

ISSN 2618-0332

Міністерство освіти і науки України

Херсонський національний технічний університет

# **ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

## **Т. 2, № 2**

Рекомендовано до друку Вченою радою  
Херсонського національного технічного університету  
(протокол № 4 від 23 грудня 2019 року)

---

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:  
Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List,  
CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

**Херсон 2019**

## Редакційна рада

### Головний редактор

Тулученко Г.Я.

д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

### Заступники головного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України, перший проректор Херсонського національного технічного університету.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили.

### Відповідальний секретар

Омельчук А.А.

к.т.н., доцент кафедри інтелектуальних управляючих та обчислювальних систем Університету державної фіскальної служби України (м. Ірпінь, Київська обл.).

## Члени редакційної колегії за спеціальностями:

### Іноземні фахівці

Бабічев С.А.

д.т.н., доцент, (Чехія)

Гучек П.Й.

д.т.н., доцент, (Польща)

## 113 – Прикладна математика

Астіоненко І.О.

к.ф.-м.н., доцент

Гвоздева І.М.

д.т.н., професор

Гнатушенко Вікт.В.

д.т.н., доцент

Ляшенко В.П.

д.т.н., професор

Миргород В.Ф.

д.т.н., доцент

Різнюк В.В.

д.т.н., професор

Стрельнікова О.О.

д.т.н., професор

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор

## 122 – Комп'ютерні науки

Борисенко В.Д.	д.т.н., професор
Ванін В.В.	д.т.н., професор
Вірченко Г.А.	д.т.н., професор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., професор
Гумен О.М.	д.т.н., професор
Корчинський В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко В.І.	д.т.н., професор
Мартин Є.В.	д.т.н., професор
Найдиш А.В.	д.т.н., професор
Несвідомін В.М.	д.т.н., професор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., професор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., професор
Устенко С.А.	д.т.н., професор
Шоман О.В.	д.т.н., професор

## 126 – Інформаційні системи та технології

Аль-Амморі А.Н.	д.т.н., професор
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Левикін В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко О.І.	к.т.н., доцент
Мороз Б.І.	д.т.н., професор
Стеценко І.В.	д.т.н., професор
Томашевський В.М.	д.т.н., професор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., професор

## 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Алексєєв М.О.	д.т.н., професор
Бардачов Ю.М.	д.т.н., професор
Головко В.І.	д.т.н., професор
Кондратець В.О.	д.т.н., професор
Мещеряков Л.І.	д.т.н., професор
Омельчук А.А.	к.т.н.
Осадчий С.І.	д.т.н., професор
Рожков С.О.	д.т.н., професор
Рудакова Г.В.	д.т.н., професор

## Інші спеціальності

Мельник І.В.	д.т.н., професор
Розов Ю.Г.	д.т.н., професор

ISSN 2618-0332

Министерство образования и науки Украины

Херсонский национальный технический университет

# **ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

## **Т. 2, № 2**

Рекомендовано к печати Ученым советом  
Херсонского национального технического университета  
(протокол № 4 от 23 декабря 2019 года)

---

Журнал включен в наукометрические базы, электронные библиотеки и репозитории:  
Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List,  
CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

**Херсон 2019**

## **Редакционный совет**

### **Главный редактор**

Тулученко Г.Я.

д.т.н., профессор, заведующая кафедрой высшей математики и математического моделирования Херсонского национального университета.

### **Заместители главного редактора**

Розов Ю.Г.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, первый проректор Херсонского национального технического университета.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Черноморского национального университета им. П. Могилы.

### **Ответственный секретарь**

Омельчук А.А.

к.т.н., доцент кафедры интеллектуальных управляющих и вычислительных систем Университета государственной фискальной службы Украины (г. Ирпень, Киевская обл.).

## **Члены редакционной коллегии по специальностям:**

### **Иностранные специалисты**

Бабичев С.А.

д.т.н., доцент, (Чехия)

Гучек П.И.

д.т.н., доцент, (Польша)

### **113 – Прикладная математика**

Астионенко И.А.

к.ф.-м.н., доцент

Гвоздева И.М.

д.т.н., профессор

Гнатушенко Викт.В.

д.т.н., доцент

Ляшенко В.П.

д.т.н., профессор

Миргород В.Ф.

д.т.н., доцент

Ризнык В.В.

д.т.н., профессор

Стрельникова Е.А.

д.т.н., профессор

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор

## 122 – Компьютерные науки

Борисенко В.Д.	д.т.н., профессор
Ванин В.В.	д.т.н., профессор
Вирченко Г.А.	д.т.н., профессор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., профессор
Гумен Е.Н.	д.т.н., профессор
Корчинский В.М.	д.т.н., профессор
Литвиненко В.И.	д.т.н., профессор
Мартин Е.В.	д.т.н., профессор
Найдыш А.В.	д.т.н., профессор
Несвидомин В.Н.	д.т.н., профессор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., профессор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., профессор
Устенко С.А.	д.т.н., профессор
Шоман О.В.	д.т.н., профессор

## 126 – Информационные системы и технологии

Аль-Аммори А.Н.	д.т.н., профессор
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Левыкин В.М.	д.т.н., профессор
Литвиненко Е.И.	к.т.н., доцент
Мороз Б.И.	д.т.н., профессор
Стеценко И.В.	д.т.н., профессор
Томашевский В.М.	д.т.н., профессор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., профессор

## 151 – Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии

Алексеев М.А.	д.т.н., профессор
Бардачев Ю.Н.	д.т.н., профессор
Головко В.И.	д.т.н., профессор
Кондратец В.А.	д.т.н., профессор
Мещеряков Л.И.	д.т.н., профессор
Омельчук А.А.	к.т.н.
Осадчий С.И.	д.т.н., профессор
Рожков С.А.	д.т.н., профессор
Рудакова А.В.	д.т.н., профессор

## Другие специальности

Мельник И.В.	д.т.н., профессор
Розов Ю.Г.	д.т.н., профессор

ISSN 2618-0332

Ministry of Education and Science of Ukraine

Kherson National Technical University

# **APPLIED QUESTIONS OF MATHEMATICAL MODELLING**

## **V. 2, № 2**

Recommended for publication by the Academic Council of  
Kherson National Technical University  
(Minutes № 4 on 23th December 2019)

---

The journal is included in the scientometric bases, electronic libraries and repositories:  
Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List,  
CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

**Kherson 2019**

## Editorial Board

### Editor-in-Chief

Tuluchenko H.Ya.

Professor, Doctor of Engineering Science, Head of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Modelling of Kherson National Technical University.

### Deputies Editor-in-Chief

Rozov Yu.H.

Doctor of Engineering Science, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, First Vice-Rector of Kherson National Technical University.

Khomchenko A.N.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, Professor at the Department of Intelligent Information Systems of the Petro Mohyla Black Sea National University.

### Executive Secretary

Omelchuk A.A.

Ph.D., Associate Professor at the Department of Intelligent Control and Computing Systems of University of State Fiscal Service of Ukraine (Irpin, Kyiv region).

## Members of Editorial Board by specialities:

### Foreign Specialists

**Babichev S.A.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor, (Czech Republic)

**Guchek P.Y.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor, (Republic of Poland)

## 113 – Applied Mathematics

**Astionenko I.O.**

Ph.D., Associate Professor

**Hvozdeva I.M.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Hnatushenko Vikt.V.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor

**Liashenko V.P.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Myrhorod V.F.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor

**Riznyk V.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Strelnikova O.O.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Khomchenko A.N.**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor



## 122 – Computer Science

<b>Borysenko V.D.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Vanin V.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Virchenko H.A.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Hnatushenko V.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Humen O.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Korchynskyi V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Lytvynenko V.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Martyn Ye.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Naidysh A.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Nesvidomin V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Pylypaka S.F.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Tuluchenko H.Ya.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Ustenko S.A.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Shoman O.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## 126 – Information Systems and Technologies

<b>Al-Ammori A.N.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Ben A.P.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Levykin V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Lytvynenko O.I.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Moroz B.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Stetsenko I.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Tomashevskyi V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Sherstiuk V.H.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## 151 – Automation and Computer Integrated Technologies

<b>Aleksieiev M.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Bardachov Yu.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Holovko V.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Kondratets V.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Meshcheriakov L.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Omelchuk A.A.</b>	Ph.D.
<b>Osadchyi S.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rozhkov S.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rudakova H.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## Other Specialties

<b>Melnyk I.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rozov Yu.H.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## ЗМІСТ

<b>Вороненко С.В., Субботін О.В., Лебеденко Ю.О., Рудакова Г.В.</b> Моделювання суднової комплексної електроенергетичної турбокомпресорної установки в перехідних режимах .....	13
<b>Баклан І.В., Логвинчук А.І., Шулькевич Т.В.</b> Критерії подібності лінгвістичних моделей ..	23
<b>Гнітько В.І., Дегтярьов К.Г., Стрельнікова О.О., Тонконоженко А.М.</b> Розрахункові моделі для аналізу ефективних характеристик тривимірних наноконструктивів із системами включень .....	32
<b>Мироненко М.Л.</b> Вимушені коливання паливних баків при різних числах Бонда .....	50
<b>Омельчук А.А., Дмитрієв Д.О., Русанов С.А., Лебеденко Ю.О.</b> Моделювання технологічних процесів за допомогою програмного середовища FACTORY I/O .....	58
<b>Серікова О.М., Стрельнікова О.О.</b> Математичне моделювання фактору евапотранспірації при зміні рівня ґрунтових вод міських територій .....	65
<b>Свиридов В.І., Фальченко О.П.</b> Діагностування суднового устаткування при використанні різних моделей вібрації .....	78
<b>Тулущенко Г.Я., Гучек П.Й.</b> Аналіз загального розв'язку одного лінійного однорідного диференціального рівняння з правильною особливою точкою .....	91
<b>Усатова О.О., Крютченко Д.В.</b> Вимушені коливання рідини в коаксіальних оболонках .....	100
<b>Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О.</b> «Дуга» мода як когнітивна модель побудови трикутника третього порядку .....	110

СОДЕРЖАНИЕ

<b>Вороненко С.В., Субботин А.В., Лебеденко Ю.А., Рудакова А.В.</b> Моделирование судовой комплексной электроэнергетической турбокомпрессорной установки в переходных режимах .....	13
<b>Баклан И.В., Логвинчук А.И., Шулькевич Т.В.</b> Критерии подобия лингвистических моделей .....	23
<b>Гнисько В.И., Дегтярев К.Г., Стрельникова Е.А., Тонконоженко А.М.</b> Расчетные модели для статического анализа трехмерных нанокompозитов с системами включений .....	32
<b>Мироненко М.Л.</b> Вынужденные колебания топливных баков при разных числах Бонда .....	50
<b>Омельчук А.А., Дмитриев Д.А., Русанов С.А., Лебеденко Ю.А.</b> Моделирование технологических процессов с помощью программной среды FACTORY I/O .....	58
<b>Серикова Е.Н., Стрельникова Е.А.</b> Математическое моделирование фактора эвапотранспирации при изменении уровня грунтовых вод городских территорий .....	65
<b>Свиридов В.И., Фальченко О.П.</b> Диагностирование судового оборудования при использовании различных моделей вибрации .....	78
<b>Тулученко Г.Я., Гучек П.И.</b> Анализ общего решения одного линейного однородного дифференциального уравнения с правильной особой точкой .....	91
<b>Усатова О.А., Крютченко Д.В.</b> Вынужденные колебания жидкости в коаксиальных оболочках .....	100
<b>Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Астионенко И.А.</b> «Дутая» мода как когнитивная модель построения треугольника третьего порядка .....	110

---



---

**CONTENTS**


---



---

<b>Voronenko S.V., Subbotin O.V., Lebedenko YU.O., Rudakova H.V.</b> Simulation of a ship complex electric power turbocharger installation in transition modes .....	13
<b>Baklan I.V., Logvynchuk A.I., Shulkevych T.V.</b> Criteria for similarity of linguistic models .....	23
<b>Gnitko V.I., Degtyariov K.G., Strelnikova O.O., Tonkonozhenko A.M.</b> Calculation models for static analysis of three-dimensional nanocomposites with systems of inclusions .....	32
<b>Myronenko M.L.</b> Forced vibrations of fuel tanks at different Bond's numbers .....	50
<b>Omelchuk A.A., Dmytriev D.O., Rusanov S.A., Lebedenko Yu.O.</b> Technological process modeling with Factory I/O program .....	58
<b>Sierikova O.M., Strelnikova O.O.</b> Evapotranspiration factor mathematical modeling in groundwater level changing process of urban territories .....	65
<b>Svyrydov V.I., Falchenko O.P.</b> Diagnosis of vessel equipment when using various models of vibration ....	78
<b>Tuluchenko H.Ya., Guchek P.I.</b> Analysis of the general solution of one linear homogeneous differential equation with regular singular point .....	91
<b>Usatova O.A., Krutchenko D.V.</b> Forced liquid oscillations in coaxial shells .....	100
<b>Khomchenko A.N., Lytvynenko O.I., Astionenko I.O.</b> 'Blown' mode as cognitive model of building the triangle of third order .....	110

УДК 004.942

С.В. ВОРОНЕНКО, О.В. СУББОТИН  
Херсонська державна морська академія  
Ю.О. ЛЕБЕДЕНКО, Г.В. РУДАКОВА  
Херсонський національний технічний університет

## МОДЕЛЮВАННЯ СУДОВОЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНОЇ ТУРБОКОМПРЕСОРНОЇ УСТАНОВКИ В ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМАХ

*Розглянуто один з перспективних напрямків утилізації тепла відпрацьованих газів шляхом використання систем, у яких енергія газів використовується безпосередньо для приводу турбіни. Розроблено математичну модель дизеля з новим контуром додаткового наддуву, для реалізації якого запропоновано застосовувати асинхронну машину з масивним ротором. Проведення імітаційного експерименту підтвердило ефективність запропонованих рішень. Визначено, що підвищення ефективності судових енергосистем можливе за рахунок впровадження новітніх систем відбору тепла відпрацьованих газів при наявності належних систем керування.*

*Ключові слова: турбокомпресорна система, контур додаткового наддуву, імітаційне моделювання, система керування, суднова енергетична установка.*

С.В. ВОРОНЕНКО, А.В. СУББОТИН  
Херсонская государственная морская академия  
Ю.А. ЛЕБЕДЕНКО, А.В. РУДАКОВА  
Херсонский национальный технический университет

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СУДОВОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТУРБОКОМПРЕССОРНОЙ УСТАНОВКИ В ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

*Рассмотрено одно из перспективных направлений утилизации тепла отработанных газов путем использования систем, в которых энергия газов используется непосредственно для привода турбины. Разработана математическая модель дизеля с новым контуром дополнительного наддува, для реализации которого предложено применять асинхронную машину с массивным ротором. Проведение имитационного эксперимента подтвердило эффективность предложенных решений. Отмечено, что повышение эффективности судовых энергосистем возможно за счет внедрения новейших систем отбора тепла отработанных газов при наличии надлежащих систем управления.*

*Ключевые слова: турбокомпрессорная система, контур дополнительного наддува, имитационное моделирование, система управления, судовая энергетическая установка.*

S.V. VORONENKO, O.V. SUBBOTIN  
Kherson State Maritime Academy  
YU.O. LEBEDENKO, H.V. RUDAKOVA  
Kherson National Technical University

## SIMULATION OF A SHIP COMPLEX ELECTRIC POWER TURBOCHARGER INSTALLATION IN TRANSITION MODES

*One of the promising directions of exhaust gas heat utilization by using turbocharger systems in which the exhaust gas energy is used directly to drive a gas turbine that transmits*

energy to the supercharger drive or to the generator drive is considered. The mathematical model of the marine integrated turbocharger unit as an object of control is constructed, the interconnections between the individual components of the complex are considered. Differential equations describing dynamic processes in a turbocharged diesel engine have been obtained, based on the conditions of equilibrium of engine and turbocharger torques and taking into account changes in the amount of air and gas in the intake and exhaust manifolds. The mathematical model of the diesel engine has been improved taking into account the new additional supercharging circuit, for the implementation of which it is proposed to use an asynchronous machine with a massive rotor. In consequence of the linearization of nonlinear functional dependencies and the transition to relative units, we obtained a model of the system in the state space, which allows to simulate processes in the system under any transient modes and to analyze the efficiency of control systems built on different principles. The PID controller is used to adjust the position of the fuel pump rail. It is substantiated that it is sufficient to use a PD controller to operate the system with a hybrid turbocharger on an additional boost circuit. The processes undergoing at the ship electric power systems with hybrid turbocharger units in transient modes (with external load changes) are considered, and the efficiency of using hybrid turbocharger plants by simulating real ship installation is investigated. The results of simulation of processes in the system under the conditions of transient mode (when sketching and dumping of external load) in comparison with similar processes for a typical engine are presented. Conducting a simulation experiment confirmed the effectiveness of the proposed design solutions. It has been determined that improving the efficiency of marine power systems is possible due to the introduction of the latest exhaust gas heat recovery systems, provided that the proper control systems are used.

*Keywords:* turbocharger system, additional supercharging circuit, simulation modeling, control system, marine power plant.

### Постановка проблеми

В даний час для підвищення ефективності суднових енергетичних установок (СЕУ) широко застосовуються системи відбору тепла відпрацьованих газів [1]. Одним з перспективних напрямків утилізації тепла відпрацьованих газів є використання турбокомпресорних систем, у яких енергія відпрацьованих газів використовується безпосередньо для приводу газової турбіни, що передає енергію на привод компресора наддуву або на привод електрогенератора [2]. Однак, для ефективної роботи такого складного комплексу, як суднова комплексна електроенергетична турбокомпресорна установка (СКЕЕТКУ), необхідно своєчасне перемикання між режимами генерування та постачання електричної енергії, що можливо при існуванні належної системи керування. При розробці методів керування та виборі технічних засобів насамперед постає задача аналізу СКЕЕТКУ як об'єкта керування. Математична модель СКЕЕТКУ як об'єкт керування дозволить здійснювати аналіз процесів, що протікають в системі, та оцінювати ефективність методів керування, що розроблюються.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

При побудові математичної моделі СКЕЕТКУ як об'єкту керування розглянуто взаємозв'язки між окремими складовими компонентами комплексу (рис. 1) [3].

До складу комплексу входять окремі підсистеми:

- головна (дизельна) енергетична установка (ГЕУ) з турбонаддувом;
- система автоматичного регулювання частоти обертання (САРЧО) валу головного двигуна;
- система відбору потужності (СВП).

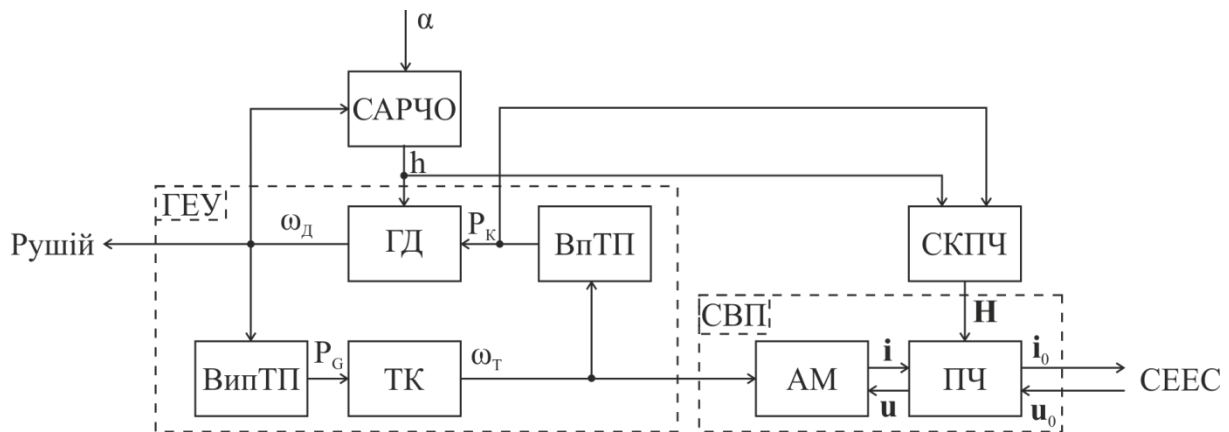


Рис. 1. Схема взаємозв'язків між складовими компонентами СКЕЕТКУ.

У склад головної енергетичної установки входять: головний двигун (ГД), турбокомпресор (ТК), впускний та випускний трубопроводи (ВпТП та ВиПТП).

САРЧО призначена для стабілізації (підтримання) частоти обертання валу головного двигуна на певному (заданому) значенні. На сучасних суднах застосовують електронні регулятори, які включають в собі датчик частоти обертання (ДЧО), електронний блок керування (ЕБК) та виконавчий механізм (ВМ), що впливає на дозуючу рейку паливного насоса високого тиску (рис. 2).

В СВП як генератор, на відміну від відомих розробок [4], використано асинхронну машину (АМ) з масивним ротором, яка (за потребою) може бути перемкнута у режим двигуна завдяки застосуванню належного перетворювача частоти (ПЧ) зі власною системою керування (СКПЧ). ПЧ також здійснює узгодження параметрів електричного сигналу, що генерується, з судновою електромережею.

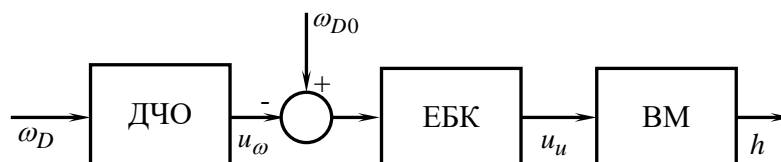


Рис. 2. Структурна схема САРЧО валу головного двигуна.

Диференціальні рівняння, що описують динамічні процеси у дизельному двигуні з турбонаддувом, складено на основі умов рівноваги моментів двигуна й турбокомпресора та з урахуванням змін кількості повітря і газу в впускному та випускному колекторах, і мають вид [5]:

Рівняння рівноваги моментів дизеля

$$J_D \frac{d\omega_D}{dt} = M_D - M_C, \quad (1)$$

де  $J_D$  – приведений до валу момент інерції двигуна і пов'язаних з ним агрегатів,  $\omega_D$  – кутова частота обертання валу;  $M_D = f(h, \omega_D, P_K, t)$ ,  $M_C = f(N, \omega_D, t)$  – рушійний момент і момент опору, які залежать від положення дозуючої рейки паливного насосу  $h$ , кутової частоти обертання  $\omega_D$ , тиску наддуву  $P_K$ , величини зовнішнього навантаження системи  $N$  і часу  $t$ .

Рівняння рівноваги моментів турбокомпресора:

$$J_T \frac{d\omega_T}{dt} = M_T - M_K \pm M_{AM}, \quad (2)$$

де  $J_T$ ,  $\omega_T$  – момент інерції і кутова частота обертання ротора;  $M_T$ ,  $M_K$ ,  $M_{AM}$  – моменти турбіни, компресора і асинхронної машини.

Зміна кількості повітря у впускному колекторі

$$\frac{dG_V}{dt} = G_K - G_D, \quad (3)$$

та зміна кількості газу у випускному колекторі

$$\frac{dG_G}{dt} = G_D - G_T, \quad (4)$$

де  $G_K$ ,  $G_D$ ,  $G_T$  – витрати повітря через компресор і двигун та витрати газу через турбіну.

