Cambridge University Press. Cambridge. (2005)
3. Degtyarev, K., Gnitko, V., Naumenko, V., Strelnikova, E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences. **1**, 1, 14-27. (2016)
4. Ravnik, J., Strelnikova, E., Gnitko, V., Degtyarev, K., Ogorodnyk, U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. Engineering Analysis with Boundary Elements. **67**, 13-25. (2016)
5. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., Strelnikova, E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. **6**(6), 976-988. (2018)
6. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag. Berlin and New York. (1984)
7. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss. L'Enseignement Mathématique. **30**, 275 -330. (1984)
8. Naumenko, V. V., Strelnikova, H. A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. Engineering analysis with boundary elements. **26**, 95-98. (2002). DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00041-8.

УДК 519.3

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТИОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

П.И. ГУЧЕК

Інститут біокібернетики і біомедичної інженерії ім. М. Налеча Польської академії наук, Польща

### КВАЗИМЕТОД МОНТЕ-КАРЛО І КУБАТУРИ ДЛЯ СЕРЕНДИПОВИХ ПОЛІНОМІВ

*У роботі розглядаються серендипові поліноми (стандартні та альтернативні) другого і третього порядків. Квазіметод Монте-Карло побудовано на базі квадратного обчислювального шаблону і стратифікованої вибірки із дев'яти аплікат. Наведено три способи конструювання кубатури за версією Ньютона-Котеса. Проведено аналіз результатів тестування кубатури з урахуванням специфічних властивостей і характеру поведінки серендипових поверхонь на границі і всередині носія. Знайдено просту залежність між середньою аплікатою поверхні і барицентричною аплікатою (у центрі квадрата). Кількість необхідних вузлів інтегрування зведено до одного. В цьому випадку кубатура Ньютона-Котеса виявляється більш ефективною, ніж кубатура Гаусса-Лежандра.*

*Ключові слова:* квазіметод Монте-Карло; серендипові елементи другого і третього порядків; обчислювальний шаблон; кубатура Ньютона-Котеса; центрований елемент; стратифікована вибірка аплікат.

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могилы

Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

П.И. ГУЧЕК

Институт биокибернетики и биомедицинской инженерии им. М. Налеча Польской академии наук, Польша

### КВАЗИМЕТОД МОНТЕ-КАРЛО И КУБАТУРЫ ДЛЯ СЕРЕНДИПОВЫХ ПОЛИНОМОВ

*В работе рассматриваются серендиповы полиномы (стандартные и альтернативные) второго и третьего порядков. Квазиметод Монте-Карло построен на базе квадратного вычислительного шаблона и стратифицированной выборки из девяти аппликат. Приведены три способа конструирования кубатуры по версии Ньютона-Котеса. Проведен анализ результатов тестирования кубатуры с учетом специфических свойств и характера поведения серендиповых поверхностей на границе и в середине носителя. Обнаружена простая зависимость между средней аппликацией поверхности и барицентрической аппликацией (в центре квадрата). Количество необходимых узлов интегрирования сведено к одному. В этом случае кубатура Ньютона-Котеса является более эффективной, чем кубатура Гаусса-Лежандра.*

*Ключевые слова:* квазиметод Монте-Карло; серендиповы элементы второго и третьего порядков; вычислительный шаблон; кубатура Ньютона-Котеса; центрованный элемент; стратифицированная выборка аппликат.

A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

O.I. LITVINENKO, I.O. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

P.I. GUCHEK

Institute of Biocybernetics and Biomedical Engineering of the Polish Academy of Sciences, Poland

## MONTE-CARLO QUASI-METHOD AND CUBATURES FOR SERENDIPIC POLINOMIALS

*The overwhelming majority of calculations by Monte-Carlo method is done with the use of pseudo-random numbers (quasi-random points). Practice has shown that in some cases it is better to refuse from modelling real random process and to use artificial model instead. Computational templates and cubatures with quasi-random nodes of integration are considered in the paper. With concrete examples of biquadratic and bicubic polynomials it is shown that sequence of quasi-random points gives better results. It is a known fact and the essence of Monte-Carlo quasi-method. The Monte Carlo quasi-method is based on a square computational template and a stratified sample of 9 applications. There are 3 ways to design the cubature according to the Newton-Cotes version (the Newton-Cotes procedure, the hierarchic procedure on the basis of nodal proportionality, quick algorithm for centered templates). The analysis of the results of cubature testing is carried out taking into account the specific properties and behavior of the serendipic surfaces at the border and in the middle of the carrier. A simple relationship was found between the mean surface application and the barycentric application (in the center of the square). The number of necessary integration nodes is reduced to one. In this case, the cubature of Newton-Cotes is more effective than the cubature of Gauss-Legendre.*

*The algorithm of The Monte Carlo quasi-method for quick determination of per-node distribution of even volume force of serendipic elements of biquadratic and bicubic interpolations is built. There is reason to believe that Zienkiewicz was wrong as to the role of out-of-node parameters. It turned out that barycentric application determines “upon the average” the character of nonstandard serendipic surface.*

*Keywords: Monte Carlo quasi-method; serendipic elements of the 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> orders; computational template; cubature of Newton-Cotes; centered element; stratified sample.*

### Постановка проблеми

Переважна більшість розрахунків за методом Монте-Карло здійснюється з використанням псевдовипадкових чисел (квазівипадкових точок). Практика свідчить, що в деяких випадках краще відмовитись від моделювання реального випадкового процесу і замість цього скористатися штучною моделлю. В роботі розглядаються обчислювальні шаблони і кубатури із квазівипадковими вузлами інтегрування. На конкретних прикладах біквадратичних і бікубічних серендипових поліномів показано, що послідовність квазівипадкових точок дає кращі результати. Це відомий факт і саме в цьому суть квазіметоду Монте-Карло. На квадратному шаблоні ( $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ ) сформульовано правило дев'яти аплікати для поліномів другого і третього порядків. Специфіка поведінки серендипової поверхні на границі і всередині носія дозволяє знайти просту залежність інтегральної характеристики лише від однієї аплікати в центрі носія. Це рідкісний випадок, коли кубатура Ньютона-Котеса ефективніша за кубатуру Гаусса-Лежандра.

### Аналіз попередніх досліджень і публікацій

Корисну інформацію про квазіметод Монте-Карло (термін Г. Секея) можна знайти в [1–3]. Серендипові елементи в методі скінченних елементів (МСЕ) відомі з 1968 р. [4].

Спочатку це були лише стандартні моделі. У 1982 р. [5, 6] вдалося сконструювати перші альтернативні моделі. Зараз альтернативних моделей – безліч, хоча мало хто знає про них. Нових цікавих задач також безліч. Одна з них – це задача про інтегральні характеристики серендипових поліномів. Правило дев'яти аплікат [7] модифіковано таким чином, щоб забезпечити швидкість і точність подвійного інтегрування серендипових поліномів другого і третього порядків.

#### Мета дослідження

Сконструювати придатні для квазіметоду Монте-Карло обчислювальний шаблон і кубатуру Ньютона-Котеса, які спростовують категоричну думку про переваги версії Гаусса-Лежандра. Результати стосуються як стандартних, так і альтернативних серендипових поліномів другого і третього порядків.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

В математиці відомі послідовності [2, 3] двовимірних не випадкових точок  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , для яких має місце рівність:

$$\frac{1}{mesD} \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Q_i). \quad (1)$$

Таку послідовність називають рівномірно розподіленою в області  $D$ . Бажано, щоб рівномірність розташування точок  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  в  $D$  мала місце не тільки при  $n \rightarrow \infty$ , а починаючи з невеликого  $n$ , і щоб точки  $Q_i$  достатньо просто обчислювались. Вибіркове арифметичне середнє апроксимує математичне сподівання функції випадкового вектора не тільки тоді, коли послідовність  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  випадкова і рівномірно розподілена в  $D$ . Достатньо забезпечити лише рівномірний розподіл цієї послідовності. В конкретних задачах послідовність квазівипадкових точок часто дає кращі результати [1, 2]. Наша задача полягає у побудові кубатури для оцінки інтеграла:

$$I = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dS, \quad (2)$$

де  $S$  – площа квадрата  $D$  ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ );  $N_i(x, y)$  – базисна функція серендипової інтерполяції, що асоціюється з вузлом  $i$ .

Ми розглянемо конкретні поліноми  $N_i(x, y)$  для біквадратичної інтерполяції (8 вузлів) та бікубічної інтерполяції (12 вузлів). Фактично відбувається заміна інтеграла інтегральною сумою. Цей прийом добре відомий з часів Кеплера. Точність такої заміни залежить від вагових коефіцієнтів і кількості доданків. Добре, коли замість арифметичного усереднення (проста вибірка) використовують зважене усереднення (стратифікована вибірка). Кубатури можуть суттєво залежати від властивостей поліномів  $N_i(x, y)$ . Нагадаємо про властивості:

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, \quad \sum_{i=1}^m N_i(x, y) = 1, \quad (3)$$

де  $m$  – кількість базисних функцій;  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера;  $i$  – номер функції,  $k$  – номер вузла інтерполяції.



До цього треба додати властивість міжелементної неперервності. Саме ця властивість "приховує" просту залежність між інтегральним середнім полінома  $N_i(x, y)$  і барицентричною аплікатою  $N_i(0;0)$  поверхні.

Перейдемо до конструювання кубатурної формули (правило дев'яти аплікат). Функцію, що інтегрується, позначимо через  $f(x, y) = N_i(x, y)$ . Щоб отримати повний спектр інтегральних характеристик, достатньо проінтегрувати лише "кутові" поліноми ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). В якості обчислювального шаблону візьмемо елемент лагранжевої біквадратичної інтерполяції (рис. 1, а).

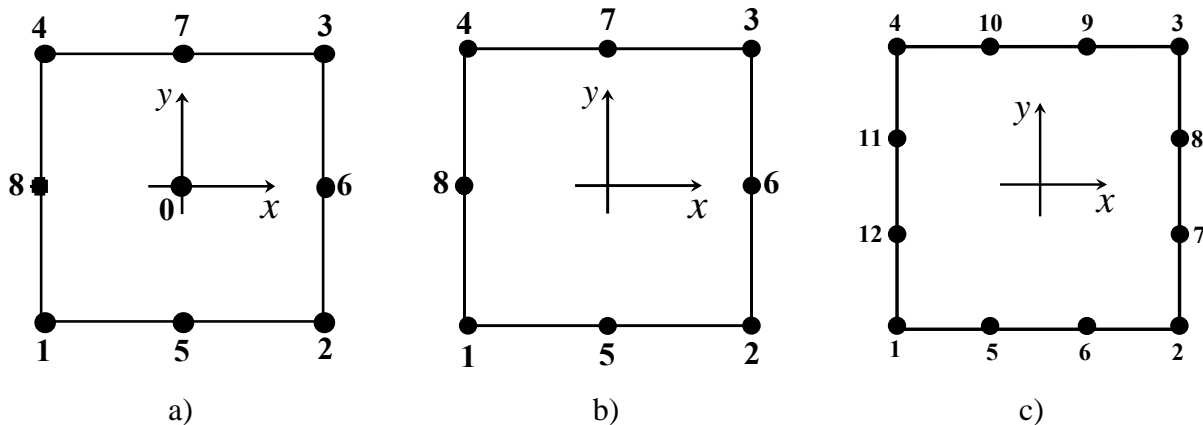


Рис. 1. а) обчислювальний шаблон; б) серендипів елемент другого порядку; в) серендипів елемент третього порядку.

Звертаємо увагу на рівномірний розподіл вузлів інтегрування на обчислювальному шаблоні (рис. 1, а). Ми покажемо три способи побудови кубатури.

**1. Процедура Ньютона-Котеса**

Щоб отримати вагові коефіцієнти стратифікованої вибірки достатньо мати три функції Лагранжа (рис. 1, а):

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y) \cdot xy;$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y) \cdot y;$$

$$N_0(x, y) = (1-x^2)(1-y^2).$$

Інтегральне усереднення дає:  $\gamma_i = \frac{1}{36}, i = 1, 2, 3, 4;$   $\gamma_i = \frac{1}{9}, i = 5, 6, 7, 8;$   $\gamma_0 = \frac{4}{9}.$

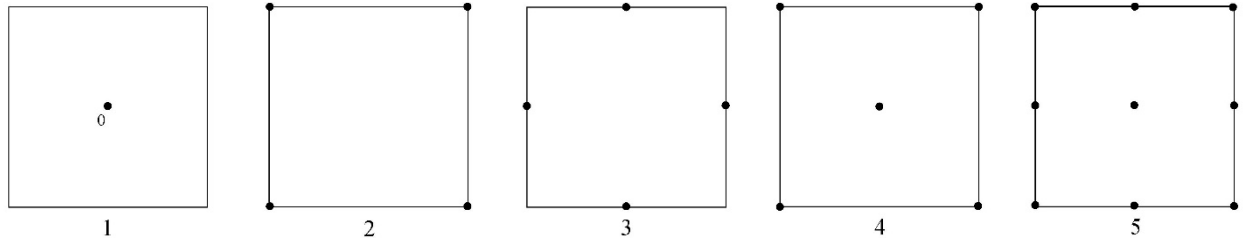
Таким чином, кубатура має вигляд:

$$\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot f_0 + \frac{1}{36} \cdot \sum_{i=1}^4 f_i + \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=5}^8 f_i, \tag{4}$$

де  $\bar{f}$  – середня апліката поверхні  $N_i(x, y)$  серендипової інтерполяції (біквдратичної або бікубічної).

**2. Ієрархічна процедура на основі повузлової пропорційності**

На рис. 2 показана ієрархія обчислювальних шаблонів



**Рис. 2. Ієрархія обчислювальних шаблонів.**

Коментар: модель 4 – це зважене усереднення моделей 1 і 2 з коефіцієнтами відповідно  $\frac{4}{5}$  і  $\frac{1}{5}$ ; модель 5 – це зважене усереднення моделей 3 і 4 з коефіцієнтами відповідно  $\frac{4}{9}$  і  $\frac{5}{9}$ . В результаті отримуємо кубатуру (4).

**3. Швидкий алгоритм для центрованих шаблонів**

Позначимо через  $x$  вагу кутового вузла та запишемо рівняння вагового балансу для моделі 5 (рис. 2):

$$4x + 16x + 16x = 1, \quad x = \frac{1}{36}.$$

Як бачимо, (4) – це двовимірний аналог відомого правила параболічних трапецій (Сімпсона). З точки зору математичної статистики (4) – це вибіркове середнє із дев'яти аплікат правильно стратифікованої вибірки. Слово "правильно" означає підтвердження гіпотези дифузійної "плями" у схемах випадкових блукань з поглинаючими вузлами. Це має пряме відношення до методу Монте-Карло. Для перевірки формули (4) розглянемо два стандартних серендипових полінома [4]. Кутовий поліном біквдратичної інтерполяції має вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y).$$

Формула (4) дає  $\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{36} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot 0 = -\frac{1}{12}$ , що співпадає з математичним сподіванням (кутовим "навантаженням") [4]. Зрозуміло, що вузлове "навантаження" на проміжний вузол дорівнює  $\frac{1}{3}$ .

Кутовий поліном бікубічної інтерполяції має вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(9(x^2 + y^2) - 10).$$

Формула (4) дає  $\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{5}{16}\right) + \frac{1}{36} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8}$ , що співпадає з

математичним сподіванням [4]. Приклади з альтернативними базисами серендипових моделей підтверджують абсолютну точність кубатури (4). Для альтернативних моделей з різноманітним рельєфом поверхонь важливо знайти просту залежність середньої аплікати  $\bar{f}$  від барицентричної аплікати  $f_0$ . Ця залежність має вигляд:

для елемента Q8:  $\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot f_0 + \frac{1}{36}$ ; для елемента Q12:  $\bar{f} = \frac{4}{9} \cdot f_0 + \frac{1}{72}$ .

### Висновки

Побудовано алгоритм квазіметода Монте-Карло для швидкого визначення спектру вузлових "навантажень" серендипових елементів Q8 і Q12. Є підстави вважати, що О. Зенкевич [4] помилявся щодо ролі невузлових параметрів. Виявляється, що  $f_0$  визначає "в середньому" характер нестандартної серендипової поверхні.

### Список використаної літератури

1. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей. — М. : Мир, 1990. — 240 с.
2. Соболев И. М. Метод Монте-Карло / И. М. Соболев. — М. : Наука, 1985. — 80 с.
3. Соболев И. М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб / И. М. Соболев. — М.: Знание, 1985. — 32 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
5. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франковский институт нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 9 с. — Депонировано в ВИНТИ. 18.03.82, № 1213.
6. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франковский институт нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 7 с. — Депонировано в ВИНТИ. 15.10.82, № 5167.
7. Хомченко А. Н. Правило параболических трапеций и кубатурные формулы / А. Н. Хомченко, Н. В. Коваль // Геометричне моделювання та інформаційні технології. Науковий журнал. — № 1(3). — Миколаїв: МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 2017. — С. 145–148.

### References

1. Sekey, G. Paradoxsy v teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. Mir. Moscow. (1990)
2. Sobol, I. M. Metod Monte-Karlo. Nauka. Moscow. (1985)
3. Sobol, I. M. Tochki. ravnomerno zapolnyayushchiye mnogomernyy kub. Znaniye. Moscow. (1985)
4. Zenkevich, O. Metod konechnykh elementov v tekhnike. Mir. Moscow. (1975)
5. Homchenko, A. N. Nekotorye veroyatnostnye aspekty MKE. Ivano-Frankovskiy institut nefiti i gaza. Ivano-Frankovsk. Deponirovano v VINITI. 18.03.82, № 1213. (1982)
6. Homchenko, A. N. Metod konechnykh elementov: stohasticheskiy podhod. Ivano-Frankovskiy institut nefiti i gaza. Ivano-Frankovsk. Deponirovano v VINITI. 15.10.82, № 5167. (1982)
7. Homchenko, A. N., Koval, N. V. Pravilo parabolicheskikh trapeციy i kubaturnye formuly. Neometrychne modeliyuvannya ta informatsiini tekhnolohii. 1(3), 145-148. (2017)

---

---

ІНЖЕНЕРНІ НАУКИ

---

---

УДК 519.713:681.52

М.Б. ЄДИНОВИЧ, І.В. БАЙРАК, С.Л. КАРПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет

**ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТНИХ АВТОМАТІВ ПРИ  
ПРОГРАМУВАННІ ПРОГРАМОВАНИХ ЛОГІЧНИХ КОНТРОЛЕРІВ**

*У статті досліджуються перспективні моделі дискретних автоматів, сумісні з мовами програмування програмованих логічних контролерів (ПЛК). Розглянуто методи і засоби проектування й реалізації систем управління дискретними подійними системами на основі ПЛК з використанням ієрархічних модульних недетермінованих автоматів (ІМНДА). Розглянуті у статті підходи дозволяють спеціалістам-технологам з базовими навичками програмування розробляти програми для ПЛК для реалізації складних алгоритмів управління технологічними процесами.*

*Для навчання студентів кафедри технічної кібернетики ХНТУ та дослідження моделей дискретних автоматів було розроблено навчально-дослідницький стенд. Стенд складається з PLC OWEN63, а також ПК та моделі об'єкта управління. Програмування контролера PLC63 виконується в середовищі CODESYS за допомогою мов IEC 61131-3.*

*Ключові слова: програмований логічний контролер, дискретний автомат, структурований текст, релейна діаграма, діаграма функціональних блоків, дискретні подійні системи.*

М.Б. ЕДИНОВИЧ, И.В. БАЙРАК, С.Л. КАРПЕНКО  
Херсонский национальный технический университет

**ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ ПРИ  
ПРОГРАММИРОВАНИИ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ЛОГИЧЕСКИХ  
КОНТРОЛЛЕРОВ**

*В статье исследуются перспективные модели дискретных автоматов, совместимые с языками программирования программируемых логических контроллеров (ПЛК). Рассмотрены методы и средства проектирования и реализации систем управления дискретными событийными системами на основе ПЛК с использованием иерархических модульных недетерминированных автоматов (ИМНДА). Рассмотренные в статье подходы позволяют специалистам-технологам с базовыми навыками программирования разрабатывать программы для ПЛК для реализации сложных алгоритмов управления технологическими процессами.*

*Для обучения студентов кафедры технической кибернетики ХНТУ и исследования моделей и дискретных автоматов был разработан учебно-исследовательский стенд. Стенд состоит из PLC OWEN63, а также ПК и модели объекта управления. Программирование контроллера PLC63 выполняется в среде CODESYS с помощью языков IEC 61131-3.*

*Ключевые слова: программируемый логический контроллер, дискретные автоматы, структурированный текст, релейная диаграмма, диаграммы функциональных блоков, дискретные событийные системы.*

M.B. YEDYNOVYCH, I.V. BAIRAK, S.L. KARPENKO  
Kherson National Technical University

## APPLICATION OF DISCRETE AUTOMATA MODELS AT PROGRAMMING OF PROGRAMMABLE LOGIC CONTROLLERS

*The application of digital technologies in the modern industry is due to the introduction of programmable logic controllers, personal and industrial computers at all levels of automated control systems. A significant number of management tasks in these systems are described by models of discrete automata, on the basis of which algorithms and programs for digital control are developed.*

*The article deals with the procedure of developing programs for programmable logic controllers on the basis of models belonging to the class of discrete event dynamic systems (DEDS). These systems are characterized by the discreteness of the space of states. Typically, Petri Networks and their extensions are used to design systems using the DEDS model. Despite its versatility of the model, created on the basis of this methodology in the study of parallel processes have a complex implementation. Instead, the use of nondeterministic automata (NA) makes it possible to investigate the location of an automaton in several local states when activating multiple transitions. An improved structure of non-deterministic automata in the form of a hierarchical model with a modular structure makes it quite easy to create programs for programmable logic controllers using the IEC 61131-3. The base module of HMNA is implemented on the basis of LD and FBD. It should be noted that in the case of modeling a discrete machine using graphs or Petri Networks, the direct use of IEC 61131-3 languages is rather problematic, so the structure of the DEDS design tool system based on the HMNA is proposed. This approach can be considered promising as it allows specialists with basic programming skills to develop digital control software for implementing complex algorithms.*

*A training and research stand was created for students of the Department of Technical Cybernetics of KNTU and conducting research in the field of discrete automata. The stand consists of a PLC OWEN63, a PC and a control object model. PLC63 controller programming is carried out in the CODESYS environment using languages IEC 61131-3.*

*Keywords: programmable logic controller, discrete automata, structured text, ladder diagram, function block diagrams, discrete event systems.*

### Постановка проблеми

Програмовані логічні контролери ПЛК (PLC) ведуть свій родовід від Modular Digital Controller -Modicon, який по суті був програмованим аналогом релейно-контактних схем управління. Модель Modicon 084 мала обсяг пам'яті 4 кБ і випускалася протягом десяти років. Сучасні ПЛК, окрім функцій дискретного управління, підтримують аналогові закони управління та мають розвинену систему входів/виходів з підтримкою обміну по цифровій мережі.

Як відомо [1], теорія цифрових автоматів розвивалася паралельно із розвитком ЕОМ. Історично спочатку почала розбудовуватися та частина теорії синтезу автоматів, яка має справу з етапом комбінаційного синтезу. У роботах В.І. Шестакова й К. Шеннона була вперше продемонстрована плідність ідеї застосування розвинутого раніше в рамках математичної логіки апарата так званої булевої алгебри до проблем комбінаційного синтезу релейно-контактних схем.

Розвиваючись у рамках логіко-математичної теорії релейно-контактних схем, теорія комбінаційного синтезу досягла значних успіхів і після появи електронних цифрових машин стала успішно пристосовуватися до проблем синтезу схем з електронних логічних елементів.

На нижніх рівнях ієрархії АСУТП ПЛК займають домінуючі позиції і практично витіснили ПК і однокристальні мікроконтролери завдяки спеціалізованій конструкції і розвиненому інтерфейсу. Для спрощення програмування ПЛК було розроблено стандарт ІЕС 61131-3, який описує мови програмування для програмованих логічних контролерів. Стандарт включає текстові мови: ST (структурований текст), IL (мова інструкцій) та графічні мови SFC (послідовні функціональні блоку), FBD, (діаграми функціональних блоків) LD (релейні діаграми). Наявність мов стандарту ІЕС 61131-3 дозволяє спеціалістам з базовими навичками програмування розробляти програмне забезпечення ПЛК. Але простота програмування може зіграти злий жарт із розробниками, оскільки проєктанти здебільшого послуговуються інтуїцією і власним досвідом, уникаючи системного підходу в розробці дискретного пристрою управління. У підсумку такий підхід призводить до появи помилок та затягування строків розробки проєкту. Тому очевидно, що застосування теорії дискретних автоматів дозволить врахувати усі можливі комбінації в роботі пристрою, забезпечить систему від зациклювань та аварійних ситуацій.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Задачі дискретного управління поділяються на дві основні групи – комбінаційні автомати та автомати з пам'яттю або послідовнісні [2]. Автомати першої групи формують вихідні сигнали, що не залежать від попереднього стану пристрою і визначаються лишень комбінацією сигналів на вході пристрою. Програмування ПЛК у цьому випадку зводиться до визначення логічної функції і не становить особливої проблеми.

А Автомати другого типу описуються відомими моделями Мура і Мілі. На відміну від автомата Мура, автомат Мілі відображає стан входу  $X$  управляючого автомата на його вихід  $Y$  без затримки, що підвищує швидкодію системи в цілому. Водночас відсутність затримки з боку операційного автомата може призвести до помилки в управляючому автоматі. У такому випадку доцільно використовувати автомат Мура. Для усунення подібних протиріч застосовують моделі, що об'єднують властивості обох автоматів, наприклад, в роботі [3] була запропонована композиційна модель СТ (рис. 1) та її модифікація CTS.

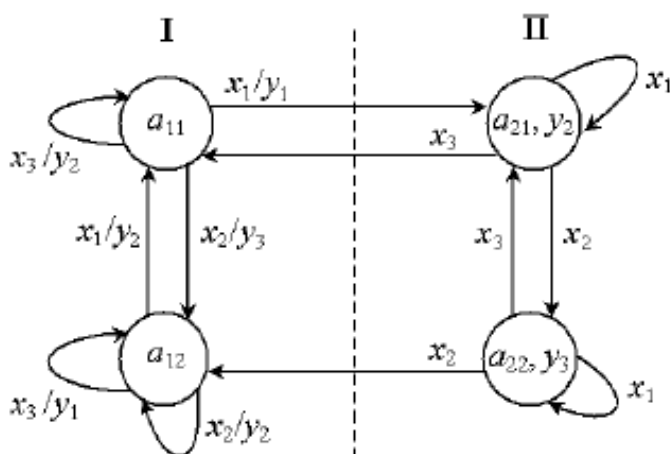


Рис. 1. Приклад графа СТ-автомата, I – підграф автомата Мілі, II – підграф автомата Мура

СТ-автомат об'єднує властивості автоматів Мілі і Мура і проявляє ті, чи інші властивості цих автоматів на одному абстрактному виході. Модель CTS подібна до СТ, але реалізує властивості автоматів Мура і Мілі незалежно у просторі координат

векторного виходу автомата та у часі. СТС модель узагальнює властивості автоматів Мура, Мілі С, СТ і може вироджуватися у будь-який з них.

Як видно з розглянутого прикладу класичні моделі Мура і Мілі не відповідають у повній мірі сучасним вимогам (надійності, швидкодії), тому ведеться розробка сучасної концепції кінцевого автомата.

#### Мета дослідження

У статті досліджуються перспективні моделі дискретних автоматів, сумісні з мовами програмування ПЛК.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

У сучасній теорії дискретних автоматів розробляється модель нового класу, що належить до дискретних динамічних систем - дискретні подійні системи ДПС (Discrete Event Dynamic Systems – DEES) [4]. Зазвичай для проектування систем з використанням моделі ДПС застосовуються мережі Петрі та їхні розширення. Попри свою універсальність, моделі, створені на основі зазначеної методики, при дослідженні паралельних процесів мають складну реалізацію. Натомість, застосування недетермінованих автоматів (НДА) дає можливість досліджувати знаходження автомата в кількох локальних станах при активації кількох переходів [5]. Структура відомих НДА є одномірною, що не дозволяє досліджувати складні ієрархічні системи автоматизації. У роботі [6] запропонована ієрархічна модель НДА з модульною структурою - ІМНДА. Базисний модуль ІМНДА визначається наступним кортежем:

$$MB = (EI, DI, DO, S, \delta, \varphi, \gamma, g_0), \quad (1)$$

де  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  – множина локальних станів автомата,  $EI = \{ei_1, ei_2, \dots, ei_n\}$  – множина імпульсних входів;  $DI = \{di_1, di_2, \dots, di_m\}$  – множина потенціальних сигналів управління;  $EO = \{eo_1, eo_2, \dots, eo_p\}$  – множина імпульсних виходів;  $DO = \{do_1, do_2, \dots, do_q\}$  – множина потенціальних сигналів управління на виході.

Ідея запропонованого метода полягає у створенні складних структур недетермінованих автоматів з базових модулів уніфікованої структури. Базовий модуль представляють у вигляді функціонального блока (рис.2).

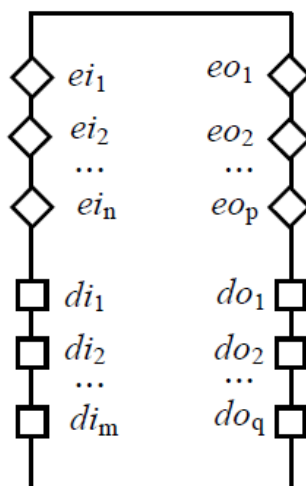


Рис. 2. Інтерфейс модуля ІМНДА

Множина  $\Delta$  переходів між локальними станами автомату:

$$\Delta \subseteq S \times EI \times 2^{DI} \times 2^{DI} \times 2^S \times 2^S \times S. \quad (2)$$

Перехід з одного локального стану в інший  $\delta \in \Delta$ .  $Pr_i(\delta)$  –  $i$ -та координата кортежу  $\delta$ . Тоді  $Pr_1(\delta)$  та  $Pr_7(\delta)$  – вихідний та цільовий стан переходу відповідно;  $Pr_2(\delta)$  – миттєвий вхідний сигнал;  $Pr_3(\delta)$  та  $Pr_4(\delta)$  – множини нульових та одиничних вхідних сигналів управління відповідно;  $Pr_5(\delta)$  та  $Pr_6(\delta)$  – множини дозвільних та заборонних станів автомату відповідно. Робота автомату обмежується наступними виразами:

$$Pr_5(\delta) \cap Pr_6(\delta) = \emptyset \text{ – стан автомату не може бути одночасно "0" та "1";}$$

$Pr_3(\delta) \cap Pr_4(\delta) = \emptyset$  – потенційний сигнал управління на вході повинен бути або одиничним, або нульовим.

Запропонований автомат, так само, як СТ-автомат, поєднує властивості як автомата Мура, так і автомата Мілі (відносно вихідних сигналів).

Структурна ієрархія модульного НДА дозволяє в один момент часу мати кілька дозволених переходів [6]. Перехід  $\delta$  вважається тригерним, коли  $Pr_2(\delta) = \emptyset$ , або форсованим зовнішнім сигналом  $Pr_2(\delta) \neq \emptyset$ , тобто  $Pr_2(\delta) \in EI$ , натомість тригерний перехід завжди активний. Усі активні переходи в автоматах даного типу можуть виконуватися синхронно.

Базові ієрархічні модулі дозволяють створювати комбінації з кількох модулів (складені модулі), або модульні мережі. Таким чином, запропонована структура недетермінованого автомата дозволяє доволі легко розробляти програми для ПЛК на основі LD або FBD мов стандарту IEC 61311-3.

Попри те, що модель НДА дозволяє реалізацію дозволених паралельних переходів за певних умов, наприклад, при одночасному читанні і запису стану елемента  $S$ . Для усунення подібних колізій в [7] пропонується двотактна модель НДА. Змінна стану  $S$  розділяється на  $S'$  та  $S''$ . У першому такті формується компонента  $S'_j$  у результаті переходу  $S''_i$  з  $i$ -го у  $j$ -й стан  $S''_i \wedge C_{i,j}$ , де  $C_{i,j}$  – дозвіл цього переходу. У другому такті  $S'_j$  передається на вихід блоку:

$$S'_j = S''_j. \quad (3)$$

Для реалізації запропонованої двотактної моделі НДА мовою LD використовуються релейні структури для моделювання елементів пам'яті, що представляють стан. Відповідно до двоконтактних побудов стану реалізаційної форми НДА виділяють реле першого ступеня для реалізації перших компонентів станів і реле другого ступеня відповідно для реалізації других компонентів. На рис. 3 приведена загальна схема реалізації базисного модуля ІМНДА на основі комбінування мов LD і FBD.

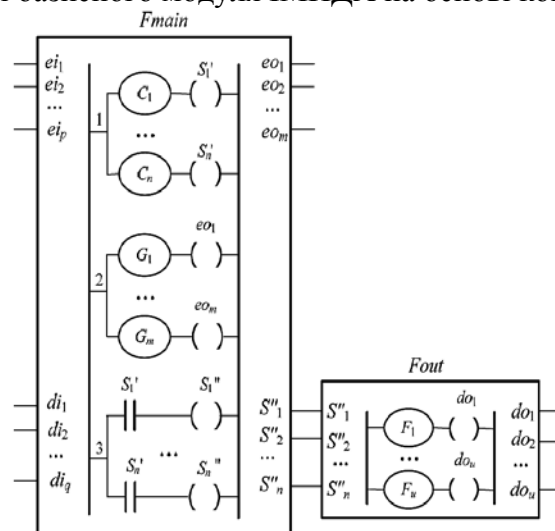


Рис. 3. Загальна схема реалізації базисного модуля ІМНДА.



Модуль складається з двох функціональних блоків  $F_{main}$  і  $F_{out}$ , кожен з яких описується за допомогою LD-діаграм. LD-діаграма, інкапсульована в ФБ  $F_{main}$ , і складається з трьох груп. Перша група формує значення  $S'_j$  першого такту НДА. Макрокола, що обчислюють умови збудження реле  $C_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), позначені на рис. 3 овалами. Обчислення цих умов виконується відповідно до виразу  $S''_i \wedge C_{i,j}$ . Друга група обчислює вихідні значення подієвих ("імпульсних") сигналів  $eo_m$ . Умови переходів  $G_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) обчислюються наступним чином:

$$G_k = \bigvee_{(S_i, S_j) \in E_k} (S_i'' \wedge C_{i,j}), \quad (4)$$

де  $E_k$  - множина переходів автомата, маркованих сигналом  $eo_k$ .

Третя група здійснює перехід  $S'_j = S''_j$ . Таким чином, на виході  $F_{main}$  маємо значення вихідних сигналів  $eo_m$  та сигналів стану  $S''_j$ .

LD діаграма, інкапсульована в ФБ  $F_{out}$ , обчислює значення вихідних сигналів управління  $do$  на основі компонентів станів  $S''_n$  другого такту. Використовувані макрокола  $F_k$  ( $k = \overline{1, u}$ ) у вигляді паралельно з'єднаних контактів обчислюють функції:

$$F_k = \bigvee_{S_i \in Z_k} S_i'', \quad (5)$$

де  $Z_k$  – множина станів, при активних значеннях яких видається інформаційний сигнал  $do_k$ .

Слід зазначити, що у випадку моделювання дискретного автомата з використанням графів або мереж Петрі безпосереднє застосування мов ІЕС 61131-3 доволі проблематично, тому в роботі [7] запропонована структура інструментальної системи проектування ДПС на основі ІМНДА. Фрагмент запропонованої інструментальної системи приведено на рис. 4.

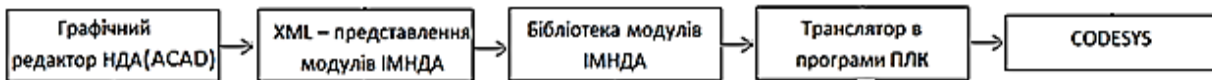


Рис. 4. Фрагмент структури системи підтримки проектування ДПС на основі ІМНДА.

Для формування базового модуля НДА застосовується графічний редактор ACAD. Транслятор XML-Описів ІМНДА в програми для ПЛК призначено для автоматичного перетворення ІМНДА в програми ПЛК, представлені у відповідності зі стандартом PCOpen XML. З метою дослідження властивостей дискретних систем управління, а також застосування їх у навчальному процесі студентів кафедри технічної кібернетики ХНТУ, було розроблено навчально-дослідницький стенд на основі контролера ОВЕН ПЛК63, рис. 5.

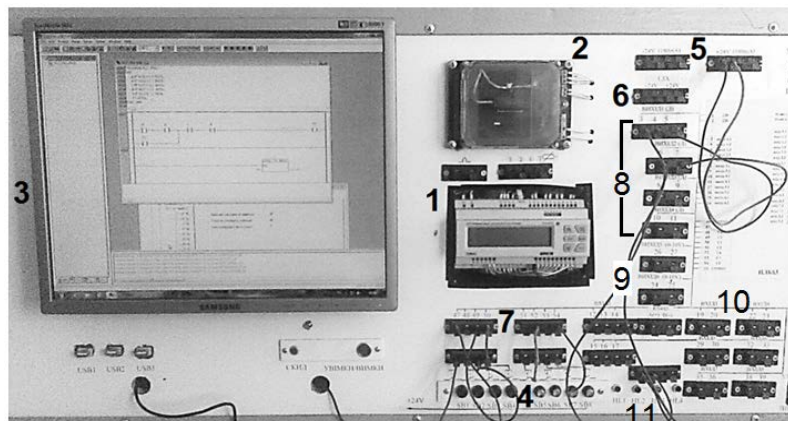


Рис. 5. Лабораторний стенд на базі ПЛК63  
1 – ПЛК63; 2 – ЕП1; 3 – монітор ПК; 4-10 клеми для підключення зовнішніх пристроїв; 11 – світлодіодні індикатори.

Контролер має моноблочну конструкцію з можливістю підключення модуля розширення MP1. Має вісім дискретних і вісім універсальних аналогових входів. Тип аналогового датчика (ТП, ТО, резистивний або активний струми чи напруги) задається програмно. Також контролер має шість виходів, один з яких дискретний, решта – аналогові або дискретні. Окрім самого контролера, стенд обладнаний персональним комп'ютером з необхідним програмним забезпеченням та моделлю об'єкта управління - емулятором печі ЕП1, обладнаним датчиком температури. Характеристики контролера дозволяють використовувати його для управління різноманітними технологічними об'єктами та реалізовувати складні алгоритми програмного управління. Стенд оснащено клемми для швидкого та зручного підключення входів та виходів контролера. Дискретні входи контролера можуть бути підключені до кнопок, що емулюють дискретні сигнали або до дискретних датчиків, які можуть бути встановлені на моделях конвеєрів, підйомників, виконавчих механізмах.

Програмування контролера ПЛК63 здійснюється у середовищі CoDeSys з використанням мов IEC 61131-3:

- структурований текст (ST — Structured Text);
- послідовні функціональні схеми (SFC — Sequential Function Chart);
- діаграми функціональних блоків (FBD — Function Block Diagram);
- релейно-контактні схеми, або релейні діаграми (LD — Ladder Diagram);
- список інструкцій (IL — Instruction List).

Запропонована конфігурація стенду дозволяє виконувати наступні навчальні завдання:

- здобуття навичок програмування на мовах IEC 61131-3 у середовищі CoDeSys\$;
- проектування і дослідження дискретних автоматів;
- проектування і дослідження САР технологічних об'єктів;
- розробка простих SCADA – проектів із застосуванням ПЛК63 і моделей об'єктів, як реальних так і програмних;
- побудова простих мереж Modbus з використанням кількох контролерів і пристроїв вводу/виводу;
- проектування і дослідження релейних схем управління.

#### **Висновки**

Модульна структура ІМНДА має добру сумісність із відомими засобами програмування ПЛК. Запропонована методика дозволяє створювати набори бібліотечних блоків у середовищі розробки програм для ПЛК, наприклад, CODESYS, з подальшим використанням у прикладних програмах контролерів. Особливо просто ієрархічні модулі НДА реалізуються у вигляді функціональних блоків, опис яких можна реалізовувати на мовах LD або ST.

Створення інструментальних систем проектування цифрових автоматів дозволить суттєво підвищити ефективність проектування систем управління на основі ПЛК.

#### **Список використаної літератури**

1. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов / В.М. Глушков. — М.: Физматгиз, 1962. — 476 с.
2. Соловьев В.В. Проектирование цифровых систем на основе программируемых логических интегральных схем / В.В. Соловьев. — М.: Горячая линия-Телеком, 2001. — 635с.
3. Полин Е.Л. Абстрактные композиционные автоматы / Е.Л. Полин, К.В. Защелкин // Труды Одесского политехнического университета. — 2006. — Вып. 1 (25). — С. 88-94.

4. Cassandras C.G. Introduction to Discrete Event Systems / C.G. Cassandras, C.S. Lafortune. — Springer, 2008. — 772 с.
5. Вашкевич Н.П. Недетерминированные автоматы в проектировании систем параллельной обработки / Н.П. Вашкевич. — Пенза: Изд-во ПГУ, 2004. — 280 с.
6. Дубинин В.Н. Проектирование и реализация систем управления дискретными событийными системами на основе иерархических модульных недетерминированных автоматов. (Ч. 1. Формальная модель) / В.Н. Дубинин, Д.Н. Дроздов, Д.В. Артамонов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. — 2016. — № 1 (37). — С. 28-39.
7. Дубинин В.Н. Проектирование и реализация систем управления дискретными событийными системами на основе иерархических модульных недетерминированных автоматов. (Ч. 2. Методы и средства) / В.Н. Дубинин, Д.А. Будаговский, Д.Н. Дроздов, Д.В. Артамонов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. — 2016. — № 2 (38). — С. 18-32.

### **References**

1. Glushkov, V. M. Sintez tsifrovyykh avtomatov. Fizmatgiz. Moscow. (1962)
2. Solovev, V. V. Proektirovanie tsifrovyykh sistem na osnove programmirovemykh logicheskikh integralnykh shem. Goryachaya liniya-Telekom. Moscow. (2001)
3. Polin, E. L., Zashelkin, K. V. Abstraktnye kompozitsionnye avtomaty. Trudy Odesskogo politehnicheskogo universiteta. **1** (25), 88-94. (2006)
4. Cassandras, C. G., Lafortune, C. S. Introduction to Discrete Event Systems. Springer. (2008)
5. Vashkevich, N. P. Nedeterminirovannyye avtomaty v proektirovanii sistem parallelnoy obrabotki. Izd-vo PGU. Penza. (2004)
6. Dubinin, V. N., Drozdov, D. N., Artamonov, D. V. Proektirovanie i realizatsiya sistem upravleniya diskretnymi sobytiynymi sistemami na osnove ierarhicheskikh modulnykh nedeterminirovannykh avtomatov (Ch. 1. Formalnaya model). Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tehnicheskie nauki. **1**(37), 28-39. (2016)
7. Dubinin, V. N., Budagovskiy, D. A., Drozdov, D. N., Artamonov, D. V. Proektirovanie i realizatsiya sistem upravleniya diskretnymi sobytiynymi sistemami na osnove ierarhicheskikh modulnykh nedeterminirovannykh avtomatov (Ch. 2. Metody i sredstva). Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tehnicheskie nauki. **2** (38), 18–32. (2016)

УДК 656.072

П.В. ЛУБ'ЯНИЙ, І.А. СЕЛІВЕРСТОВ, Р.В. КАЛІМБЕТ  
Херсонський національний технічний університет

### **ОРГАНІЗАЦІЯ УПРАВЛІННЯ РОБОТОЮ МАРШРУТНОЇ СИСТЕМИ МІСТА НА ОСНОВІ ОЦІНКИ ЯКОСТІ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ПАСАЖИРІВ**

*У роботі аналізується сучасний стан організації управління роботою систем міського пасажирського транспорту з метою розробки заходів щодо підвищення рівня управління на основі можливостей нового методу оцінки якості обслуговування пасажирів. Найбільш проблемним питанням є точне моделювання поведінки пасажирів у транспортній системі. Хоча гіпотеза про ймовірнісний характер вибору пасажиром маршруту є загальноприйнятною, більшість існуючих методів зводиться до використання нормованої моделі, в якій ймовірність вибору пасажиром шляху пересування прямо пропорційна його привабливості та обернено пропорційна загальній привабливості всього набору альтернативних шляхів для пересування. Проте нормалізована модель не пояснює причин випадкового характеру процедури вибору маршруту і не відповідає на питання про кількість реальних альтернатив при реалізації потреби пасажирів в поїздках. Використання "моделі поведінкового попиту" можна вважати найбільш точним для подолання проблем калібрувальної моделі, але слід зазначити, що цей підхід запозичений з мікроекономіки товару і не цілком відповідає поведінці пасажирів в системі міського пасажирського транспорту. Крім того, використання якісних, а не кількісних показників частоти використання конкурентних маршрутів значно зменшує можливості та точність моделей.*

*Ключові слова: пасажир. транспорт, шлях проходження, транспортна мережа, маршрутна мережа, маршрут.*

П.В. ЛУБ'ЯНИЙ, И.А. СЕЛИВЕРСТОВ, Р.В. КАЛИМБЕТ  
Херсонский национальный технический университет

### **ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ РАБОТОЙ МАРШРУТНОЙ СИСТЕМЫ ГОРОДА НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕВОЗОК ПАССАЖИРОВ**

*В работе анализируется современное состояние организации управления работой систем городского пассажирского транспорта с целью разработки мероприятий по повышению уровня управления на основе возможностей нового метода оценки качества обслуживания пассажиров. Наиболее проблемным вопросом является точное моделирование поведения пассажиров в транспортной системе. Хотя гипотеза о вероятностном характере выбора пассажира маршрута является общепринятой, большинство существующих методов сводится к использованию нормированной модели, в которой вероятность выбора пассажиром пути следования прямо пропорциональна привлекательности этого пути и обратно пропорциональна общей привлекательности всего набора альтернативных путей для передвижения. Однако нормализованная модель не объясняет причин случайного характера процедуры выбора маршрута и не отвечает на вопрос о количестве реальных альтернатив при реализации потребности пассажира в поездках. Использование "модели поведенческого спроса" можно считать наиболее точным для преодоления проблем калибровочной модели, но следует отметить, что этот подход заимствован из микроэкономики товара и не вполне соответствует поведению пассажира в системе городского пассажирского транспорта. Кроме того, использование качественных, а не количественных показателей частоты использования конкурентных маршрутов значительно уменьшает возможности и точность моделей.*

*Ключевые слова: пассажир. транспорт, путь следования, транспортная сеть, маршрутная сеть, маршрут.*

P.V. LUBIANY, I.A. SELIVERSTOV, R.V. KALIMBET  
Kherson National Technical University

## ORGANIZATION OF MANAGEMENT OF THE WORK OF THE ROUTE SYSTEM OF THE CITY ON THE BASIS OF ASSESSMENT OF QUALITY OF TRANSPORT OF PASSENGERS

*Efficient and reliable urban passenger transport is a major factor in socio-political and economic stability. The paper analyzes the current state of the organization of the management of the work of city passenger route systems in order to develop measures to improve the level of management based on the possibilities of a new method of assessing the quality of passenger service. The most problematic issue here is the precise modeling of passenger behavior in the transport system. Although the hypothesis about the probabilistic nature of the passenger's choice of the passageway is generally accepted, most of the existing techniques are reduced to the use of a normalized model in which the probability of a passenger's choice of path is directly proportional to his attractiveness and inversely proportional to the overall attractiveness of the entire set of alternative paths for correspondence. However, the normalized model does not explain the reasons for the random nature of the procedure for choosing a route and does not answer the question about the number of real alternatives when realizing the passenger's need for travel. The positioning of the problem in the «modelling behavioural demand» can be considered the most accurate to overcome the problems of the calibration model, but it should be noted that the approach is borrowed from the commodity microeconomics and does not entirely correspond to the behaviour of the passenger in the system of urban passenger transport. In addition, the use of qualitative, rather than quantitative meters of the frequency of the use of competitive paths significantly reduces the possibilities and accuracy of models. The article justified the amount and method of obtaining the basic characteristics of the local routing system that should form the basis of the routing database system. The essence of this method is to record the actual options for the passage of a passenger from home to work for a sufficiently long period of time. This allows you to determine the statistical probabilities of selecting a passenger of a route. These probabilities are unmatched and objective, as they represent the actual processes occurring in the transport system, and characterize the respondent's relation to the parameters of the transport process.*

*Keywords: passenger: transport, route of transit, transport network, route networks, route.*

### Постановка проблеми

Ефективна і надійна робота міського пасажирського транспорту (МПТ) є найважливішим фактором соціально-політичної та економічної стабільності. МПТ забезпечує основну частину трудових поїздок населення, безпосередньо впливаючи на ефективність функціонування системи міського господарства, підприємств, організацій, установ. Маршрутний пасажирський транспорт – один із важливих чинників забезпечення життєдіяльності, на його частку припадає понад 85-90% всіх поїздок в містах. Сформована система організації перевезень, заснована на підвищенні щільності маршрутної мережі і забезпеченні регулярності руху транспорту, не завжди задовольняє попит на транспортні послуги, особливо в "час-пік". Це зумовлює необхідність застосування нових управлінських рішень щодо організації роботи систем міських пасажирських перевезень. Разом з цим з'явилася потреба в створенні якісно нових систем,

здатних гнучко реагувати на постійно мінливі умови функціонування і вимоги споживачів. Незважаючи на зусилля органів місцевого самоврядування та транспортних підприємств по адаптації до ринкових перетворень, в останні роки в зазначеній сфері мають місце такі проблеми:

- відсутність загальноприйнятої методики оцінки результатів роботи міського маршрутного транспорту;
- відсутність об'єктивної інформації про потреби населення в пересуваннях;
- велике розмаїття можливих варіантів розвитку системи;
- велика кількість суб'єктів, що діють в конкретній економічній сфері;
- висока соціальна значимість об'єкта, яка обумовлює наявність серйозних вимог до якості управлінських рішень;
- слабкий розвиток системи моніторингу роботи транспорту і відсутність відповідної бази даних.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Пошуку дієвих методів планування роботи систем масового пасажирського транспорту в містах присвячено значну кількість робіт, детальний аналіз яких можна знайти в роботі [1].