Особливістю в даній моделі є додаткова складова  $M_{AM}$  у рівнянні (2), яка дозволяє враховувати вплив асинхронної машини (або в генераторному, або в двигуновому режимі) на роботу дизеля з турбонаддувом [3].

Аналізуючи складові моделі, можна виявити вхідні, вихідні та внутрішні параметри СКЕЕТКУ як об'єкта керування.

Вхідними факторами, що діють на об'єкт, є

- сигнал завдання частоти обертання валу головного двигуна, який задається людиною-оператором та відповідає потрібній швидкості руху судна;
- момент опору гвинта, який суттєво залежить від частоти обертання валу (швидкості руху судна) та зовнішніх факторів, а саме: морського хвилювання, глибини, ступені обростання корпусу та ін.

До вихідних факторів можна віднести наступні:

- частоту обертання валу головного двигуна;
- потужність, що відбирається та передається в суднову електричну мережу або додається з суднової електромережі.

До сигналів керування можна віднести наступні змінні:

- величину переміщення паливної рійки;
- керування асинхронною машиною контуру додаткового наддуву з метою забезпечення необхідних режимів.

Математична модель СКЕЕТКУ, яка будується з розглянутих моделей компонентів, надає можливість аналізувати процеси, що протікають в системі в різних режимах роботи, шляхом здійснення імітаційного моделювання роботи СКЕЕТКУ для реальної суднової установки.

### Мета дослідження

Метою досліджень є аналіз процесів, що протікають в СКЕЕТКУ в перехідних режимах (при змінах зовнішнього навантаження), та оцінка ефективності застосування гібридних турбокомпресорних установок.



### Викладення основного матеріалу дослідження

Функціональні залежності у рівняннях (1)–(4) нелінійні, однак завдяки лінеаризації та переходу до відносних одиниць [5], отримано наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} T_D \frac{d\varphi_D}{dt} + \varphi_D &= k_1\mu + k_2\rho - k_0n, \\ T_T \frac{d\varphi_T}{dt} + \varphi_T &= k_3\zeta + k_4\mu - k_5\rho + k_{11}\rho_d, \\ T_V \frac{d\rho}{dt} + \rho &= k_6\varphi_T - k_7\varphi_D, \\ T_G \frac{d\zeta}{dt} + \zeta &= k_8\varphi_D + k_9\rho - k_{10}\mu, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $T_D, T_T, T_V, T_G$  – постійні часу головного двигуна, турбокомпресора, впускного трубопроводу, випускного трубопроводу;  $\varphi_D = \Delta\omega_D / \omega_{D0}$ ,  $\varphi_T = \Delta\omega_T / \omega_{T0}$  – відносні відхилення частоти обертання колінчастого валу дизеля та ротора турбіни від бажаних;  $\mu = \Delta h / h_0$  – відносна зміна положення дозуючої рейки паливних насосів;  $\rho = \Delta P_K / P_{K0}$  – відносна зміна тиску надувного повітря;  $\rho_d$  – відносна зміна тиску додаткового надувного повітря;  $n = \Delta N / N_0$  – відносна зміна зовнішнього навантаження;  $\zeta = \Delta P_G / P_{G0}$  – відносна зміна тиску відпрацьованих газів у випускному колекторі;  $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}$  та  $k_{11}$  – відповідні коефіцієнти посилення.

Для головної енергетичної установки, якою є головний дизель з турбонадуванням, визначимо змінні стану наступним чином:

$$x_1 = \varphi_D, x_2 = \varphi_T, x_3 = \rho, x_4 = \zeta. \quad (6)$$

Вхідні фактори позначимо як  $u_1 = \mu$  (вхід керування, що здійснюється за рахунок зміни положення рейки подачі палива),  $u_2 = \rho_d$  (вхід керування, що здійснюється за рахунок зміни тиску додаткового надувного повітря) та  $q_1 = n_C$  (збурюючий вхід, що відповідає зовнішньому навантаженню, характеризується невизначеністю та має стохастичний характер).

Базуючись на рівняннях (5), отримуємо модель системи у просторі станів [6] у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \\ b_{41} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot q_1, \quad (7)$$

де параметри матриць визначаються наступним чином:

$$a_{11} = -1/T_D, a_{13} = k_2/T_D, a_{22} = -1/T_T, a_{23} = k_3/T_T, a_{24} = -k_5/T_T, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= -k_7/T_V, \quad a_{32} = k_6/T_V, \quad a_{33} = -1/T_V, \\ a_{41} &= k_8/T_G, \quad a_{43} = k_9/T_G, \quad a_{44} = -1/T_G; \\ b_{11} &= k_1/T_D, \quad b_{21} = k_4/T_T, \quad b_{22} = k_{11}/T_T, \quad b_{41} = -k_{10}/T_G, \quad f_{11} = -k_0/T_D. \end{aligned}$$

Вхідні сигнали керування синтезуються окремими контурами.

Для регулювання зміною положення рейки паливного насосу  $\mu$  традиційно застосовують ПД-регулятор з передаточною функцією виду:

$$W_\mu(s) = K_p + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{T}{1+T/s}, \quad (9)$$

де  $K_p$ ,  $K_I$  та  $K_D$  – відповідні коефіцієнти оптимального налаштування регулятора.

У системі з гібридним турбокомпресором застосовано додатковий контур регулювання за збуренням, що забезпечує додатковий наддув турбокомпресора за потребою (при збільшенні зовнішнього навантаження), а при скиданні навантаження – зменшення наддуву за рахунок відбору зайвої потужності. Проведений аналіз виявив, що для керування за цим каналом достатньо застосовувати ПД-регулятор з передаточною функцією виду:

$$W_\rho(s) = K_p + K_D \frac{T}{1+T/s}. \quad (10)$$

Для врахування впливу на процеси в системі виконавчий механізм паливної рейки та асинхронна машина представлені як інерційні ланки першого порядку, а саме

$$W_F(s) = \frac{K_F}{1+T_F s} \quad \text{та} \quad W_{AM}(s) = \frac{K_{AM}}{1+T_{AM} s}. \quad (11)$$

Для здійснення комп'ютерного моделювання процесів, що відбуваються в системі, взято за основу параметри дизеля типа 6 ЧН 15/18, визначені за статичними характеристиками для номінального режиму при швидкості обертання валу головного двигуна 1500 обертів за хвилину [7], а саме:

постійні часу – головного двигуна  $T_D = 0,925 \text{ с}$ , турбокомпресора  $T_T = 0,858 \text{ с}$ , впускного трубопроводу  $T_V = 0,0146 \text{ с}$ , випускного трубопроводу  $T_G = 0,00528 \text{ с}$ ;

коефіцієнти посилення –  $k_0 = 0,525$ ,  $k_1 = 0,662$ ,  $k_2 = 0,144$ ,  $k_3 = 1,266$ ,  $k_4 = 0,138$ ,  $k_5 = 1,360$ ,  $k_6 = 0,853$ ,  $k_7 = 0,654$ ,  $k_8 = 0,340$ ,  $k_9 = 0,989$ ,  $k_{10} = 0,204$  та  $k_{11} = 2,582$ .

Параметри матриць рівняння (7), обчислені за виразами (8), одержано у вигляді

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1,0811, \quad a_{13} = 0,1557, \\ a_{22} &= -1,1655, \quad a_{23} = 1,4755, \quad a_{24} = -0,2378, \\ a_{31} &= -44,79, \quad a_{32} = 58,42, \quad a_{33} = -68,49, \\ a_{41} &= 64,4, \quad a_{43} = 187,31, \quad a_{44} = -189,4; \\ b_{11} &= 0,7157, \quad b_{21} = 0,1608, \quad b_{22} = 3,01, \quad b_{41} = -38,64, \quad f_{11} = -0,5676. \end{aligned} \quad (12)$$

Коефіцієнти посилення і постійні часу виконавчого механізму паливної рейки та асинхронної машини  $K_F = 1$ ,  $T_F = 0,06c$ ,  $K_{AM} = 1$ ,  $T_{AM} = 0,2c$ .

Оптимальні коефіцієнти налаштування регуляторів: для контуру регулювання частоти обертання валу дизеля  $K_p = 20$ ,  $K_I = 100$ ,  $K_D = 1$  та  $T = 100$ ; для контуру регулювання додаткового наддуву  $K_p = 0,0066$ ,  $K_D = 0,66$  та  $T = 100$ .

Дослідження ефективності застосування гібридної турбокомпресорної установки проводилося шляхом комп'ютерного моделювання в середовищі імітаційного моделювання [8]. Блок-схему моделі СКЕЕТКУ наведено на рис. 3.

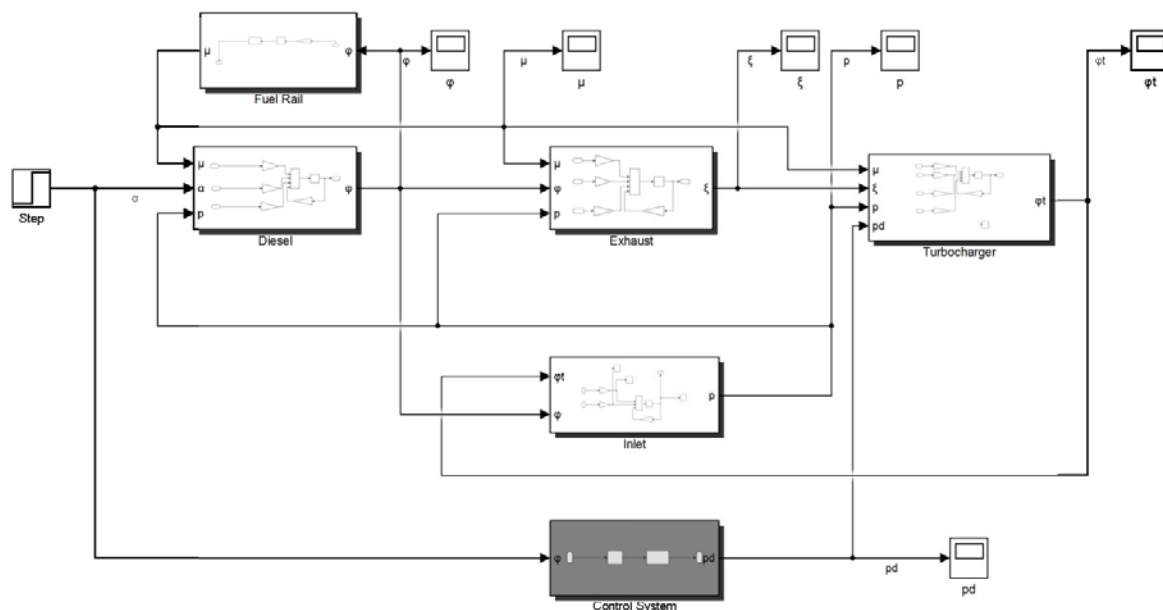
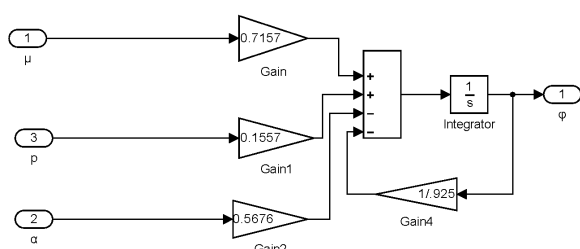
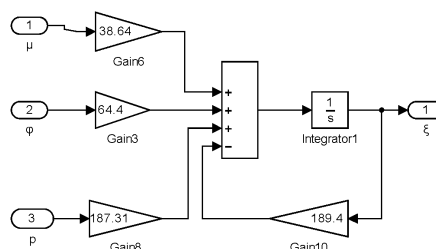


Рис. 3. Загальний вигляд моделі з гібридним турбокомпресором.

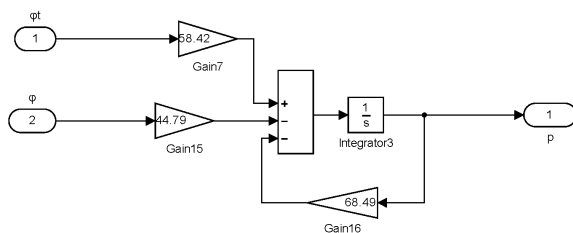
Блок-схеми окремих підсистем моделі показано на рис. 4.



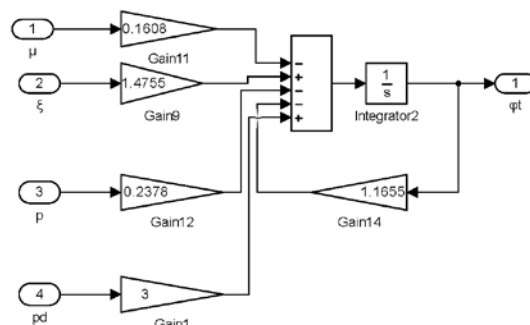
а) Модель дизеля



б) Модель випускного колектора



в) Модель впускного колектора



г) Модель гібридного турбокомпресора

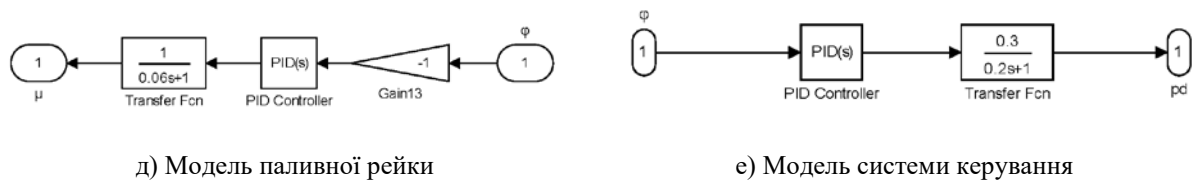


Рис. 4. Моделі підсистем СКЕЕТКУ.

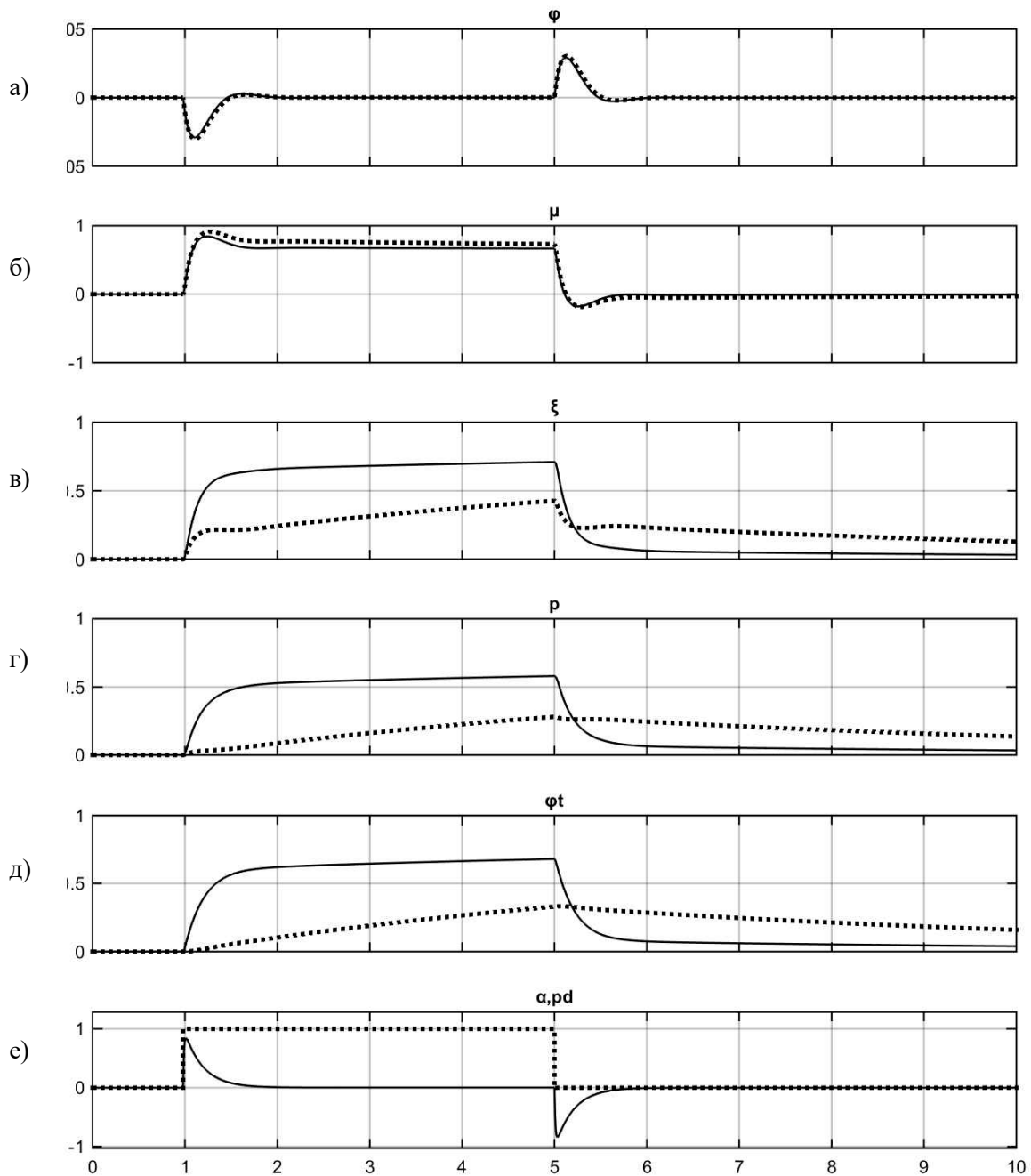


Рис. 5. Результати моделювання процесів в системі в умовах перехідного режиму:

- а) швидкість обертання валу дизеля; б) зміна положення паливної рейки; в) зміна тиску відпрацьованих газів; г) зміна тиску надувного повітря; д) зміна частоти обертання турбіни; е) зміна моменту на валу асинхронної машини та графік зовнішнього навантаження.

Результати моделювання процесів в системі в умовах перехідного режиму (при накиді та скиданні зовнішнього навантаження) наведено на рис. 5. Пунктирною лінією показано графіки, отримані для дизельного двигуна без гібридного турбокомпресора; безперервною лінією показано графіки для СКЕЕТКУ (з контуром додаткового наддуву).

Отримані результати моделювання перехідних процесів при зміні зовнішнього навантаження свідчать, що застосування контуру додаткового наддування шляхом використання асинхронної машини з масивним ротором є ефективним, як при накиді так і при скиданні навантаження, а саме: спостерігається незначне зменшення частоти обертання валу головного двигуна та зміни положення рейки паливного насоса (див. рис. 5, а-б), але найпомітніший ефект спостерігається в контурі наддування. Усі характеристики турбокомпресора виходять на усталений режим у десятки разів швидше, ніж у дизельного двигуна зі звичайним турбокомпресором (див. рис. 5, в-д).

З графіку на рис. 5, є можна зробити висновок, що при скиданні навантаження необхідно зменшення наддування дизеля. Це можливо здійснити шляхом відбирання кінетичної енергії турбіни за допомогою переводу асинхронної машини в генераторний режим та подальшої передачі надлишку енергії в загальну суднову електромережу.

### Висновки

Підвищення ефективності суднових енергосистем можливе за рахунок впровадження новітніх систем відбору тепла відпрацьованих газів за умовою застосування належних систем керування.

Проведення імітаційного експерименту підтверджує ефективність запропонованих конструктивних рішень.

Отримана модель СКЕЕТКУ дозволяє здійснювати моделювання процесів в системі при будь-яких перехідних режимах та проводити аналіз ефективності систем керування, побудованих за різними принципами.

### Список використаної літератури

1. Седаков Л. П., Баракан Г. Х., Калинина Л. И. Резервы повышения экономичности современных судовых дизельных энергетических установок. *Судостроение*. 1987. № 11. С. 20–25.
2. Рябенкий М. В., Короленко О. В., Вороненко С. В., Короленко Є. О. Головной двигатель та суднова генераторна система в когенераційній установці судна. *Електротехнічні та комп'ютерні мережі*. 2017. № 26(102). С.9–16.
3. Вороненко С. В., Іщенко І. М., Рудакова Г. В., Лебеденко Ю. А. Математична модель суднової комплексної електроенергетичної турбокомпресорної установки. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. № 2 (69), Ч. 2. С. 31–38.
4. Shiraishi K., Ono Y., Sugishita K. Development of Large Marine Hybrid Turbocharger for Generating Electric Power with Exhaust Gas from the Main Engine. *Mitsubishi Heavy Industries Technical Review*. 2010. Vol. 47, № 3. P. 53–58.
5. Малыш А. Н. Математическая модель дизель-генератора с турбонаддувом. *Системы обработки информации*. 2004. № 1 (29). С. 219–224.
6. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 464с.
7. Марков В. А., Поздняков Е. Ф., Фурман В. В., Плахов С. В. Моделирование системы автоматического регулирования частоты вращения дизельного двигателя. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2019. № 7. С. 35–46. DOI: 10.18698/0536-1044-2019-7-35-46.

8. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. Серия «Библиотека профессионала». М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 576 с.

#### References

1. Sedakov, L. P., Barakan, G. H., & Kalinina, L. I. (1987). Rezervyi povyisheniya ekonomichnosti sovremennyih sudovyih dizelnyih energeticheskikh ustanovok. *Sudostroenie*. **11**, 20–25.
2. Riabenyi, M. V., Korolenko, O. V., Voronenko, S. V., & Korolenko, Ye. O. (2017). Holovnyi dyuhun ta sudnova heneratorna systema v koheneratsiinii ustanovtsi sudna. *Elektrotekhnichni ta kompiuterni mrezihi*. 26(102), 9–16.
3. Voronenko, S. V., Ishchenko, I. M., Rudakova, H. V., & Lebedenko, Yu. A. (2019). Matematychna model sudnovoї kompleksnoi elektroenerhetychnoi turbokompresornoї ustanovky. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **2** (69), Part 2, 31–38.
4. Shiraishi, K., Ono, Y., & Sugishita, K. (2010). Development of Large Marine Hybrid Turbocharger for Generating Electric Power with Exhaust Gas from the Main Engine. *Mitsubishi Heavy Industries Technical Review*. 47, 3, 53–58.
5. Malyish, A. N. (2004). Matematicheskaya model dizel-generatora s turbonadduvom. *Sistemi obrobki informatsiyi*. **1** (29), 219–224.
6. Kim, D. P. (2004). Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Vol. 2. Mnogomernyye, nelineynyye, optimalnyie i adaptivnyie sistemyi: ucheb. posobie. Moskva: FIZMATLIT.
7. Markov, V. A., Pozdnyakov, E. F., Furman, V. V., & Plahov, S. V. (2019). Modelirovanie sistemyi avtomaticheskogo regulirovaniya chastoty vrascheniya dizelnogo dvigatelya. *Izvestiya vyisshih uchebnyih zavedeniy. Mashinostroenie*. 7, 35–46. DOI: 10.18698/0536-1044-2019-7-35-46.
8. Dyakonov, V. P. (2005). MATLAB 6.5 SP1/7 Simulink 5/6 v matematike i modelirovanii. Seriya «Biblioteka professionala». М.: SOLON-Press.