Найбільш проблематичним питанням тут є точне моделювання поведінки пасажирів в транспортній системі. Хоча гіпотеза про ймовірнісний характер вибору пасажиром шляху проходження і є загальноприйнятою, більшість з існуючих методик зводяться до використання нормованої моделі, в якій ймовірність вибору пасажиром шляху проходження прямо пропорційна привабливості цього шляху і обернено пропорційна сумарній привабливості всього набору альтернативних варіантів шляху для кореспонденції. Однак нормована модель не пояснює причин випадкового характеру процедури вибору шляху і не дає відповіді на питання про кількість реальних альтернатив при реалізації потреби пасажира в пересуванні.

Постановку задачі в підході "моделювання поведінкового попиту" [2] можна вважати найбільш точною для подолання проблем калібрувальної моделі, але слід зазначити, що підхід [2] запозичений з товарної мікроекономіки і не зовсім відповідає поведінці пасажира в системі міського пасажирського транспорту. Крім того, використання якісних, а не кількісних вимірників частоти використання конкурентних варіантів шляху істотно знижує можливості і точність моделей.

Для підвищення точності моделювання в роботі [3] постулати з роботи [2] доповнені допущенням про незначну частку помилкових рішень, прийнятих пасажиром при виборі шляху проходження і обмеженнями на розгляд тільки трудових пересувань. Це дало можливість формалізувати процедуру вибору пасажиром шляху проходження і визначити ймовірність вибору шляху як ймовірність того, що параметри цього шляху опиняться для пасажира більш привабливими (ефективними), ніж параметри інших варіантів шляху.

З іншого боку, за допомогою методу обстеження переваг пасажирів – методу безпосередньої фіксації вибору, який описаний в роботі [4], існує можливість отримувати фактичні значення ймовірності вибору кожного варіанту шляху проходження, які використовує пасажир.

### **Мета дослідження**

Метою роботи є розробка основних заходів, необхідних для організації управління роботою міської пасажирської маршрутної системи на новому рівні, з урахуванням можливостей описаного в [3], нового методу оцінки якості перевезень пасажирів у містах.



проходження і, тим самим, отримати об'єктивну оцінку їх роботи.

Для цього потрібно знайти відносне зміщення часу очікування транспортних засобів конкурентних варіантів шляху проходження, яке призводить до отримання статистичних ймовірностей і характеризує відносне зниження привабливості шляху проходження в порівнянні з кращим варіантом шляху.

Далі, за допомогою регресійного аналізу, отримані зміщення зіставляються з параметрами відповідних шляхів слідування, і формується модель, яка характеризує відношення пасажира до параметрів шляху.

Розробка інструменту для оцінки ефективності роботи маршрутного транспорту [3] дозволяє перейти до створення інструменту прийняття ефективних рішень в сфері маршрутних перевезень пасажирів – програми розрахунку параметрів МС і окремих маршрутів. Алгоритм розв'язання задачі включає в себе наступні етапи:

1. Формування масиву вихідних даних.
  - 1.1 Моделювання транспортної мережі міста.
  - 1.2 Моделювання діючої маршрутної мережі в рамках транспортної мережі міста.
  - 1.3 Формування потенційної структури рухомого складу за видами транспорту.
  - 1.4 Моделювання функцій привабливості шляхів слідування для однорідних груп пасажирів.
  - 1.5 Моделювання потреб населення в пересуваннях для ранкового періоду "пік".
2. Перевірка адекватності отриманої моделі на діючій маршрутній мережі.
  - 2.1 Розрахунок параметрів роботи маршрутів і мережі в цілому за допомогою програмного забезпечення.
  - 2.2 Порівняння розрахункових параметрів роботи маршрутів і фактичних даних.
  - 2.3 Уточнення моделей в рамках довірчих інтервалів.
3. Формування раціональної маршрутної мережі міста.
  - 3.1 Формування сукупності альтернативних маршрутів.
  - 3.2 Інтерактивний вибір оптимального варіанта.
    - 3.2.1 Модифікація чинного варіанту маршрутної мережі за рахунок сукупності альтернативних маршрутів.
    - 3.2.2 Визначення альтернативних виконавців для частини маршрутів з урахуванням фінансових можливостей міста і перевізників.
    - 3.2.3 Оцінка варіантів використання різного рухомого складу на частини маршрутів.
    - 3.2.4 Оцінка варіантів ціни за проїзд на соціально значущих маршрутах.
  - 3.3 Розробка варіантів роботи маршрутної мережі при закритті окремих ділянок транспортної мережі.

Крім інструменту вирішення управлінських завдань, для ефективного управління системою маршрутного пасажирського транспорту в містах потрібна наявність бази даних про потреби населення і параметри роботи маршрутів. Для створення такого комплексу є всі передумови з точки зору сучасного рівня знань про об'єкт – міська маршрутна система. Проблема полягає в часі і засобах, необхідних для вирішення цього завдання.

База даних про потреби населення і параметри роботи міських маршрутів є необхідною умовою прийняття обґрунтованих рішень в сфері маршрутного пасажирського транспорту.

Крім цього вона дає можливість оцінки рівня якості обслуговування пасажирів, надійності і ефективності роботи транспорту на маршрутах, прогнозування попиту на перевезення.

Створення такої бази має бути результатом вибіркового моніторингу різних



елементів транспортного процесу, який з одного боку надає інформацію для оперативного управління процесом перевезень з боку міської влади та виконання ними контрольних функцій, з іншого – поповнює базу даних, обробка та аналіз яких дозволять підняти на новий рівень управління на поточному та перспективному рівнях. У перспективі, для зберігання і обробки бази даних необхідна розробка спеціального програмного продукту, можливо на одній з наявних платформ (наприклад, 1С).

Інструментами моніторингу повинні бути:

- обстеження різних елементів транспортного процесу за допомогою професійно підготовлених обліковців, телеапаратури та засобів автоматизованого обліку, встановлених на маршрутних транспортних засобах;
- фіксування методом моментних спостережень стану маршрутних перевезень, комунікацій різних видів транспорту і транспортної мережі за допомогою пересувних лабораторій;
- дослідження поведінки пасажирів в транспортній системі за допомогою методу фіксації виявленого вибору і соціологічних опитувань;
- документовані звіти транспортних підприємств про виконану на маршрутах роботу.

Обсяг і спосіб отримання основних характеристик роботи міської маршрутної системи, які повинні складати основу бази даних про маршрутної системи:

1. Ємності зупиночних пунктів, інтенсивність підходу пасажирів і час очікування транспорту - виходять за допомогою спеціальних обстежень силами обліковців або за допомогою телеапаратури.
2. Техніко-експлуатаційні показники роботи маршрутів - обстеження проводяться табличним методом обліковцями або засобами автоматизованого обліку, за допомогою пересувної лабораторії.
3. Пасажиропотоки на ділянках маршрутної мережі і інтервали руху на маршрутах обстежується візуальним методом обліковцями або за допомогою телеапаратури.
4. Можливість вибору пасажирями шляхів слідування - методом фіксації фактичного вибору.

### **Висновки**

За допомогою наведеної методики управління міським пасажирським транспортом можливе вирішення наступних завдань:

- розробка генеральних планів розвитку маршрутної системи до 10-ти і більше років вперед для формування політики капітальних вкладень управлінням транспорту і зв'язку органів місцевого самоврядування на основі переваг пасажирів, планів розвитку території міста та можливостей міського бюджету. Сюди включаються питання розвитку комунікацій та інфраструктури різних видів транспорту, визначення раціональних типів рухомого складу, рівня фінансування пріоритетних видів транспорту і т.д.;
- деталізація планів і розробка оптимального варіанта функціонування маршрутної системи в рамках постійних потреб населення в пересуваннях на період до 5-ти років;
- розрахунок і обґрунтування раціональної величини тарифів на перевезення пасажирів;
- розробка типових планів роботи маршрутів при виникненні позаштатних ситуацій;
- оцінка доцільності відкриття або зміни параметрів роботи маршрутів з ініціативи учасників процесу в рамках діючої маршрутної системи;

- інші завдання, що вимагають оцінки наслідків прийнятих рішень для пасажирів та інших учасників транспортного процесу.

#### **Список використаної літератури**

1. Доля В.К. Теоретические основы и методы организации маршрутных автобусных перевозок пассажиров в крупных городах: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.22.10 / В.К. Доля. – М., 1993. – 301 с.
2. Грановский Б.И. Моделирование пассажирских потоков в транспортных системах / Б.И. Грановский // Итоги науки и техники. Серия: Автомобильный и городской транспорт. – 1986. – Т. 11. – С. 67-107.
3. Горбачов П.Ф. Підхід до визначення ймовірності вибору пасажиром шляху пересування / П.Ф. Горбачов // Вісник ХНАДУ – Харків: Вид-во ХНАДУ, 2006. – Вип. 19. – С. 88-91.
4. Горбачёв П.Ф. Определение вероятности выбора пассажиром пути следования / П.Ф. Горбачёв, В.В. Дубровский // Информационно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2001. – № 2. – С. 7–9.

#### **References**

1. Dolya, V. K. Teoreticheskie osnovyi i metodyi organizatsii marshrutnyih avtobusnyih perevozk passazhirovo v krupnyih gorodah: diss. ... d-ra tehn. nauk: 05.22.10. Moscow. (1993)
2. Granovskiy, B. I. Modelirovanie passazhirskih potokov v transportnyih sistemah. Itogi nauki i tehniki. Seriya: Avtomobilnyiy i gorodskoy transport. **11**, 67-107. (1986)
3. Horbachov, P. F. Pidkhid do vyznachennia ymovirnosti vyboru pasazhyrom shliakhu peresuvannia. Visnyk KhNADU.**19**, 88-91. (2006)
4. Gorbachyov, P. F., Dubrovskiy, V. V. Opredelenie veroyatnosti vyibora passazhirom puti sledovaniya. Informatsiino-keruiuchi systemy na zaliznychnomu transporti. **2**, 7–9. (2001)

УДК 515.2

В.Л. МАРТИНОВ

Київський національний університет будівництва і архітектури

Г.А. ВІРЧЕНКО

Національний технічний університет України

"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

### **ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОЇ ОРІЄНТАЦІЇ ВІКОН ЕНЕРГОЕФЕКТИВНИХ БУДІВЕЛЬ КАМПУСІВ**

*Розроблено комп'ютеризований спосіб визначення раціональної орієнтації світлопрозорих конструкцій у стінах енергоефективних будівель кампусів з точки зору мінімального теплового балансу з оточуючим середовищем, при якому тепловий баланс вікон менший за тепловий баланс стіни. Даний спосіб визначення орієнтації можливо використовувати при проектуванні як енергоефективних, так і звичайних будівель, при новому будівництві, в тому числі на території кампусів.*

*Ключові слова: енергоефективні будівлі, раціональна орієнтація вікон, тепловий баланс вікна.*

В.Л. МАРТЫНОВ

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Г. А. ВИРЧЕНКО

Национальный технический университет Украины

"Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ОКОННЫХ ПРОЕМОВ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНЫХ ЗДАНИЙ КАМПУСОВ**

*Разработан компьютеризированный способ определения рациональной ориентации оконных проемов с расположением светопрозрачных конструкций в стенах здания с точки зрения минимального теплового баланса с окружающей средой, при которой тепловой баланс окон меньше теплового баланса стен. Данный способ определения ориентации можно использовать при проектировании как энергоэффективных, так и обычных зданий, в том числе на территории кампусов.*

*Ключевые слова: энергоэффективные здания, рациональная ориентация окон, тепловой баланс окна.*

V. L. MARTYNOV

Kyiv National University of Construction and Architecture

G. A. VIRCHENKO

National Technical University of Ukraine

"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

### **DETERMINATION OF THE RATIONAL ORIENTATION OF WINDOWS OF ENERGY EFFICIENT BUILDINGS OF CAMPUS**

*The task of reducing the energy costs of campus buildings is relevant for improving their energy efficiency. This is possible due to the optimization of geometric parameters of buildings, including at the expense of rational azimuth orientation of windows in enclosing structures. The orientation of translucent structures greatly affects the level of thermal balance of buildings. The rational arrangement of window openings on the facades of buildings contributes to increasing*

*the energy efficiency of buildings to 10 percent. The thermal balance of modern windows during a heating period with a certain orientation may be smaller compared to opaque wall structures. The designer needs to have a way to quickly determine the limits of the rational orientation of translucent structures when they are located in the enclosing structures of buildings.*

*A computerized way of determining the rational orientation of window openings with the location of translucent structures in the walls of the building is developed in terms of the minimum thermal balance with the environment, in which the thermal balance of the windows is less than the thermal balance of the walls. This method of determining the orientation can be used in designing both energy-efficient and ordinary buildings, including those within campus areas.*

*The proposed mathematical apparatus and developed techniques for automated architectural design of energy-efficient buildings are given in this article. This material is illustrated by concrete practical examples. The territory of Ukraine is divided into two temperature zones characterized by different air temperature during the year and the level of heat from solar radiation. For buildings located in two temperature zones of Ukraine, namely for the cities of Kyiv and Odesa, graphic models were constructed and the rational orientation of the windows was determined when they were located in the enclosing constructions of buildings of a certain constructive solution.*

*This approach requires its further theoretical development and wide implementation in the practice of architectural design.*

*Keywords: energy efficient buildings, rational orientation of windows, thermal balance of a window.*

### **Постановка проблеми**

При проектуванні будівель, розташованих на території кампусів, постає задача зменшення енергетичних витрат на опалення з метою підвищення їх енергоефективності. Це можливо за рахунок оптимізації геометричних параметрів будівель, у тому числі за рахунок раціональної азимутальної орієнтації вікон при їх розташуванні в огорожувальних конструкціях. Орієнтація світлопрозорих конструкцій значною мірою впливає на рівень теплового балансу конструкції (рівень надходження тепла від сонячної радіації та тепловтрати через огорожувальні конструкції) і тепловий баланс будівлі в цілому. Раціональне розташування віконних прорізів на фасадах будівель сприятиме підвищенню енергоефективності будівель до 10 відсотків. Будівельні норми [1] регламентують показник опору теплопередачі огорожувальних конструкцій, але не враховують рівень надходження сонячної радіації при різній орієнтації світлопрозорої конструкції та вплив її на тепловий баланс. Тепловий баланс сучасних вікон протягом опалювального періоду при певній орієнтації може бути меншим у порівнянні з непрозорими конструкціями стін. Проектувальникові необхідно мати спосіб швидкого визначення меж раціональної орієнтації світлопрозорих конструкцій при їх розташуванні в огорожувальних конструкціях будівель.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Вирішенню питання підвищення енергоефективності будівель присвячено роботи [2–4], але в них визначалися оптимальні пропорції будівель з точки зору мінімізації тепловтрат через огорожувальні конструкції за одним параметром пропорцій. У роботах [5, 6] окремо оптимізувалася форма будівлі та окремо параметри утеплювача непрозорих конструкцій будівлі з точки зору мінімального теплового балансу огорожувальних конструкцій. У дослідженні [7] розглядалася багатопараметрична оптимізація енергоефективних будівель. У праці [8] оптимізувалася форма циліндричної будівлі та розподіл утеплювача для опалювального періоду. У публікації [9] запропоновано спосіб оптимізації багатогранної форми енергоекономічної будівлі та розподілу утеплювача по огорожувальних конструкціях.

### Мета дослідження

Для підвищення енергоефективності будівель запропонувати спосіб визначення раціональної орієнтації віконних прорізів для розташування в непрозорих огорожувальних конструкціях, при якій тепловий баланс вікон менший за тепловий баланс стін протягом опалювального періоду.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Для визначення раціональної орієнтації світлопрозорих конструкцій моделюється тепловий баланс  $\Delta Q$  (тепловтрати та теплонадходження від сонячної радіації) огорожувальних конструкцій з оточуючим середовищем за опалювальний період. Функція теплового балансу непрозорої конструкції грані згідно з [1, 7] розраховується наступним чином

$$\Delta Q_{cmi} = \left[ \frac{1}{R_{cmi}} \right] \cdot S_{cmi} \cdot \left( t_{ei} - \left( t_{zi} + \frac{r_i \cdot Q_{cpi}}{\alpha_{zcmi}} \right) \right) \cdot N_{oib}, \quad (1)$$

а функція теплового балансу світлопрозорої конструкції грані відповідно до [6, 9] визначається як

$$\Delta Q_{ei} = \left[ \frac{1}{R_{ei}} \right] \cdot S_{ei} \cdot D_{di} - Q_{cpi} \cdot K_i \cdot \zeta_i \cdot \varepsilon_{oi} \cdot S_{ei}, \quad (2)$$

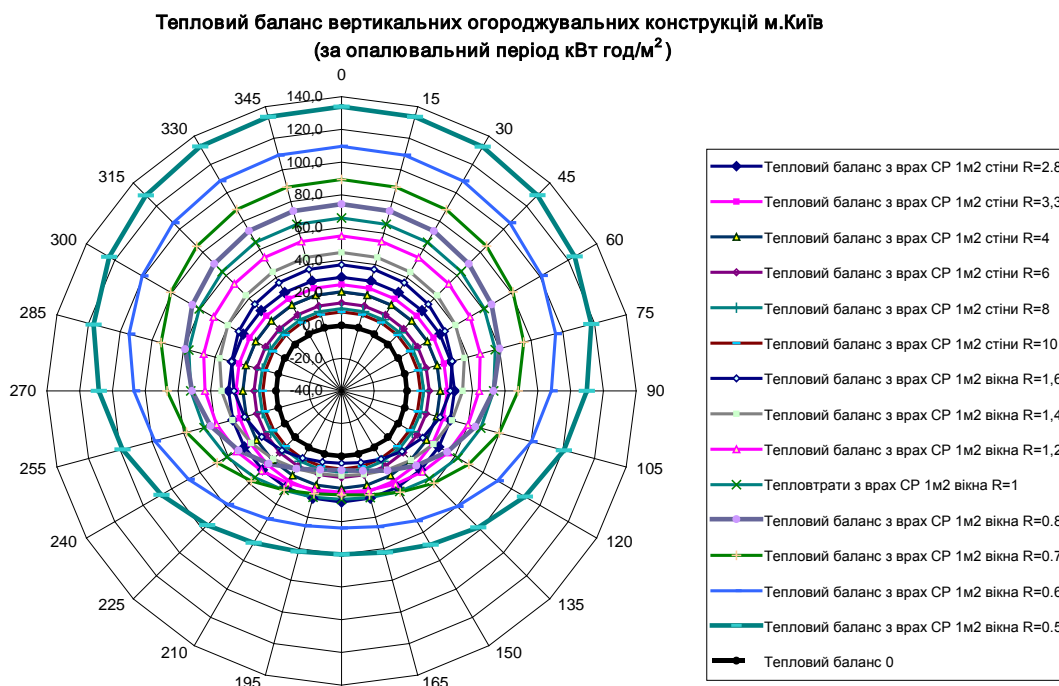
де  $t_{zi}$  – фактична температура зовнішнього повітря;  $t_{ei}$  – температура внутрішнього повітря;  $r_i$  – альbedo поверхні грані будівлі;  $Q_{cpi}$  – енергетична освітленість повітря короткохвильовою радіацією;  $\alpha_{zcmi}$  – коефіцієнт теплообміну між зовнішньою поверхнею огорожувальної конструкції та зовнішнім повітрям;  $R_{cmi}$  – опір теплопередачі непрозорих огорожувальних конструкцій;  $N_{oib}$  – кількість днів опалювального періоду [1];  $R_{ei}$  – опір теплопередачі світлопрозорих огорожувальних конструкцій [1];  $D_{di}$  – кількість градусо-днів опалювального періоду [1];  $S_{cmi}$  – площа непрозорої грані огорожувальних конструкцій;  $K_i$  – коефіцієнт дійсних умов хмарності, що впливають на надходження сонячної радіації [1];  $\zeta_i$  – коефіцієнт, що враховує затінення віконного прорізу непрозорими елементами [1];  $\varepsilon_{oi}$  – коефіцієнт відносного надходження сонячної радіації для світлопрозорих конструкцій [1].

Розроблено програму *SOLAR*, яка будує моделі залежності теплового балансу  $\Delta Q_{cmi}=f(A_\delta)$  та  $\Delta Q_{ei}=f(A_\delta)$  світлопрозорих і непрозорих огорожувальних конструкцій (з різним опором теплопередачі) від азимутальної орієнтації конструкції  $A_\delta$  (рис.1). Якщо сумістити план будівлі з центром моделі, то можна визначати рівень теплового балансу кожної огорожувальної конструкції залежно від орієнтації (рис. 1, 2).

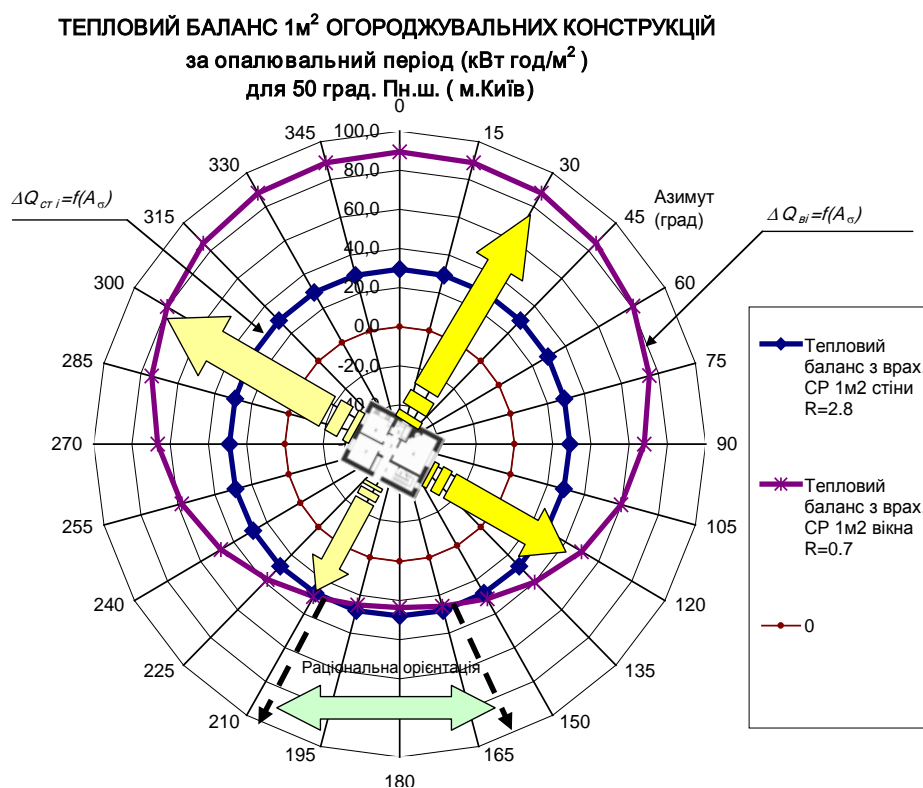
З моделі видно, що азимутальна орієнтація більш значною мірою впливає на тепловий баланс світлопрозорих конструкцій у порівнянні з непрозорими. Тепловий баланс (тепловтрати та теплонадходження від сонячної радіації) вікон з орієнтацією на південь та опором теплопередачі  $R_{ei} \geq 0,75 \text{ м}^2\text{К}^\circ/\text{Вт}$  менший, ніж тепловий баланс стін з нормативним опором [1].