УДК 519.766.23

I.V. BAKLAN, A.I. LOGVYNCHUK, T.V. SHULKEVYCH  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

### КРИТЕРІЇ ПОДІБНОСТІ ЛІНГВІСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

*Важливою складовою лінгвістичного підходу до виявлення аномалій у часових рядах є критерій, за яким оцінюється подібність двох моделей. Наявність аномалії встановлюється шляхом порівняння моделей. Саме від вибору критеріїв залежить можливість застосування лінгвістичного підходу до аналізу часових рядів різної природи. Для вчасної реакції на ситуацію важлива швидкість виявлення аномалії. Вибір критеріїв залежить від можливості застосування мовного підходу до аналізу часових рядів різного характеру. Розглянуті основні метрики схожості текстів Геммінга, Левенштейна, Джаро-Вінклера та ін.*

*Ключові слова: часові ряди, метрики текстів, лінгвістичне моделювання, лінгвістична модель.*

I.V. BAKLAN, A.I. LOGVYNCHUK, T.V. SHULKEVYCH  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

### КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

*Важной составляющей лингвистического подхода к выявлению аномалий во временных рядах есть критерий, по которому оценивается сходство двух моделей. Наличие аномалии устанавливается путем сравнения моделей. Именно от выбора критериев зависит возможность применения лингвистического подхода к анализу временных рядов различной природы. Для своевременной реакции на ситуацию важна скорость выявления аномалии. Выбор критериев зависит от возможности применения языкового подхода к анализу временных рядов различного характера. Рассмотрены основные метрики сходства текстов Гемминга, Левенштейна, Джаро-Винклера и др.*

*Ключевые слова: временные ряды, метрики текстов, лингвистическое моделирование, лингвистическая модель.*

I.V. BAKLAN, A.I. LOGVYNCHUK, T.V. SHULKEVYCH  
National Technical University of Ukraine  
'The Kiev Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky'

### CRITERIA FOR SIMILARITY OF LINGUISTIC MODELS

*Anomaly detection, as a form of data analytics, is finding more and more applications in various fields of human activity every year. Thus, with the growth of the IT- sector and global integration, there is an increasing need for tools to monitor cybernetic systems, respond to and remedy disruptions and failures. Intrusion detection, unauthorized access, malfunctioning in critical security systems and infrastructure management systems are among the priorities in the modern information technology world. Anomaly detection is the task of finding patterns in data that do not match expected behavior. Anomalies are inappropriate observations, emissions that are contrary to the nature of the process under study. The purpose of this work is to increase the speed of anomaly detection, in comparison with the*

*algorithms used in automated control systems, through the use of linguistic modeling and a syntax approach to time series analysis. The presence of an anomaly is established by comparing two models - for a training dataset in which anomalies are not guaranteed and for the actual data in which we look for an anomaly. Various metrics and peer review methods are used to assess similarity. The first approach is to create a model that characterizes the normal course of the process. For this purpose, all anomalous sections are excluded from the series, or one is selected from a section of the series that does not contain deviations from the norma – thus the so-called reference row is formed. For him the construction of a linguistic model is performed. An important component of the linguistic approach to detecting anomalies in time series is the criterion by which the similarity of the two models is evaluated. The choice of criteria depends on the possibility of applying a linguistic approach to the analysis of time series of different nature. The basic metrics of the similarity of the texts by Hamming, Lowenstein, Jaro-Winkler and others are considered. During the development of the algorithm, 4 different metrics for evaluating linguistic models were considered. Given their strengths and weaknesses, root mean square was chosen as the most appropriate approach.*

*Keywords: time series, text metrics, linguistic modeling, linguistic model.*

### **Постановка проблеми**

Визначення аномалій як однієї з форм аналізу даних з кожним роком знаходить все більше застосувань у найрізноманітніших сферах людської діяльності. Таким чином, із зростанням сфери ІКТ та глобальної інтеграції все частіше є затребуваними інструменти для моніторингу кіберсистем, заходів реагування та усунення наслідків у разі збоїв та помилок у них. Виявлення вторгнень, несанкціонованого доступу, несправності в роботі критичних систем безпеки та систем управління інфраструктурою – одне з головних завдань у сучасному світі інформаційних технологій.

Виявлення аномалії – це задача пошуку шаблонів у даних, які не відповідають очікуваній поведінці. Аномалії – це невідповідні спостереження, викиди, що суперечать природі досліджуваного процесу.

Важливість виявлення аномалій походить від того, що аномалії даних зазвичай надають критичну інформацію про потенційну загрозу приватним, конфіденційним даним, навіть життю людини або її здоров'ю. Наприклад, ненормальна схема трафіку в комп'ютерній мережі може вказувати на те, що постраждалий комп'ютер надсилає конфіденційні дані до несанкціонованого пункту призначення. Ненормальне зображення МРТ може вказувати на злоякісну пухлину. Винятки в даних про транзакції кредитної картки можуть вказувати на крадіжку картки або посвідчення особи, а незвичні цифри датчиків зонда можуть вказувати на несправність.

Методи виявлення аномалій, що базуються на навчанні, застосовуються в багатьох прикладних областях, включаючи інформаційну безпеку, біоінформатику, автомобільну індустрію, астрономію та інші [1].

Проблема виявлення аномалій була досліджена в багатьох наукових галузях та прикладних сферах. Багато підходів та методик було спеціально розроблено для використання у певних предметних областях, тоді як деякі з них є більш загальними.

Здебільшого підходи до виявлення аномалій є вузькоспеціалізованими та можуть застосовуватись лише в певних умовах із накладанням численних обмежень. Досі не існує такого універсального методу, який би дозволяв виконувати детекцію аномалій на довільних даних, без спостереження та з достатньою точністю [2]. Серед відомих причин можна зауважити наступні: ті дані, які є нормальними сьогодні, можуть вважатися аномалією в майбутньому (і навпаки), іноді границя між



нормальними та аномальними значеннями дуже нечітка, також дуже часто існує дефіцит даних для тренування і валідації моделей.

Ще одним недоліком багатьох існуючих алгоритмів є неможливість виявляти аномалії в потокових даних реального часу, багато з яких можуть працювати лише із статистичними історичними даними, тобто аналізувати характер перебігу явищ і процесів, що вже відбулися, при достатній кількості знань про хід аналогічних процесів.

В даний час всі алгоритми виявлення аномалій можна розділити на три групи [3]: алгоритми виявлення аномалій без нагляду дослідника, виявлення аномалій із наглядом дослідника, а також комбіновані підходи.

Метою даної роботи є підвищення швидкості виявлення аномалій, в порівнянні з алгоритмами, що застосовуються в автоматизованих системах управління, за допомогою використання лінгвістичного моделювання та синтаксичного підходу до аналізу часових рядів.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Важливою частиною лінгвістичного підходу до виявлення аномалій у часових рядах є критерій, за допомогою якого порівнюються дві моделі. Саме від вибору критеріїв залежить можливість застосування лінгвістичного підходу до аналізу часових рядів різної природи [4–9].

Оскільки одним з основних компонентів синтаксичного методу є перетворення числових рядів до лінгвістичних послідовностей – рядків (англ. strings), доцільно припустити, що для їх порівняння можна застосовувати алгоритми визначення подібностей у текстах. До них відносяться відстань Hamming, відстань Левенштейна, схожість Jaro–Winkler та інші [10].

Алгоритм найдовшої спільної субпослідовності враховує схожість між двома рядками, що ґрунтується на основі довжини послідовностей сусідніх символів, які існують в обох рядках.

Відстань Левенштейна визначає відстань між двома рядками шляхом підрахування мінімальної кількості операцій, необхідних для перетворення одного рядка в інший, при цьому операції перетворення – це вставлення, видалення, заміна або транспозиція (перестановка) двох суміжних символів [11].

Метод Jaro визначає кількість та порядок загальних символів у двох рядках, а його модифікація – метод Jaro–Winkler також враховує спільні дворядкові префікси.

Алгоритм Needleman–Wunsch [10] є прикладом алгоритму, який використовує динамічне програмування і вперше був використаний для порівняння біологічних послідовностей (білків, амінокислот, тощо). Він виконує глобальне вирівнювання відповідної послідовності, щоб знайти найкраще співпадіння між двома послідовностями символів.

Відстань Hamming характеризує число позицій, в яких відповідні символи двох слів однакової довжини відрізняються. В більш загальному випадку, відстань Hamming використовується для рядків однакової довжини і слугує метрикою відмінності (функцією, що визначає відстань у метричному просторі) об'єктів одного розміру. Метод був запропонований Р. Геммінгом для визначення міри відмінності між кодовими комбінаціями (двійковими векторами) у векторному просторі кодових послідовностей. Hamming-відстань є окремим випадком індексу Мінковського.

Визначення Hamming distance використовується, наприклад, при кодуванні коду Грея в логічних пристроях, де є необхідність виключити так звані «логічні гонки» – відстань між суміжними кодами завжди дорівнює одиниці, тобто кожного разу змінюється тільки один біт числа. Множина слів однакової довжини створює, так

званий, метричний простір, для кожної пари елементів якого визначено Hamming distance  $d(x, y)$ , що задовольняє аксіомам [13]:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (аксіома тотожності);
- $d(x, y) = d(y, x)$  (аксіома симетрії);
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (аксіома трикутника).

Із аксіом також слідує, що відстань завжди є невід'ємною ( $d(x, y) \geq 0$ ), а також те, що вона завжди менша за довжину слів у символах ( $d(x, y) \leq n$ ).

Перевагою цієї метрики є простота реалізації та швидкодія – зі зростанням довжини слів час роботи алгоритму зростає лінійно.

До критичних недоліків варто віднести:

- неможливість порівняння послідовностей різної довжини – кількість елементів в обох послідовностях має бути строго однаковою;
- алгоритм враховує збіг символів лише на однакових відповідних позиціях, у той час як одні й ті ж граматичні ланцюги можуть зустрічатись у різних частинах послідовностей і при цьому не бути аномаліями.

Слід зауважити, при визначенні подібності двох лінгвістичних послідовностей даний алгоритм не доцільно застосовувати.

У теорії інформації та комп'ютерній лінгвістиці вводять метрику подібності двох лінгвістичних послідовностей (текстів). Значення цієї відстані відображається в мінімальній кількості дій вставки, заміни і видалення для перетворення одного тексту в інший. Метод названий на честь свого автора – В. Й. Левенштейна. Метод широко застосовується для виправлення помилок у словах (в пошукових системах, базах даних, при вводі тексту та автоматичному розпізнаванні відсканованого тексту або мови), порівняння текстових файлів та в біоінформації для порівняння генів, хромосом та білків.

В загальному випадку, операції редагування мають різну ціну:

$w(a, b)$  – ціна заміни символу  $a$  на  $b$ ;

$w(\varepsilon, b)$  – ціна вставки символу  $b$ ;

$w(a, \varepsilon)$  – ціна видалення символу  $a$ .

Правило трикутника застосовується, якщо дві послідовні операції можна замінити одною і це не погіршує загальну ціну (наприклад, заміна символу  $x$  на  $y$ , а потім  $y$  на  $z$  не є кращим, ніж одразу виконати заміну  $x$  на  $z$ ).

Якщо  $S_1$  та  $S_2$  – два рядки, що мають довжину  $M$  та  $N$  відповідно, утворені з деякого алфавіту, тоді відстань редагування Левенштейна  $d(S_1, S_2)$  можна обчислити за наступною рекурентною формулою [8]  $d(S_1, S_2) = D(M, N)$ , де:

$$D(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = 0, j = 0; \\ i, & \text{якщо } j = 0, i > 0; \\ j, & \text{якщо } i = 0, j > 0; \\ \min \left( \begin{array}{l} D(i, j - 1) + 1, \\ D(i - 1, j) + 1, \\ D(i - 1, j - 1) + m(S_1[i], S_2[j]) \end{array} \right), & \text{якщо } i > 0, j > 0. \end{cases}$$

Тут  $m(a, b)$  дорівнює нулю, якщо  $a = b$ , та одиниці в іншому випадку;  $\min(a, b, c)$  повертає найменший із аргументів,  $i$  та  $j$  – індекси символів у рядках. Пошук відстані полягає в обчисленні можливих варіантів заміни, вставок і видалень та вибору найменшого значення на даному кроці.

Перевагою даного методу є можливість порівнювати часові ряди у вигляді текстів, без необхідності побудови матриць передування.

Серед недоліків методу можна виділити наступні:

- потребує багато пам'яті та має відносно низьку швидкодію;
- при перестановці місцями слів або частин слів отримують відносно великі відстані;
- відстані між абсолютно різними короткими словами виявляються незначними, у той час як відстань між довгими, але дуже схожими послідовностями, є досить великою.

Враховуючи дані факти, не варто радити використання цього методу для порівняння лінгвістичних послідовностей, отриманих шляхом перетворення чисельних часових рядів, у зв'язку з їх значною довжиною.

Перевагою метода Јаго–Winkler є врахування співпадіння символів, починаючи від початку послідовності до певного моменту [13]. Це має позитивний ефект при оцінці подібності послідовностей (слів та фраз) у натуральних мовах.

Недоліком в контексті застосування відстані Јаго до порівняння часових рядів є те, що у послідовності символів однакові субпослідовності можуть знаходитись на різних позиціях. У такому випадку оцінка схожості префіксів не дає значного позитивного ефекту і відстані є завищеними, що ускладнює прийняття рішення щодо того, чи є дана послідовність аномальною.

### Мета дослідження

Враховуючи недоліки вище перелічених методів подібності символічних послідовностей, постає необхідність розробити критерій порівняння двох ймовірнісних лінгвістичних моделей, що представлені у вигляді матриць переходів марковського процесу.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Є певний часовий ряд  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$ , рівні якого виміряні через однакові проміжки часу. Першим кроком необхідно визначитись з алфавітом та виконати інтервалізацію ряду, кожний елемент якого характеризує певну літеру алфавіту. Оберемо в якості алфавіту множину малих латинських літер –  $A = \{a, b, c, \dots, z\}$ ,  $N = |A| = 26$ . Кількість символів алфавіту визначає кількість інтервалів, по яких потрібно розподілити значення рівнів ряду. Зручно включати до алфавіту великі та малі літери, щоб використовувати їх для позначення додатних та від'ємних значень.

Для того, щоб побудувати інтервали необхідно визначити  $X_{\min}$  та  $X_{\max}$ . Визначаємо крок інтервалу –  $step = (X_{\max} - X_{\min})/N$ . Розбиваємо інтервал  $[X_{\min}; X_{\max}]$  на  $N$  частин:

$$[X_{\min}; X_{\max}] = [X_{\min}; X_{\min} + step], [X_{\min} + step; X_{\min} + 2 \times step], \dots, \\ [X_{\min} + j \times step; X_{\min} + (j + 1) \times step], \dots, [X_{\min} + (N - 2) \times step; X_{\max}].$$

Поставимо у відповідність кожному інтервалу літеру із алфавіту:

$$a = [X_{\min}; X_{\min} + step], \\ b = [X_{\min} + step; X_{\min} + 2 \times step], \\ \dots, \\ k = [X_{\min} + j \times step; X_{\min} + (j + 1) \times step], \\ \dots,$$

$$z = [X_{min} + (N - 2) \times step; X_{max}].$$

Наступний кроком виконується підстановка еквівалентних символічних значень замість числових у вихідний ряд, за наступним принципом: якщо рівень  $x_i$  потрапляє до інтервалу  $j$   $[X_{min} + j \times step; X_{min} + (j + 1) \times step]$ , тоді замінюємо значення  $x_i$  на літеру, яка відповідає цьому інтервалу.

Таким чином, ряд  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$  перетворюється на ряд  $L = \{l_1, l_2, l_3, \dots, l_m\}$ , де  $l_i \in A$ .

Виконавши перетворення з чисел у символи, потрібно побудувати матрицю передування. Для цього виконується підрахунок кількості входжень усіх символів, що передують символу, вказаному в рядку. Результат підрахунку представлено на рис. 1.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	...	<i>z</i>	Всього
<i>a</i>	14	3	12	...	2	43
<i>b</i>	1	3	2	...	1	15
<i>c</i>	5	1	4	...	3	32
...	...	...	...	...	...	22
<i>z</i>	0	2	3	...	5	16

Рис. 1. Кількість входжень кожного символу на відповідній позиції у послідовності.

Отримавши матрицю передувань, необхідно визначити відповідну ймовірність знаходження кожного символу на даній позиції. Для отримання матриці частот необхідно для кожного рядка розділити значення кожного елемента на суму елементів у рядку, тобто на загальну кількість символів, що зустрічаються після даного. Матриця частот зображена на рис. 2.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	...	<i>z</i>	Сума
<i>a</i>	0.32	0.069	0.27	...	0.046	1
<i>b</i>	0.067	0.2	0.13	...	0.067	1
<i>c</i>	0,156	0.031	0.125	...	0.093	1
...	...	...	...	...	...	1
<i>z</i>	0	0.125	0.188	...	0.313	1

Рис. 2. Частота розміщень кожного символу на відповідній позиції у послідовності.

В результаті отримуємо матрицю із ймовірностями переходу станів марковського процесу, яка і є нашою лінгвістичною моделлю.

Можливі дані, у яких для побудови моделі доцільно використовувати не оригінальний ряд, а його похідні – першу, другу різниці. Використання похідних дає змогу виявити неочевидні закономірності, які важко помітити у вихідному ряді.

Робимо розрахунки для першої різниці ряду  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$  є ряд  $X^1 = \{x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_m - x_{m-1}\}$ , тобто ряд, який складається з попарних різниць сусідніх елементів. Заходимо другу різницю  $X^2$ , яку отримуємо шляхом застосування тих самих операцій по відношенню до членів ряду  $X^1$ .

Наявність аномалії визначається шляхом порівняння двох моделей: для навчального набору даних, у яких гарантовано відсутні аномалії, та для фактичних даних, у яких ми шукаємо аномалію. Для оцінки подібності застосовуються різноманітні метрики, а також методи експертних оцінок.

Перший підхід ґрунтується на створенні моделі, що характеризує нормальний перебіг процесу. Для цього із ряду виключаються всі аномальні ділянки та обирається одна з ділянку ряду, що не містить відхилень від норми. Таким чином утворюється, так званий, референтний ряд. Для нього виконується побудова лінгвістичної моделі.

Необхідно отримати різницю матриць  $P_1$  та  $P_2$ , що представляють порівнювані моделі, із деякою матрицею  $P'$  третьої моделі. Наступним кроком є підрахування суми різниць всіх відповідних елементів двох матриць та порівняння отриманих для обох моделей чисел між собою. При цьому, оскільки елементами матриць є частоти (або ймовірності), з якими зустрічаються ті або інші елементи алфавіту у лінгвістичній послідовності, ми маємо справу лише з невід'ємними числами:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (p_{i,j} - p'_{i,j}),$$

де  $N$  – потужність алфавіту (кількість елементів матриць);

$p_{i,j}$  – елемент матриці однієї з порівнюваних моделей  $P$ ;

$p'_{i,j}$  – елемент матриці третьої моделі.

Проблемою цього підходу є те, що його результати можуть бути легко спотворені за рахунок накопичення похибки при обробці чисел з плаваючою комою. Ще одним значним недоліком є те, що даний спосіб не дає можливості розрізнити велику кількість незначних відхилень від однієї вираженої аномалії.

Більш досконалим підходом є застосування кореневого середньоквадратичного. У такому разі формула для обчислення величини різниці двох матриць (в нашому випадку матриць передування) набуває наступного вигляду:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (p_{i,j} - p'_{i,j})^2}.$$

Ця формула усуває основні недоліки, тобто від'ємну різницю елементів, що підносяться до квадрата. Таким чином, вплив має абсолютне значення різниці, чим більша складова різниця елементів двох матриць, тим більшу вагу вона матиме в

кінцевому результаті. Операція ділення на кількість елементів матриці  $N \times N$  виноситься за знак кореня і грає роль нормалізуючого коефіцієнта, зменшуючи тим самим діапазон можливих значень  $\varepsilon$ .

### Висновки

Було розглянуто можливість порівняння рядів у вигляді символічних послідовностей із використанням різних метрик подібності рядків (відстань Левенштейна, відстань Hamming, схожість Jaro–Winkler), та порівнянь ймовірнісних лінгвістичних моделей.

Наведено два можливі підходи до виявлення аномалій за допомогою лінгвістичних моделей, а саме: пошук будь-яких відхилень від норми у даному часовому ряді та пошук конкретного патерну поведінки у послідовності.

Запропоновано статистичний критерій подібності ймовірнісних лінгвістичних моделей, який базується на використанні кореневого середньоквадратичного.

### Список використаної літератури

1. Chandola V., Banerjee A., Kumar V. Anomaly Detection: A Survey. *ACM Computing Surveys*. 2009. Vol. 41. № 3. Article 15. 58 p.
2. Gupta M., Gao J., Aggarwal C. C. Han J. Outlier Detection for Temporal Data: A Survey. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 2014. Vol. 25. № 1. 9 p.
3. Hodge V. J., Austin J. A. Survey of Outlier Detection Methodologies. *Artificial Intelligence Review*. 2004. Vol. 22. P. 85–126.
4. Лінгвістичне моделювання (математичне моделювання). URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Лінгвістичне\\_моделювання\\_\(математичне\\_моделювання\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/Лінгвістичне_моделювання_(математичне_моделювання)).
5. Логвинчук А. І., Баклан І. В. Застосування лінгвістичного моделювання до вирішення задачі пошуку аномалій. *Інформаційні системи та технології управління (ІСТУ2019): Матеріали III всеукраїнської науково-практичної конференції молодих вчених та студентів*. (Київ, 20-22 листопада 2019 р). Київ: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2019. С. 65–67.
6. Lohvynchuk A., Baklan I. Linguistic Approach for a Time Series Anomaly Detection. *Slovak International Scientific Journal*. 2019. Vol. 1. №35. P. 16–18.
7. Баклан І. В. Лінгвістичне моделювання: основи, методи, деякі прикладні аспекти. *Системні технології*. 2011. № 3. С. 10–19.
8. Шулькевич Т. В., Баклан І. В. Гібридний лінгвістичний підхід до моделювання часових рядів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. № 2. С. 191–202. DOI: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2018-2-191-202>
9. Баклан І. В., Шулькевич Т. В. Порівняльний аналіз прогнозу при варіації параметрів гібридної лінгвістичної моделі. *Системні технології*. 2019. Вип. 3. С. 32–41.
10. Cohen W., Ravikumar P., Fienberg S. E. A Comparison of String Distance Metrics for Name-Matching Tasks. *KDD Workshop on Data Cleaning and Object Consolidation*. 2003. Vol. 3. P. 73–78.
11. Відстань Геммінга. URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Відстань\\_Геммінга](https://uk.wikipedia.org/wiki/Відстань_Геммінга).
12. Відстань Левенштейна. URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Відстань\\_Левенштейна](https://uk.wikipedia.org/wiki/Відстань_Левенштейна)
13. Jaro M. Advantages in record linkage methodology as applied to the 1985 census of Tampa, Florida. *Journal of the American Statistical Association*. 1989. Vol. 84. Issue 406. P. 414–420.

### References

1. Chandola, V., Banerjee, A., & Kumar, V. (2009). Anomaly Detection: A Survey. *ACM Computing Surveys*. **41**, 3, Art. 15.
2. Gupta, M., Gao, J., Aggarwal, C. C. & Han, J. (2014). Outlier Detection for Temporal Data: A Survey. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. **25**, 1.
3. Hodge, V. J., & Austin, J. A. (2004). Survey of Outlier Detection Methodologies. *Artificial Intelligence Review*. **22**, 85–126.
4. Lnhvystychnе modeliuвання (matematychnе modeliuвання). Retrieved from: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Лінгвістичне\\_моделювання\\_\(математичне\\_моделювання\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/Лінгвістичне_моделювання_(математичне_моделювання)).
5. Lohvynchuk, A. I., & Baklan, I. V. (2019). Zastosuvannya lnhvystychnoho modeliuвання do vyrishennia zadachi poshuku anomalii. Proceedings of the *Informatsiini systemy ta tekhnolohii upravlinnia (ISTU2019): Materialy III vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii molodykh vchenykh ta studentiv*. (Kyiv, 20-22 November, 2019). Kyiv: NTUU «KPI im. Ihoria Sikorskoho», pp. 65–67.
6. Lohvynchuk, A., & Baklan, I. (2019). Linguistic Approach for a Time Series Anomaly Detection. *Slovak International Scientific Journal*. **1**, 35, 16–18.
7. Baklan, I. V. (2011). Lnhvystychnе modeliuвання: osnovy, metody, deiaki prykladni aspekty. *Systemni tekhnolohii*. **3**, 10–19.
8. Shulkevych, T. V., & Baklan, I. V. (2018). Hibrydnyi lnhvystychnyi pidkhid do modeliuвання chasovykh riadiv. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*. **2**, 191–202. DOI: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2018-2-191-202>
9. Baklan, I. V., & Shulkevych, T. V. (2019). Porivnialnyi analiz prohnozu pry variatsii parametriv hibrydnoi lnhvystychnoi modeli. *Systemni tekhnolohii*. **3**, 32–41.
10. Cohen, W., Ravikumar, P., & Fienberg, S. E. (2003). A Comparison of String Distance Metrics for Name-Matching Tasks. *KDD Workshop on Data Cleaning and Object Consolidation*. **3**, 73–78.
11. Vidstan Hemminha. Retrieved from: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Відстань\\_Геммінга](https://uk.wikipedia.org/wiki/Відстань_Геммінга).
12. Vidstan Levenshteina. Retrieved from: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Відстань\\_Левенштейна](https://uk.wikipedia.org/wiki/Відстань_Левенштейна)
13. Jaro, M. (1989). Advantages in record linkage methodology as applied to the 1985 census of Tampa, Florida. *Journal of the American Statistical Association*. **84**, 406, 414–420.

УДК 539.3

В.І. ГНІТЬКО, К.Г. ДЕГТЯРЬОВ, О.О. СТРЕЛЬНИКОВА  
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України  
А.М. ТОНКОНОЖЕНКО  
Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»

## РОЗРАХУНКОВІ МОДЕЛІ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЕФЕКТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРИВИМІРНИХ НАНОКОМПОЗИТІВ ІЗ СИСТЕМАМИ ВКЛЮЧЕНЬ

*Для опису механічних властивостей тривимірних композитів та нанокompозитів використовуються підходи, засновані на співвідношеннях механіки суцільного середовища. За припущеннями лінійної пружності розглянуті механічні властивості композиційних матеріалів та нанокompозитів. Застосовуються умови ідеального контакту і неklasичні умови Гуртіна-Мердока для опису нанорозмірного контакту між матрицею та включеннями на поверхні розділу, яка розглядається як еластична мембрана з власними пружними характеристиками та заданим поверхневим натягом. Розглянуті різні типи представницьких комірок. Для числової симуляції механічних властивостей композитних та нанокompозитних матеріалів використовуються методи скінченних та граничних елементів. У тривимірному формулюванні здійснено порівняння результатів, отриманих при використанні методу скінченних елементів (гексагональний репрезентативний об'ємний елемент) і методу граничних елементів (циліндричний репрезентативний об'ємний елемент). Метод скінченних елементів застосовано для визначення напружено-деформованого стану різних репрезентативних об'ємних елементів тривимірних нанокompозитів. Розглядаються матриці у вигляді куба та циліндра скінченних розмірів та неоднорідності у вигляді куль, сфер, циліндрів, волокон та трубок. Базовані на МСЕ розрахункові моделі поширено на опис ефективних пружних властивостей композитів з розподіленими нановключеннями з випадковою та впорядкованою орієнтаціями. Метод скінченних елементів застосовано для визначення НДС різних репрезентативних об'ємних елементів тривимірних нанокompозитів. Досліджено вплив форми і відносних розмірів неоднорідностей та матриць репрезентативного об'єму на ефективні модулі пружності нанокompозитів. Отримані моделі створюють інформативну базу для технологій синтезування нанокompозитів з вдосконаленими деформаційними і міцнісними характеристиками.*

*Ключові слова: тривимірні композити та нанокompозити, поверхні інтерфейсу, класичні та неklasичні умови контакту, методи скінченних та граничних елементів.*

В.И. ГНІТЬКО, К.Г. ДЕГТЯРЕВ, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА  
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины  
А.М. ТОНКОНОЖЕНКО  
Государственное предприятие Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля

## РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ТРЕХМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ С СИСТЕМАМИ ВКЛЮЧЕНИЙ

*Для описания механических свойств трехмерных композитов и нанокompозитов используются подходы, основанные на принципах механики сплошной среды. В предположениях линейной упругости рассмотрены механические свойства композиционных материалов и нанокompозитов. Для описания наноразмерного контакта между матрицей и включениями на поверхности раздела применяются как*



условия идеального контакта, так и неклассические условия Гуртина-Мердока; поверхность интерфейса рассматривается как эластичная мембрана со своими упругими характеристиками и заданным поверхностным натяжением. Разработан специальный алгоритм для численного решения разрушающих уравнений в случае, когда расчетная область представляет собой поверхность вращения. Рассмотрены различные типы представительных ячеек. Для численного анализа механических свойств композитных и нанокompозитных материалов используются методы конечных и граничных элементов. Для трехмерной задачи проведено сравнение результатов, полученных при использовании метода конечных элементов (гексагональный репрезентативный объемный элемент) и метода граничных элементов (цилиндрический репрезентативный объемный элемент). Метод конечных элементов применен для определения напряженно-деформированного состояния различных репрезентативных объемных элементов трехмерных нанокompозитов. Рассматриваются матрицы в виде куба и цилиндра конечных размеров и неоднородности в виде шаров, сфер, цилиндров, волокон и трубок. Основанные на методе конечных элементов расчетные модели обобщены для композитов с распределенными нановключениями случайной и упорядоченной ориентации. Исследовано влияние формы и относительных размеров неоднородностей и матриц репрезентативного объемного элемента на эффективные модули упругости нанокompозитов. Полученные модели создают информативную базу для технологий синтеза нанокompозитов с улучшенными деформационными и прочностными характеристиками.

*Ключевые слова:* трехмерные композиты и нанокompозиты, поверхности интерфейса, классические и неклассические условия контакта, методы конечных и граничных элементов.

V.I. GNITKO, K.G. DEGTYARIOV, O.O. STRELNIKOVA

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences

A.M. TONKONozHENKO

M.K. Yangel Yuzhnoye State Design Office

## **CALCULATION MODELS FOR STATIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL NANOCOMPOSITES WITH SYSTEMS OF INCLUSIONS**

*Approach based on the principles of continuum mechanics is used to estimate the mechanical properties of three-dimensional composites and nanocomposites. Mechanical properties of composites and nanocomposites are considered in the assumptions of linear elasticity. To describe the nanoscale contact between matrices and inclusions on the interface surface, the conditions of ideal contact and non-classical Gurtin-Murdoch conditions are used. The interface surface is regarded as an elastic membrane with its own elastic characteristics and a given surface tension. The special algorithm for numerical solution of resolving equations is developed when the integration area is a surface of rotation. In this case, static problems of determining the elastic characteristics of nanocomposites are reduced to systems of one-dimensional singular integral equations. Different types of representative volume elements are considered. Finite and boundary element methods are used in numerical estimation of the mechanical properties of composite and nanocomposite materials. For the three-dimensional problem, the results obtained using the finite element method (hexagonal representative volume element) and the boundary element method (cylindrical representative volume element) are compared. The finite element method is used to find out the stress-strain state of various representative volume elements of three-dimensional nanocomposites. The influence of shapes and relative sizes of inhomogeneities*

*and matrices of representative volumes on the effective elasticity modulus of nanocomposites is studied. Matrices in the form of cube and cylinder of finite sizes and inhomogeneity in the form of balls, spheres, cylinders, fibers and tubes are considered. Finite element-based calculation models are generalized to composites with distributed nanoinclusions of random and ordered orientation. The resulting models create an informative base for nanocomposites synthesis technologies with improved deformable and strength characteristics.*

*Keywords: three-dimensional composites and nanocomposites, interface surfaces, classical and non-classical contact conditions, finite and boundary element methods.*

### **Постановка проблеми**

До актуальних проблем лінійної теорії пружності відноситься вивчення пружних та механічних властивостей сучасних технологічно-інноваційних нанокompозитних матеріалів. Обґрунтованість результатів числового моделювання таких матеріалів вимагає належних математичних моделей, що адекватно описують структури нанорозмірних включень. Якщо аналіз зосереджений на взаємодії атомів у наноматеріалах, тоді відповідні моделі мають базуватися на принципах квантової механіки. Але якщо дослідження спрямовані на моделювання середніх механічних характеристик, середніх деформацій або ефективних пружних модулів, тоді для забезпечення ефективних оцінок можуть бути успішно застосовані підходи континуальної механіки. Більшість результатів у цій галузі пов'язано з двовимірними конфігураціями. Щодо тривимірних конфігурацій, то слід зазначити, що вони аналізувались переважно з припущеннями наявності сферичних частинок у нанокompозиті. Для цих форм нанонеоднорідностей доведено, що властивості міжфазних поверхонь можуть суттєво впливати як на пружні поля, так і на ефективні модулі композиційних матеріалів. Одним з основних напрямків сучасної механіки наномасштабних матеріалів є, так званий, багаторівневий підхід, метою якого є розширення області застосування класичної континуальної механіки шляхом суміщення її основних теоретичних принципів з ефектами, що спостерігаються на молекулярному рівні. Проблемі обчислення ефективних властивостей матеріалів при наявності проміжного шару між контактуючими фазами приділяється досить багато уваги. Актуальними залишаються проблеми визначення ефективних модулів композитів та нанокompозитів з урахуванням впливу поверхневих ефектів та за наявності систем впорядкованих та хаотично розташованих включень в представницьких комірках.

### **Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Останнім часом в публікаціях, присвячених визначенню механічних властивостей нанокompозитів, вивчають ефекти наявності міжфазних поверхонь, які можуть суттєво впливати як на пружні поля, так і на ефективні модулі композиційних матеріалів. Модель Гуртіна–Мердока [1] пружної поверхні часто використовується в новітніх публікаціях стосовно нанокompозитів [2–3]. Ця модель виявляє залежність поверхневого напруження від розміру включення як важливої особливості нанокompозитів. Зауважимо, що граничні умови на поверхнях інтерфейсу як в теорії потенціалу, так і в задачах лінійної пружності, використовують ефект поверхневого натягу [4]. Більшість відомих результатів у цій галузі пов'язано з двовимірними об'єктами. Ці результати можуть бути класифіковані в такі категорії, залежно від застосованих методів: розв'язання статичних та динамічних задач для двовимірних нанокompозитів за допомогою методів комплексних змінних, мультипольного та хвильового розвинення [5–6], розв'язання статичних та динамічних задач для двовимірних нанокompозитів методом скінченних елементів [7–8]; дослідження

двовимірних статичних та динамічних задач для двовимірних нанокомпозитів методом граничних елементів [9]. Проте вивченню нанокомпозитів у тривимірному формулюванні приділено недостатньо уваги. В більшості робіт вивчаються впорядковані та неупорядковані системи лише сферичних включень або включень у вигляді циліндрів із закругленими торцями.

### Мета дослідження

Метою дослідження є створення розрахункової методики для оцінки ефективних модулів пружності тривимірних композитів та нанокомпозитів із поодинокими та взаємодіючими включеннями неканонічної форми на основі використання методів скінченних та граничних елементів.

### Викладення основного матеріалу дослідження

#### Метод граничних елементів в аксіально-симетричних задачах для пружного ізотропного тіла з неоднорідністю. Умови ідеального контакту

При застосуванні методу граничних елементів статичні задачі теорії пружності зводяться до двовимірних сингулярних рівнянь теорії пружності. В даній роботі розроблено спеціальний алгоритм для їх числового розв'язання у випадку, коли область інтегрування є поверхнею обертання. При цьому статичні задачі визначення пружних характеристик нанокомпозитів зводяться до розв'язання систем одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Це дозволяє використовувати лише одну процедуру для визначення пружних характеристик, яка застосовується для опису пружних переміщень та зусиль як у матриці, так і у нановключенні. Розроблений метод редукованих граничних елементів застосовано для аналізу аксіально-симетричних задач лінійної ізотропної пружності для тіл з включеннями при використанні неklasичних граничних умов на поверхнях інтерфейсу. Для цих задач за допомогою фундаментальних розв'язків теорії пружності отримані граничні сингулярні інтегральні рівняння.

Розглянуто пружний скінченний циліндр (матрицю) з неоднорідністю (включенням). Припускалось, що неоднорідність має форму тіла обертання (рис. 1).

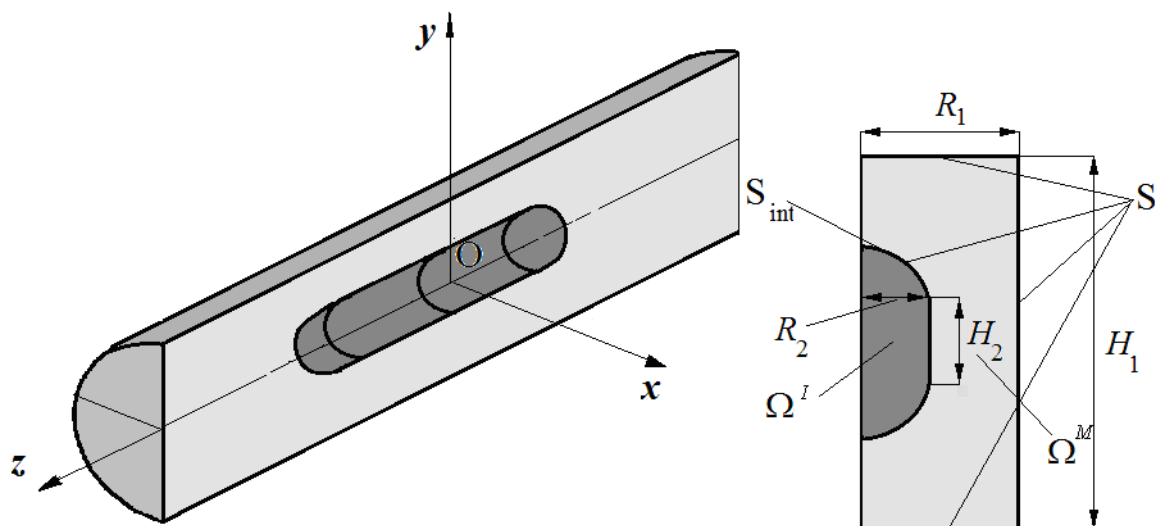


Рис.1. Представницька комірка у вигляді пружного циліндру з включенням, її ескіз та під-області.

Зовнішню межу матриці та її область позначено відповідно  $S^M$  і  $\Omega^M$ . Зовнішню межу включення та його область позначено як  $S^I$  та  $\Omega^I$ . Поверхня  $S^M = \partial\Omega^M$  є граничною

поверхнею тіла, що включає межу включення  $S^I$ , рис. 1. Слід зазначити, що  $S^I = S_{int}$  є поверхнею інтерфейсу між двома середовищами. Матеріал матриці  $\Omega^M$  задається модулем зсуву  $G^M$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu^M$  відповідно, тоді як матеріал включення  $\Omega^I$  характеризується механічними характеристиками  $G^I$  та  $\nu^I$ . Цей пружний циліндр з неоднорідністю розглядатиметься надалі як представницька комірка (ПК) – репрезентативний об’ємний елемент (РОЕ) для вивчення механічних властивостей композитів та наноккомпозитів.

Зв’язок між внутрішніми зусиллями пружного тіла та його зміщеннями може бути виражений граничним інтегральним рівнянням (тотожність Сомільяни) у такому вигляді:

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \iint_{\sigma} \mathbf{U}(P, P_0)\mathbf{t}(P)d\sigma - \iint_{\sigma} \mathbf{T}(P, P_0)\mathbf{u}(P)d\sigma + \iiint_{\Omega} \mathbf{U}(P, Q)\mathbf{f}d\Omega,$$

де  $\mathbf{C}$  – матриця зі сталими коефіцієнтами, яка залежить від положення точки  $P$  на поверхні  $\sigma$ ,  $\mathbf{U}(P, P_0) = \{U_{ij}\}$ ,  $\mathbf{T}(P, P_0) = \{T_{ij}\}$  – фундаментальний розв’язок Кельвіна

$$U_{ij}(P, P_0) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j],$$

$$T_{ij}(P, P_0) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j] \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \right\}.$$

Тут  $r = (r_i r_i)^{1/2}$ ,  $r_i = x_i(P) - x_i(P_0)$ ,  $r_i = \partial r / \partial x_i(P) = r_i / r$ .

Вводимо матричні оператори:

$$\mathbf{A}(\sigma_1, \sigma_2)\mathbf{u} = \iint_{\sigma_1} \mathbf{T}(P, P_0)\mathbf{u}(P)d\sigma_1, \quad \mathbf{B}(\sigma_1, \sigma_2)\mathbf{t} = \iint_{\sigma_1} \mathbf{U}(P, P_0)\mathbf{t}(P)d\sigma_1, \quad P_0 \in \sigma_2.$$

Припустимо, що  $\partial\Omega^M = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ ; при цьому  $\Sigma_1$  є частиною  $\partial\Omega^M$ , де задані переміщення, а  $\Sigma_2$  є частиною поверхні  $\partial\Omega^M$ , де задані зусилля, та  $\Sigma_3 = S_{int} = \partial\Omega^I$  є поверхнею інтерфейсу. Введення поверхонь  $\Sigma_1, \Sigma_2$  та  $\Sigma_3$  дає змогу визначити матричні оператори:

$$\mathbf{A}_{ij}^M = \mathbf{A}^M(\Sigma_i, \Sigma_j), \quad \mathbf{B}_{ij}^M = \mathbf{B}^M(\Sigma_i, \Sigma_j), \quad i, j = \overline{1,3}, \quad \mathbf{A}_{33}^I = \mathbf{A}^I(\Sigma_3, \Sigma_3), \quad \mathbf{B}_{33}^I = \mathbf{B}^I(\Sigma_3, \Sigma_3).$$

Позначимо як  $\mathbf{U}_i^M$  значення  $\mathbf{u}^M$  в вузлових точках поверхні  $\Sigma_i$ . Значення зусиль в цих саме вузлах є величинами  $\mathbf{T}_i^M (i=1, 2, 3)$ . Позначимо як  $\mathbf{U}_3^I$  та  $\mathbf{T}_3^I$  значення  $\mathbf{u}^I$  та  $\mathbf{t}^I$  в вузлових точках поверхні  $\Sigma_3$ . Тобто ми припускаємо, що векторні величини  $\mathbf{U}_1^M$  і  $\mathbf{T}_2^M$  є заданими. Далі з граничних умов отримуємо таку систему з чотирьох векторних інтегральних рівнянь для визначення шості невідомих векторів  $(\mathbf{T}_1^M, \mathbf{U}_2^M, \mathbf{U}_3^M, \mathbf{T}_3^M, \mathbf{U}_3^I, \mathbf{T}_3^I)$ :

$$-\mathbf{B}_{i1}^M \mathbf{T}_1^M + \mathbf{A}_{i2}^M \mathbf{U}_2^M + \mathbf{A}_{i3}^M \mathbf{U}_3^M - \mathbf{B}_{i3}^M \mathbf{T}_3^M = -\mathbf{A}_{i1}^M \mathbf{U}_1^M + \mathbf{B}_{i2}^M \mathbf{T}_2^M, \quad P_0 \in \Sigma_i \cap \Omega^M, \quad i=1,2,3;$$

$$\mathbf{A}_{33}^I \mathbf{U}_3^I - \mathbf{B}_{33}^I \mathbf{T}_3^I = 0, \quad P_0 \in \Sigma_3 \cap \Omega^I. \quad (1)$$

Як в класичних умовах, так і в умовах Гуртіна-Мердока виконується умова

неперервності переміщень на поверхні інтерфейсу  $S_{\text{int}}$ :

$$\mathbf{U}_3^M = \mathbf{U}_3^I. \quad (2)$$

Отримавши  $\mathbf{U}_3^I$  з четвертого рівняння в системі (1) та підставивши його в перші три рівняння в (1), маємо:

$$-\mathbf{B}_{i1}^M \mathbf{T}_1^M + \mathbf{A}_{i2}^M \mathbf{U}_2^M + \mathbf{C}_{i3} \mathbf{T}_3^I - \mathbf{B}_{i3}^M \mathbf{T}_3^M = -\mathbf{A}_{i1}^M \mathbf{U}_1^M + \mathbf{B}_{i2}^M \mathbf{T}_2^M, \quad P_0 \in \Sigma_i \cap \Omega^M, i=1,2,3, \quad (3)$$

де  $\mathbf{C}_{i3} = \mathbf{A}_{i3}^M (\mathbf{A}_{33}^I)^{-1} \mathbf{B}_{33}^I$ .

Отримавши  $\mathbf{T}_1^M$  і  $\mathbf{U}_2^M$  з рівнянь (3), приходимо до такого зв'язку між невідомими  $\mathbf{T}_3^M$  і  $\mathbf{T}_3^I$ :

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{T}_3^M + \mathbf{D}_2 \mathbf{T}_3^I = \mathbf{D}_3 \mathbf{U}_1^M + \mathbf{D}_4 \mathbf{T}_2^M, \quad P_0 \in S_{\text{int}}.$$

У випадку ідеального контакту маємо

$$\mathbf{T}_3^M = \mathbf{T}_3^I. \quad (4)$$

Таким чином, приходимо до такого інтегрального рівняння:

$$(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \mathbf{T}_3^I = \mathbf{D}_3 \mathbf{U}_1^M + \mathbf{D}_4 \mathbf{T}_2^M, \quad P_0 \in S_{\text{int}}, \quad (5)$$

де невідомі  $\mathbf{T}_3^I$  обчислюються лише в вузлах поверхні інтерфейсу  $S_{\text{int}}$ .