Якщо тепловий баланс світлопрозорих огорожувальних конструкцій не перевищує тепловий баланс непрозорих конструкцій  $\Delta Q_{ei} \leq \Delta Q_{cmi}$ , тоді перетин моделей визначає зону раціональної орієнтації світлопрозорих конструкцій в огорожувальних конструкціях

будівель (рис. 2). Розв'язання наведеної нижче системи рівнянь дозволяє аналітично визначити допустимі межі орієнтації вікон

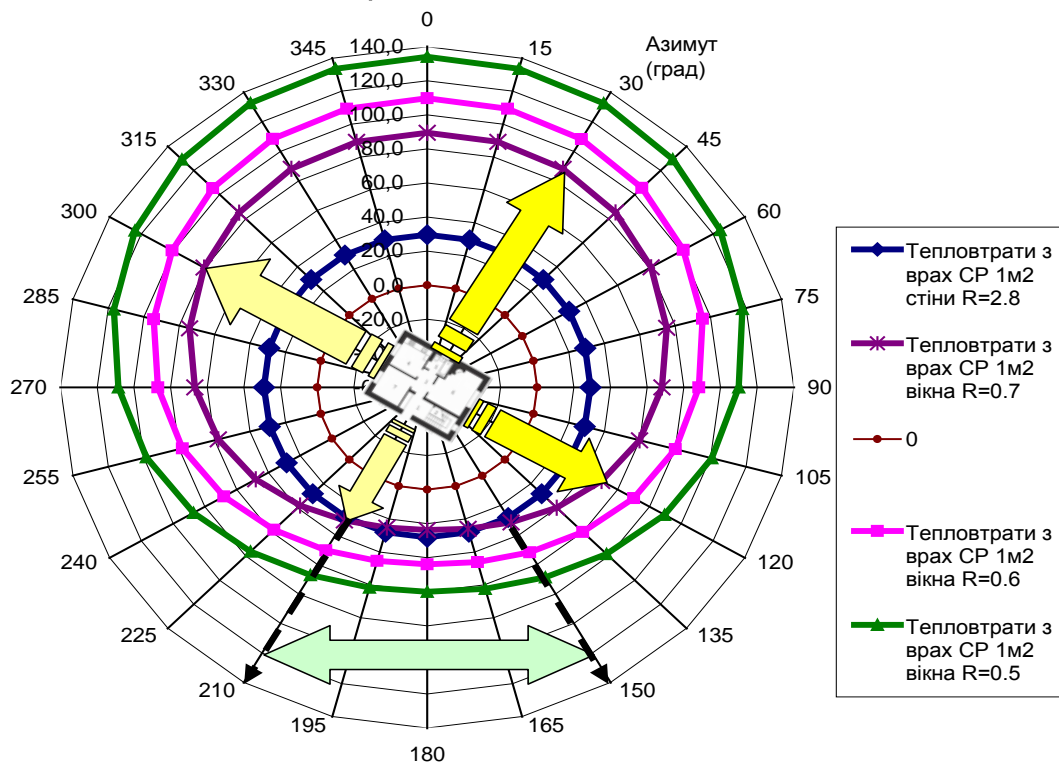


**Рис. 1. Моделі  $\Delta Q_{cti}=f(A_0)$  та  $\Delta Q_{vi}=f(A_0)$  теплового балансу світлопрозорих і непрозорих огорожувальних конструкцій за опалювальний період за різного опору теплопередачі.**



**Рис. 2. Визначення раціональної орієнтації світлопрозорих конструкцій з використанням моделей  $\Delta Q_{cti}=f(A_0)$  та  $\Delta Q_{vi}=f(A_0)$  теплового балансу світлопрозорих і непрозорих огорожувальних конструкцій.**

ТЕПЛОВИЙ БАЛАНС  $1\text{ м}^2$  ОГОРОДЖУВАЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ  
за опалювальний період (кВт год/ $\text{м}^2$ )  
для 50 град Пн.Ш. м.Київ



ТЕПЛОВИЙ БАЛАНС  $1\text{ м}^2$  ОГОРОДЖУВАЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ  
за опалювальний період (кВт год/ $\text{м}^2$ )  
для 46 град Пн.Ш. м.Одеса

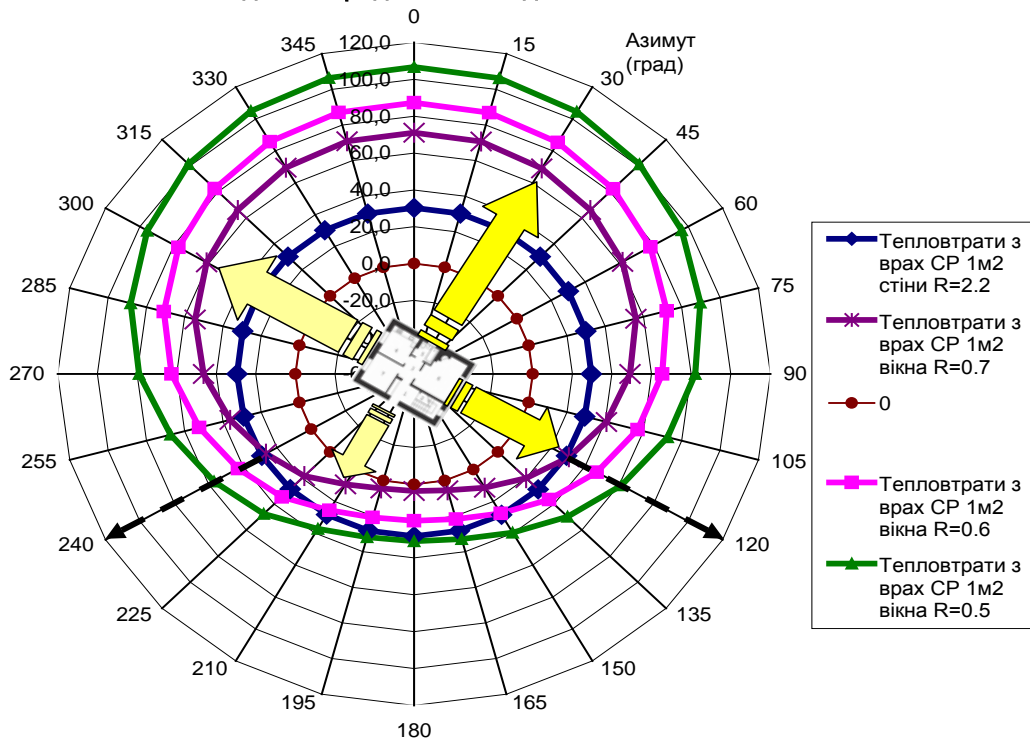


Рис. 3. Визначення раціональної орієнтації світлопрозорих конструкцій з використанням моделей теплового балансу вертикальних огороджувальних конструкцій для двох температурних зон України (міст Києва та Одеси).

$$\begin{cases} \Delta Q_d = f(A_\sigma); \\ \Delta Q_{cm} = f(A_\sigma) \end{cases} \quad (3)$$

Залежності (1)–(3) становлять математичну основу запропонованого комп'ютеризованого способу визначення раціональної орієнтації світлопрозорих конструкцій у стінах енергоефективних будівель кампусів з точки зору мінімального теплового балансу з оточуючим середовищем, при якому тепловий баланс вікон менший за тепловий баланс стіни.

Територія України поділена на дві температурні зони, що характеризуються різною температурою повітря протягом року та рівнем надходження тепла від сонячної радіації. Відповідно до [1] огорожувальні конструкції мають різний нормативний опір теплопередачі. Для будівель, розташованих у двох температурних зонах України, а саме для міст Києва та Одеси побудовано графічні моделі та визначено раціональну орієнтацію вікон при їх розташуванні в огорожувальних конструкціях будівель певного конструктивного вирішення. Ці дані показано на рис. 3.

Таким чином, нами описано математичний апарат і розроблені прийоми для автоматизованого архітектурного проектування енергоефективних будівель, які проілюстровано на конкретних практичних прикладах.

#### Висновки

У даній статті запропоновано комп'ютеризований спосіб визначення раціональної орієнтації віконних прорізів при розташуванні світлопрозорих конструкцій в огорожувальних непрозорих конструкціях енергоефективних будівель. Головною метою є підвищення енергоефективності з точки зору мінімального теплового балансу з оточуючим середовищем протягом опалювального періоду при забудові на території кампусів. При цьому описано належний математичний апарат, визначено раціональну орієнтацію вікон з опором теплопередачі  $R=0,75\text{m}^2\text{K}^0/\text{Вт}$  для будівель у двох температурних зонах України, при якій тепловий баланс вікон менший, ніж тепловий баланс стін з заданим опором теплопередачі. Для м. Києва (I температурна зона) орієнтація становить від 155 до 205 градусів, для м. Одеси (II температурна зона) – від 120 до 240 градусів.

Напрацьований підхід дозволяє шляхом швидкого визначення меж раціональної орієнтації світлопрозорих конструкцій при їх розташуванні в огорожувальних конструкціях будівель раціонально розміщувати віконні прорізи на фасадах будівель, зокрема кампусів, що сприяє підвищенню їх енергоефективності. Викладені матеріали потребують свого подальшого теоретичного розвитку та широкого впровадження у практику архітектурного проектування.

#### Список використаної літератури

1. Теплова ізоляція будівель: ДБН В.2.6-31:2016. // Мінбуд України. – К.: Укрархбудінформ, 2016. – 35 с. – (Державні будівельні норми України).
2. Маркус Т.А. Здания, климат и энергия / Т.А. Маркус, Э.Н. Морис. – Л.: Гидрометеиздат, 1985. – 540 с.
3. Табунщиков Ю.А. Математическое моделирование и оптимизация тепловой эффективности зданий / Ю.А. Табунщиков, М.М. Бродач. – М.: АВОК-ПРЕСС, 2002. – 194 с.
4. Мартинов В.Л. Геометричне моделювання параметрів енергоактивних житлових будинків / В.Л. Мартинов // Матеріали VI Міжнародної науково-практичної конференції "Геометричне моделювання і комп'ютерні технології: теорія, практика, освіта". – Харків, 2009. – С. 153-158.



5. Сергейчук О.В. Оптимізація розподілу утеплювача по поверхні будівлі при заданому класі його ефективності / О.В. Сергейчук // Матеріали VI Міжнародної Кримської науково-практичної конференції "Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн". – Сімферополь, 2009. – С. 44–49.
6. Сергейчук О.В. Оптимізація форми енергоефективної будівлі, зовнішня оболонка якої n-параметрична поверхня / О.В. Сергейчук // Матеріали VII Міжнародної Кримської науково-практичної конференції "Геометричне моделювання та комп'ютерний дизайн". – Сімферополь, 2010. – С. 150-155.
7. Мартинов В.Л. Багатопараметрична оптимізація гранних енергоефективних будівель / В.Л. Мартинов // Матеріали VII Міжнародної науково-практичної конференції "Геометричне моделювання, комп'ютерні технології та дизайн: теорія, практика, освіта". – Ужгород, 2011. – С. 135-139.
8. Мартинов В.Л. Оптимізація циліндричної форми енергоефективних будівель та розподілу утеплювача / В.Л. Мартинов // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції "Актуальні проблеми геометричного моделювання". – Мелітополь, 2011. – С. 133-138.
9. Мартинов В.Л. Оптимізація багатогранної форми енергоекономічної будівлі та розподілу його утеплювача / В.Л. Мартинов // Технічна естетика і дизайн. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 143-147.

#### **References**

1. Teplova izolyatsiya budivel: DBN B.2.6-31:2016. Minbud Ukrainy (Derzhavni budivelni normy Ukrainy). Ukrarhbudininform. Kyiv. (2016)
2. Markus, T. A., Moris, E. N. Zdaniya, klimat i energiya. Gidrometeoizdat. Leningrad. (1985)
3. Tabunschikov Yu. A., Brodach M. M. Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya teplovoy effektivnosti zdaniy. AVOK-PRESS. Moscow. (2002)
4. Martynov, V. L. Heometrychne modeliuвання parametriv enerhoaktyvnykh zhytlovykh budynkiv. Materialy VI Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii "Heometrychne modeliuвання i kompiuterni tekhnolohii: teoriia, praktyka, osvita". Kharkiv. 153-158. (2009)
5. Serheichuk, O. V. Optymizatsiia rozpodilu uteplivacha po poverkhni budivli pry zadanomu klasi yoho efektyvnosti. Materialy VI Mizhnarodnoi Krymskoi naukovo-praktychnoi konferentsii "Heometrychne ta kompiuterne modeliuвання: enerhozberezhennia, ekolohiia, dyzain". Simferopol. 44–49. (2009)
6. Serheichuk, O. V. Optymizatsiia formy enerhoefektyvnoi budivli, zovnishnia obolonka yakoi n-parametrychna poverkhnia. Materialy VII Mizhnarodnoi Krymskoi naukovo-praktychnoi konferentsii "Heometrychne modeliuвання ta kompiuternyi dyzain". Simferopol. 150-155. (2010)
7. Martynov, V. L. Bahatoparmetrychna optymizatsiia hrannykh enerhoefektyvnykh budivel. Materialy VII Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii "Heometrychne modeliuвання, kompiuterni tekhnolohii ta dyzain: teoriia, praktyka, osvita". Uzhhorod. 135-139. (2011).
8. Martynov, V. L. Optymizatsiia tsylindrychnoi formy enerhoefektyvnykh budivel ta rozpodilu uteplivacha. Materialy XIII Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii "Aktualni problemy heometrychnoho modeliuвання". Melitopol. 133-138. (2011).
9. Martynov, V. L. Optymizatsiia bahatohranoi formy enerhoekonomichnoi budivli ta rozpodilu yoho uteplivacha. Tekhnichna estetyka i dyzain. **89**, 143-147. (2012)

УДК 631.1 : 681.5

А.А. ОМЕЛЬЧУК, Ю.О. ЛЕБЕДЕНКО, О.В. ПОЛИВОДА  
Херсонський національний технічний університет

### **КОМП'ЮТЕРИЗОВАНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ У ІНТЕГРОВАНИХ ПТАШИНИХ І РИБНИХ ГОСПОДАРСТВАХ**

*У статті проводиться дослідження технології інтегрованого птахівництва та рибництва. Аналізуються параметри функціонування, потреби та вимоги до систем управління, що повинні забезпечувати роботу подібних комплексів. Проектується комп'ютеризована система управління комбінованим рибо-кочиним господарством. Пропонується оптимальне керування інтегрованим рибо-пташиним господарством з метою мінімізації витрат на керування і енергетичних ресурсів, та забезпечення оптимальних умов вирощування риби та водоплавної птиці. Підкреслюється важливість екологічного вирощування птиці.*

*Ключові слова: система управління, інтегроване господарство, електродвигун, мережа.*

А.А. ОМЕЛЬЧУК, Ю.А. ЛЕБЕДЕНКО, О.В. ПОЛИВОДА  
Херсонский национальный технический университет

### **КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ В ИНТЕГРИРОВАННЫХ ПТИЦЕВОДЧЕСКИХ И РЫБОВОДЧЕСКИХ ХОЗЯЙСТВАХ**

*В статье проводится исследование технологии интегрированного птицеводства и рыбоводства. Анализируются параметры функционирования, нужды и требования к системам управления, которые должны обеспечивать работу подобных комплексов. Проектируется компьютеризированная система управления комбинированным рыбо-утиным хозяйством. Предлагается оптимальное управление интегрированным рыбо-утиным хозяйством с целью минимизации затрат на управление и энергетических ресурсов, и обеспечения оптимальных условий выращивания рыбы и водоплавающей птицы. Подчеркивается важность экологического выращивания птицы.*

*Ключевые слова: система управления, интегрированное хозяйство, электродвигатель, сеть.*

А.А. OMELCHUK, YU.O. LEBEDENKO, O.V. POLYVODA  
Kherson National Technical University

### **COMPUTERIZED CONTROL SYSTEM FOR INTEGRATED POULTRY AND FISH FARMING**

*Today one of the priority branches of the country's economy is a cattle breeding. However, at the same time, this department continues its development and requires modern solutions in many areas, including automation of production. It is known that modern agrocomplexes that are saturated with highly effective control systems are more energy efficient, productive, and therefore more competitive. The article explores such a direction as poultry farming, namely the breeding of ducks in combination with fish farming, known as integrated farming. The parameters of functioning, needs and requirements to control systems that should*

ensure the operation of such complexes are analyzed. A computerized control system for a combined fish and duck farm is being designed. The importance of ecological growing of poultry is underlined. Together with fish, mostly ducks are grown, less often geese. Combined fish and duck farm makes it possible to more fully use the forage resources of water bodies by obtaining two types of products - fish and poultry, as well as to obtain more food products from a unit area at a relatively low cost. For the automation of production processes in the keeping of poultry and fish, a certain set of equipment is used to ensure normal living conditions of animals.

The optimal control of the integrated fish and duck farm must be carried out in order to minimize the costs of management and energy resources, and to ensure optimal conditions for the cultivation of fish and waterfowl. To use the methods of the theory of optimal control, a model of an object in a state space is proposed. On the basis of the analysis, operational parameters were identified, which the control system must monitor to ensure efficient operation of the complex. A structure of the computerized control system for combined farming was developed. It is noted that the ecological breeding of bird with the possibility of walking has significant advantages, which consist in the quality of the meat of poultry and feathers. In addition, retention in cages is unnatural and harmful to birds, and especially for waterfowl.

Keywords: control system, integrated production, electric motor, network.

### Постановка проблеми

На сьогодні однією з пріоритетних галузей господарства держави є тваринництво. Однак, разом з тим, тваринництво продовжує свій розвиток і потребує сучасних рішень у багатьох областях знань, зокрема, і в автоматизації виробництва. Відомо, що сучасні агрокомплекси, що насичені високоефективними системами керування більш енергоефективні, продуктивні, а тому – більш конкурентоспроможні. У статті досліджується такий напрямок, як птахівництво, а саме розведення качок у комплексі з рибозведенням, відоме як інтегроване рибо-пташине господарство [1].

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Спільно з рибою вирощують в основному качок, рідше – гусей. Комбіноване рибочачине господарство дозволяє більш повно використовувати кормові ресурси водойм за рахунок отримання двох видів продукції – риби і птиці, та, до того ж, отримувати більше харчової продукції з одиниці площі при відносно низьких витратах.

На рис. 1 наведені декілька альтернативних порід качок. Для вирощування спільно з рибою зазвичай використовують качок пекінської породи (рис. 1, а), а також промислових гібридів. Для спільного вирощування з рибою використовують каченят у віці від трьох-чотирьох тижнів. З цього віку вони починають добре переносити добові коливання температури і можуть переходити на воду. На водойму висаджують міцних каченят з живою масою не нижче 0,5-0,8 кг. Через кожні сім днів після висадки проводиться контрольне зважування каченят і порівняння їх живої маси з нормативними показниками. Підвищення ефективності спільного вирощування риби та водоплавної птиці обумовлюється наступними факторами:

- качки не є конкурентами в харчуванні основним видам риб і поїдають, крім рослинності, пуголовків, дрібних жаб і їх ікру, які є конкурентами в харчуванні вирощуваних риб;
- качки поїдають м'яку підводну і плаваючу рослинність і сприяють очищенню водойми, збільшенню прозорості води;
- качиний послід – це органічне добриво, багате сполуками азоту, фосфору, калію, кальцію, мікроелементами, значна частина яких міститься у вигляді водорозчинних форм, доступних для засвоєння фіто-, зоопланктоном і донними організмами, що у свою чергу є їжею для риби.



а) Пекінська качка



б) Сіра українська качка



в) Мускусна качка



г) Індійський бігунок

**Рис. 1. Різноманіття порід домашніх качок.**

Не всі категорії ставків можуть бути використані для вихову качок, а тільки нагульні. Пов'язано це з тим, що в малькових, вирощувальних або нерестових ставках качки можуть заковтувати молодь риб.

Разом з качками вирощують коропа, як в монокультурі, тобто одного, без інших видів риб, так і спільно з білим і строкатим товстолобиком, а також їх гібридами (рис. 2).



а) Білий товстолобик



б) Короп

**Рис. 2 - Породи риб, що можуть вирощуватися спільно з качками**

Проблемами технологічних процесів у пташнику та розробками спеціалізованих систем управління технологічними процесами та енергозбереженням займалися такі дослідники, як І.І. Мартиненко, В.П. Машевський та інші. Продуктивність птиці протягом періоду її утримання змінюється у першу чергу з віком та під впливом температури. Температура в пташнику впливає також на масу яєць та їх якість, споживання птицею кількості корму, води та її самопочуття. При зниженні температури в приміщенні зменшується несучість птиці, збільшується витрата кормів на виробництво яєць і м'яса. При підвищеній температурі несучість також знижується, птиця споживає більше води, і співвідношення між кормами і водою зростає [2].

### **Мета дослідження**

Метою роботи є дослідження технологічного процесу при комбінованому розведенні водоплавної птиці і риби, з подальшою розробкою на його основі комп'ютеризованої системи управління в інтегрованих пташних і рибних господарствах.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Для автоматизації виробничих процесів в пташнику при утриманні птиці використовується певний комплекс обладнання, призначений для забезпечення нормальних умов життєдіяльності качок.

У комплекс входить: ланцюговий кормороздавач з спіралью-гвинтовим завантажувальним транспортером, бункер з шнеком, одноярусні двосторонні групові гнізда, що обладнані транспортером для збирання яєць. Основна проблема в регулюванні вологості і температури - забезпечити найкраще сприятливе середовище для харчування домашньої птиці. Контроль вологості також є важливим інструментом для запобігання поширенню хвороб. Зазвичай відносна вологість не повинна перевищувати 60%. Температура і вологість є взаємопов'язаними між собою параметрами. Моніторинг і контроль птахівничої ферми можна розділити на три основні завдання: вимір, розрахунок і коректування. Виміряні значення кліматичних змінних спочатку перетворюються з аналогового вигляду в цифровий, а потім передаються на комп'ютер. Через несприятливе середовище і високу вологість, центральний вузол зазвичай розташований поза птахофабрикою. Сигнал, що генерується датчиками, зазвичай слабкий, тому для підвищення потужності сигналу необхідно використовувати підсилювач. Передбачається використовувати бездротову мережу датчиків, в якій дані передаються на вузол базової станції (приймача), який підключений до комп'ютера. Сигнал може передаватися за допомогою вузлів-маршрутизаторів, якщо відстань між вимірювачами і центральним вузлом управління перевищує довжину однієї радіолінії. Для забезпечення потрібного повітрообміну і створення необхідного температурного режиму у пташнику використовується комплекс вентиляційного обладнання. Задані величини температури і повітрообміну повинні автоматично підтримуватися зміною частоти обертання двигунів витяжних вентиляторів при відхиленні температури повітря у вентиляційному приміщенні від встановленого значення. Також потрібно забезпечувати гаряче водопостачання для потреб технологічного процесу у пташнику.

Для автоматизації рибного господарства так само потрібно контролювати ключові параметри, а саме: вміст кисню, рівень рН, температуру води в системі, освітлення, рівень та швидкість водо-обороту води. У комп'ютеризовану систему управління вводяться максимальні і мінімальні значення показників вмісту кисню, рН, температури. У разі зниження показників до мінімального значення подається команда на включення системи оксигенації. Регулювання рН здійснюється увімкненням насоса, що подає воду в ємність з розчином лугу. Апаратно-програмний комплекс системи управління веде архів, що містить дані за кілька років. Таким чином, користувачеві надаються графіки звітних періодів від доби до року за будь-яким з параметрів. У програмному забезпеченні передбачається віддалений доступ до програмного забезпечення через мережу Інтернет з можливістю повідомлення через електронну пошту, Інтернет, смс-повідомлення про виникнення критичних та аварійних ситуацій. Система також повинна мати у своєму складі функцію автоматичного годування. Додатково комплекс автоматизації може керувати рівнем солі в системі, процесом змішування води з різних водойм, підрахунком риби в кожному з ставків.

Враховуючи специфіку сільськогосподарського виробництва застосовуються електродвигуни тривалого S1, короткочасного S2, повторно-короткочасного режиму роботи S3. На прикладі вентилятора розглянемо розрахунок і вибір електродвигуна по

потужності, частоті обертання, електричній модифікації, кліматичному виконанні, часу розгону, допустимій температурі нагріву.