Надалі використовуються циліндричні координати; інтеграція за радіальною координатою дозволяє звести тривимірні задачі до розв'язання систем сингулярних інтегральних рівнянь, які потребують лише обчислення одновимірних інтегралів. Фундаментальні розв'язки та їх похідні виражаються в цьому випадку через повні еліптичні інтеграли. Для їх числового визначення запропоновано ефективний алгоритм, заснований на формулі Гаусса з використанням середнього арифметико-геометричного значення. Числовий розв'язок граничних інтегральних рівнянь здійснюється таким чином, що невідомі розподіляються лише по поверхнях інтерфейсу. Для перевірки збіжності запропонованого числового алгоритму досліджені напруження в довгому пружному циліндрі, для цій задачі наявний аналітичний розв'язок.

### Некласичні умови Гуртіна-Мердока

Для вивчення впливу розміру в мікро- та наномасштабі застосовується теорія Гуртіна-Мердока, що дозволяє описати нанорозмірний контакт між матрицею та включеннями. Це призводить до некласичних граничних умов на поверхні інтерфейсу  $S_{\text{int}}$ . Ця поверхня розглядається як еластична мембрана зі власними пружними характеристиками, такими як коефіцієнти Ламе  $\lambda^S$  і  $G^S$ , і заданим поверхневим натягом  $\tau_0$ . Її переміщення  $\mathbf{u}^S$ , деформації  $\boldsymbol{\varepsilon}^S$  та напруження  $\boldsymbol{\sigma}^S$  описуються рівняннями [1]:

$$\text{div}_S \boldsymbol{\sigma}^S = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\sigma}^S = \tau_0 \mathbf{I}_\tau + 2(G^S - \tau_0) \boldsymbol{\varepsilon}^S + (\lambda^S - \tau_0) (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^S) \mathbf{I}_\tau + \tau_0 \nabla_S \mathbf{u}^S,$$

де  $\mathbf{I}_\tau$  є одиничним дотичним тензором,  $\operatorname{div}_S, \nabla_S$  – поверхневі дивергенція та градієнт.

Ця модель передбачає неперервність вектору переміщень на поверхні інтерфейсу

$$\mathbf{U}_3^M = \mathbf{U}_3^I = \mathbf{U}_3^S. \quad (6)$$

При врахуванні неklasичних умов Гуртіна-Мердока, ми використовуємо рівняння (6) та додатковий диференціальний зв'язок, що має вигляд [2–3]:

$$\mathbf{T}_3^I - \mathbf{T}_3^M = \mathbf{G}\mathbf{U}_3^S.$$

Тут диференціальний оператор  $\mathbf{G}$  другого порядку отримано за допомогою узагальненого рівняння Лапласа-Юнга:

$$\mathbf{G} = \nabla_S \boldsymbol{\sigma}^S = [\boldsymbol{\sigma}]\mathbf{n}; \quad [\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}^I - \boldsymbol{\sigma}^M, \quad [\sigma_{ij}]n_i n_j = \sigma_{\alpha\beta}^S \chi_{\alpha\beta},$$

де  $\chi_{\alpha\beta}$  є тензором кривини.

Тобто маємо

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 \mathbf{G}_1) \boldsymbol{\Gamma}_i^I = \mathbf{D}_3 \mathbf{U}_1^M + \mathbf{D}_4 \mathbf{T}_2^M, \quad P_0 \in S_{\text{int}}, \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{A}_{33}^I)^{-1} \mathbf{B}_{33}^I.$$

Зауважимо, що тут всі невідомі виражаються через  $\mathbf{T}_3^I$ .

В аксіально-симетричному формулюванні проводимо трансформування від декартової системи координат  $(x, y, z)$  до циліндричної  $(\rho, \theta, z)$  за допомогою співвідношень:

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta; \quad z = z.$$

Ядра в інтегральних операторах  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  зображено як в роботах [10–11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^D(\Sigma, \Sigma) &= \mathbf{C}^D + \{T_{ij}^D(P, P_0)\}, \quad \mathbf{B}^D(\Sigma, \Sigma) = \{U_{ij}^D(P, P_0)\}, \quad i, j = \rho, z. \\ T_{ij}^D(P, P_0) &= T_{ij}^{1D} E(k) + T_{ij}^{2D} K(k), \quad U_{ij}^D(P, P_0) = U_{ij}^{1D} E(k) + U_{ij}^{2D} K(k), \\ T_{ij}^{kD} &= 2G^D (T_{ij}^{krD} n_r + T_{ij}^{kzD} n_z), \quad D = M, I. \end{aligned}$$

Компоненти ядер для переміщень  $U_{ij}^{1D}, U_{ij}^{2D}$  та зусиль  $T_{ij}^{1D}, T_{ij}^{2D}$  отримані в роботах [4, 11]. Зауважимо, що компоненти  $U_{ij}^{1D, 2D}$  і  $T_{ij}^{2D}$  є регулярними. Але існує сингулярність в компонентах для переміщень, яка має логарифмічний характер внаслідок асимптотичної поведінки еліптичного інтеграла  $K(k)$  при  $k \rightarrow 1$ . Для обчислення цих інтегралів застосовується спеціальна методика [6]. В [5, 12] доведено, що компоненти  $T_{11}^{1D}, T_{22}^{1D}$  є регулярними, але компоненти  $T_{12}^{1D}, T_{21}^{1D}$  мають нескінченні розриви. Для їх числового визначення використано методику, запропоновану в роботах [13–15].

Перевірку збіжності методу граничних елементів при розв'язанні аксіально-симетричних задач здійснено в роботі авторів [16].

В даній роботі на основі методів, розвинених в [13–16], розрахунки ефективних модулів здійснено з урахуванням поверхневих ефектів.

Розглянемо циліндричну представницьку комірку з включенням у формі закругленого циліндра, рис.1. Для числового моделювання обрані такі значення констант матеріалів і геометричні розміри:  $E^I = 1000 \text{ GPa}$ ,  $E^M = 100, 20 \text{ GPa}$ ,  $\nu^I = \nu^M = 0.3$ ,  $H_1 = 100 \text{ нм}$ ,  $H_2 = 40 \text{ нм}$ ,  $R_1 = 10 \text{ нм}$ ,  $R_2 = 50 \text{ нм}$ . Ці дані відповідають гексагональному РОЕ з гексагональною основою  $a = 11 \text{ нм}$ , який досліджено у роботі [17], з використанням методу скінченних елементів. Для оцінки впливу врахування ефектів поверхні інтерфейсу з неklasичними умовами в нашому чисельному дослідженні використовуються дані, наведені в [18]. А саме:  $\lambda^S = 3.48 \text{ Н/м}$ ,  $G^S = -6.218 \text{ Н/м}$ ,  $\tau_0 = 1,7 \text{ Н/м}$ . Далі ми використовуємо спрощену формулу оцінки ефективного пружного модуля  $E_z$  [17, 19], тобто  $E_z = (F \cdot H_1) / (\Delta H_1 \cdot S_b)$ , де  $F$  – осьове рівномірне навантаження,  $\Delta H_1 / H_1$  – осьова деформація, отримана числовим методом,  $S_b$  – площа основи репрезентативного об'єму. Порівняння результатів, отриманих за допомогою методу скінченних елементів (шестикутна призматична ПК) та методу граничних елементів (циліндрична ПК), наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Порівняння результатів для ефективних модулів

$E^I/E^M$	$E_z/E^M$		
	МСЕ, [19]	МГЕ, умови ідеального контакту	МГЕ, умови Гуртіна-Мердока
10	1.046	1.053	1.124
50	1.197	1.201	1.309

Аналіз цих результатів свідчить про те, що ефективні модулі пружності, обчислені з використанням МСЕ та МГЕ у випадку ідеальних умов контакту, є добре узгодженими та корегують з даними інших дослідників. Врахування впливу ефекту неklasичних умов збільшує ефективний пружний модуль приблизно на 10%. Запропонований підхід, заснований на МГЕ, дозволяє використовувати репрезентативні об'ємні елементи з неklasичними умовами Гуртіна-Мердока на інтерфейсних поверхнях для кваліфікованих оцінок ефективного модуля пружності нанокompозитів.

### Метод скінченних елементів при дослідженні композитів та нанокompозитів із впорядкованими та невпорядкованими системами включень

Розроблені в [16] математичні та розрахункові моделі на основі МСЕ дозволяють проводити аналіз наноматеріалів із сферичними суцільними або порожнистими включеннями, а також з короткими нановолокнами та нанотрубками.

Досліджено серію нанокompозитних матеріалів на основі епоксидної матриці з вуглецевими наповнювачами різної форми. Застосовані суцільні сферичні, циліндричні, волокнисті й порожнисті сферичні включення. За допомогою програмного комплексу знайдено і досліджено залежність міцносних характеристик нанокompозитного матеріалу від розміру, форми, засобу розміщення вуглецевих нанонаповнювачів, а також рівня заповнення матриці включеннями.

Вважалось, що матриця нанокompозиту зі затверділої епоксидної смоли має такі

анізотропні властивості: густина  $\rho_M = 1160 \text{ кг/м}^3$ , модуль пружності  $E_M = 3,78 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu_M = 0,35$ .

Як матеріал включення, розглянуті вуглецеві наповнювачі з ортотропними властивостями: густина  $1800 \text{ кг/м}^3$ , модуль пружності в напрямку  $OX$ ,  $E_1 = 290 \text{ ГПа}$ , модуль пружності в напрямку  $OY$ ,  $E_2 = 23 \text{ ГПа}$ , модуль пружності в напрямку  $OZ$ ,  $E_3 = 23 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона в напрямку  $XY$ ,  $\nu_{12} = 0,2$ , коефіцієнт Пуассона в напрямку  $YZ$ ,  $\nu_{23} = 0,4$ , коефіцієнт Пуассона в напрямку  $XZ$ ,  $\nu_{13} = 0,2$ , модуль зсуву в напрямку  $XY$ ,  $G_1 = 9 \text{ ГПа}$ , модуль зсуву в напрямку  $YZ$ ,  $G_2 = 214 \text{ ГПа}$ , модуль зсуву в напрямку  $XZ$ ,  $G_3 = 9 \text{ ГПа}$ .

В результаті проведених розрахункових досліджень з'ясовані механічні характеристики нових нанокompatитного матеріалу.

### Впорядковані сферичні включення

Досліджено кубічні матриці зі структурованими сферичними нановключеннями. Проаналізовано ряд включень з діаметром  $1 \text{ нм}$  та об'ємною долею від  $0,025$  до  $0,25$ . Розрахункові моделі нанокompatиту для об'ємної долі включень, рівної  $0,2$ , подані на рис. 2.

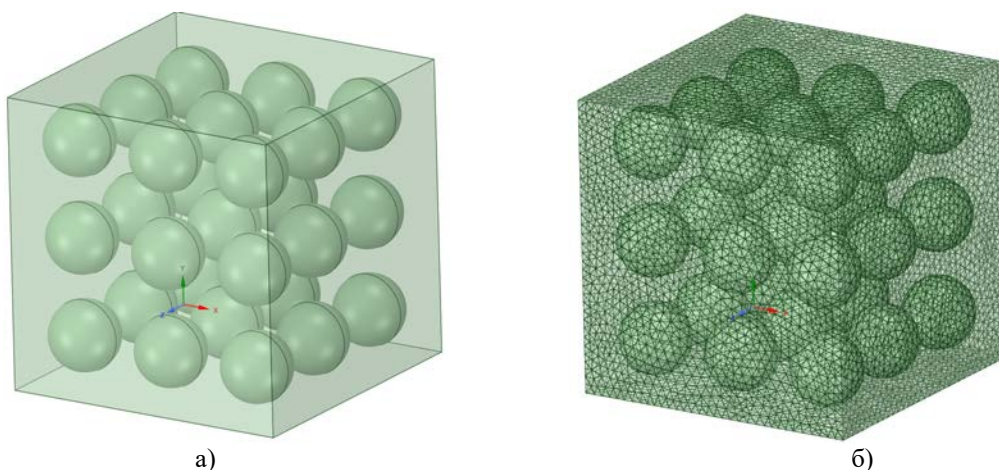


Рис. 2. Представницька комірка (а) та скінченно-елементна (б) модель наноматеріалу з впорядкованою структурою зі сферичних включень.

Результати розрахунків містяться в табл. 2. Розрахунок проведено за припущення ізотропності вуглецевого нановключення. Отримано наноматеріал із ізотропними властивостями.

Таблиця 2

### Механічні властивості нанокompatиту з впорядкованими сферичними включеннями

Об'ємна частка	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2	0,225	0,25
$E_1$ , МПа	4002	4252,2	4532,5	4844,3	5193,4	5582,5	6018	6503,3	7041	7639,6
$E_2$ , МПа	4002	4252,2	4532,5	4844,3	5193,3	5582,5	6017,8	6503,1	7041	7639,9
$E_3$ , МПа	4002	4252,2	4532,5	4844,3	5193,2	5582,5	6017,7	6502,9	7041	7640,1
$G_{12}$ , МПа	1454	1509,2	1564,3	1619,9	1676,7	1734,8	1795	1857,1	1921,5	1988,9
$G_{23}$ , МПа	1454	1509,2	1564,3	1619,9	1676,7	1734,8	1795	1857,1	1921,5	1988,9
$G_{31}$ , МПа	1454	1509,2	1564,3	1619,9	1676,7	1734,8	1795	1857,1	1921,5	1988,9
$\nu_{12}$	0,345	0,3409	0,3355	0,3296	0,3231	0,3160	0,3083	0,3000	0,2913	0,2821
$\nu_{13}$	0,345	0,3409	0,3355	0,3296	0,3231	0,3160	0,3084	0,3001	0,2913	0,2820
$\nu_{23}$	0,345	0,3409	0,3355	0,3296	0,3231	0,3160	0,3084	0,3001	0,2913	0,2820
Густина	1176	1192	1208	1224	1240	1256	1272	1288	1304	1320



Таким чином, введення ізотропних сферичних вуглецевих включень в нанорозмірну матрицю привело до зміцнення та підвищення густини нового матеріалу. Графіки залежностей механічних властивостей нанокompозиту від об'ємної частки включення подані на рис. 3.

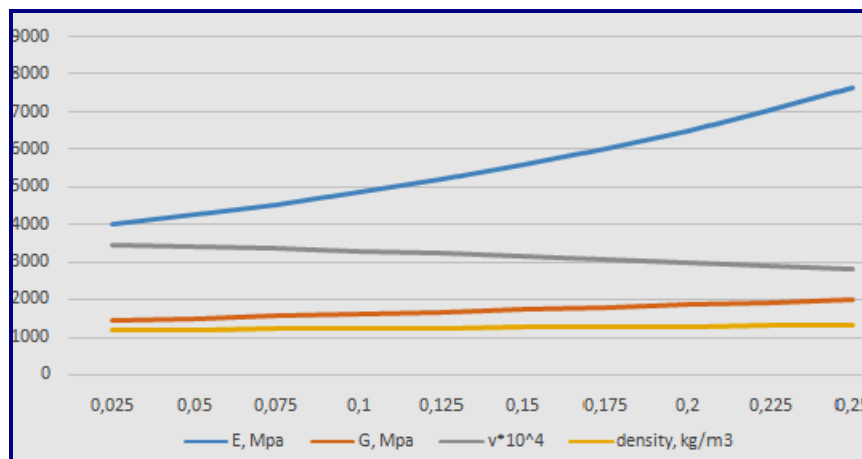


Рис. 3. Залежності механічних властивостей нанокompозиту від об'ємної частки включення.

Результати дослідження нанокompозиту з впорядкованими сферичними включеннями демонструють зростання міцносних характеристик матеріалу разом зі зростанням об'ємної частки включень. Водночас з міцносними характеристиками зростає й густина нового матеріалу, що може мати негативні наслідки для деяких конструкцій. Але використання ізотропного сферичного наповнювача за наявності впорядкованої структури включень дає змогу побудувати якісний ізотропний зміцненого матеріалу: без утворення будь-яких дефектів.

#### Невпорядковані сферичні включення

Досліджено кубічну матрицю, що містить неструктуровані сферичні нановключення з випадковим розподілом. Проаналізовано включення діаметром 1nm з об'ємною часткою від 0,025 до 0,25. Розрахункові моделі нанокompозиту з об'ємною часткою включень, рівною 0.2, подані на рис. 4.

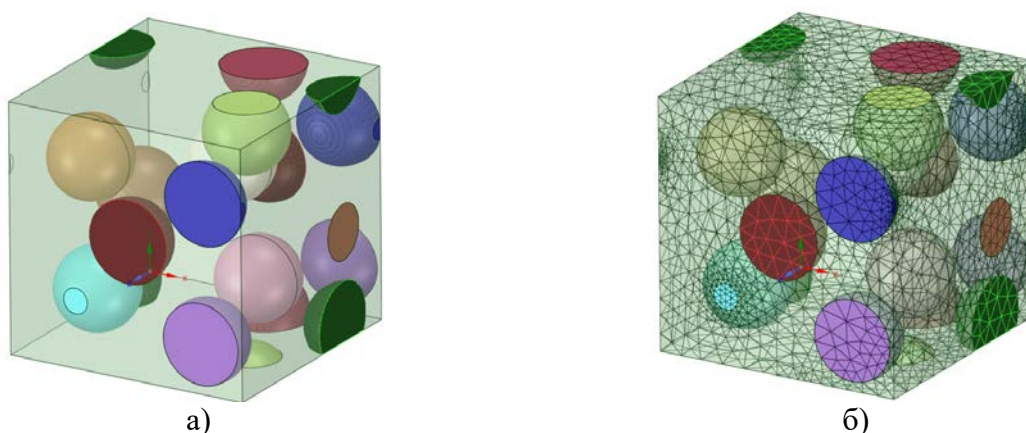


Рис. 4. Представницька комірка (а) і скінченно-елементна (б) модель наноматеріалу з невпорядкованими сферичними включеннями.

Результати розрахунків подані в табл. 3, розглянуті включення однакового

розміру з ортотропними властивостями матеріалу.

Ці результати свідчать, що використання ортотропних включень з випадковим розподілом також веде до ортотропного зміцнення нанокompозитного матеріалу та зростання його густини, як і в разі впорядкованого розташування включень. Однак, результуючі механічні характеристики неструктурованого нанокompозиту виявились нижчими, ніж у разі структурованих нановключень при однаковій об'ємній частці включень та однаковій густині матеріалу.

Таблиця 3

Механічні властивості нанокompозиту з неупорядкованими сферичними включеннями

Об'ємна частка	0,0387	0,0582	0,0775	0,116	0,1357	0,1550	0,1936	0,2132	0,2326	0,252
$E_1$ , МПа	4106,7	4251,4	4470,7	4826	5056,6	5265,2	5773,7	6017	6456,9	6399,4
$E_2$ , МПа	4106,7	4251,4	4470,7	4826	5056,6	5265,2	5773,7	6017	6456,9	6399,4
$E_3$ , МПа	4022,5	4139,6	4273,4	4531	4693,6	4816	5155,8	5277	5466,6	5707,8
$G_{12}$ , МПа	4009,7	4120,7	4284,1	4542	4637,6	4844,4	5112,4	5346,1	5451,4	5575,9
$G_{23}$ , МПа	1482,4	1530,1	1570,1	1683	1788,3	1778,2	1910,7	1988,4	2050,1	2095,1
$G_{31}$ , МПа	1487,9	1532,8	1574,2	1660	1704,2	1770,7	1886,8	1955,4	2009,6	2086,3
$\nu_{12}$	0,3450	0,3434	0,3432	0,3432	0,3431	0,3387	0,3328	0,3389	0,3325	0,3190
$\nu_{13}$	0,3476	0,3476	0,3427	0,3413	0,3420	0,3368	0,3361	0,3277	0,3317	0,3397
$\nu_{23}$	0,3528	0,3523	0,3519	0,3491	0,3516	0,3508	0,3559	0,3506	0,3595	0,3549
Густина	1185	1197	1210	1234	1247	1259	1284	1296	1309	1321

Вочевидь, головні причини цього явища полягають в ортотропності вуглецевого наповнювача та змінному заповненні матриці неструктурованими нановключеннями. Негативний вплив змінності заповнення нівелюється зростанням маси наноматеріалу в багатьох конструкціях, однак може виявитися суттєвим в таких конструкціях як покриття, плівки, тонкі пластини і т. ін., де застосовуються невеликі маси наноматеріалу.

#### Порожнисті сферичні включення

Досліджено представницьку комірку нанокompозиту на основі кубічної матриці і порожнистих сферичних неструктурованих включень з діаметром 1нм й товщиною стінки 0,1нм. Розподіл включень всередині матриці обрано таким же, як і при дослідженні суцільних сферичних включень, об'ємна доля включень змінювалась від 0,025 до 0,25. Розрахункові моделі нанокompозиту з об'ємною часткою включень, рівною 0,2, подані на рис. 4.

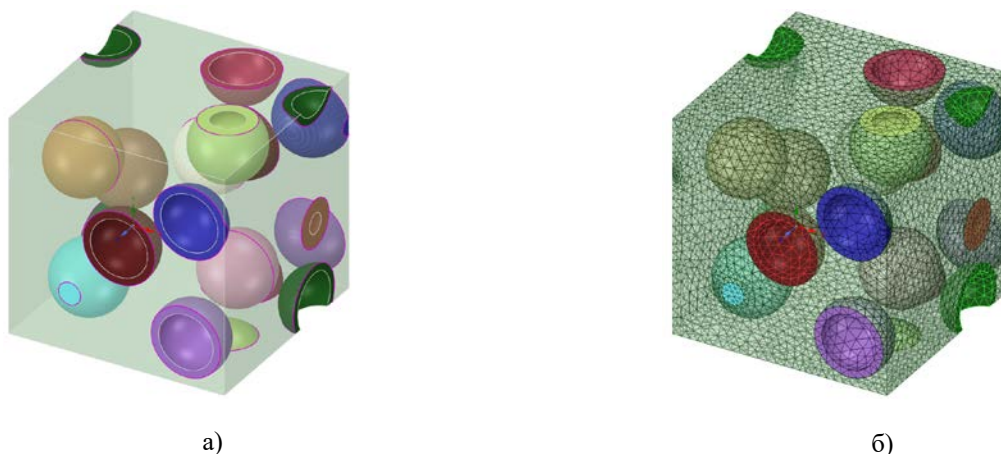


Рис. 4. Представницька комірка (а) і скінченно-елементна (б) модель наноматеріалу з порожнистими сферичними неупорядкованими включеннями.

Результати розрахунків подані в табл. 4, аналіз проведено для порожнистих включень однакового розміру, з ортотропними властивостями матеріалу.

Як і в попередніх випадках, новий наноккомпозит демонструє зростання міцносних характеристик зі збільшенням об'ємної частки включень, однак це зростання є більш повільнішим, ніж в разі суцільних сферичних включень.

Таблиця 4

Механічні властивості наноккомпозиту з порожнистими сферичними включеннями

Об'ємна частка	0,0387	0,0581	0,0775	0,1162	0,1355	0,1548	0,1935	0,2133	0,2324	0,2520
$E_{11}$ , МПа	3989,9	4089,8	4224,8	4467,8	4574,8	4673,1	4928	5079,9	5268,8	5388,7
$E_{22}$ , МПа	3868,7	3905,6	3950,2	4036,8	4078,2	4122,9	4208,6	4261,1	4307,7	4356
$E_{33}$ , МПа	3864,5	3907,7	3954,2	4041,7	4084,9	4125,8	4215,1	4259,9	4305,2	4353,2
$G_{12}$ , МПа	1430,4	1446,9	1461,6	1494,7	1510	1525	1558,3	1578,3	1593,7	1611
$G_{23}$ , МПа	1430,1	1445,5	1460,8	1490,4	1507,6	1523,4	1556,5	1574,5	1591	1608,1
$G_{31}$ , МПа	1430,1	1445,6	1462,1	1492,8	1508,8	1525,9	1558,9	1579,1	1594,4	1613,2
$\nu_{12}$	0,3493	0,3506	0,3509	0,3515	0,3514	0,3512	0,3517	0,3510	0,3505	0,3508
$\nu_{13}$	0,3507	0,3497	0,3496	0,3498	0,3493	0,3499	0,3502	0,3514	0,3522	0,3520
$\nu_{23}$	0,3510	0,3510	0,3520	0,3526	0,3527	0,3519	0,3517	0,3524	0,3540	0,3530
Густина	1149	1144	1138	1127	1122	1116	1105	1099	1094	1089

Відмінною рисою цього наноккомпозиту є те, що густина матеріалу зменшується зі зростанням об'ємної частки включень. Ця риса разом із загальним зміцненням наноматеріалу (у порівнянні з матеріалом без включень), робить його конче привабливим в інженерних розробках.

#### Невпорядковані циліндричні включення

Проведено дослідження невпорядкованих циліндричних включень. Зауважимо, що в залежності від форми циліндричних включень цілком ймовірна поява переплетених волокон, що може позитивно вплинути на міцносні властивості наноккомпозиту. Проаналізовані включення діаметром 1нм, з відношенням довжини до товщини як 1:2 та об'ємною часткою від 0,025 до 0,25. Розрахункові моделі наноккомпозиту з об'ємною часткою включень, рівною 0.2, подані на рис. 5.

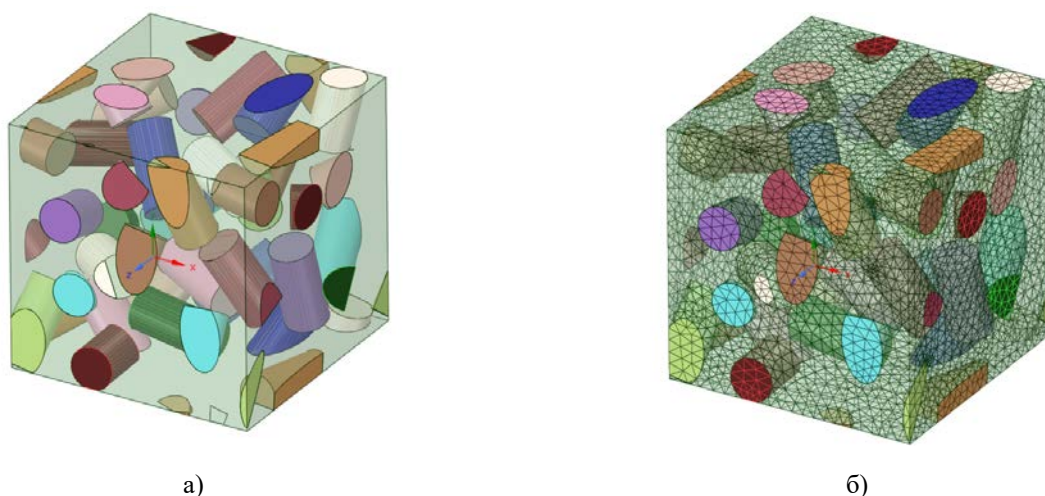


Рис. 5. Представницька комірка (а) і скінченно-елементна (б) модель наноматеріалу з циліндричними невпорядкованими включеннями.

Результати розрахунків подані в таблиці 5, вивчались довгасті циліндричні включення однакового розміру, з ортотропними властивостями матеріалу.

Як і для нанокompозиту з вуглецевими сферичними включеннями неструктурованого типу, ортотропні властивості композиту з циліндричними включеннями здебільшого залежать від розподілу включень всередині композиту, й можуть бути усереднені шляхом використання як більш об'ємних матриць, так і й більшої кількості включень.

Таблиця 5

Механічні властивості нанокompозиту з циліндричними включеннями

Об'ємна частка	0,0256	0,0504	0,0752	0,1069	0,1369	0,1637	0,1855	0,2017	0,2407	0,2813
$E_1$ , МПа	3981,6	4114,2	4496	4788,9	5396,6	5281,3	5306,9	5348,3	5967,9	7936,8
$E_2$ , МПа	3999,7	4213,9	4332,8	4762,9	4949,4	4975,9	6318,7	5937,5	6295	6366,4
$E_3$ , МПа	3997,7	4184	4386,6	4585,5	4859,2	5797,2	5464,1	5797,2	6411	6250,2
$G_{12}$ , МПа	1472,1	1533,4	1629,6	1754,3	1906	1853	1949,8	2001,3	2203,1	2413,8
$G_{23}$ , МПа	1473,5	1583,7	1621,6	1697	1805,6	1851	2152,7	2273,5	2302,7	2405,8
$G_{31}$ , МПа	1467,8	1537,5	1636,2	1759,6	1862,2	2242,2	2008,5	2007,9	2216,9	2595,2
$\nu_{12}$	0,3464	0,3388	0,3448	0,3332	0,3337	0,3552	0,2697	0,3067	0,3158	0,3030
$\nu_{13}$	0,3456	0,3433	0,3424	0,3511	0,3426	0,3186	0,3483	0,3158	0,3141	0,3545
$\nu_{23}$	0,3460	0,3457	0,3437	0,3411	0,3537	0,2854	0,3454	0,3306	0,3058	0,3573
Густина	1176	1192	1208	1228	1247	1264	1278	1289	1314	1340

Оскільки міцносні властивості вуглецевого наповнювача в напрямку однієї з осей суттєво вище, ніж в напрямку інших, тому числові значення механічних характеристик зростають вкрай неоднорідно з ростом об'ємної частки, хоча й демонструють значне зростання в цілому. В деяких розрахунках міцносні характеристики матеріалу з циліндричними нановключеннями вище, ніж для матеріалу із сферичними, однак випадковий засіб заповнення не дозволяють їх передбачити.

#### Невпорядковані волокнисті включення

Аналогічно дослідженню матриць з циліндричними включеннями, виконаний аналіз нанокompозитів з наповнювачем у вигляді частково впорядкованих повздовжніх вуглецевих волокон. Вуглецеві нановолокна розташовані вздовж всієї довжини матриці, мають діаметр 1нм, й максимально допустиме відхилення від головної осі складає 10 градусів. Проаналізовано об'ємну частку включень від 0,025 до 0,25. Розрахункові моделі нанокompозиту з об'ємною часткою включень, що дорівнює 0,2, подані на рис. 6.

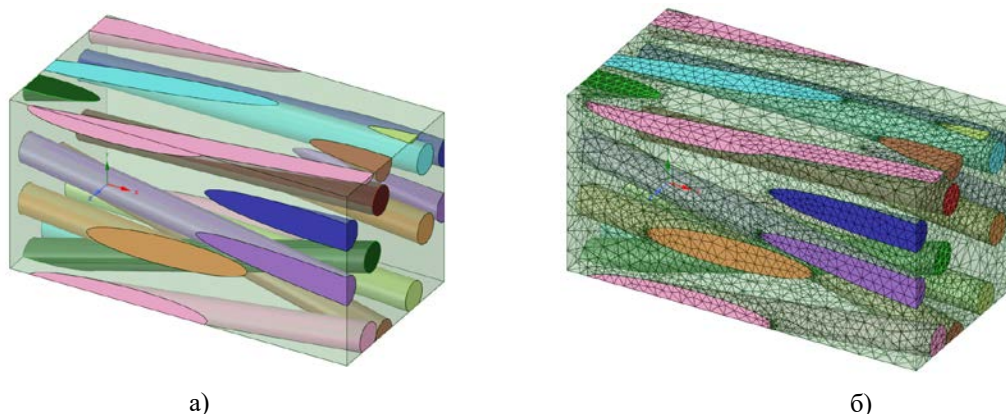


Рис. 6. Представницька комірка (а) і скінченно-елементна (б) модель наноматеріалу з волокнистими частково впорядкованими включеннями.

Результати розрахунків подані в табл. 6, вивчались волокнисті вуглецеві включення однакового розміру й ортотропними властивостями матеріалу. З'ясовано, що застосування включень у вигляді вуглецевих нановолокон демонструє зростання міцносних характеристик матеріалу в напрямку волокон. За однакової об'ємної частки включень, зміцнення матеріалу волокнами виявилось більш, ніж в 10 разів ефективнішим в порівнянні зі зміцненням циліндричними або сферичними включеннями з того ж матеріалу.

Таблиця 6

Механічні властивості нанокompозиту з волокнистими включеннями

Об'ємна частка	0.0259	0.0504	0.0764	0.1002	0.1261	0.1510	0.1791	0.2039	0.2294	0.2525
$E_1$ , МПа	7815,8	14788	22541	30985	35518	39187	40591	40471	50946	58330
$E_2$ , МПа	4205,3	4419,4	4621	4780,1	4934,2	5106,1	5378,5	5568,8	5753,8	6301,5
$E_3$ , МПа	4090,2	4397,9	4589	4791,8	5027,8	5160,1	5398,8	5511,3	5723,5	6012,1
$G_{12}$ , МПа	1483,7	1524,9	1675	1636,7	1870,3	1815,5	1915	1959	2200,6	2385,2
$G_{23}$ , МПа	1447,2	1490,8	1544	1584,5	1629,8	1689,3	1761,7	1814,7	1885,8	1911,8
$G_{31}$ , МПа	1686,4	1576,8	1601	1654,8	1794,2	1838,1	2246,9	2477,5	2340,9	2113,5
$\nu_{12}$	0,3220	0,3382	0,3242	0,3384	0,3900	0,3596	0,3160	0,2549	0,3242	0,3707
$\nu_{13}$	0,4032	0,3623	0,3451	0,3377	0,3218	0,3333	0,4448	0,5065	0,4638	0,3199
$\nu_{23}$	0,4333	0,4775	0,4885	0,4979	0,4876	0,4909	0,4783	0,4785	0,4779	0,4785
Густина	1176	1192	1211	1224	1240	1256	1274	1290	1306	1321

Крім значного зміцнення, яке характеризується модулем  $E_1$ , відбулося також й зміцнення в інших напрямках, близьке за рівнем у порівнянні з іншими видами включень.

### Впорядковані волокнисті включення

Досліджені матриці з наповнювачем у вигляді повздовжніх та впорядкованих за схемою діаманта вуглецевих волокон. Вуглецеві нановолокна розташовані вздовж всієї довжини матриці, мають діаметр 1нм, напрямок волокон співпадає з напрямком однієї з осей координат. Проаналізовано об'ємну долю включень від 0,025 до 0,25. Розрахункові моделі нанокompозиту з об'ємною часткою включень, рівної 0,2, подані на рис. 7.

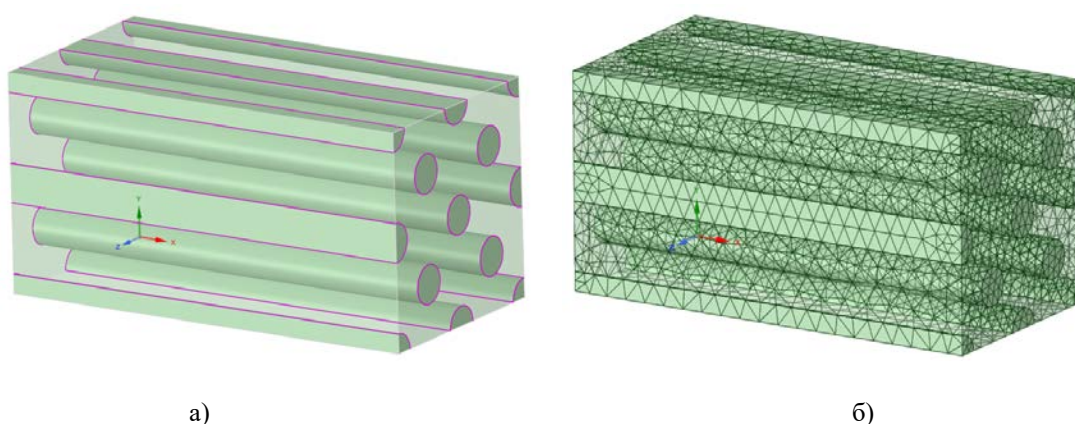


Рис. 7. Представницька комірка (а) і скінченно-елементна (б) модель наноматеріалу з впорядкованими волокнистими включеннями.

Результати дослідження надані в табл. 7, розрахунки проведено для волокнистих вуглецевих включень однакового розміру, з ортотропними властивостями матеріалу.

Як і в попередньому випадку, застосування наповнювача у вигляді вуглецевих волокон демонструє зростання міцносних характеристик матеріалу матеріал в напрямку волокон. У порівнянні з частково впорядкованими волокнами, повне структуроване впорядкування ще більш підвищило міцносні властивості в головному напрямку розташування волокон, різниця склала більш 29%, однак занизило міцносні характеристики в двох інших напрямках на 6-12%.

Таким чином, застосування вуглецевих нановолокон дозволяє створити якісний нанокompозит, що має виражені ортотропні властивості.

Таблиця 7

Механічні властивості нанокompозиту з волокнистими включеннями

Об'ємна частка	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2	0,225	0,25
$E_1$ , МПа	10935	18095	25252	32404	39561	46719	53875	61033	68190	75347
$E_2$ , МПа	4228,8	4429,3	4589,9	4739,1	4883,3	5026,3	5169,8	5316,2	5466,5	5621,4
$E_3$ , МПа	4228,8	4429,3	4589,9	4739,1	4883,3	5026,3	5169,8	5316,2	5466,5	5621,4
$G_{12}$ , МПа	1452,3	1506,5	1562,8	1621,4	1682,3	1745,6	1811,5	1880,3	1952,2	2027,5
$G_{23}$ , МПа	1444,9	1492,8	1544,4	1600,6	1660,5	1724,6	1793	1866,6	1945,9	2030,7
$G_{31}$ , МПа	1452,3	1506,5	1562,8	1621,4	1682,3	1745,6	1811,5	1880,3	1952,2	2027,5
$\nu_{12}$	0,3454	0,341	0,3365	0,3328	0,3278	0,3255	0,3193	0,3151	0,3109	0,3068
$\nu_{13}$	0,3454	0,341	0,3365	0,3321	0,3278	0,3235	0,3193	0,3150	0,3109	0,3068
$\nu_{23}$	0,4649	0,490	0,5004	0,5057	0,5089	0,5110	0,512	0,513	0,5146	0,515
Густина	1,176	1,192	1,208	1,224	1,24	1,256	1,272	1,288	1,304	1,32

### Висновки

Створено розрахункові моделі для широкого класу тривимірних нанокompозитів, які адекватно відображають пружні властивості наноструктур і придатні для ефективного числового моделювання. Отримано замкнуті системи граничних інтегральних рівнянь тривимірних статичних задач щодо поведінки пружних композитів з нанорозмірними неоднорідностями. Отримані моделі забезпечують числове дослідження та ефективне прогнозування механічних властивостей тривимірних матричних нанокompозитів для повного діапазону параметрів структури. Для опису ефектів на нанорівні прийняті як класична модель, так і модель інтерфейсу Гуртіна-Мердока, яка включає в себе як поверхневий натяг, так і поверхневу жорсткість. Для досягнення високої точності числового аналізу за допомогою розроблених нанорозмірних моделей удосконалено методи граничних та скінченних елементів щодо розгляду неканонічної форми нанорозмірних частинок та неklasичних міжфазних умов. У алгоритмах методів граничних та скінченних елементів скінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно міжфазних переміщень та зусиль отримано після спеціальної регуляризації та адаптованої дискретизації граничних інтегральних та варіаційних рівнянь. Запропоновані моделі та алгоритми комп'ютерної симуляції дозволяють проводити числовий аналіз тривимірних статичних задач про поодинокі нановключення різної форми (гранула, волокно, трубка) за класичні та неklasичні умови контакту з навколишньою матрицею; тривимірних задач щодо статичної взаємодії скінченної кількості нанорозмірних включень в матриці; дослідження впорядкованих та стохастично розподілених включень; дослідження включень у вигляді сфер, циліндрів, вуглецевих нанотрубок та нановключень у вигляді порожнистих сфер та визначити ефективні пружні параметри тривимірних матричних композитів з нановключеннями, нановолокнами і нанотрубками. Отримані моделі створюють інформативну базу для технологій

синтезування нанокompозитів з вдосконаленими деформаційними і міцнісними характеристиками, зокрема з вираженою анізотропією пружних властивостей.

Проведені дослідження частково фінансуються у рамках програми «Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення фізико-технічних проблем енергетики НАН України" (КПКВК 6541230)».

#### Список використаної літератури

1. Gurtin M. E., Murdoch A. I. A Continuum Theory of Elastic Material Surfaces. *Archive of Rational Mechanics Analysis*. 1975. Vol. 57. P. 291–323.
2. Mykhas'kiv V. V., Stasyuk B. M. Effective Elastic Properties of 3D Composites with Short Curvilinear Fibers: Numerical Simulation and Experimental Validation. *Solid State Phenomena*. 2017. Vol. 258. P. 452–455.
3. Kushch V. I. Stress Field and Effective Elastic Moduli of Periodic Spheroidal Particle Composite with Gurtin-Murdoch Interface. *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 132. P. 79–96. DOI: 10.1016/j.ijengsci. 2018.08.00.
4. Gnitko V., Degtyariv K., Karaiev A., Strelnikova E. Multi-Domain Boundary Element Method for Axisymmetric Problems in Potential Theory and Linear Isotropic Elasticity. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2019. Vol. 122. P. 13–25. DOI: 10.2495/BE410021.
5. Luo J., Wang X. On the anti-Plane Shear of an Elliptic Nanoinhomogeneity. *European Journal of Mechanics. Solids*. 2009. Vol. 28. P. 926–934.
6. Mogilevskaya S. G., Crouch S. L., Stolarski H. K. Multiple Interacting Circular Nanoinhomogeneities with Surface/Interface Effects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2008. Vol. 56. P. 2298–2327.
7. Tian L., Rajapakse R. K. Elastic Field of an Isotropic Matrix with a Nanoscale Elliptical Inhomogeneity. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 7988–8005.
8. Javili A., Steinmann P. A Finite Element Framework for Continua with Boundary Energies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010. Vol. 199. P. 755–765.
9. Dong C. Y., Pan E. Boundary Element Analysis of Nanoinhomogeneities of Arbitrary Shapes with Surface and Interface Effects. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2011. Vol. 35. P. 996–1002.
10. Bakr Adib A. The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1986. 213 p.
11. Balas J., Sladek J., Sladek V. Stress Analysis by Boundary Elements. *Studies in Applied Mechanics*. Elsevier, 1989. Vol. 23.
12. Karaiev A., Strelnikova E. Singular Integrals in Axisymmetric Problems of Elastostatics. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. 2019. Vol. 122. P. 13–25. DOI.org/10.1142/S1793962320500038
13. Караєв А. О., Стрельникова О. О. Сингулярні інтеграли в аксіально-симетричних задачах теорії потенціалу. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. № 1. С. 10–18.
14. Еселева Е. В., Гнитько В. И., Стрельникова Е. А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. №1. С.105–118.
15. Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E. Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied*

- Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 867–881.
16. Дегтярьов К. Г., Гнітько В. І., Стрельнікова О. О., Тонконоженко А. М. Розрахункові моделі на основі методів скінчених та граничних методів для аналізу механічних властивостей тривимірних нанокомпозитів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. № 2. С. 43–54. DOI: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2018-2-43-54>
  17. Le M.-T., Huang S.-C. Modeling and Estimating the Effective Elastic Properties of Carbon Nanotube Reinforced Composites by Finite Element Method. *Journal of Engineering Technology and Education*. 2014. Vol. 11. № 2. P. 145–158.
  18. Miller R. E., Shenoy V. B. Size-Dependent Elastic Properties of Nanosized Structural Elements. *Nanotechnology*. 2000. Vol. 11. P. 139–147.
  19. Gao W., Yu S. W., Huang G. Y. Finite Element Characterization of the Size Dependent Mechanical Behavior in Nanosystems. *Nanotechnology*. 2006. Vol. 17. P. 1118–1122.

### References

1. Gurtin, M. E., & Murdoch, A. I. (1975). A Continuum Theory of Elastic Material Surfaces. *Archive of Rational Mechanics Analysis*. **57**, 291–323.
2. Mykhas'kiv, V. V., & Stasyuk, B. M. (2017). Effective Elastic Properties of 3D Composites with Short Curvilinear Fibers: Numerical Simulation and Experimental Validation. *Solid State Phenomena*. **258**, 452–455.
3. Kushch, V. I. (2018). Stress Field and Effective Elastic Moduli of Periodic Spheroidal Particle Composite with Gurtin-Murdoch Interface. *International Journal of Engineering Science*. **132**, 79-96. DOI: 10.1016 /j.ijengsci. 2018.08.00.
4. Gnitko, V., Degtyariv, K., Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2019). Multi-Domain Boundary Element Method for Axisymmetric Problems in Potential Theory and Linear Isotropic Elasticity. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. **122**, 13–25. DOI: 10.2495/BE410021.
5. Luo, J., & Wang, X. (2009). On the anti-Plane Shear of an Elliptic Nanoinhomogeneity. *European Journal of Mechanics. Solids*. **28**, 926–934.
6. Mogilevskaya, S. G., Crouch, S. L., & Stolarski, H. K. (2008). Multiple Interacting Circular Nanoinhomogeneities with Surface/Interface Effects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. **56**, 2298–2327.
7. Tian, L., & Rajapakse, R. K. (2007). Elastic Field of an Isotropic Matrix with a Nanoscale Elliptical Inhomogeneity. *International Journal of Solids and Structures*. **44**, 7988–8005.
8. Javili, A., & Steinmann, P. (2010). A Finite Element Framework for Continua with Boundary Energies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **199**, 755–765.
9. Dong, C. Y., & Pan, E. (2011). Boundary Element Analysis of Nanoinhomogeneities of Arbitrary Shapes with Surface and Interface Effects. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **35**, 996–1002.
10. Bakr, Adib A. (1986). The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo.
11. Balas, J., Sladek, J., & Sladek, V. (1989). Stress Analysis by Boundary Elements. *Studies in Applied Mechanics*. Vol. 23.
12. Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2019). Singular Integrals in Axisymmetric Problems of Elastostatics. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. **122**, 13–25. DOI.org/10.1142/S1793962320500038
13. Karaiev, A. O., & Strelnikova, O. O. (2018). Synhuliarni intehraly v aksialno-



- symetrychnykh zadachakh teorii potentsialu. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*. **1**, 10–18.
14. Eseleva, E. V., Gnitko, V. I., & Strelnikova, E. A. (2006). Sobstvennyie kolebaniya sosudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu. *Problemyi mashinostroeniya*. **1**, 105–118.
  15. Gnitko, V., Naumemko, Y., & Strelnikova, E. (2017). Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. **22**, 4, 867–881.
  16. Dehtiarov, K. H., Hnitko, V. I., & Strelnikova, O. O., Tonkonozhenko A. M. (2018). Rozrakhunkovi modeli na osnovi metodiv skinchenykh ta hranychnykh metodiv dlia analizu mekhanichnykh vlastyvostei tryvymirnykh nanokompozytiv. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*. **2**, 43–54. DOI: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2018-2-43-54>
  17. Le, M.-T., & Huang, S.-C. (2014). Modeling and Estimating the Effective Elastic Properties of Carbon Nanotube Reinforced Composites by Finite Element Method. *Journal of Engineering Technology and Education*. **11**, 2, 145–158.
  18. Miller, R. E., & Shenoy, V. B. (2000). Size-Dependent Elastic Properties of Nanosized Structural Elements. *Nanotechnology*. **11**, 139–147.
  19. Gao, W., Yu, S. W., & Huang, G. Y. (2006). Finite Element Characterization of the Size Dependent Mechanical Behavior in Nanosystems. *Nanotechnology*. **17**, 1118–1122.