Механічна характеристика робочої машини:

$$M_c = M_{co} + (M_{cn} - M_{co}) \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2, \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad (1)$$

де  $M_{co}$  – момент рушення для машин з легким пуском,  $M_{co} = 0,1M_n$ , Н·м;

$M_{cn}$  – номінальний момент, який визначається по існуючому двигуну;

$\omega$  – значення кутової швидкості, с<sup>-1</sup>;

$\omega_n$  – номінальна кутова швидкість, с<sup>-1</sup>;

Визначаємо потужність вентилятора:

$$P_{розр.} = \frac{L_g \cdot H_g \cdot 10^{-3}}{3,6 \cdot \eta_g \cdot \eta_{пер.}}, \text{ кВт}, \quad (2)$$

де  $P_{розр.}$  – розрахункова потужність вентилятора, кВт;

$\eta_{пер.}$  – ККД передачі;

$H_g$  – напір, м;

$\eta_g$  – ККД вентилятора,  $\eta_g = 0,55$ ;

$L_g$  – продуктивність вентилятора, м<sup>3</sup>/год.

Подачу повітря розраховують за наступною формулою:

$$L_g = K_z \cdot L_{num.}, \text{ м}^3/\text{год.}, \quad (3)$$

де  $K_z$  – кількість голів, гол.;

$L_{num.}$  – норма подачі повітря, яка приходить на один вентилятор.

Оптимальне керування інтегрованим рибо-пташиним господарством необхідно здійснювати з метою мінімізації витрат на керування і енергетичних ресурсів, та забезпечення оптимальних умов вирощування риби та водоплавної птиці [3]. Використання методів теорії оптимального керування припускає наявність моделі об'єкту в просторі станів у вигляді

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (4)$$

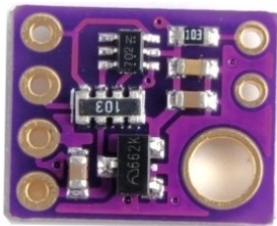
де  $\mathbf{x}$  – вектор станів об'єкта;  $\mathbf{u}$  – вектор керуючих впливів;  $\mathbf{f}$  – вектор, як правило, нелінійних залежностей;  $\mathbf{y}$  – вектор виходу.

Вектор виходу, що характеризує структуру системи моніторингу, доцільно формувати з урахуванням умов вирощування та утримування водоплавної птиці та риби у вигляді

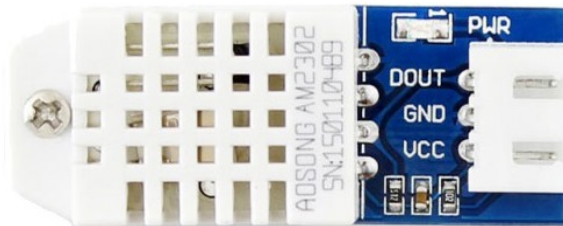
$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} \end{pmatrix}^T \quad (5)$$

де  $y_{11}$  – рівень наповнення годівниці птахів,  $y_{12}$  – температура повітря,  $y_{13}$  – вологість повітря,  $y_{14}$  – рівень концентрації  $\text{CO}_2$ ,  $y_{15}$  – положення птахів,  $y_{21}$  – рівень води у водоймі,  $y_{22}$  – температура води,  $y_{23}$  – рівень кисню,  $y_{24}$  – прозорість води,  $y_{25}$  – положення риби.

Пропонується задіяти мережу з наступних видів датчиків у системі управління (рис. 3). Цифровий датчик освітленості GY-302 на чіпі BH1750 призначений для вимірювання фонового освітлення. Має високу чутливість і поширений послідовний інтерфейс I2C. Модуль датчика температури і вологості підвищеної точності DHT22, у який інтегровано необхідні додаткові компоненти для підключення датчика до мікроконтролеру.



а) датчик освітленості GY-302



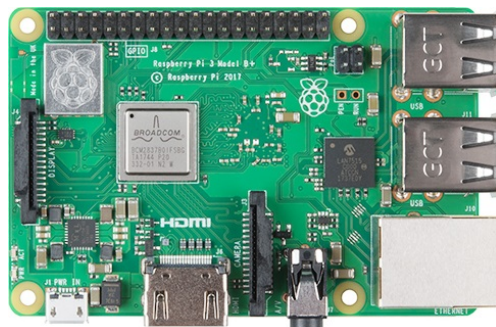
б) датчик вологості повітря DHT-22



в) інфрачервоний датчик руху



г) інфрачервоний вимірювач концентрації  $\text{CO}_2$



д) міні-комп'ютер Raspberry Pi

Рис. 3. Датчики у системі управління.

Підходить для підключення як до контролерів Arduino так і до інших мікроконтролерів з напругою логічних рівнів 5 В і 3.3 В. Інфрачервоний датчик руху для Arduino і інших мікроконтролерів дозволяє виявляти рух тварини на відстані до 7 метрів. Інфрачервоний вимірювача концентрації CO<sup>2</sup> MH-Z19B (рис. 3, г) призначений для кількісного визначення питомого вмісту вуглекислого газу в повітрі. Датчик має два вихідних інтерфейсу, температурну компенсацію, високу лінійність і мале енергоспоживання. У якості центрального блоку управління пропонується застосовувати Raspberry Pi 3 B+ (рис. 3, д).

Структура системи управління наводиться на рис. 4.

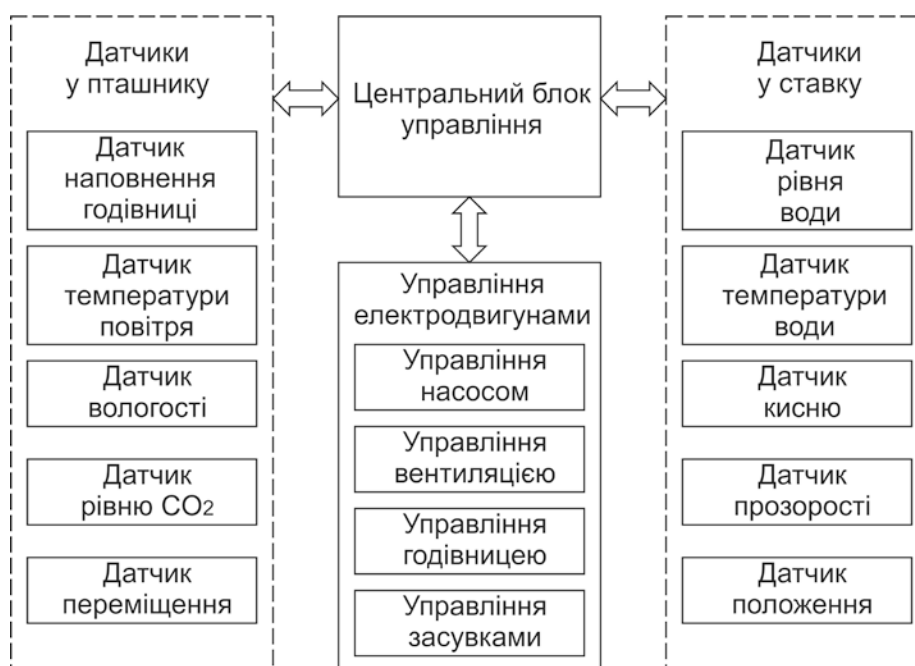


Рис. 4. Структура комп'ютеризованої системи управління.

Порівняння умов утримання птиці наведено на рис. 5.



а) у клітках



б) з можливістю вигулу

Рис. 5. Умови утримання птиці.

Зазначимо, що екологічне утримання птиці з можливістю вигулу має істотні переваги, які виявляються у якості отриманого м'яса птиці, пуху, пера. Крім того, утримання у клітках є неприродним та шкідливим для птиці, і особливо для водоплавної.



### **Висновки**

У статті у першому наближенні досліджується технологічний процес інтегрованого птахівництва та рибиництва. На основі проведеного аналізу виділені робочі параметри, які має контролювати система управління, щоб забезпечити ефективну роботу комплексу. Розроблена структурна комп'ютеризована система управління комбінованим рибочисельним господарством. Окремо зазначається необхідність екологічного вирощування птиці, з можливістю вільного пересування і доступом до водойми.

### **Список використаної літератури**

1. Андрющенко А.І. Ставові рибиництва / А.І. Андрющенко, С.І. Алимов — Харків: Вид. центр НАУ., К.: Оберіг, 2008. — 635 с.
2. Віхрова Л.Г. Автоматизована енергоощадна система управління параметрами температурного режиму пташника / Л.Г. Віхрова, Р.П. Ткаченко, А.В. Рибаченко // *Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація.* — 2010. — № 23. — С. 183–188.
3. Омельчук А.А. Проблеми узгодженого керування складною електромеханічною системою / А.А. Омельчук, Ю.О. Лебеденко, Г.В. Рудакова // *Наукові праці Національного університету харчових технологій.* — К.: НУХТ, 2013. — № 49. — С. 19–23.

### **References**

1. Andriushchenko, A. I., Alymov, S. I. Stavove rybnyststvo. Vyd. tsentr NAU. Kharkiv. Oberih. Kyiv. (2008)
2. Vikhrova, L. H., Tkachenko, R. P., Rybachenko, A. V. Avtomatyzovana enerhooshchadna systema upravlinnia parametramy temperaturnoho rezhymu ptashnyka. Tekhnika v silskohospodarskomu vyrobnytstvi, haluzeve mashynobuduvannia, avtomatyzatsiia. **23**, 183-188. (2010)
3. Omelchuk, A. A., Lebedenko, Yu. O., Rudakova, H. V. Problemy uzghodzhenoho keruvannia skladnoiu elektromekhanichnoiu systemoiu. Naukovi pratsi Natsionalnoho universytetu kharchovykh tekhnolohii. **49**, 19-23. (2013)

УДК 666.97.033+681.5.015.8:519

Ю.В. ЧОВНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины  
М.Г. ДИКТЕРУК, М.С. КОБЕЦ

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

## **ВЫБОР РАБОЧЕЙ ЧАСТОТЫ ГЕНЕРАТОРА ПРИ МОНИТОРИНГЕ И КОНТРОЛЕ ПРОЦЕССОВ ВЛАГОПЕРЕНОСА В МУЗЕЙНЫХ ЭКСПОНАТАХ/КАРТИНАХ МЕТОДОМ ПОГЛОЩЕНИЯ СВЧ/КВЧ ЭНЕРГИИ**

*Для мониторинга и контроля процессов влагопереноса в экспонатах, помещённых в музеях (например, в картинах художников – мастеров прошлых веков, в гобеленах, в скульптурах и пр.) предложено использовать метод поглощения энергии электромагнитных волн (СВЧ – радиочастотного диапазона и КВЧ – диапазона миллиметровых волн) нетепловой интенсивности. Контроль за процессом влагопереноса в музейных экспонатах данным способом основан на том, что поглощение энергии СВЧ/КВЧ – электромагнитных волн нетепловой интенсивности при их прохождении через дисперсные системы (именно таковой представляется полотно художественной картины, краски, нанесенные на него, защитные слои (полировка) и пр.) определяется количеством свободной воды и удельной проводимостью исследуемого объекта. При экспонировании художественных полотен в помещениях музеев (картинных галереях) объёмное содержание воды в системе и её удельная проводимость увеличиваются, достигая порогу таких значений, при которых может быть нарушена целостность полотна (ткани полотна), появляются трещины, изгибы полотна, что, в конечном счёте, ведёт к его разрушению с течением времени. При этом СВЧ/КВЧ – электромагнитные волны имеют нетепловую интенсивность именно для того, чтобы зондирующий картину/экспонат (электромагнитный) сигнал как падающий, так и отражённый, не создавал её/его повреждение при поглощении в тонком поверхностном слое. Дополнительный влагоперенос внутрь экспонатов музея вызван наличием в музейном помещении (картинной галерее) потока посетителей, особенно в те дни, когда проводятся выставки. Если имеется стабилизация поглощения СВЧ/КВЧ энергии, которую можно получить с помощью специальных систем контроля микроклимата музейных помещений, тогда процесс разрушения полотен/экспонатов можно приостановить (или, по крайней мере, существенно уменьшить). На точность определения параметров поглощаемой СВЧ/КВЧ энергии данным методом существенно влияет ряд факторов (в частности, рабочая частота генератора электромагнитных волн, точность её настройки, ширина частотного диапазона излучения и пр.), которые связаны как с точностью измерения ослабления СВЧ/КВЧ сигнала (методом СВЧ/КВЧ – рефлектометрии), так и с особенностями исследуемого экспоната/картины.*

*Ключевые слова: выбор, рабочая частота, генератор, мониторинг, контроль, влагоперенос, музейный экспонат, художественное полотно, метод, поглощение, СВЧ/КВЧ электромагнитные волны, нетепловая интенсивность, энергия.*

Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

М.Г. ДІКТЕРУК, М.С. КОБЕЦЬ

Київський національний університет будівництва і архітектури

## ВИБІР РОБОЧОЇ ЧАСТОТИ ГЕНЕРАТОРА ПРИ МОНІТОРИНГУ І КОНТРОЛІ ПРОЦЕСІВ ВОЛОГОПЕРЕНОСУ У МУЗЕЙНИХ ЕКСПОНАТАХ/КАРТИНАХ МЕТОДОМ ПОГЛИНАННЯ НВЧ/КВЧ ЕНЕРГІЇ

*Задля моніторингу і контролю процесів вологопереносу у експонатах, які розміщені у музеях (наприклад, у картинах художників – майстрів минулих віків, у гобеленах, у скульптурах та ін.), запропоновано використовувати метод поглинання енергії електромагнітних хвиль (НВЧ – радіочастотного діапазону й КВЧ – діапазону міліметрових хвиль) нетеплової інтенсивності. Контроль за процесом вологопереносу у музейних експонатах даним способом заснований на тому, що поглинання енергії НВЧ/КВЧ електромагнітних хвиль нетеплової інтенсивності при їх проходженні через дисперсні системи (саме такою представляється полотно художньої картини, фарби, нанесені на нього, захисні прошарки (полірування) та ін.) визначається кількістю вільної води та питомою електропровідністю досліджуваного об'єкту. При експонуванні художніх полотен у приміщеннях музеїв (картинних галереях) об'ємний вміст води у системі та її питома електропровідність збільшуються, досягаючи інколи таких значень, при яких може бути порушена цілісність полотна (тканини полотна), з'являються тріщини, згини полотна, що, у кінцевому випадку, призводить до його руйнування з плином часу. При цьому НВЧ/КВЧ електромагнітні хвилі мають нетеплову інтенсивність саме для того, щоб зондуючий картину/експонат (електромагнітний) сигнал як падаючий, так і відбитий, не створював її/його пошкодження при поглинанні у тонкому поверхневому прошарку. Додатковий вологоперенос всередину експонатів музею, викликаний наявністю у приміщенні музею (у картинній галереї) потоку відвідувачів, особливо у ті дні, коли проводяться виставки. Якщо наявна стабілізація поглинання НВЧ/КВЧ енергії, яку можна отримати за допомогою спеціальних систем контролю мікроклімату музейних приміщень, тоді процес руйнування художніх картин/експонатів можна призупинити (або, принаймні, суттєво зменшити). На точність визначення параметрів НВЧ/КВЧ енергії, яка поглинається, даним методом суттєво впливає низка факторів (зокрема, робоча частота генератора електромагнітних хвиль, точність її налаштування, ширина частотної смуги випромінювання та ін.), які пов'язані як з точністю вимірювання послаблення НВЧ/КВЧ сигналу (методом НВЧ/КВЧ рефлектометрії), так і з особливостями експонату/картини, що досліджується.*

*Ключові слова: вибір, робоча частота, генератор, моніторинг, контроль, вологоперенос, музейний експонат, художнє полотно, метод, поглинання, НВЧ/КВЧ електромагнітні хвилі, нетеплова інтенсивність, енергія.*

Y.V. CHOVDNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

M.G. DIKTERUK, M.S. KOBETZ

Kyiv National University of Construction and Architecture

## CHOICE OF GENERATOR'S WORKING FREQUENCY DURING THE MONITORING AND CONTROL OF MOISTURE TRANSFER IN MUSEUM'S EXHIBITS/PICTURES WITH THE HELP OF UHF/EHF ENERGY ABSORPTION METHOD

*In order to monitoring and control of moisture transfer in museum's exhibits (for example, in pictures of painters – masters of past centuries, hobbles, sculptures etc.), one may use the method of electromagnetic waves energy absorption (UHF – radio frequency range and EHF – range o millimeter waves) with a very low level of heat intensity of these waves. The control of moisture transfer in museum's exhibits with a help of such method is based on a phenomenon of UHF/EHF electromagnetic waves absorption, when they have non-heat intensity, during the process of transmission of such waves along dispersive systems (just so may be called the canvases of a pictures, a paints, protective layer on a canvases (polish), etc.). This value of absorption is determined by the quantity of a free water and by the conductivity of researched object, as well. When canvases are exhibited at museum's rooms (painting galleries), the volume content of a water in the system and its conductivity are increased, and that's why they may have such values which can destroy the canvases' condition of being intact (for example, their materials), there are cracks in a canvases, their bending and so on. All these phenomena destroy canvases during a certain period of time. By the way, UHF/EHF electromagnetic waves of non-heat intensity have such values of it in order to no destroy the exhibit/canvas surface during the act of absorption of incident/reflected electromagnetic search signal in the thin surface layer. The additive moisture transfer into museum's exhibits is due to the flow of visitors at museum's rooms (at painting gallery) just during those days when exhibitions are. If one has the stabilization of UHF/EHF energy absorption which may be obtained with the help of a special control system of microclimate of museum's rooms, then the process of destroying of canvases/exhibits may be suspend (or may be substantially decreased). The accuracy of determination of absorption parameters of UHF/EHF energy with the help of this method substantially depends on some factors (for example, the working frequency of electromagnetic waves generator, the accuracy of its tuning, the bandwidth of frequency range of emission, etc.). These factors are connected with an accuracy of measuring of UHF/EHF signal attenuation (with the help of UHF/EHF reflectometer method) and with a characteristic properties of the researching exhibit/canvas.*

*Keywords: choice, working frequency, generator, monitoring, control, moisture transfer, museum's exhibit, painting canvas, method, absorption, UHF/EHF electromagnetic waves, non-heat intensity, energy.*

### Постановка проблемы

Развитие технологий способствует повышению уровня жизни людей, в том числе трансформирует урбанистическую среду в сторону увеличения комфорта пребывания в помещениях, вместе с тем решая оптимизационные задачи потребления энергоресурсов и энергосбережения. В полной мере это относится и к музейным помещениям, призванным сохранять длительное время в комфортном состоянии экспонируемые в них произведения искусства.

Конечно, необходимым условием, которое следует соблюдать для поддержания в норме всех параметров экспонатов (картин художников), является существование надёжной системы управления (регулирования) воздушных потоков, температуры и влажности в помещениях музея, где расположены экспонаты и могут находиться группы людей (посетителей), вносящих свой влажностно-температурный дисбаланс. Контроль последнего является, пожалуй, одним из основных условий приемлемого содержания произведений искусства в музейных помещениях.

Поскольку полотно художественной картины (её ткань) может быть отнесена к разряду дисперсных материалов, мы в дальнейшем будем пользоваться именно этим термином, подразумевая под ним полотно картины, гобелен и пр. Для определения показателя влагосодержания в дисперсном материале можно, по мнению авторов данного исследования, воспользоваться неразрушающим дисперсный материал методом поглощения СВЧ/КВЧ энергии электромагнитных волн нетепловой интенсивности.

Контроль за влагосодержанием дисперсного материала данным способом основан на том, что поглощение энергии сверхвысокочастотных (СВЧ)/крайне высокочастотных (КВЧ) электромагнитных волн при прохождении их через дисперсные системы определяется количеством свободной воды и удельной проводимостью системы. При посещении музейных помещений посетителями, как правило, объёмное содержание воды в дисперсных материалах и их удельная (электро-) проводимость увеличиваются, достигая порой таких значений, при которых может произойти существенная деструкция дисперсного материала (появляются трещины, коробления, изгибы на полотне картины и пр.), что, в конечном итоге приводит к потере шедевра искусства в целом либо требуется специальная дорогостоящая реставрация его.

Если в музейных помещениях присутствует система контроля за их микроклиматом, которая практически мгновенно отслеживает возможные колебания влаги, температуры, скорости воздушных потоков в указанных помещениях, то для её нормальной эксплуатации необходимо обеспечить подачу в контроллеры этой системы оперативной информации, в частности, о влагосодержании помещения, чтобы сама система смогла быстро внести коррективы в параметры помещения, в соответствии с нормами его эксплуатации и нормами содержания в нём шедевров искусства.

Таким образом, влагосодержание в музейном помещении можно определять по стабилизации поглощения СВЧ/КВЧ энергии электромагнитных волн нетепловой интенсивности. Именно на таком принципе могут быть построены датчики влагосодержания помещения, оперативно передающие информацию о влагосодержании на контроллеры системы мониторинга микроклимата помещения с целью его коррекции в сторону нормальных значений, предусмотренных правилами и нормативами эксплуатации музейных помещений и содержания в них произведений искусства. На точность определения момента стабилизации поглощения СВЧ/КВЧ энергии электромагнитных волн нетепловой интенсивности, как, впрочем, и на точность определения самой величины влагосодержания в дисперсном материале влияет ряд факторов, связанных как с точностью измерения ослабления СВЧ/КВЧ сигнала, так и с особенностями исследуемого дисперсного материала.

#### **Анализ последних исследований и публикаций**

Остановимся вначале вкратце на методах контроля поглощения СВЧ энергии, которые используются в таких дисперсных материалах, как бетонная смесь. Так, для определения окончания процесса уплотнения бетонной смеси при формировании железобетонных изделий было предложено использовать метод поглощения СВЧ энергии радиоволн в работе [1]. Контроль за процессом уплотнения бетонной смеси данным способом основан на том, что поглощение энергии сверхвысокочастотных электромагнитных волн при прохождении их через дисперсные системы на основе

цементу визначається кількістю вільної води і удільною провідністю системи [2, 4]. Автор [3] обословив формулу для комплексної постійної розповсюдження електромагнітних хвиль в речовині, зокрема, для немагнітних ізотропних діелектриків. В роботі [5] досліджені діелектричні явища і подвійний шар в дисперсних системах і поліелектролітах. Автори [6] розглянули діелектричні властивості води в розчинах. В [7] запропоновано метод невідрушувального контролю якості бетону за його електропровідності. Фактори, впливаючі на удільне омическе опору цементного тесту, досліджені в [8]. Вимірювання вологості бетонної суміші і її складових вологомірами СВЧ виконано в [9]. В [10–12] описані радіоізмірювальні прилади, техніка надвисоких частот і, зокрема, техніка СВЧ-вологомірії.

Результати цитованих вище робіт будуть частково використані в даному дослідженні, присвяченому моніторингу і контролю процесу вологопереносу в музейних експонатах/картинах методом поглинання СВЧ/КВЧ енергії електромагнітних хвиль нетеплової інтенсивності.

#### Ціль дослідження

Ціль роботи – створення і обословлення наукової концепції моніторингу і контролю процесу вологопереносу в музейних експонатах/картинах методом поглинання СВЧ/КВЧ енергії електромагнітних хвиль нетеплової інтенсивності, що дозволяє вибрати оптимальну робочу частоту генератора вказаних хвиль.

#### Изложение основного материала исследования

Розповсюдження електромагнітних хвиль (нетеплової інтенсивності) в речовині виражається через комплексну постійну розповсюдження [3]:

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (1)$$

де  $\gamma$  – комплексна постійна розповсюдження;  $\alpha$  – коефіцієнт затухання;  $j^2 = -1$ ;  $\beta$  – фазова постійна.

Для немагнітних ізотропних діелектриків  $\alpha$  і  $\beta$  рівні:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \left[ \frac{1}{2} \varepsilon' \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2}; \quad (2)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \left[ \frac{1}{2} \varepsilon' \cdot \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} + 1 \right) \right]^{1/2}, \quad (3)$$

де  $\lambda_0$  – довжина хвилі в вільному просторі;  $\varepsilon'$  і  $\varepsilon''$  – дійсний і уявний частини комплексної відносної діелектричної проникності.