УДК 539.3

М.Л. МИРОНЕНКО

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України  
Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова

### **ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПАЛИВНИХ БАКІВ ПРИ РІЗНИХ ЧИСЛАХ БОНДА**

*Дослідження коливань рідини у резервуарах циліндричних, сферичних або більш складної форми з врахуванням технічних особливостей та математичне моделювання переважно здійснюють методами скінчених та граничних елементів. В даній роботі виконується аналіз форм та частот коливань рідини при перевантаженнях та за умови низької гравітації. Розглянуто різні параметри зовнішнього впливу. Вважається, що рідина є однорідною, нестисливою, а рух рідини безвихровий. Існує потенціал швидкості руху, що задовольняє рівнянню Лапласа. Співвідношення гравітаційних сил та сил поверхневого натягу визначаються числом Бонда. На вільній поверхні рідини виконуються динамічна та кінематична умови. Знайдені залежності зміни форми вільної поверхні за часом при різних частотах збурювальної сили. Розроблена методика дозволяє досліджувати поведінку рідини при різних числах Бонда.*

*Ключові слова: вимушені коливання, число Бонда, вільна поверхня рідини, поверхневий натяг, методи скінчених та граничних елементів.*

М.Л. МИРОНЕНКО

Інститут проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины  
Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова

### **ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОПЛИВНЫХ БАКОВ ПРИ РАЗНЫХ ЧИСЛАХ БОНДА**

*Исследование колебаний жидкости в резервуарах цилиндрических, сферических или более сложной формы с учетом технических особенностей и математическое моделирование преимущественно осуществляют методами конечных и граничных элементов. В данной работе выполняется анализ форм и частот колебаний жидкости при различных числах Бонда. Рассмотрены различные параметры внешнего воздействия. Считается, что жидкость является однородной, несжимаемой, а движение жидкости безвихревым. Существует потенциал скорости движения, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Соотношение гравитационных сил и сил поверхностного натяжения определяются числом Бонда. На свободной поверхности жидкости выполняются динамическое и кинематическое условия. Найденные зависимости изменения формы свободной поверхности по времени при различных частотах возмущающей силы. Разработанная методика позволяет исследовать поведение жидкости при различных числах Бонда.*

*Ключевые слова: вынужденные колебания, число Бонда, свободная поверхность жидкости, поверхностное натяжение, методы конечных и граничных элементов.*

M.L. MYRONENKO

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences  
O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv

### **FORCED VIBRATIONS OF FUEL TANKS AT DIFFERENT BOND'S NUMBERS**

*Fluid oscillations in cylindrical, spherical tanks or reservoirs with more complicated shapes, taking into account technical features and mathematical modelling are usually*

<https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.4>

*performed by using finite and boundary element methods. It is possible to solve problems arising in science and technology by numerical methods. The development of electronic computers and the use of numerical methods allow to supplement or replace direct experimental research (modelling the stability of dams, launch vehicles, earthquakes). The oscillation parameters are determined by computer simulation. The technique of studying the behaviour of the free surface of a fluid in a cylindrical tank under the influence of horizontal harmonic loading is developed. Different parameters of external influence are considered. It is believed that the fluid that fills the shell is homogeneous, incompressible, and ideal and the fluid motion is vortex-free. The fluid is inviscid, so there is a potential for the velocity of motion that meets the conditions of the Laplace equation. The ratio of the gravitational and surface tension forces is determined by the Bond number. Dynamical and kinematical conditions are recorded for the free fluid surface. The dynamical condition consists in equality of the liquid pressure on the free surface to the atmospheric one. The kinematical condition supposes that particles initially belong to the free surface will remain on this surface during all consequent time. This paper analyzes the modes and frequencies of fluid fluctuations at overloads at low gravity. As an example, a cylindrical shell partially filled with liquid was considered. As a result of the numerical simulation, the lowest frequencies of the fluid oscillations are obtained, taking into account the surface tension at different Bond numbers. Changes in the shape of the free surface at different frequencies of the driving force are obtained. Thus, the application of this technique made it possible to perform a study of the behaviour of the liquid at changing the Bond number and under overloads.*

*Keywords: forced vibrations, Bond number, surface tension, liquid free surface, boundary and finite element methods.*

### **Постановка проблеми**

Ефективний розвиток промисловості вимагає появи сучасних технічних засобів та конструкцій, які володіють основними кількісними та якісними технічними характеристиками, надійністю, здатністю експлуатуватись у несприятливих умовах та водночас оптимальним проектуванням. На сьогоднішній день даним вимогам відповідають оболонкові конструкції, які зарекомендували себе у багатьох галузях, зокрема, літако- та суднобудуванні, при проектуванні гідротехнічних об'єктів та АЕС, зведенні мостів, дорожньому, підземному, промисловому будівництві. В аерокосмічному будівництві паливні баки ракет-носіїв (РН) розглядаються як складні оболонки, що частково заповнені рідиною. Однією з основних задач вчених ракетно-космічної галузі є дослідження поздовжніх коливань конструкцій РН, що можуть призвести до значних навантажень на конструкцію, порушення її цілісності та, як наслідок, до поздовжньої нестійкості і аварійних ситуацій. Ось чому вивчення даного питання є актуальним та необхідним.

### **Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Дослідження коливань рідини у баках ракетноносіїв циліндричної або сферичної форми, їх математичне моделювання виконувалось багатьма основоположними вченими за допомогою варіаційного метода [1–5]. Динамічна поведінка космічних ступенів, а також палива у баках в цих роботах не враховувала впливу мікрогравітації, а також збурень від виконавчих органів системи управління [6].

Дослідження конструкцій більш складних форм та врахування інших технічних особливостей дозволяють методи скінчених та граничних елементів. Сучасними засобами комп'ютерного проектування визначають характеристики рухомих об'єктів та параметри коливань [7–8].

Програма польоту ракети-носія включає активні, а також пасивні ділянки польоту. Під час короткочасних активних проміжків польоту виконує роботу маршовий двигун, що <https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.4>

призводить до появи силових факторів, які викликають рух та плескання палива та коливань конструкції. У підсумковому звіті Університету мікрогравітації [9] досліджено нестабільності вільної поверхні нев'язкої рідини під час переходу від гіпергравітації до мікрогравітації. Визначено, що поверхневі коливання під час переходів від 2-g до 0-g можуть призвести до значного зростання амплітуди та нестабільності конструкції.

У роботах вітчизняних дослідників подані результати математичного моделювання просторових коливань компонентів палива в паливному відсіку космічної ступені РН для умов мікрогравітації і малих рівнів рідких компонентів палива в баках [6]. Низка робіт охоплює ряд досліджень, пов'язаних з коливаннями: визначення характеристик сорбційних процесів на основі моделювання вимушених просторових коливань верхніх ступенів ракет-носіїв з використанням методу скінченних елементів [10], математичне моделювання взаємодії поздовжніх коливань корпусу ракети та динамічних процесів у маршовому двигуні [11], моделювання просторових коливань оболонкових резервуарів з рідиною за допомогою засобів комп'ютерного аналізу та проектування [8], наведено розрахункові залежності власних поздовжніх коливань корпусу ракети «Циклон-4» від часу польоту та урахуванням дисипації енергії при різних рівнях заповнення паливних баків [12], дослідження нелінійного поведіння вільної поверхні рідини у горизонтальному циліндричному резервуарі при гармонічних збудженнях конструкції [13], урахування складної конфігурації паливних баків при виконанні математичного моделювання поздовжніх коливань верхніх ступенів ракет-носіїв та інші.

### Мета дослідження

Метою дослідження є створення методики дослідження поведінки вільної поверхні при різних числах Бонда.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Дана робота присвячена розгляду коливань рідких компонентів у баках окислювача, що являють собою жорстку циліндричну оболонку висотою  $H$  та радіусом  $R$ , частково заповнену рідиною на висоту  $H_1$  зі змоченою поверхнею  $S_1$  та вільною поверхнею  $S_0$  (рис. 1).

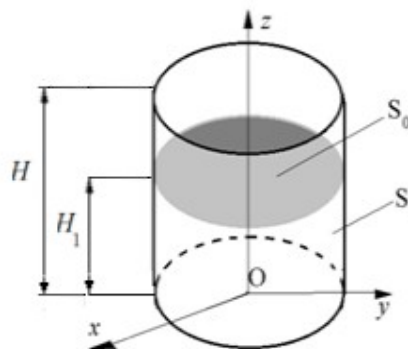


Рис. 1. Циліндрична оболонка з рідиною.

Вважаємо, що рідина знаходиться під дією гравітаційного поля, однорідна, нестислива, потік безвихровий з потенціалом швидкості  $V = \nabla\varphi$ . Сили поверхневого натягу на вільній поверхні рідини  $S_0$  та гравітаційні сили, що є переважними у даній задачі, виражені у співвідношенні, яке характеризується числом Бонда [6]:

$$B_0 = (\rho g R^2) / \sigma, \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина рідини;

<https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.4>

$g$  – прискорення сил гравітації;  
 $\sigma$  – поверхневий натяг;  
 $R$  – радіус циліндричної частини резервуара.

Потенціал швидкостей задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Нормальна складова швидкості  $V$  для оболонки, що має жорсткі стінки:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0. \quad (3)$$

Запишемо динамічну граничну умову на вільній поверхні рідини у вигляді:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho} \Delta_s \zeta \right|_{S_0} = 0. \quad (4)$$

Кінематична умова на вільній поверхні має вигляд:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \right|. \quad (5)$$

Оскільки вважається, що переважними є гравітаційні сили, тому динамічна умова записується таким чином:

$$\left. \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0} = 0. \quad (6)$$

Також врахуємо умову існування розв'язку

$$\iint_{S_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (7)$$

В даному дослідженні будемо аналізувати частоти та форми коливань рідини в умовах перевантаження, тобто коли гравітаційна сила має прискорення  $\alpha g$ , де коефіцієнт  $\alpha \geq 1$ . В роботі [14] отримані розв'язки крайової задачі.

### Аналіз числових результатів

Розглянемо коливання рідини в резервуарі під дією гармонічного горизонтального навантаження. Використовуємо динамічну умову у вигляді:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\xi - \frac{\sigma}{\rho} \Delta\xi + a_x(t)x = 0, \quad (8)$$

де  $a_x(t)$  – прискорення горизонтального навантаження.

У випадку гармонічного навантаження маємо

$$a_x(t) = a_0 \cos \Omega t.$$

Тут  $a_0, \Omega$  – амплітуда та частота навантаження.

В роботах [15–16] отримані такі розкладення невідомих функцій  $\varphi, \zeta$ :

$$\varphi(\rho, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(\rho, \theta, z), \quad (9)$$

$$\zeta(\rho, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, \theta, H_1)}{\partial \mathbf{n}}. \quad (10)$$

де  $c_k(t)$  – невідомі коефіцієнти, що залежать лише від часу;

$\varphi_k(\rho, \theta, z)$  – розв’язки спектральної задачі [15].

Оскільки розглядаються резервуари у вигляді оболонок обертання, тому

$$x = \rho \cos \theta. \quad (11)$$

В цьому випадку маємо

$$\varphi_k(\rho, \theta, z) = \cos \theta \varphi_k(\rho, z), \quad (12)$$

де  $\varphi_k(\rho, z)$  – форми вільних коливань рідини, що відповідають першій гармоніці та разом з власними частотами  $\chi_k$  є розв’язком спектральної задачі.

Найнижчу частоту коливань рідини визначаємо за формулами [4]:

$$\chi_1^2 = \frac{\mu_1}{R} \tanh\left(\frac{\mu_1 H}{R}\right), \quad \chi_1^2 = \frac{\omega_1^2}{g}. \quad (13)$$

Враховуючи поверхневий натяг рідини, маємо:

$$\omega_k = \omega_k^g \sqrt{1 + \mu_k^2 / B_0}, \quad (14)$$

де  $\omega_k^g$  – частота коливання рідини у резервуарі без врахування поверхневого натягу (відповідає лише дії гравітаційного поля);

$\mu_k$  є коренями рівняння

$$\frac{dJ_1(\rho\rho)}{d\rho} = 0, \quad (15)$$

в якому  $J_1(\rho)$  – функція Бесселя 1-го роду.

Найнижчим коренем вказаного рівняння є  $\mu_1 \approx 1.84$ .

Зауважимо, що  $\omega_k^g = \sqrt{g} \chi_k$ . З цього випливає, що з ростом перевантаження частоти коливань рідини зростають пропорційно  $\sqrt{g}$ . Частоти коливань рідини з врахуванням поверхневого натягу при різних значеннях числа Бонда наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Частоти коливань з урахуванням поверхневого натягу

$\omega_k$	1.837	3.848	3.015	2.681	2.497	2.379	15.23	10.84	7.781	7.007	6.441	5.653	5.122
$B_0$	$\infty$	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50

Амплітуди коливань вільної поверхні рідини в залежності від частоти збудувальної сили зображено на рис. 1–2.

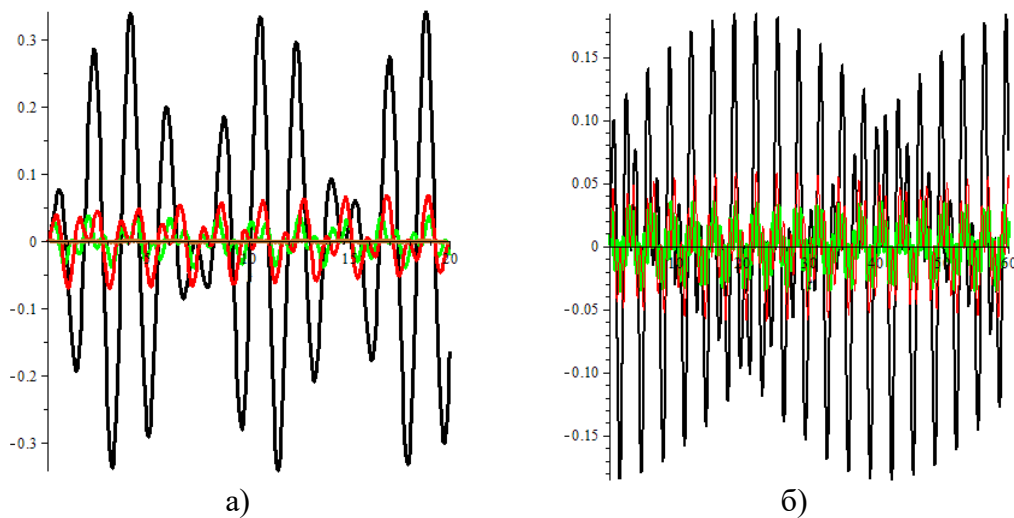


Рис. 2. Зміна рівня вільної поверхні у точці з циліндричними координатами (1, 0, 1).

На рис. 1а зображено функцію  $\zeta$  при  $a_0 = 1H$ ,  $\Omega = 2.77 \text{ Hz}$ , на рис. 1 б) зображено цю функцію при  $a_0 = 1H$ ,  $\Omega = 7.78 \text{ Hz}$ . На рис. 1а та 1б червоні лінії відповідають  $B_0 = 3$ , зелені – числу Бонда  $B_0 = 5$  та чорні –  $B_0 = 0$ .

Режим биття на частоті  $\Omega = 7.70 \text{ Hz}$  показаний на рис. 3.

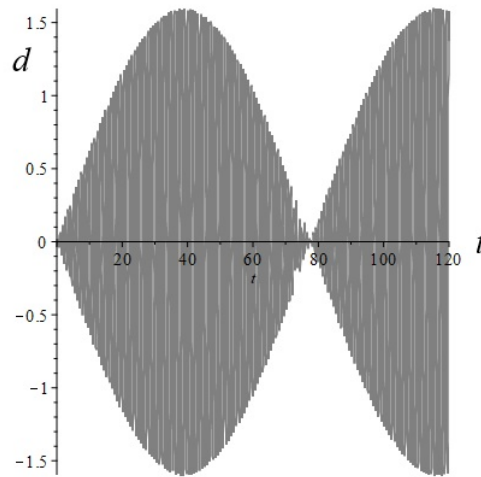


Рис. 3. Режим биття.

Таким чином, розроблена методика дозволяє вивчити поведінку вільної поверхні рідини при різних параметрах горизонтального гармонічного навантаження.

### Висновки

Розроблено методику дослідження поведінки вільної поверхні рідини у циліндричному резервуарі, що знаходиться під дією горизонтального гармонічного навантаження. Методика дозволяє дослідити поведінку вільної поверхні при різних числах Бонда, як за умови перевантажень, так і при низькій гравітації. У подальшому передбачається дослідити поведінку рідини в резервуарах іншої форми.

### Список використаної літератури

1. Abramson H. N. Dynamic behavior of liquid in moving containers. *Appl. Mech. Reviews*. 1963. Vol. 16. № 7. P. 501–506.
2. Braslow A. L., Bhuta P. G., Hutton R. E., Abramson H. N., Stephens D. G. Propellant Slosh Loads : report : SP 8009 / NASA. Washington, 1968. 25 p.
3. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М. : Наука, 1965. 440 с.
4. Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. К. : Наук. думка, 1984. 228 с.
5. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М. : Машиностроение, 1971. 564 с.
6. Николаев А. Д., Башлий И. Д. Определение параметров колебаний топлива в баках космических ступеней ракет-носителей перед повторными запусками маршевого двигателя при малых уровнях заполнения. *Техническая механика*. 2013. № 3. С. 10–20.
7. Николаев А. Д., Башлий И. Д. Математическое моделирование пространственных колебаний жидкости в цилиндрическом баке при продольных вибрациях его конструкции. *Техническая механика*. 2012. № 2. С. 14–22.
8. Башлий И. Д., Николаев А. Д. Математическое моделирование пространственных колебаний оболочечных конструкций с жидкостью с использованием современных средств компьютерного проектирования и анализа. *Техническая механика*. 2013. № 2. С. 18–25.
9. Investigation of Propellant Sloshing and Zero Gravity Equilibrium for the Orion Service Module Propellant Tanks : Final report / Microgravity University, Systems Engineering <https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.4>



- Educational Discovery. Kenosha, 2009. 22 p.
10. Башлий И. Д., Николаев А. Д., Свириденко Н. Ф. Влияние полетных вибраций верхних ступеней ракет-носителей на характеристики сорбционных процессов в жидком газонасыщенном топливе в баках сложной пространственной конфигурации. *Техническая механика*. 2011. № 2. С. 13–22.
  11. Хоряк Н. В., Николаев А. Д. Математическое моделирование взаимодействия продольных колебаний корпуса жидкостной ракеты как многосвязной упруго-диссипативной системы и динамических процессов в двигательной установке. *Техническая механика*. 2010. № 3. С. 27–37.
  12. Николаев А. Д., Хоряк Н. В., Башлий И. Д., Пирог В. А., Ходоренко В. Ф. Математическое моделирование свободных продольных колебаний конструкции третьей ступени и корпуса ракеты космического назначения "Циклон-4". *Техническая механика*. 2011. № 4. С. 37–44.
  13. Науменко Н. Е., Соболевская М. Б., Сирота С. А., Николаев А. Д., Башлий И. Д. Нелинейные колебания свободной поверхности жидкости в горизонтально расположенном цилиндрическом баке. *Техническая механика*. 2015. № 4. С. 92–102.
  14. Мироненко М. Л., Гнітько В. І., Дегтярьов К. Г. Метод дискретних особливостей у задачах коливань заповнювача паливних баків при перевантаженнях та в умовах низької гравітації. Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2019. Вип. 41. № 41. С. 20–26.
  15. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. № 22 (4). P. 867–881.
  16. Еселева Е. В., Гнітько В. І., Стрельникова Е. А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. Т. 9. №1. С. 105–118.

### References

1. Abramson H. N. (1963). Dynamic behavior of liquid in moving containers. *Appl. Mech. Reviews*. **16**, 7, 501–506.
2. Braslow, A. L., Bhuta, P. G., Hutton, R. E., Abramson, H. N., & Stephens, D. G. (1968). Stephens Propellant Slosh Loads. *Report : SP 8009 / NASA*. Washington.
3. Moiseev, N. N. & Rumjancev, V. V. (1965). *Dinamika tela s polostyami, soderzhaschimi zhidkost*. Moscow: Nauka.
4. Lukovskij, I. A. Barnjak, M. Ja. & Komarenko, A. N. (1984). *Priblizhennyye metodyi resheniya zadach dinamiki ogranichenogo ob'ema zhidkosti*. Kyiv: Nauk. Dumka.
5. Mikishev, G. N. & Rabinovich, B. I. (1971). *Dinamika tonkostennyih konstruktsiy s osekami, soderzhaschimi zhidkost*. Moscow, Mashinostroenie.
6. Nikolaev, A. D., & Bashlij, I. D. (2013). Opredelenie parametrov kolebaniy topliva v bakah kosmicheskikh stupeney raket-nositeley pered povtornymi zapuskami marshevogo dvigatelya pri malyyh urovnyah zapolneniya. *Tehnicheskaya mehanika*. **3**, 10–20.
7. Nikolaev, A. D. & Bashlij, I. D. (2012). Matematicheskoe modelirovanie prostranstvennyih kolebaniy zhidkosti v tsilindricheskom bake pri prodolnyih vibratsiyah ego konstruktsii. *Tehnicheskaya mehanika*. **2**, 14–22.
8. Bashlij, I. D. & Nikolaev, A. D. (2013). Matematicheskoe modelirovanie prostranstvennyih kolebaniy obolocheknyih konstruktsiy s zhidkostyu s ispolzovaniem sovremennyih sredstv kompyuternogo proektirovaniya i analiza. *Tehnicheskaya mehanika*. **2**, 18–25.
9. Investigation of Propellant Sloshing and Zero Gravity Equilibrium for the Orion Service

- Module Propellant Tanks : Final report / Microgravity University, Systems Engineering Educational Discovery. Kenosha, 2009. 22 p.
10. Bashlij, I. D. & Nikolaev, A. D. (2011). Vliyanie poletnykh vibratsiy verkhnikh stupeney raket-nositelej na kharakteristiki sorbcionnykh processov v zhidkom gazonasyshennom toplive v bakakh slozhnoj prostranstvennoj konfiguraczii. *Tekhnicheskaya mehanika*. **2**, 13–22.
  11. Khoryak, N. V. & Nikolaev, A. D. (2010). Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya prodolnykh kolebaniy korpusa zhidkostnoy raketyi kak mnogosvyaznoy uprugodissipativnoy sistemyi i dinamicheskikh protsessov v dvigatelnoy ustanovke. *Tekhnicheskaya mehanika*. **3**, 27–37.
  12. Nikolaev, A. D., Khoryak, N. V., Bashlij, I. D., Pirog, V. A., & Khodorenko, V. F. (2011). Matematicheskoe modelirovanie svobodnykh prodolnykh kolebaniy konstruksii tretej stupeni i korpusa raketyi kosmicheskogo naznacheniya "Tsiklon-4". *Tekhnicheskaya mehanika*. **4**, 37–44.
  13. Naumenko, N. E., Sobolevskaya, M. B., Sirota, S. A., Nikolaev, A. D. & Bashlij, I. D. (2015). Nelinejnykh kolebaniya svobodnoj poverkhnosti zhidkosti v gorizontallyno raspolozhenom tsilindricheskom bace. *Tekhnicheskaya mehanika*. **4**, 92–102.
  14. Myronenko, M. L., Hnitko, V. I., & Dehtiarov, K. H. (2019). Metod dyskretnykh osoblyvostei u zadachakh kolyvan zapovniuvacha palyvnykh bakiv pry perevantazhenniakh ta v umovakh nyzkoi hravitatsii. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetutu. Seria: Matematychni modeliuvannia. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*. **41**, 20–26.
  15. Gnitko, V., Naumenko, Y., & Strelnikova E. (2017). Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. **22 (4)**, 867–881.
  16. Eseleva, E. V., Gnitko, V. I., & Strelnikova, E. A. (2006). Sobstvennykh kolebaniya sosudov vyssokogo davleniya pri vzaimodejstvii s zhidkostyu. *Problemy Mashinostroeniya*. **9(1)**, 105–118.