Використаємо результати робіт [2, 4], де показано, що на надвисоких частотах (і більше) діелектричні характеристики дисперсних систем в залежності від складу і температури з задовільною для практики точністю можуть бути розраховані за наступними формулами:

$$\varepsilon_p' \approx \left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{\varepsilon_i' \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon_i''}{\varepsilon_i'} \right)^2 \right]} \cdot P_i \right\}^2 - \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i''}{2\sqrt{\varepsilon_i'}} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\varepsilon_i''}{\varepsilon_i'} \right)^2 \right] \cdot P_i \right\}^2; \quad (4)$$

$$\varepsilon_p'' \approx \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i''}{\sqrt{\varepsilon_i'}} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\varepsilon_i''}{\varepsilon_i'} \right)^2 \right] \cdot P_i \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{\varepsilon_i' \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon_i''}{\varepsilon_i'} \right)^2 \right]} \cdot P_i \right\}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_c'' = \varepsilon_p'' + \varepsilon_\sigma''; \quad (6)$$

$$\varepsilon_\sigma'' = \frac{\sigma}{\omega_0 \varepsilon_0}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_p''$  и  $\varepsilon_p'$  – расчётные значения действительной и мнимой частей комплексной относительной диэлектрической проницаемости системы;  $\varepsilon_i'$  и  $\varepsilon_i''$  – действительная и мнимая части комплексной относительной диэлектрической проницаемости  $i$ -ой компоненты;  $n$  – количество компонент;  $P_i$  – объёмное содержание  $i$ -ой компоненты;  $\varepsilon_c''$  – мнимая часть относительной диэлектрической проницаемости системы, обусловленная потерями на релаксацию и сквозную проводимость;  $\varepsilon_\sigma''$  – мнимая часть относительной диэлектрической проницаемости, обусловленная потерями на сквозную проводимость системы;  $\sigma$  – низкочастотная удельная проводимость системы, См/м;  $\omega_0$  – циклическая частота;  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Причём низкочастотная удельная проводимость  $\sigma$  дисперсных материалов рассчитывается по формуле Бруггемана [5]:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot P_0^{3/2}, \quad (8)$$

где  $\sigma_0$  – удельная проводимость проводящей фазы системы, См/м;  $P_0$  – объёмная концентрация проводящей фазы.

Таким образом, формулы (4)–(8) практически можно применять для расчёта диэлектрических характеристик дисперсных систем.

На выбор рабочей частоты СВЧ/КВЧ генератора оказывают влияние химический и минералогический состав красок, температура, гранулометрический состав наполнителей красок, погрешность измерительной аппаратуры и т.д.

Изменение химико-минералогического состава красок, нанесенных на полотно картины, влечёт за собой изменение удельной проводимости жидкой фазы красочного теста, а следовательно, и изменение коэффициента затухания (см. формулы (2), (6), (7), (8)). Как видно из формулы (7), влияние данного параметра  $\varepsilon_\sigma''$  обратно пропорционально частоте. Для уменьшения влияния вариаций химико-минералогического состава красок частоту СВЧ/КВЧ генератора необходимо повышать. Кроме того, более высокую частоту следует выбирать потому, что изменение проводимости системы и перераспределение воды в дисперсном материале во времени будут сказываться на изменении  $\alpha$ , а, значит, и на точности определения окончания процесса влагопереноса в дисперсном материале.

Изменение температуры оказывает влияние на релаксационные потери в дисперсном материале, которые определяются потерями в воде, и на потери, связанные со сквозной проводимостью системы. По данным [6],  $\varepsilon''$  для воды в диапазоне температур от 10...20<sup>0</sup>С имеет отрицательный температурный коэффициент, приблизительно равный 0,02 на 1<sup>0</sup>С для  $\lambda_0 = 3,28$  см и 0,032 на 1<sup>0</sup>С – для  $\lambda_0 = 9,2$  см, т.е. с уменьшением частоты влияние температуры увеличивается. Таким образом, для дисперсного материала одного состава можно найти такую частоту, при которой коэффициент затухания  $\alpha$  в рабочем диапазоне температур будет практически постоянен. При изменении состава или вида красок, нанесенных на полотно, частота температурной компенсации будет другой. Поэтому, если температура дисперсного материала в процессе мониторинга (контроля) за ним остаётся постоянной, то лучше повышать частоту СВЧ/КВЧ генератора.

Как и авторы [9] мы считаем, что отсутствует влияние гранулометрического и минералогического состава заполнителей дисперсного материала на поглощение СВЧ/КВЧ энергии ним, поэтому при выборе частоты СВЧ/КВЧ генератора влиянием гранулометрического состава заполнителей указанного материала можно пренебречь.

Для точного определения параметров поглощения СВЧ/КВЧ энергии нетепловой интенсивности дисперсными материалами необходимо фиксировать незначительные изменения ослабления СВЧ/КВЧ сигнала. Поэтому нужно иметь прибор, обладающий высокой точностью в широком диапазоне частот, и измерять величину ослабления сигнала в той области показаний прибора, где случайная относительная погрешность измерения минимальна. Данным требованиям, например, соответствует автоматический измеритель затухания типа ДІ-3 (ДІ-9), имеющий диапазон частот 0,25...16,5 ГГц, оптимальная область которого, выраженная в децибелах, составляет величину порядка 50дБ относительно 1мВт при случайной погрешности измерения 0,1 дБ [10].

Если проводимость и температура дисперсного материала в процессе влагопереноса не изменяются (например, для быстропротекающих процессов), то можно предложить следующий метод расчёта частоты СВЧ/КВЧ генератора.

Пусть нам нужно зондировать СВЧ/КВЧ сигналами нетепловой интенсивности дисперсный материал толщиной  $h$ , причём температура и состав его известны. Тогда, задаваясь оптимальной областью показаний прибора, выраженной в децибелах (обозначим эту область  $A_{opt}$ ), и пренебрегая потерями на отражение от границ раздела воздух – дисперсный материал, дисперсный материал – воздух, найдём коэффициент затухания по формуле:

$$\alpha = \frac{A_{opt}}{8,686h} \text{ м}^{-1}. \quad (9)$$

Но  $\alpha$ , как видно из формулы (2), зависит от диэлектрических характеристик дисперсного материала. Будем считать, что формулы (4)–(8) верны и для дисперсных материалов, являющихся холстом картины. Тогда, зная объёмные концентрации воды, красок, заполнителей и пр. и их диэлектрические характеристики, а также удельную проводимость теста красок  $\sigma_0$  (например, из опыта) и подставляя эти значения в формулы (4)–(8), можно найти  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon''$  данного дисперсного материала, а по формуле (2) – величину коэффициента затухания, задавшись при этом определённым значением частоты. Варьируя последний показатель, можно подобрать такую частоту, при которой коэффициент затухания  $\alpha$  по формуле (2), станет равным по величине  $\alpha$ , полученному из формулы (9). Именно эта частота и является оптимальной рабочей частотой СВЧ/КВЧ генератора электромагнитных волн нетепловой интенсивности.



Потери на отражение от границ раздела воздух – дисперсный материал, дисперсный материал – воздух могут быть практически сведены к нулю путём применения четвертьволновых пластин из материала с диэлектрической проницаемостью, равной корню квадратному из показателя проницаемости исследуемой среды [3]. Диэлектрические характеристики воды для любой температуры и частоты можно найти по формулам, приведенным в работе [6]. Диэлектрические характеристики воздуха  $\varepsilon' = 1$  и  $\varepsilon'' = 0$ . Значения диэлектрических характеристик остальных компонентов дисперсного материала могут быть рассчитаны по формулам (4), (5) на основании экспериментальных данных. Причём при расчёте рабочей частоты СВЧ/КВЧ генератора мнимой частью диэлектрической проницаемости данных компонент можно пренебречь ввиду их малости.

При расчёте  $\alpha$  по формуле (9) не учитывались, как величина мощности СВЧ/КВЧ генератора, так и ослабление электромагнитного поля СВЧ/КВЧ, связанное с диаграммой направленности антенн и расстоянием между ними. Для этого необходимо к  $A_{\text{опт}}$  прибавить величину мощности генератора, выраженную в децибелах относительно уровня 1 мВт, и отнять потери (в децибелах), связанные с диаграммой направленности антенн.

Данный метод расчёта при небольшой модификации был использован нами для расчёта оптимальных размеров измерительных ячеек при исследовании диэлектрических дисперсных систем (холстов картин художников), причём рассчитанные и экспериментальные значения  $\alpha$  для указанных дисперсных материалов на частотах 9,24 ГГц (СВЧ – диапазон) и 56 ГГц (КВЧ - диапазон) отличались не более чем на 10...15%.

#### Выводы

1. Для мониторинга и контроля процессов влагопереноса в экспонатах, помещённых в музеях (например, в картинах художников – мастеров прошлых веков, в гобеленах, в скульптурах и пр.) предложено использовать метод поглощения энергии электромагнитных волн (СВЧ – радиочастотного диапазона и КВЧ – диапазона миллиметровых волн) нетепловой интенсивности.
2. Контроль за процессом влагопереноса в музейных экспонатах данным способом основан на том, что поглощение энергии СВЧ/КВЧ – электромагнитных волн нетепловой интенсивности при их прохождении через дисперсные системы (именно таковой представляется полотно художественной картины, краски, нанесенные на него, защитные слои (полировка) и пр.) определяется количеством свободной воды и удельной проводимостью исследуемого объекта.
3. При экспонировании художественных полотен в помещениях музея (картинных галереях) объёмное содержание воды в системе и её удельная проводимость увеличиваются, достигая порою таких значений, при которых может быть нарушена целостность полотна (ткани полотна), появляются трещины, изгибы полотна, что, в конечном счёте, ведёт к его разрушению с течением времени. При этом СВЧ/КВЧ – электромагнитные волны имеют нетепловую интенсивность именно для того, чтобы зондирующий картину/экспонат (электромагнитный) сигнал как падающий, так и отражённый, не создавал её/его повреждение при поглощении в тонком поверхностном слое.
4. Дополнительный влагоперенос внутрь экспонатов музея вызван наличием в музейном помещении (картинной галерее) потока посетителей, особенно в те дни, когда проводятся выставки. Если имеется стабилизация поглощения СВЧ/КВЧ энергии, которую можно получить с помощью специальных систем контроля микроклимата музейных помещений, тогда процесс разрушения полотен/экспонатов можно приостановить (или, по крайней мере, существенно уменьшить).
5. На точность определения параметров поглощаемой СВЧ/КВЧ энергии данным методом существенно влияет ряд факторов (в частности, рабочая частота генератора электромагнитных волн, точность её настройки, ширина частотного диапазона

излучения и пр.), которые связаны как с точностью измерения ослабления СВЧ/КВЧ сигнала (методом СВЧ/КВЧ – рефлектометрии), так и с особенностями исследуемого экспоната/картины.

6. Полученные в работе результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта систем контроля микроклимата музейных помещений, в которых экспонируются картины художников и другие произведения искусства.

#### **Список использованной литературы**

1. Атаев С.С. Об автоматизации контроля уплотнения бетонной смеси / С.С. Атаев, Н.П. Блещик, И.И. Монастырный // Бетон и железобетон. – 1972. – №12. – С. 12-18.
2. Михалевич А.А. Диэлектрические свойства цементного теста / А.А. Михалевич, Н.К. Кобляков // Тезисы сообщений к Всесоюзной конференции "Повышение эффективности и качества бетона и железобетона". – Минск, 1977. – Ч.1. – С. 45-56.
3. Хиппель А.Р. Диэлектрики и волны / А.Р. Хиппель. – М.: ИЛ, 1960. – 439 с.
4. Михалевич А.А. Диэлектрические характеристики цементно-песчаных растворов на сверхвысоких частотах / А.А. Михалевич, Н.К. Кобляков // Вопросы строительства и архитектуры. – Минск, 1979. – № 9. – С. 33-37.
5. Духин С.С. Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и полиэлектролитах / С.С. Духин, В.Н. Шилов. – Киев: Наукова думка, 1972. – 206 с.
6. Hasted J.V. The dielectric properties of water in solutions / J.V. Hasted, S.H.M. El Sabeh // Frans. Faraday Soc. – 1953. – Vol. 49. – № 369. – P.109-123.
7. Ахвердов И.Н. Неразрушающий контроль качества бетона по электропроводности / И.Н. Ахвердов, Л.Н. Маргулис. – Минск: Наука и техника, 1975. – 174 с.
8. Малинин Ю.С. Исследование факторов, влияющих на удельное омическое сопротивление цементного теста / Ю.С. Малинин, С.Е. Ленский // Труды Всесоюзного научно-исследовательского института цементной промышленности. – 1967. – №2. – С. 116-124.
9. Берлинер М.А. Измерение влажности бетонной смеси и её компонентов влагомерами СВЧ / М.А. Берлинер, В.А. Иванов, В.А. Клоков // Бетон и железобетон. – 1969. – №2. – С. 8-15.
10. Гаврилов Ю.С. Справочник по радиоизмерительным приборам / Ю.С. Гаврилов, А.А. Ерёмченко, Л.Ю. Зубилевич и др. – М.: Энергия, 1976. – 624 с.
11. Бензарь В.К. Техника СВЧ-влажнометрии / В.К. Бензарь. – Минск: ВШ, 1974. – 349 с.
12. Харвей А.Ф. Техника сверхвысоких частот / А.Ф. Харвей. – М.: Советское радио, 1965. – Т. 1. – 784 с.

#### **References**

1. Ataev, S. S., Bleschik, N. P., Monastyirnyiy, I. I. Ob avtomatizatsii kontrolya uplotneniya betonnoy smesi. Beton i zhelezobeton. **12**, 12-18. (1972)
2. Mihalevich, A. A., Koblyakov, N. K. Dielektricheskie svoystva tsementnogo testa. Tezisy i soobscheniy k Vsesoyuznoy konferentsii "Povyishenie effektivnosti i kachestva betona i zhelezobetona". Part.1. Minsk. (1977)
3. Hippel, A. R. Dielektriki i volnyi. IL. Moscow. (1960)
4. Mihalevich, A. A., Koblyakov, N. K. Dielektricheskie harakteristiki tsementno-peschanyih rastvorov na sverhvyisokih chastotah. Voprosyi stroitelstva i arhitekturyi. **9**, 33-37. (1979)
5. Duhin, S. S., Shilov, V. N. Dielektricheskie yavleniya i dvoynoy sloy v dispersnyih sistemah i polielektrolitah. Naukova dumka. Kiev. (1972)
6. Hasted, J. V., El Sabeh, S. H. M. The dielectric properties of water in solutions. Frans. Faraday Soc. **49**, 369, 109-123. (1953)

7. Ahverdov, I. N., Margulis, L. N. Nerazrushayuschiy kontrol kachestva betona po elektroprovodnosti. Nauka i tehnika. Minsk. (1975)
8. Malinin, Yu. S., Lenskiy, S. E. Issledovanie faktorov, vliyayuschih na udelnoe omicheskoe soprotivlenie tsementnogo testa. Trudyi Vsesoyuznogo nauchno-issledovatel'skogo instituta tsementnoy promyshlennosti. **2**, 116-124. (1967)
9. Berliner, M. A., Ivanov, V. A., Klokov, V. A. Izmerenie vlazhnosti betonnoy smesi i eygo komponentov vlagomerami SVCh. Beton i zhelezobeton. **2**, 8-15. (1969)
10. Gavrilov, Yu. S., Eryomenko, A. A., Zubilevich L. Yu. i dr. Spravochnik po radioizmeritelnyim priboram. Energiya. Moscow. (1976)
11. Benzar, V. K. Tehnika SVCh-vlagometrii. VSh. Minsk. (1974)
12. Harvey, A. F. Tehnika sverhvyisokih chastot. V. 1. Sovetskoe radio. Moscow. (1965)

---

---

## ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

---

---

УДК 656.11:658.012

А.Н. КЛИМОВИЧ, В.Н. ШУТЬ  
Брестский государственный технический университет

### АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕННЯ ПЕРЕКРЕСТКОМ НА ОСНОВЕ ОПТИМІЗАЦІЇ НАСТРОЙКИ ДОРОЖНОЇ РАЗМЕТКИ

*Методи управління транспортними потоками мають ряд недоліків. Пропонується адаптивний метод на основі поетапної настройки використання змінних схем розмітки дороги, входящої в перехресток, з допомогою управляємих знаків, що значно підвищує пропускну здатність перехрестка, знижує затримку транспорту на світлофорних об'єктах. В роботі запропоновано формульне описання розмітки і проведена класифікація розміток.*

*Ключові слова: адаптивне управління, дорожня розмітка, формульна запис розмітки, детектори транспорту, транспортна система, світлофорний об'єкт, конкуруючий транспортний потік, пропускну здатність смуги руху*

A. KLIMOVICH, V. SHUTS  
Brest State Technical University

### ADAPTIVE ALGORITHM OF ROAD-CROSSING REGULATION ON THE BASIS OF ADJUSTMENT OPTIMIZATION OF ROAD MARKING

*The task of traffic regulation in the city remains relevant for many years. Crossroads are places where traffic jams are formed, there is a pollution of exhaust gases and the emergency danger increases. The stochastic nature of the change in the intensities of traffic flows approaching to the intersection from different directions makes difficult the task of the efficient intersection management. Most research in the field of traffic management in the road network is focused on improving management through traffic signal regulation. In this case control actions are changes in such parameters as the duration of the traffic light cycle, the number of traffic lights and their order. Often this set of changes in the parameters of a traffic light object is not enough, and the traffic jam at the intersection keeps growing.*

*Traffic load image can significantly change during the day, which leads to inefficient use of the bands, some of which can be overloaded, and some can be idle, although its capacity can be used for traffic in the other direction. The paper suggests a method for increasing the throughput of a crossroads by introducing dynamic road markings. We introduce a classification and numerical description for different types of markup. This description represents the throughput in different directions for a given type of markup. Here we give an example of all possible types of marking for a two-lane entrance to the intersection. We propose a method for selecting a specific type of markup depending on the current state of traffic flows. Intersections should be equipped with electronic displays showing the current state of marking, which is determined by dividing the lanes into a direct and opposite direction, as well as by the permitted directions for each lane. The type of markup is selected by the controller installed at the intersection and acting on the basis of the vehicle counting sensors located along the perimeter. The proposed method of organizing traffic allows to increase the throughput of intersections and the transport network in general, to reduce the number of traffic jams and the resulting pollution.*

*Keywords: adaptive management, road markings, formulaic entry markup, detectors of transport, transport system, traffic light, competing traffic, the throughput of the lanes.*

### **Постановка проблеми**

Современное дорожное движение является сложной динамической системой взаимного влияния людей, транспортных средств и элементов дорожной инфраструктуры. Обеспечение быстрого и безопасного движения в таких условиях требует применения комплекса организационных и архитектурно-планировочных мероприятий по обустройству автомобильных дорог, а также применения современных технических средств организации дорожного движения на базе информационных технологий.

При этом имеющийся в настоящее время опыт применения технических средств рассматривает отдельные транспортные средства и не учитывает взаимосвязи между разнородными компонентами дорожного движения [1–2], что делает актуальным разработку новых средств автоматизации дорожного движения (особенно в рамках перекрестков), позволяющих осуществлять комплексное регулирование, исходя из постоянно меняющихся дорожных условий. Несоответствие сложившейся улично-дорожной сети крупных городов условиям насыщенных и перенасыщенных транспортных потоков усложняет движение на регулируемых узлах. Такая ситуация требует переосмысления теории и практики управления уличным движением и применения современных средств и методов управления.

### **Анализ последних исследований и публикаций**

При исследовании заторов, а также при проектировании новых систем управления транспортом особое внимание следует уделять такому элементу дорожного регулирования как перекресток. Перекресток является местом пересечения нескольких путей. Наиболее распространенный перекресток X-образный является местом пересечения двух путей. Здесь наблюдается снижение пропускной способности пути, т.к. часть времени на движение должна быть передана пересекающему (конкурирующему) потоку. Светофорный объект на перекрестке выполняет функцию коммутирующего устройства, предоставляющего поочередное право на движение через перекресток автотранспортным средствам (АТС) с конкурирующих направлений.

Стохастический характер изменения интенсивностей АТС, подъезжающих к перекрестку с различных направлений, делает задачу удовлетворительного, адекватного управления перекрестком трудно выполнимой. Все исследования в области управления транспортными потоками в улично-дорожной сети (УДС) сосредоточены на улучшение управления в узловых точках УДС, посредством светофорного регулирования [3], т.е. идет разрешение ситуации, уже сложившейся на перекрестке и, зачастую, весьма неблагоприятной, с большим числом АТС, остановившихся перед светофором. Управляющими воздействиями в таком случае являются изменения длительности светофорного цикла, такта, число светофорных фаз и их порядка следования [4–5]. Часто этого набора изменений параметров светофорного объекта (СФО) недостаточно, и "пробка" на перекрестке разрастается.

Отказ функционирования транспортной системы наступает в результате заторов на транспортной сети. Появление заторов, когда имеется запас пропускной способности сети, объясняется не только не оптимальностью работы светофорной сигнализации, но и её недостаточностью. Дополнением к регулированию дорожного движения на перекрестке посредством СФО должно стать адаптивное изменение дорожной разметки.

### **Цель исследования**

Разработать адаптивный метод управления транспортными потоками на основе поэтапной настройки использования переменных схем разметки дороги, входящей в перекресток, с помощью управляемых знаков.

### Изложение основного материала исследования

Интенсивность движения в городе в течение суток, недели и года меняется в значительных пределах. На изменение интенсивности движения влияют также ДТП (дорожно-транспортное происшествие), закрытие улиц, ремонт проезжей части и другие временные факторы. Поэтому возможно значительное изменение соотношения интенсивности движения по направлениям. Чтобы учесть неравномерность движения, необходима гибкая система, которая позволяет менять направления движения по полосам, например, увеличения интенсивности движения налево требует увеличение количества полос в данном направлении. Система в этом случае с помощью управляемых знаков меняет направление движения по одной из полос и движение налево переходит в режим двухполосного или одна полоса используется для движения прямо и налево.

Возможность использования переменных схем с помощью управляемых знаков и оперативного управления значительно повышает пропускную способность УДС и снижает задержку транспорта, поэтому требует широкого использования в городских транспортных системах.

**Постановка задачи.** Существующая дорожная разметка имеет ряд недостатков, которые можно свести в две группы:

- недостатки для водителей;
- недостатки для ГИБДД и коммунальных служб.

К основным проблемам, с которыми сталкиваются водители в процессе движения по дорогам со стандартной разметкой, следует назвать ее константность (неизменность).

При движении по перегону к очередному перекрестку водителю неизвестна разметка на этом перекрестке вплоть до момента приезда на него. При этом, в случае, если водитель не был осведомлен о том, что в рамках конкретного перекрестка запрещен поворот в определенном направлении, то возможно ему придется преодолеть дополнительное расстояние до следующего перекрестка, что несет дополнительные временные и материальные затраты.

В рамках второй группы недостатков следует отметить повышенную опасность возникновения дорожно-транспортных происшествий. Так, при движении в потоке (пачке) и приближению к перекрестку водители транспортных средств начинают массово перестраиваться для того, чтобы с минимальными затратами продолжить движение и поддерживать выбранный маршрут. В случае если последующая разметка сильно отличается от предыдущей, или автомобиль меняет направление движения, а также в случае невнимательного отношения водителей к предупреждающим знакам и резкого перестроения, зачастую происходят дорожно-транспортные происшествия (ДТП).

Кроме того, в процессе эксплуатации возникают вопросы о долговечности стандартной разметки. Так, пункт 5.1.10 СТБ 1231-2000 "Разметка дорожная: общие технические условия" утверждает, что: дорожная разметка, выполненная термопластиками, холодными пластиками или другими подобными материалами, должна обладать функциональной долговечностью не менее 1 года, а красками и эмалями – не менее 6 мес. [6].

Однако больший срок не устанавливается, так же как и не устанавливается максимальный срок эксплуатации, что приводит к местам в черте городов, где разметка практически не видна или вовсе отсутствует. Данный недостаток, кроме того, затрагивает и водителей, которые, ничего не подозревая, могут нарушать правила дорожного движения.

Таким образом, наличие ряда недостатков, сдерживающих эффективное осуществление движения транспортных средств по дорогам городов, обуславливает необходимость внедрения новых средств регулирования и контроля. В работе предлагается на перегонах между перекрестками устанавливать электронные табло,

которые будут подбирать разметку под движущиеся в потоке транспортные средства и при необходимости с минимальными перестроениями корректировать движение автомобилей в рамках требуемых полос. При этом водители заранее оповещены о форме разметки на предстоящем по ходу движения перекрестке, так как электронное табло устанавливается на расстоянии  $\frac{3}{4}$  от предстоящего по ходу движения перекрестка и у водителей достаточно времени для нужного им перестроения.

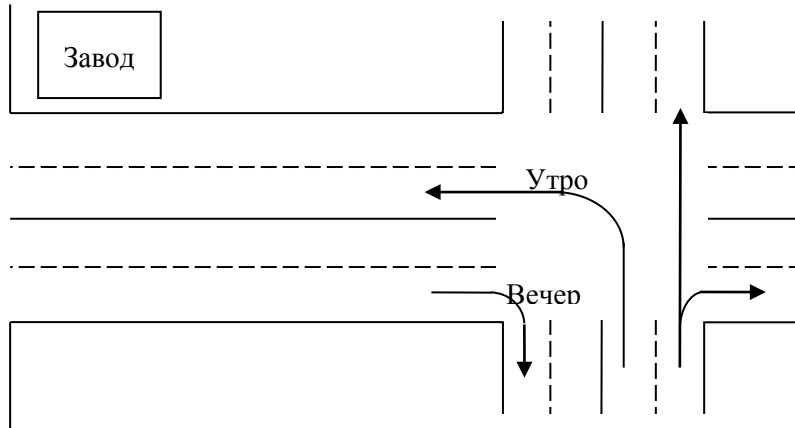


Рис. 1 . Фрагмент УДС.

На рис. 1 и 2 приведен пример, демонстрирующий изменяющуюся разметку в течении дня в зависимости от структуры транспортных потоков в утренние и вечерние часы. На рис.1 изображен фрагмент УДС с явным центром тяготения (завод). В утренние часы АТС с магистрали съезжают на перекрестке налево, чтобы двигаться к заводу. Для утра необходима разметка, изображенная на рис 2а), или б). Причем разметка 2б может пропустить больше левоповоротных автомобилей. В то время как разметка 2в) характерна для вечера. Индикатором смены разметки является информация с детекторов транспорта, расположенных по каждой полосе движения. Например, появление очереди на левоповоротной полосе движения перед перекрестком, зафиксированное детекторами транспорта, будет сигналом для системы управления о смене разметки и увеличения числа полос для этой категории транспорта.

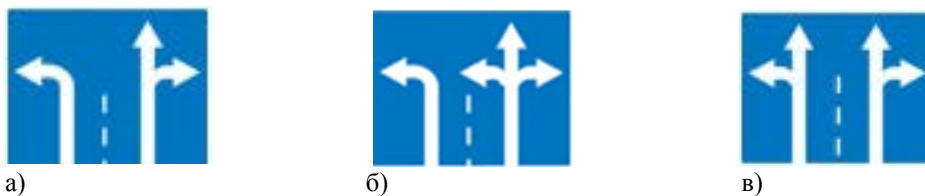


Рис.2. Варианты разметки для представленного фрагмента УДС.

**Формульная запись разметки.** Для того чтобы эффективно управлять электронным табло переменной разметки, а, следовательно, и перекрестком, необходимо иметь базу данных по всем возможным разметкам. Разметка делается для всех полос одного направления дороги (дорога разделена сплошной линией на прямое и встречное направление). Каждое направление разделено прерывистой линией на полосы движения с нумерацией  $i = \overline{1; m}$ , начинающейся от правого края бордюра каждого направления дороги. Разметка  $i$ -ой полосы это вектор  $\vec{P}_{ij}$ , указывающий на одно из трех направлений  $j = \overline{1; 3}$  движения транспорта с  $i$ -ой полосы перекрестка: направо 1, прямо 2 и налево 3.

Так вектор  $\vec{P}_{11}$  указує на рух з першої смуги направо, а вектор  $\vec{P}_{12}$  на рух по першій смузі прямо, вектор  $\vec{P}_{23}$  указує на поворот з другої смуги наліво. Таким чином, вектор  $\vec{P}_{ij}$  розмітки відображає можливість руху в тому або іншому напрямку з кожної з смуг. Розметка для одного напрямку дороги це сукупність  $\vec{P}$  векторів  $\vec{P}_{ij}$ :

$$\vec{P} = \vec{P}_{11} + \vec{P}_{12} + \dots + \vec{P}_{ij} + \dots + \vec{P}_{m3}, \quad (1)$$

де  $m$  – число смуг одного напрямку дороги,  $i = \overline{1; m}$ ,  $j = \overline{1; 3}$ . Тут знак "+" означає не арифметичне сумування, а об'єднання елементів.

На рис. 3а зображено перехресток з розміткою дороги для прямого напрямку руху. На рис. 3б зображено дорожній знак цієї розмітки з формульною його записом. Розставимо дужки в формульній записі цього знака наступним чином:  $\vec{P} = (\vec{P}_{11} + \vec{P}_{12}) + (\vec{P}_{22} + \vec{P}_{23})$ . Тоді сукупність векторів в кожній дужці стосується до однієї смуги руху. Це буде формульним описом окремої смуги руху, тобто, таким чином, в кожній дужці перерахована сукупність векторів, або інакше, напрямків руху з конкретної смуги. Формули розмітки з групуванням по смузі розташовані в першому стовпці табл. 1.

Можливий варіант групування по напрямку. Якщо при групуванні по смузі визначальним був перший індекс (номер смуги), то при групуванні по напрямку визначальним є другий індекс вектора (напрямок руху). Розставимо дужки в попередньому прикладі наступним чином:  $\vec{P} = \vec{P}_{11} + (\vec{P}_{12} + \vec{P}_{22}) + \vec{P}_{23}$ . Запис розміток при групуванні по напрямку занесемо в третій стовпець табл. 1.

Тут уже можливі перетворення в вигляді сумування векторів. Вектори  $\vec{P}_{12}$  і  $\vec{P}_{22}$  мають одне напрямлення 2 (прямо). Замінемо вираження в дужках на узагальнений вектор напрямлення прямо  $\vec{P}_2$ . Також замінемо вектори  $\vec{P}_{11}$ ,  $\vec{P}_{23}$  на  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_3$ . Тоді отримаємо  $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$ . Позначимо через  $p$  пропускну здатність однієї смуги руху (кількість автомобілів, що проходять через поперечне переріз смуги в одиницю часу, авт./хв.). Тоді модулі векторів  $|\vec{P}_1|$ ,  $|\vec{P}_2|$ ,  $|\vec{P}_3|$  розподіляться наступним чином  $0.5p$ ,  $p$  і  $0.5p$  (див. рис. 3). Коефіцієнт 0.5 вказує на те, що напрямку 1 (направо), а також напрямку 3 (наліво), в даній розмітці виділено 0.5 смуги. В той же час напрямку 2 (прямо) виділена ціла смуга.



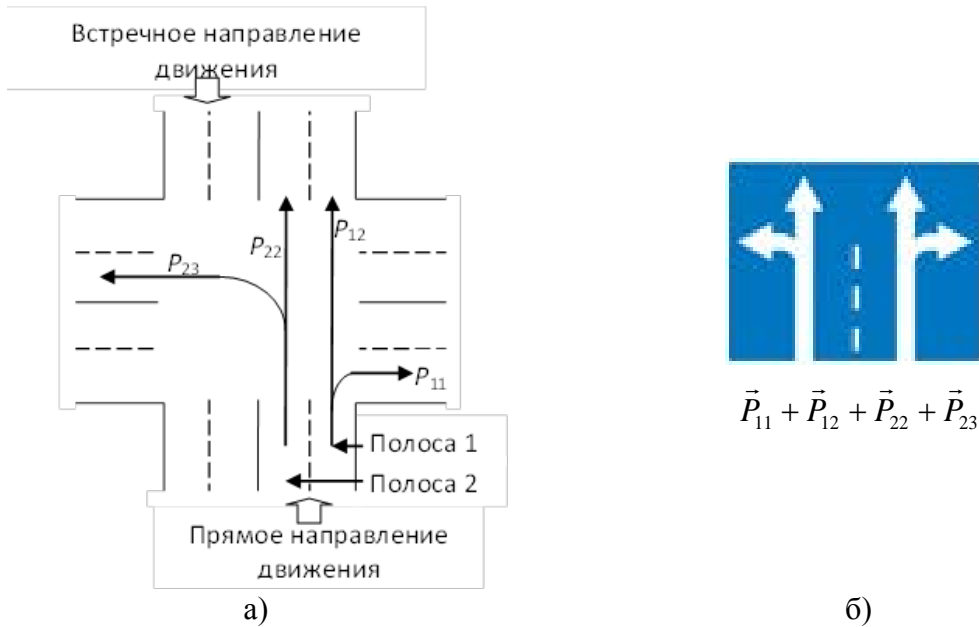


Рис. 3. Пример двухполосного перекрестка и соответствующего ему знака и формульной записи.

Составим упорядоченную тройку из пропускных способностей каждого направления  $(|\vec{P}_1|, |\vec{P}_2|, |\vec{P}_3|)$  или  $(0.5p, p, 0.5p)$ . Выполним нормирование тройки путем деления каждого её элемента на  $|\vec{P}| = 2p$  (пропускная способность всего направления движения по всем её двум полосам). Тогда получим  $(|\vec{P}_1|/|\vec{P}|, |\vec{P}_2|/|\vec{P}|, |\vec{P}_3|/|\vec{P}|)$  или  $(0.5p/2p, p/2p, 0.5p/2p)$ , или  $(0.25, 0.5, 0.25)$ . Упорядоченная тройка  $(0.25, 0.5, 0.25)$  является числовой характеристикой конкретной, данной разметки. Каждая координата тройки  $(w_1, w_2, w_3)$  указывает на долю  $w_j$ ,  $j = \overline{1;3}$ , которую составляет конкретное направление (направо, прямо, налево) в общей пропускной способности всего направления движения. Все тройки внесем в четвертый столбец табл. 1.

Следует отметить, что запись по направлению более информативна, так как позволяет оценить ресурс, выделяемый данной разметкой на то, или иное направление движения. Полученные числовые характеристики можно использовать для адаптивного управления путем подбора наиболее близкой разметки для приближающегося к перекрестку потока АТС (пачки АТС). Структура пачки (под структурой понимается соотношение числа авто, разъезжающих на перекрестке направо, прямо и налево) должна совпадать или быть наиболее близкой к структуре разметки.

К перекрестку приближается пачка  $\vec{X}$  АТС из  $n$  автомобилей  $\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3$ , где  $|\vec{X}_1| = n_1$  число авто, которые поедут направо,  $|\vec{X}_2| = n_2$  число авто прямо и  $|\vec{X}_3| = n_3$  – налево. Составим целевую функцию ситуации от параметра разметки  $\vec{P}$ :

$$\min F(\vec{P}) = \|\vec{X} - \vec{P}\| = \|\vec{X}_1 - \vec{P}_1\| + \|\vec{X}_2 - \vec{P}_2\| + \|\vec{X}_3 - \vec{P}_3\| \quad (2)$$

Перейдем к следующей целевой функции от параметра  $\vec{P}$ :

$$\min Z(\vec{P}) = \left| \frac{n_1}{n} - \frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{P}|} \right| + \left| \frac{n_2}{n} - \frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{P}|} \right| + \left| \frac{n_3}{n} - \frac{|\vec{P}_3|}{|\vec{P}|} \right| \quad (3)$$

Минимум целевой функции  $Z(\vec{P})$  является минимумом и для функции  $F(\vec{P})$ , то есть обе функции достигают минимума при одном параметре  $\vec{P}$ . Преобразуем выражение (3):

$$\min Z(\vec{P}) = \left| \frac{n_1}{n} - w_1 \right| + \left| \frac{n_2}{n} - w_2 \right| + \left| \frac{n_3}{n} - w_3 \right| \quad (4)$$

Выражение (4) является универсальным инструментом для адаптивного подбора соответствующей разметки под входящим в перекресток транспортный поток. То есть, из всех разметок  $\vec{P}$  табл. 1 берется разметка  $\vec{P}^*$ , при которой достигается минимум функции  $Z(\vec{P})$ . Она обеспечивает наиболее быстрый разезд АТС на перекрестке.

**Классификация разметок.** Составим все возможные разметки для двухполосного входа в перекресток. Число таких разметок составит 17. Все полученные разметки можно классифицировать в три группы (табл. 1): актуальные, форс-мажорные, неактуальные.

К актуальным относятся те разметки, которые используют все три выхода с перекрестка. Это рабочие разметки, которые постоянно в процессе управления перекрестком используются. Частота использования их разная и зависит от структуры транспортных потоков, пересекающих перекресток (здесь под структурой транспортного потока понимается соотношение транспортных средств поворачивающих направо, прямо и налево), то есть конкретному пересекающему перекресток транспортному потоку на электронном табло установлена наиболее близкая ему разметка. «Наиболее близкая» означает, что из всего набора разметок только при этой разметке перекресток покинут все авто за минимальное время.










Форс-мажорные разметки используют только два выхода с перекрестка из трех возможных. Данной разметкой один выход с перекрестка закрыт. Эта группа разметок используется не так часто. Только в случае ДТП или при проведении ремонтных работ, чтобы закрыть проезд по улице, относящейся к данному выходу с перекрестка.

Неактуальная разметка имеет только один выход с перекрестка. Эта группа разметок практически не используется. В табл. 1 разметки расположены в порядке уменьшения частоты использования.

Исходя из движущегося к перекрестку в конкретный (текущий) момент времени потока АТС с характеристиками  $\vec{X}(n_1, n_2, n_3)$  находится вектор (разметка)  $\vec{P}$  путем перебора по табл. 1, чтобы свести к минимуму функцию  $Z(\vec{P})$  на основании выражения (4). Перебор делается по числовым характеристикам вектора  $\vec{P}(w_1, w_2, w_3)$ . Таким образом осуществляется адаптивный подбор наиболее близкой к потоку разметки, которая постоянно сменяется на электронном табло.

Таблица 1

Формулы двухполосных разметок

№	Формула разметки с группировкой по полосе движения	Формула разметки с группировкой по направлению движения	Числовая характеристика разметки ( $w_1, w_2, w_3$ )	Дорожный знак
1	2	3	4	5
1	$(P_{11}+P_{12})+(P_{22}+P_{23})$	$P_{11}+(P_{12}+P_{22})+P_{23}$	(0,25 , 0,5 , 0,25)	
2	$(P_{11}+P_{12}+P_{13})+P_{23}$	$P_{11}+P_{12}+(P_{13}+P_{23})$	(0,16 , 0,16 , 0,66)	
3	$P_{11}+(P_{21}+P_{22}+P_{23})$	$(P_{11}+P_{21})+P_{22}+P_{23}$	(0,66 , 0,16 , 0,16)	
4	$(P_{11} + P_{12}) + P_{23}$	$P_{11} + P_{12} + P_{23}$	(0,25 , 0,25 , 0,5)	
5	$P_{11}+(P_{22}+P_{23})$	$P_{11}+P_{22}+P_{23}$	(0,5 , 0,25 , 0,25)	
6	$(P_{11}+P_{12})+P_{22}$	$P_{11}+(P_{12}+P_{22})$	(0,25 , 0,75 , 0)	
7	$P_{12}+(P_{22}+P_{23})$	$(P_{12}+P_{22})+P_{23}$	(0 , 0,75 , 0,25)	
8	$(P_{12}+P_{13})+P_{23}$	$P_{12}+(P_{13}+P_{23})$	(0 , 0,25 , 0,75)	
9	$P_{11}+(P_{21}+P_{22})$	$(P_{11}+P_{21})+P_{22}$	(0,75, 0,25, 0)	

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5
10	$P_{11}+(P_{21}+P_{23})$	$(P_{11}+P_{21})+P_{23}$	(0,75 , 0 , 0,25)	
11	$(P_{11}+P_{13})+P_{23}$	$P_{11}+(P_{13}+P_{23})$	(0,25 , 0 , 0,75)	
12	$P_{11}+P_{23}$	$P_{11}+P_{23}$	(0,5 , 0 , 0,5)	
13	$P_{11}+P_{22}$	$P_{11}+P_{22}$	(0,5 , 0,5 , 0)	
14	$P_{12}+P_{23}$	$P_{12}+P_{23}$	(0 , 0,5 , 0,5)	
15	$P_{13}+P_{23}$	$(P_{13}+P_{23})$	(0 , 0 , 1)	
16	$P_{11}+P_{21}$	$(P_{11}+P_{21})$	(1 , 0 , 0)	
17	$P_{12}+P_{22}$	$(P_{12}+P_{22})$	(0 , 1 , 0)	

### Выводы

Предложенный адаптивный метод на основе поэтапной настройки использования переменных схем разметки дороги, входящей в перекресток, с помощью управляемых знаков, позволяет значительно повысить пропускную способность перекрестка и снизить задержку транспорта на светофорных объектах.

### Список использованной литературы

1. Врубель Ю.А. Характеристики дорожного движения: учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-44 01 02 "Организация дорожного движения" / Ю.А. Врубель. — Минск.: БНТУ, 2007. — 268 с.
2. Маркелов В.М. Интеллектуальные транспортные системы как инструмент управления / В.М. Маркелов, И.В. Соловьев, В.Я. Цветков // Государственный Советник. — 2014. — №3. — С. 42-49.

3. Кременец Ю.А. Технические средства регулирования дорожного движения / Ю.А. Кременец, М.П. Печерский. — М.: Транспорт, 1981. — С. 84-116.
4. Анфилец С.В. Адаптивный алгоритм управления на основе поэтапной настройки светофорных объектов по магистрали / С.В. Анфилец, В.Н. Шуть // Доклады БГУИР. — 2011. — № 6 (60). — С. 79-84.
5. Шуть В.Н. Адаптивное управление транспортными потоками в улично-дорожной сети города / В.Н. Шуть — Брест: Издательство БрГТУ, 2015. — 188 с.
6. Anfilets S.V. Shut Evaluating the Effectiveness of the Adaptive Control System in Brest Region / S.V. Anfilets // International Congress of Heavy Vehicles, Road Trains and Urban Transport. — Minsk, 2010. — P. 222–226.
7. Разметка дорожная. Общие технические условия: СТБ 1231-2000. — Введ. 01.01.06. — Минск: Беларус. гос. ин-т стандартизации и сертификации, 2006. —82 с.

#### **References**

1. Vrubel, Yu. A. *Harakteristiki dorozhnogo dvizheniya: uchebno-metodicheskoe posobie dlya studentov specialnosti 1-44 01 02 "Organizaciya dorozhnogo dvizheniya"*. BNTU. Minsk. (2007)
2. Markelov, V. M., Solovev, I. V., Cvetkov, V. Ya. *Intellektualnye transportnye sistemy kak instrument upravleniya*. Gosudarstvennyy Sovetnik. **3**, 42-49. (2014)
3. Kremenec, Yu. A., Pecherskiy, M. P. *Tehnicheskie sredstva regulirovaniya dorozhnogo dvizheniya*. Transport. Moscow. (1981)
4. Anfilec, S. V., Shut, V. N. *Adaptivnyy algoritm upravleniya na osnove poetapnoy nastroyki svetofornyh obektov po magistrali*. Doklady BGUIR. **6** (60), 79-84. (2011)
5. Shut, V. N. *Adaptivnoe upravlenie transportnymi potokami v ulichno-dorozhnoy seti goroda*. Izdatelstvo BrGTU. Brest. (2015)
6. Anfilets, S. V. *Shut Evaluating the Effectiveness of the Adaptive Control System in Brest Region*. International Congress of Heavy Vehicles, Road Trains and Urban Transport. Minsk. (2010).
7. *Razmetka dorozhnaya. Obschie tehnicheckie usloviya: STB 1231-2000. — Vved. 01.01.06*. Belarus. gos. in-t standartizacii i sertifikacii. Minsk. (2006)

УДК 004.942: 004.715

А.М. ХОШАБА

Винницький національний технічний університет

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАГРУЗОЧНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И ВОССТАНОВЛЕНИЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

*В работе рассматриваются важные вопросы производительности вычислительных систем как: цели и задачи, общая модель производительности, фундаментальные проблемы определения оценок производительности. Названы понятия и наиболее часто встречаемые причины возникновения утечки производительности процессора и памяти. Сформулирована постановка задачи исследования производительности вычислительных систем в результате использования веб-сервисов, приведены примеры скриптов нагрузочного воздействия, наведена их характеристика и особенности работы. Приведен пример рекомендаций по созданию сценариев воздействия на веб-сервис. Показано расчет оценок производительности сценария воздействия на веб-сервис, наведен график выполнения работы сценария.*

*Ключевые слова: производительность вычислительных систем, нагрузочное воздействие, бенчмарки, веб-сервисы.*

О.М. ХОШАБА

Вінницький національний технічний університет

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ НАВАНТАЖУВАЛЬНИХ ВПЛИВІВ І ВІДНОВЛЕННЯ ПРОДУКТИВНОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

*У роботі розглядаються важливі питання продуктивності обчислювальних систем як: цілі та завдання, загальна модель продуктивності, фундаментальні проблеми визначення оцінок продуктивності. Названі поняття і причини виникнення витоків продуктивності процесора та пам'яті що найбільш часто зустрічаються на практиці. Сформульовано постановку задачі дослідження продуктивності обчислювальних систем в результаті використання веб-сервісів, наведені приклади скриптів навантажувального впливу, наведена їх характеристика та особливості роботи. Наведено приклад рекомендацій по створенню сценаріїв впливу на веб-сервіс. Показано розрахунок оцінок продуктивності сценарію впливу на веб-сервіс, наведений графік виконання роботи сценарію впливу.*

*Ключові слова: продуктивність обчислювальних систем, навантажувальний вплив, бенчмарки, веб-сервіси.*

O.M. KHOSHABA

Vinnitsia National Technical University

## INVESTIGATION OF PROCESSES OF LOADING EFFECTS AND RECOVERY OF COMPUTER SYSTEMS PERFORMANCE

*In the article important issues of the performance of computing systems are considered such as: goals and tasks, a general performance model, fundamental problems in determining performance estimates. The concepts and the most common reasons for a processor and memory leak are identified. The statement of a research problem for processor and memory perform leak as a result of uses web services is formulated, examples of scripts of loading influence are*

resulted, their characteristic and features of work are directed. An example of recommendations for creating scenarios of the impact on a web service is given. The calculation of the performance evaluations of the impact scenario on the web service is shown, the schedule for the performance of the script is plotted. An important part for study of the performance of computing systems was the development of benchmarks. The main lacks of existing benchmarks include the absence of: load and recovery models, their combined impact, distributed sources of impact. To study the performance of of computing systems in most cases create exposure scenarios. Such scenarios by the type of impact can have different dynamic (velocity) estimates and have different mathematical models. The study of the performance of computer systems using the example of a web service was performed in the operating system Linux Centos 7.0, kernel 3.10, the processor Intel Core i7-3667U, 2.0GHz, with 8 GB of RAM. The software was an apache web server. The load was effected using the httpperf utility, performance monitoring was sar, iostat, vmstat. Estimates of the performance of the exposure scenario were verified using mathematical modeling in the SciLab environment using special scripts. Also, the task of researching the performance of computing systems on the example of using web services is formulated, examples of stress loading scripts are given, their characteristics and work features are indicated. Particular importance is given to the model of impact formation. An example of recommendations for creating scenarios of the impact on a web service is given.

*Keywords:* computer system performance, benchmarks, web services, sar, iostat, vmstat, SciLab.

### Постановка проблеми

Основой производительности вычислительных систем (ВС) является моделирование нагрузочных воздействий (НВ) и восстановлений [1]. Производительность ВС может рассматриваться как самостоятельная дисциплина, так и в основе множества прикладных аспектов практической инженерии. Проектирование, разработка и сопровождение информационных систем (ИС) также невозможна без решения вопроса производительности ВС [2]. Эффективная разработка и сопровождение ИС в области изучения производительности требуют: определение модели предметной области и формирование спецификаций к проектированию данных систем; создание и генерацию заданных тестовых нагрузок; построение системы с использованием жизненного цикла и определения бизнес-процессов функционирования основных компонент ВС.

Разработка математических моделей и методов производительности ВС ставит своей целью не только выполнение моделирования процессов, происходящих в ВС, но и управление ими, устранение различных опасных последствий негативных воздействий [3].

### Анализ последних исследований и публикаций

К основным задачам которые решаются с помощью моделей производительности ВС и программного обеспечения (ПО) в основном относятся следующие: оптимизация показателей выполнения ПО в среде ВС; поиск проблемных областей (“узкого места”) в работе (производительности) ВС или ПО; обнаружение аномалий в работе ВС или ПО, оценка работы прикладных программ, сервисов, систем управления базами данных, операционных систем, виртуальных и облачных информационных структур [3].

Общая модель производительности ВС может быть представлена в виде [1]:

$$k_{pn} \frac{d^n P}{dt^n} + \dots + k_{p1} \frac{dP}{dt} + k_0 P = k_{qm} \frac{d^m Q}{dt^m} + \dots + k_{q1} \frac{dQ}{dt} + k_0 Q \quad (1)$$

Фундаментальные проблемы определения оценок производительности ВС связаны с построением концептуальной математической модели, отбором и уменьшением пространства признаков при построении прогностических коэффициентов математических моделей, разработкой критериев определения состояний объектов и субъектов исследований для принятия оптимальных решений.

Проблеми производительности ВС, в частности утечка памяти и процессора, могут возникать в следствии самых разных причин. В общем случае, утечка производительности процессора представляет собой ситуацию (рис. 1), при которой в результате сбоев или целенаправленных действий происходит ненужная (лишняя, не контролируемая) работа одного из ядер процессора. Такая работа может сопровождаться чередованием загрузки ядер до 99-100% в результате которой не наблюдается зависания системы. Такая ситуация плохо контролируется пользователями по причине ее возникновения так как не наблюдается работа сторонних программ. Часто, при нахождении причины, вызвавшей такую ситуацию, невозможно удалить процесс, который поддерживает утечку, в результате чего приходится перезагружать систему.

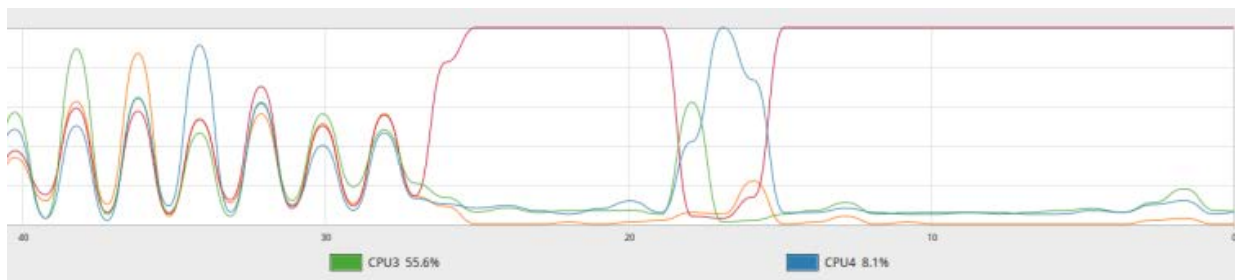


Рис. 1. Ситуация утечки производительности процессора.

К другим, наиболее распространенным из причин утечки производительности процессора и памяти могут являться заражение компьютерными вирусами и другими вредоносными программами, ошибки в работе операционных и файловых систем, неправильные пользовательские и системные настройки операционных систем, неправильная установка антивирусных и ресурсоемких программ (плагинов) на браузерах. В приведенных примерах в большинстве случаев отмечается ситуация утечки производительности процессора. Однако, на практике более известной и описанной проблемой среди пользователей является утечка памяти в процессе работы или завершения программ.

#### Цель исследования

**Постановка задачи.** Существует множество инструментов нагрузочного тестирования ВС и ПО. Однако, к их недостаткам следует отнести практическое отсутствие описания математической модели (основных параметров) НВ, к которым относятся: функциональная характеристика нагрузки (полиномы  $n$ -ой степени, степенные, экспоненциальные, показательные) и временные промежутки формирования отдельных серий запросов, общее время НВ (или количество серий запросов). Данные параметры нагрузочного воздействия существенно влияют на динамические характеристики работы ВС и ПО. Поэтому, к постановке задачи исследования процессов НВ и восстановлений относится:

- 1) создание и выполнение генерации сценария воздействия на веб-сервис с использованием функции полинома третьей степени;
- 2) определение модели работы веб-сервиса с ресурсами ВС;
- 3) выполнение исследования и определение оценок производительности ВС на примере веб-сервиса.

#### Изложение основного материала исследования

##### Теоретические сведения

Аппаратные средства ВС имеют определенную потенциальную составляющую в виде статических величин, которые позволяют различать программно-аппаратные комплексы (ПТК) друг от друга по возможности решения различных сложных. Обычно



пользователей интересуют потенциальные возможности в работе таких аппаратных компонентов ПТК как процессоры (такты частота), сетевые устройства (пропускная способность каналов передачи данных), видеоадаптеры (скорость прорисовки пикселей на экране), дисковые устройства (скорость чтения и записи данных).

При решении ряда задач ПО использует различные возможности этих и других аппаратных средств. Поэтому, такое динамическое использование (потребление) ресурсов аппаратных средств представляет собой кинетическую (динамическую) составляющую. Кинетическая (динамическая) составляющая использования аппаратных средств выражается функцией. Значения потенциальной и кинетической составляющей могут быть представлены в виде абсолютных и относительных величин.

Работа прикладной или системной задачи может быть представлена определенным воздействием на ресурсы ВС. По завершении задачи ресурсы, выделенные для ее решения, через некоторое время освобождаются. Поэтому воздействие задачи на ресурсы системы в виде потребления и расходования составляют два основных процесса производительности ВС: воздействия и восстановления. Часто, процессы воздействия и восстановления определяются как состояния или фазы функционирования объектов ПТК.

Для исследования производительности ВС выделяют субъектно-объектную модель которая состоит в следующем. В каждый фиксированный момент времени ВС представляет собой конечное множество компонентов, разделяемых по критерию активности на два подмножества: подмножество субъектов ( $S$ ) и объектов ( $O$ ) таких, что:

$$S \cap O = \emptyset; \quad (2)$$

В любой момент времени  $t_k$  подмножество субъектов и объектов не является пустым:

$$S \neq \emptyset; \quad (3)$$

$$O \neq \emptyset; \quad (4)$$

Объектом исследования процессов производительности ВС является аппаратная часть программно-технического комплекса (ПТК). К программной части ПТК принадлежат субъекты исследования процессов производительности ВС. В любой момент времени  $t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  объект ( $O$ ) может принадлежать только одному субъекту ( $S$ ).

#### Определение оценок производительности вычислительных систем

Оценки производительности ВС находятся в виде скалярных (количественных и качественных) и векторных величин, выражаются в виде функций [4]. К примеру, пусть в результате экспериментальных исследования по изучению сценария воздействия на заданный ресурс (устройства) получена с помощью инструментов мониторинга некоторая функция  $v_T(t)$ . Данная функция представляет собой скорость выполнения работы некоторой задачи (в данном случае сценария воздействия). Тогда, выполненную работу можно представить в виде функции:

$$w_T(t) = \int v_T(t) dt \quad (5)$$

Скорость изменения протекания процессов определяется из выражения:

$$v_T(t) = w'_T(t) \quad (6)$$

$$a_T(t) = v'_T(t) \quad (7)$$

$$a_{TD}(t) = a'_T(t) \quad (8)$$

Оценки скорости протекания процесса или скорости выполнения задачи (9), изменения скорости протекания процесса (10) и выполненной работы (11) получаем следующим образом:

$$V_T = \int_{t_1}^{t_2} a_T(t) dt \quad (9)$$

$$A_T = \int_{t_1}^{t_2} a_{TD}(t) dt \quad (10)$$

$$W_T = \int_{t_1}^{t_2} v_T(t) dt \quad (11)$$

К показателям производительности ВС, которые тесно связаны с параметрами функционирования субъектов (объектов) ВС относятся [2,4]: пропускная способность (throughput), время ответа (response time), утилизация (utilization) и доступность (availability). Данные оценки и показатели производительности могут быть применены для сценариев воздействия на объект (субъект) исследования.

#### Создание сценариев воздействия на веб-сервис

Важной составной частью исследования производительности ВС является разработка сценариев (бенчмарков). К основным недостаткам существующих бенчмарков относятся отсутствие: моделей нагрузки и восстановления, их комбинированного воздействия, распределенных источников воздействия.

Для исследования производительности ВС в большинстве случаев создают сценарии воздействия. Такие сценарии по типу воздействия могут иметь различные динамические (скоростные) оценки и характеризоваться следующей моделью:

$$D_{LOAD} = k_A \frac{d^2 Q}{dt^2} + k_V \frac{dQ}{dt} + k_W f_Q(t) \quad (12)$$

В этом случае, равнопеременные при  $k_A \neq 0$  считаются равноускоренные (при  $k_A > 0$ ) или равнозамедленные (при  $k_A < 0$ ) нагрузочные воздействия. При  $k_A = 0$  сценарии воздействия будут считаться равномерными по генерации запросов к субъекту (объекту) исследования.

Сформируем сценарии воздействия по первому случаю как совокупность известной функциональной зависимости групп запросов (Force of Impact,  $F_{Impact}$ ) и временных интервалов (Pause,  $P_s$ ) между ними:

$$F_{Common} = F_{Impact} + P_s \quad (13)$$

Для создания сценария воздействия можно принять следующую функциональную зависимость:

$$F_{Impact} = 500 * t \text{ [запросов / с]} \quad (14)$$

Тогда временные промежутки сценариев воздействия будут следующими:

для  $S0 - 0$  с,  $S1 - 1$  с,  $S2 - 2$  с,  $S3 - 3$  с.

Целью проведения равнопеременных воздействий является определения состояний объекта (субъекта) исследования. К примеру, состояния веб-сервиса при воздействии по сценарию  $S0$  показаны в табл. 1. Различие в границах количества запросов определяется аппаратно-программным окружением и нагрузкой на ВС.

Целью проведения равномерных и равнопеременных воздействий на субъект исследования является определение основных процессов производительности ВС: НВ и

восстановления. В общем случае, производительность также характеризуется временным (или постоянным) прекращением или существенным понижением обработки данных объектом исследования в результате которого понижается его доступность по направляемым к нему запросам.

К примеру, скрипт, реализующий последовательность запросов по первому случаю (сценарий *S0*) показан на рис. 1а. Второй случай представлен также скриптом, показанным на рис. 1б. В случае тестирования, скрипты пишутся и выполняются в среде *bash* программирования. Для автоматизации исследований программы составляются на языках высокого уровня, к примеру, по настоящему исследованию – на *python*.

Таблица 1

Характеристика состояний субъекта исследования (веб-сервиса)

Название состояния	Количество запросов ( $10^3 \text{ c}^{-1}$ )	Критерий определения состояния
Стабильное (нормальное)	от 1 до 2,5	Отсутствие очереди запросов, отсутствие ошибок
Нагрузочное	от 2,5 до 8	Появление очереди запросов, отсутствие ошибок
Стрессовое	свыше 8	Появление ошибок, потеря запросов

<pre>#!/bin/bash for i in {100..9000..500} do httpperf --hog --server localhost --uri "/" -- num-conn \$i --num-call 1 --timeout 5 --rate \$i --port 80 done</pre> <p style="text-align: center;">а)</p>	<pre>#!/bin/bash for i in {1..180} do httpperf --hog --server localhost --uri "/" -- num-conn 1000 --num-call 1 --timeout 5 -- rate 1000 --port 80 done</pre> <p style="text-align: center;">б)</p>
--	---

Рис. 2. Bash скрипты, реализующие различные последовательности запросов к веб-сервису: а) равнопеременные (равноускоренные) запросы; б) равномерные запросы

### Результаты исследования производительности ВС на примере веб-сервиса

Исследование производительности ВС на примере веб-сервиса выполнялось в операционной системе Linux Centos 7.0, ядре 3.10, процессоре Intel Core i7-3667U, 2.0GHz, оперативная память 8ГБ. Программное обеспечение: веб-сервер *apache*. Нагрузочное воздействие осуществлялось с помощью утилиты *httperf*, мониторинг - с помощью *sar*, *iostat*, *vmstat*.

Для скрипта (рис. 2а) согласно оценкам (6-8) принималась следующая модель:

$$v_T(t) = 0.1428t^3 - 5.2727t^2 + 553.2215t - 492.2981; \quad (15)$$

$$a_T(t) = 0.4284t^2 - 10.5454t + 553.2215; \quad (16)$$

$$w_T(t) = 0.0357t^4 - 1.7576t^3 + 276.6108t^2 - 492.2981t. \quad (17)$$

Данная модель (15) для  $v_T(t)$  является полиномом третьей степени и имеет следующие характеристики качества аппроксимации:

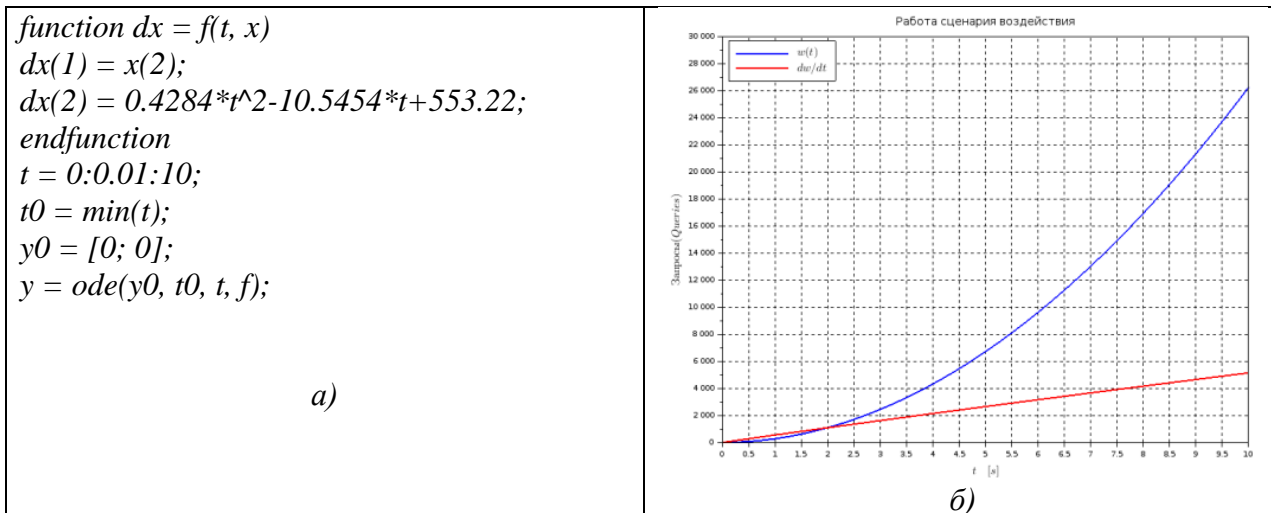
Индекс корреляции  $R = 0.9994$ ;

Индекс детерминации  $R^2 \approx 0.9987$ ;

Средняя ошибка аппроксимации  $A \approx 3.7013\%$

Оценки производительности сценария воздействия проверялись с помощью

математического моделирования в среде SciLab с помощью скрипта в сокращенном виде (рис. 3а). Результаты работы скрипта определения динамических оценок производительности сценария воздействия  $S0$  показаны на рис. 3б: количество выполненной работы задачей ( $w_T(t)$ ) – верхняя линия, скорость выполнения процесса ( $v_T(t)$ ) – нижняя.



**Рис. 3. Скрипт среды окружения SciLab, позволяющий получить оценки производительности сценария воздействия  $S0$  а) и результат его работы б)**

### Выводы

В работе рассмотрены важные вопросы производительности вычислительных систем к которым относятся цели и задачи, общая модель производительности, фундаментальные проблемы определения оценок производительности. Названы наиболее часто встречаемые причины возникновения утечки производительности процессора и памяти. Сформулирована постановка задачи исследования производительности вычислительных систем на примере использования веб-сервисов, приведены примеры скриптов нагрузочного воздействия, наведена их характеристика и особенности работы. Особое значение уделено модели формирования воздействия. Приведен пример рекомендаций по созданию сценариев воздействия на веб-сервис.

Показана оценка производительности сценариев воздействия на веб-сервис, наведены графики выполнения работы на основе скриптов, написанных в среде SciLab.

### Список использованной литературы

1. Хошаба А.М. Моделирование состояний при нагрузочных воздействиях на сервисы вычислительной системы / А.М. Хошаба // XIII Міжнародна науково-практична конференція "Математичне та імітаційне моделювання систем": Тези допов. – Київ, 2018. – С. 269-272.
2. Хошаба А.М. Концептуальная модель производительности вычислительных систем / А.М. Хошаба // XI Міжнародна науково-практична конференція "Математичне та імітаційне моделювання систем": Тези допов. – Київ, 2016. – С. 417-420.
3. Хошаба О.М. Дослідження надійності функціонування систем з керування потоками даних у комп'ютерних мережах / А.М. Хошаба // II Міжнародна науково-практична конференція "Інформаційні технології в освіті, науці і техніці": Тези допов. – Черкаси, 2014. – С. 107-108.

4. Хошаба А.М. Построение информационной системы для компьютерного моделирования производительности программно-технического комплекса / А.М. Хошаба // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2015. – №3(56). – С. 303-307.

#### **References**

1. Khoshaba, A. M. Modelirovanie sostoyaniy pri nagruzochnykh vozdeystviyah na servisii vyichislitelnoy sistemyi. XIII Mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiia "Matematychnye ta imitatsiine modeliuvannia system": Tezy dopov. Kyiv. 269-272. (2018)
2. Khoshaba, A. M. Kontseptualnaya model proizvoditelnosti vyichislitelnykh system. XI Mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiia "Matematychnye ta imitatsiine modeliuvannia system": Tezy dopov. Kyiv. 417-420. (2016)
3. Khoshaba, A. M. Doslidzhennia nadiinosti funktsionuvannia system z keruvannia potokamy danykh u kompiuternykh merezhakh. II Mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiia "Informatsiini tekhnolohii v osviti, nautsi i tekhnitsi": Tezy dopov. Cherkasy. 107-108. (2014)
4. Khoshaba, A. M. Postroenie informatsionnoy sistemyi dlya kompyuternogo modelirovaniya proizvoditelnosti programmno-tehnicheskogo kompleksa. Vestnik Hersonskogo natsionalnogo tehnicheskogo universiteta. **3**(56), 303-307. (2015)

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ до наукового журналу «Прикладні питання математичного моделювання»

## Параметри файлу:

Рукопис повинен бути підготовлений за допомогою Microsoft Word-2003/2007; формат сторінки – А4, орієнтація сторінки – "книжкова"; **границі:** ліва – 2,5 см; права – 2,5 см; верхня – 2,5 см; нижня – 2,5 см; **інтервал між рядками** – 1,0; **інтервал між абзацами** "до", "після" – 0 пт.; **відступи** "ліворуч", "праворуч" – 0 пт.; **відступ першого рядка** – 1,25 см.

## Обов'язкові елементи статті:

- **індекс УДК** у верхньому лівому куті сторінки (Times New Roman, 12 пт.);
  - **ініціали і прізвище автора (авторів)** великими літерами мовою статті (Times New Roman, 12 пт., вирівнювання – по правому краю);
  - **повна назва організації**, де працює автор (Times New Roman, 10 пт., по правому краю);
  - **пустий рядок** (Times New Roman, 10 пт.);
  - **назва статті** великими літерами, по центру (Times New Roman, 12 пт., жирний);
  - **пустий рядок** (Times New Roman, 12 пт.);
  - **анотація** мовою статті не менше 500 знаків (Times New Roman, 12 пт., курсив);
  - **перелік ключових слів**, який починається зі слів: "Ключові слова:" (або "Ключевые слова:") (Times New Roman, 12 пт., курсив); - **пустий рядок** (Times New Roman, 12 пт.);
  - **пустий рядок** (Times New Roman, 12 пт.);
  - **ініціали та прізвище автора (авторів)** великими літерами **другою мовою** (Times New Roman, 12 пт., вирівнювання – по правому краю);
  - **повна назва організації**, де працює автор (Times New Roman, 10 пт., по правому краю);
  - **назва статті** великими літерами, по центру (Times New Roman, 12 пт., жирний);
  - **пустий рядок** (Times New Roman, 12 пт.);
  - **анотація другою мовою** (Times New Roman, 10 пт., курсив);
  - **перелік ключових слів**, який починається зі слів: "Ключевые слова:" (або "Ключові слова:") (Times New Roman, 12 пт., курсив); - **пустий рядок** (Times New Roman, 12 пт.);
  - **пустий рядок** (Times New Roman, 12 пт.);
  - **ініціали та прізвище автора (авторів)** англійською мовою великими літерами (Times New Roman, 12 пт., вирівнювання – по правому краю);
  - **повна назва організації** англійською мовою (Times New Roman, 10 пт., по правому краю);
  - **назва статті** англійською мовою великими літерами, по центру (Times New Roman, 12 пт., жирний); - **пустий рядок** (Times New Roman, 12 пт.);
  - **анотація англійською мовою** (Times New Roman, 12 пт., курсив) обсягом не менш, як 1800 знаків, включаючи ключові слова (п.6.4 Порядку формування Переліку наукових фахових видань України за Наказом МОН України № 32 від 15.01.2018 р.);
  - **перелік ключових слів** англійською мовою, який починається зі слів: "Keywords: " (Times New Roman, 12 пт., курсив); - **пустий рядок** (Times New Roman, 12 пт.);
- Примітка.** ТЕКСТ АНОТАЦІЙ УКРАЇНСЬКОЮ ТА РОСІЙСЬКОЮ МОВАМИ МАЄ БУТИ ІДЕНТИЧНИЙ. Середній об'єм – 500 друкованих знаків, одним абзацом. (див. Зразок оформлення статті).
- **пустий рядок** (Times New Roman, 12 пт.);
  - **основний текст статті** (Times New Roman, 12 пт.), який, у відповідності до вимог МОН України, **обов'язково** повинен містити такі **виділені** елементи: **Постановка проблеми; Аналіз останніх досліджень і публікацій; Мета дослідження; Викладення основного матеріалу дослідження; Висновки; Список використаної літератури.**

- підписи під рисунками - Times New Roman, 10 пт., жирний;
- для набору формул використовувати тільки редактор формул Microsoft Equation 3.0; формули по центру; нумерація формул – по правому краю; **розміри за замовчуванням:**

Размеры	
Обычный	16 пт
Крупный индекс	12 пт
Мелкий индекс	10 пт
Крупный символ	18 пт
Мелкий символ	12 пт

Preview of a mathematical formula: 
$$(1+B)^2 \sum_{p=1}^{kp} n_k$$

Buttons: OK, Отмена, Применить, По умолчанию

- для набору фрагментів програм використовувати шрифти **Courier New (Courier)**;
- список літератури оформлюється у відповідності до вимог ДАК (Бюлетень ВАК України №3, 2008. Стор. 9-13);  
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.);
- другий список літератури, який оформлюється за правилами транслітерації англійською мовою з української/російської мов.

- інформація про авторів (див. Зразок оформлення статті).

### **ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ**

УДК XXX.XX

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет  
О.І. КОВАЛЕНКО  
Херсонський державний університет

#### **ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ**

*Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу...*

*Ключові слова: процедура побудови розкладу, картковий метод...*

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонский национальный технический университет  
А.И. КОВАЛЕНКО  
Херсонский государственный университет

#### **СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ**

*Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний...*

*Ключевые слова: процедура построения расписания, карточный метод...*

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO  
Kherson National Technical University  
A.I. KOVALENKO  
Kherson State University

#### **THE PROPERTIES OF CONSTRUCTION THE SCHEDULE PROCEDURE**

*The properties of construction the schedule procedure, which formalizes a card method of hand-compiling the schedules, are considered. ...*

*Keywords: the schedule procedure, ... .*

#### **Постановка проблеми**

...

#### **Список використаної літератури**

...

Кравченко Віктор Вікторович – д.ф.-м.н., професор.професор кафедри математичного моделювання Херсонського національного технічного університету (097-123-45-67, kravchenko@gmail.com).

Онопенко Сергій Васильович – аспірант кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету (095- 987-65-43, onopenko@ukr.net).

Коваленко Олександр Іванович – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформатики Херсонського державного університету (063-135-46-78, kovalenko@i.ua).

# ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

**Херсонський національний  
технічний університет**

Відповідальний за випуск	Хомченко Анатолій Никифорович, д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України
Технічний редактор	Литвиненко Олена Іванівна к.т.н., доцент
Макетування	Омельчук Антон Анатолійович

Свідоцтво про державну реєстрацію засобу масової інформації  
– серія KB № 23529-13369P от 03.08.2018

Підписано до друку 29.08.2018 р. Формат 60x84/8. Папір офсетний.  
Ум. друк. аркушів 21,85. Замовлення № 18. Тираж 120 прим.

© Херсонський національний технічний університет 2018

---

Адреса редакції: 73008, м. Херсон, Бериславське шосе, 24, корп. 3,  
каб. 425, тел. (0552) 32-69-95. E-mail: aqmm@kntu.net.ua

Видавництво та друк: «ОЛДІ-ПЛЮС»  
73033, м. Херсон, а/с 15  
E-mail: oldi-ks@i.ua  
Свід. ХС № 2 від 16.08.2000 р.