УДК 681.5

А.А. ОМЕЛЬЧУК

Університет державної фіскальної служби України  
Д.О. ДМИТРИЄВ, С.А. РУСАНОВ, Ю.О. ЛЕБЕДЕНКО  
Херсонський національний технічний університет

### МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОГРАМНОГО СЕРЕДОВИЩА FACTORY I/O

*У статті обґрунтовується доцільність застосування комп'ютерного моделювання для навчальних лабораторних комплексів з метою підготовки фахівців у сфері автоматизації, робототехніки і мехатроніки. Проаналізовано можливості спеціалізованого програмного забезпечення для віртуальної розробки та моделювання систем автоматизації Factory I/O. Досліджено можливість інтеграції програми Factory I/O у склад лабораторного стенду і її взаємодії з сучасними програмованими логічними контролерами. Розглянуто основні компоненти і складові програми Factory I/O – аналоги реальних об'єктів, що використовуються на різноманітних виробництвах. Проаналізовано їх призначення і параметри.*

*Планується розробка стенду, що складається з PLC Siemens S7-1200, персонального комп'ютера з встановленим програмним забезпеченням TIA Portal і Factory I/O з можливістю підключення до реальної конвеєрної лінії, що устаткована електродвигунами різних типів (кроковий двигун, сервопривод, двигун постійного струму) і низкою сенсорів.*

*Ключові слова: FACTORY I/O; лабораторний стенд; моделювання; контролер.*

А.А. ОМЕЛЬЧУК

Университет государственной фискальной службы Украины  
Д.А. ДМИТРИЕВ, С.А. РУСАНОВ, Ю.А. ЛЕБЕДЕНКО  
Херсонский национальный технический университет

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОЙ СРЕДЫ FACTORY I/O

*В статье обосновывается целесообразность применения компьютерного моделирования для учебных лабораторных комплексов с целью подготовки специалистов в сфере автоматизации, робототехники и мехатроники. Проанализированы возможности специализированного программного обеспечения для виртуальной разработки и моделирования систем автоматизации Factory I/O. Исследована возможность интеграции программы Factory I/O в состав лабораторного стенда и ее взаимодействия с современными программируемыми логическими контроллерами. Рассмотрены основные компоненты и составляющие программы Factory I/O как аналоги реальных объектов, используемых на различных производствах. Проанализированы их назначения и параметры.*

*Планируется разработка стенда, состоящий из PLC Siemens S7-1200, персонального компьютера с установленным программным обеспечением TIA Portal и Factory I/O с возможностью подключения к реальной конвейерной линии, оборудованной электродвигателями различных типов (шаговый двигатель, сервопривод, двигатель постоянного тока) и набором сенсоров.*

*Ключевые слова: FACTORY I/O; лабораторный стенд; моделирование; контроллер.*

A.A. OMELCHUK  
University of the State Fiscal Service of Ukraine  
D.O. DMYTRIEV, S.A. RUSANOV, Yu.O. LEBEDENKO  
Kherson National Technical University

## TECHNOLOGICAL PROCESS MODELING WITH FACTORY I/O PROGRAM

*Thanks to progress in microelectronic and microprocessor-based systems, technological process digital control systems based on programmable controllers have been developed worldwide. As a result of the implementation of the Industry 4.0 a demand for new skills has arose both in the industrial and academic world. The article substantiates the expediency of using computer modeling for educational laboratory complexes with the aim of training specialists in the field of automation, robotics and mechatronics. The possibilities of specialized software for virtual development and simulation of Factory I/O automation systems are analyzed. The possibility of integrating the Factory I/O program into the laboratory bench and its interaction with modern programmable logic controllers is investigated. The interface elements and main components of the Factory I/O program are considered - analogs of real control objects used in various industries. Components purpose and parameters were analyzed.*

*It is noted that the effective use of programmable logic controllers in automated control systems for industry is closely related to the training of specialists capable of developing application programs. Due to the complexity of debugging the developed programs on real technological equipment, an analysis is made of possible options for modeling control processes and the effectiveness of virtualization of control objects on computers is noted. The development of Real Games in the creation of virtual control objects using 3D graphics for the purpose of teaching the use of programmable logic controllers in production control systems is considered.*

*The prospects of using Real Games software products in the training of specialists for automation systems for technological equipment are estimated.*

*It is planned to develop a stand consisting of a Siemens S7-1200 PLC, a personal computer with installed TIA Portal and Factory I/O software with the ability to connect to a real conveyor line, which is equipped with different sensors and various types of electric motors (stepper motor, servo drive, DC motor).*

*Keywords: FACTORY I/O; laboratory stand; modeling; controller.*

### Постановка проблеми

Навчальні комп'ютерні ігри можуть стати зручним і ефективним інструментом для навчання молоді, яка з самого дитинства звикла проводити багато часу за комп'ютером. Навчальні комп'ютерні ігри здатні поєднати вимір освіти з добре знайомим молодим людям виміром віртуальних розваг. Іншими словами, завдання полягає у використанні основних принципів відеоігор (досліджень, викликів, змагань, нагород, пошуку, прогресу) для мотивації учнів та спрямування центрів їх інтересів до певної галузі освіти та науки.

Наявність сучасних лабораторних стендів та навчального устаткування завжди була показником якісного викладання технічних дисциплін, що вигідно вирізняє навчальний заклад з поміж інших. Невід'ємною складовою для вивчення сучасних систем управління та автоматики, інформаційно-вимірювальних і обчислювальних засобів промислового виробництва та робототехнічних систем є навчальні лабораторні стенди, які розробляються із застосуванням новітнього обладнання та програмного забезпечення.

Таке устаткування дозволяє майбутнім фахівцям отримати не тільки теоретичні, а й практичні навички роботи. З іншого боку, навчання спеціалістів з автоматизації для сучасної промисловості потребує всебічної підготовки, зокрема і знайомства з основними виробничими ділянками заводів та об'єктами автоматизації.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Навчальні лабораторні стенди з можливістю тривимірної симуляції складних розподілених об'єктів управління і натурними компонентами автоматизованої системи – це відносно новий і перспективний шлях вирішення проблеми організації навчальних лабораторій з вивчення комплексних програмно-технічних засобів автоматизованого управління, що активно розвивається [1–3].

### Мета дослідження

Метою роботи є дослідження можливостей програми для симуляції технологічних процесів Factory I/O і її інтеграція у склад лабораторного стенду.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Factory I/O – це спеціалізована програма, яка призначена для тривимірної симуляції технологій автоматизації. Відносно проста у використанні, вона дозволяє швидко побудувати віртуальну фабрику, використовуючи широкий перелік загальних промислових деталей [2]. Factory I/O також включає в себе набір сцен, заснованих на типових промислових завданнях різного рівня складності [3].

Основними об'єктами управління у середовищі Factory I/O є конвеєр, цистерна з рідиною, робот-сортувальник, автоматизований склад, робот-маніпулятор, верстат, різноманітні виконавчі механізми і сенсори. З цих складових можна формувати виробничу лінію різного призначення за допомогою конструктора. Подібна симуляція повинна дозволити проводити певні випробування системи управління і гнучко перебудовувати об'єкти управління під різні варіанти конфігурації.

Більшість компонентів мають відповідні змінні різних форматів, за допомогою яких під'єднаний до ПК по мережі контролер може відстежувати зміну стану компонента (датчика, двигуна та ін.) [4]. Приклад однієї зі сцен наведено на рис. 1 і 2, де зображено сортувальну станцію для розподілу низьких і високих коробок за допомогою оптичного сенсора [5].



Рис. 1. Вигляд сортувальної станції у програмі Factory I/O.

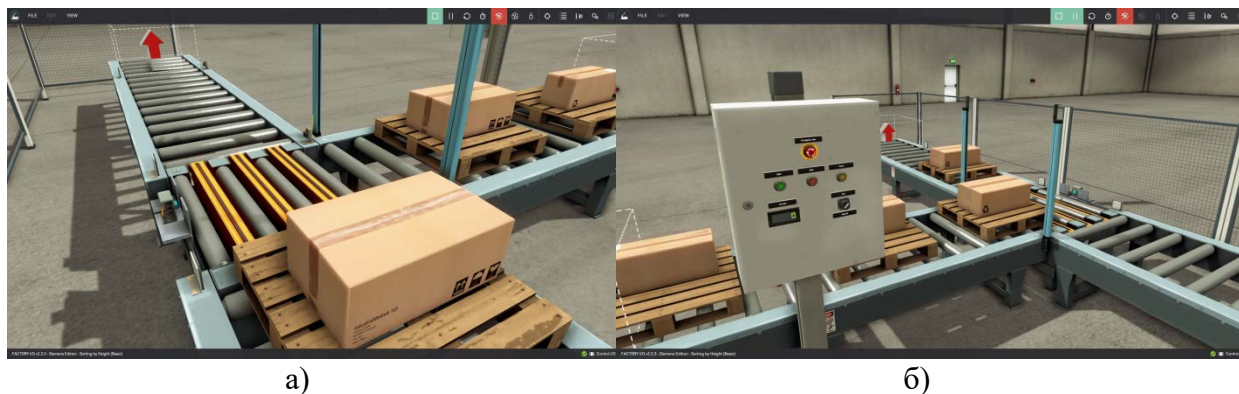


Рис. 2. Основні елементи конвеєрної лінії: а – ділянка вимірювання і розподілу коробок; б – віртуальна панель управління.

Найбільш доцільним є використання Factory I/O в якості навчальної платформи у комплексі з програмованими логічними контролерами (ПЛК). Можливість навчатися роботі з ПЛК, маючи візуальну модель виробничої ділянки, функції якої підпорядковані програми, що власноруч розроблена і завантажена у контролер, є суттєвою перевагою [6–7].

Тим не менш, Factory I/O також може застосовуватися і самостійно та має власне середовище для програмування (рис. 3).

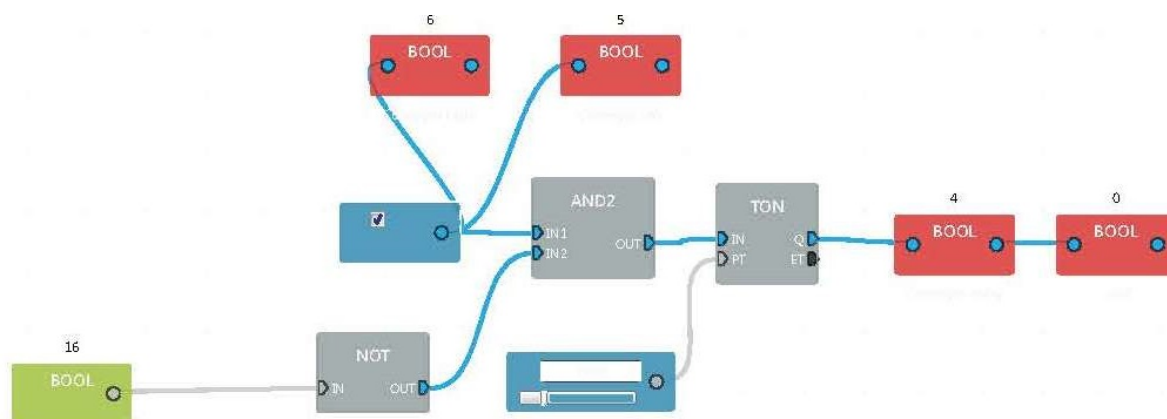


Рис. 3. Блок програми у середовищі для програмування Control I/O.

Програма Factory I/O дозволяє взаємодіяти з системою у реальному часі і здійснювати моніторинг її функціонування, що дозволяє вводити перешкоди та несправність датчиків для створення аварійних ситуацій [8–9].

Для того, щоб ефективно впровадити комплекс на основі Factory I/O у навчальний процес необхідно отримати ліцензійне програмне забезпечення, яке можна завантажити з веб-сторінки компанії Real Games. Factory I/O має безкоштовну пробну ліцензію на місяць, і кілька видів ліцензій з різним функціоналом та спеціалізованих під певні ПЛК (Siemens Edition, Allen-Bradley Edition).

Виходячи з наявних у розпорядженні контролерів, найбільш доцільним є використання повного видання (Ultimate Edition) або спеціалізованого видання Siemens. Обидва пристрої повинні бути в одній мережі, що дозволяє забезпечити з'єднання по Ethernet між програмою Factory I/O яка встановлена на комп'ютері і PLC Siemens S7-1200. Крім цього, для налаштування і програмування PLC також встановлюється відповідне фірмове програмне забезпечення (Siemens TIA Portal).



Рис. 4. Контролер Siemens S7-1200 у проекті Factory I/O.

На рис. 5 показаний модуль симулятора SIM 1274 на 8 дискретних входів для контролера SIMATIC S7-1200. При налагодженні програми, що знаходиться на стадії розробки, такий модуль закріплюється в отворах гвинтових клем дискретних входів контролера і використовується для подачі на ці входи логічних сигналів. При цьому кожен вимикач модуля має відому адресу в пам'яті контролера. Роботу програми також контролюють станом дискретних виходів контролера.



Рис. 5. Модуль симулятора SIM 1274.

Студент повинен мати базові навички програмування ПЛК: Ladder Logic (рис. 6), FBD (Function Block Diagram), STL (Statement List).

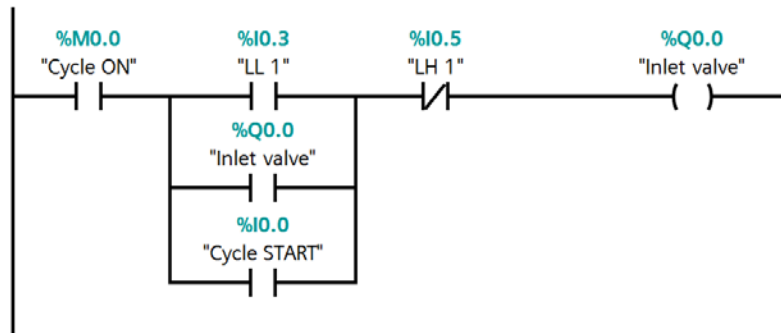


Рис. 6. ПІА Portal Ladder Logic.

Оскільки метою створення подібних стендів є підготовка фахівців у галузі автоматизації і мехатроніки, тому передбачається, що вони будуть використовуватися студентами з попередніми базовими знаннями в галузі автоматизації.

### Висновки

Ідея полягає в тому, щоб допомогти викладачу у навчальному процесі та розробити імітаційне програмне забезпечення за допомогою технологій відеоігор, які пропонують практику, досвід, мотивацію і, з рештою, занурення у навчання автоматизації. З Factory I/O, викладач стає майстром гри, що керує сценарієм. Одним із великих завдань є підготовка студентів згідно концепції Industry 4.0.

Factory I/O є інтуїтивно зрозумілою, простою у використанні програмою та корисним інструментом для засвоєння принципів програмування ПЛК. З цих причин можна вважати цю програму доцільною для використання в навчальних закладах.

Таким чином на основі проаналізованого програмного забезпечення можна створити лабораторний комплекс для підготовки фахівців з автоматизованих систем управління та мехатроніки.

### Список використаної літератури

1. Riera, B., Emprin, F., Annebicque, D., Colas, M., Vigario, B. HOME I/O: a virtual house for control and STEM education from middle schools to Universities. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. Vol. 49(6). P. 168–173.
2. Next-Gen PLC Training. 3D Factory Simulation. 3D Training Software for PLC Programming. URL: <https://factoryio.com> (Accessed June 22, 2019).
3. Poblacion Salvatierra, I. (2018). Simulation software for automation industry: Factory I/O and KUKASim software. URL: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1222361/FULLTEXT01.pdf>
4. Дмитрієв, Д. О., Русанов, С. А., Омельчук, А. А., Федорчук, Д. Д. Розробка технічних засобів проектування технологічного і верстатного обладнання каркасних просторових компоновок. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2017. Вип. 3(81). С. 54–62.
5. Philippot, A. et al. HOME I/O and FACTORY I/O: 2 Pieces of innovative PO simulation software for automation education. *Proceedings of the 27th EAEEIE Annual Conference (EAEEIE)*, (France, Grenoble, June 7-9, 2017), pp. 1–6.
6. Emprin, F., Riera, B. Process of Creating Educational Uses by Teachers from a 3D Simulation of a House Home Automation to Teach Technology. *Proceedings of the 3rd international constructionism conference*, (Austria, Vienne, August 19-23, 2014), pp. 247–257.



7. Vaidya, S., Ambad, P., Bhosle, S. Industry 4.0 - A Glimpse. *Procedia Manuf.* 2018. Vol. 20. P. 233–238.
8. Gonzalez, A. G. C., Alves, M. V. S., Viana, G. S., Carvalho, L. K., Basilio, J. C. Supervisory Control-Based Navigation Architecture: A New Framework for Autonomous Robots in Industry 4.0 Environments. *IEEE Trans. Ind. Informatics.* 2018. Vol. 14. № 4. P. 1732–1743.
9. Baena, F., Guarin, A., Mora, J., Sauza, J., Retat, S. Learning Factory: The Path to Industry 4.0. *Procedia Manuf.* 2017. Vol. 9. P. 73–80.

### References

1. Riera, B., Emprin, F., Annebicque, D., Colas, M., & Vigario, B. (2016). HOME I/O: a virtual house for control and STEM education from middle schools to Universities. *IFAC-PapersOnLine.* **49**(6), 168–173.
2. Next-Gen PLC Training. 3D Factory Simulation. 3D Training Software for PLC Programming. Retrieved from <https://factoryio.com> (Accessed June 22, 2019).
3. Poblacion Salvatierra, I. (2018). Simulation software for automation industry: Factory I/O and KUKASim software. Retrieved from <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1222361/FULLTEXT01.pdf>
4. Dmytriiev, D. O., Rusanov, S. A., Omelchuk, A. A., & Fedorchuk, D. D. (2017). Rozrobka tekhnichnykh zasobiv proektuvannia tekhnolohichnoho i verstatnoho obladnannia karkasnykh prostorovykh komponovok. *Mechanics and Advanced Technologies.* **3**(81), 54–62.
5. Philippot, A. et al. (2014). HOME I/O and FACTORY I/O: 2 Pieces of innovative PO simulation software for automation education. *Proceedings of the 27th EAEEIE Annual Conference (EAEEIE)*, (France, Grenoble, June 7-9, 2017), pp. 1–6.
6. Emprin, F., & Riera, B. (2014). Process of Creating Educational Uses by Teachers from a 3D Simulation of a House Home Automation to Teach Technology. *Proceedings of the 3rd international constructionism conference*, (Austria, Vienne, August 19-23, 2014), pp. 247–257.
7. Vaidya, S., Ambad, P., & Bhosle, S. (2018). Industry 4.0 - A Glimpse. *Procedia Manuf.* **20**, 233–238.
8. Gonzalez, A. G. C., Alves, M. V. S., Viana, G. S., Carvalho, L. K., & Basilio, J. C. (2018). Supervisory Control-Based Navigation Architecture: A New Framework for Autonomous Robots in Industry 4.0 Environments. *IEEE Trans. Ind. Informatics.* **14**, 4, 1732–1743.
9. Baena, F., Guarin, A., Mora, J., Sauza, J., & Retat, S. (2017). Learning Factory: The Path to Industry 4.0. *Procedia Manuf.* **9**, 73–80.

УДК 504.43

О.М. СЕРІКОВА

Національний університет цивільного захисту України

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФАКТОРУ ЕВАПОТРАНСPIРАЦІЇ ПРИ ЗМІНІ РІВНЯ ҐРУНТОВИХ ВОД МІСЬКИХ ТЕРИТОРІЙ

*В роботі здійснено математичне моделювання зміни рівня ґрунтових вод (РГВ) з урахуванням впливу штучних покриттів поверхні ґрунту і евапотранспірації. Мета дослідження – підвищити точність прогнозів зміни рівня ґрунтових вод для підвищення екологічної безпеки міських територій, підтоплених ґрунтовими водами. Прогноз максимального рівня ґрунтових вод для міста Харкова, без врахування ефекту евапотранспірації на перспективу 50 років, свідчить, що на 1-й рік підйом рівня становитиме 0,03 м, а на 50-й рік – близько 1,5 м. З метою оптимізації водного балансу підземних вод для забезпечення екологічної безпеки підтоплених територій великого міста, на основі запропонованої математичної моделі було проведено балансування видаткових та прибуткових статей. Балансування відбувається при зниженні додаткового живлення в 2,4 рази, тобто додаткове живлення необхідно зменшити в середньому на 240 000 м<sup>3</sup>/добу, а також при збільшенні водовідбору з першого від поверхні водоносного горизонту в середньому в 15 разів, тобто при збільшенні водовідбору в межах м. Харків в середньому на 300 000 м<sup>3</sup>/добу. Також зроблено прогноз зміни РГВ із урахуванням дії евапотранспірації на перспективу 50 років. Під штучними покриттями на 1-й рік підйом рівня складе 0,05 м, а на 50-й рік – вже 2,56 м. На території, вільній від штучних покриттів РГВ буде стабілізований дією евапотранспірації. Таким чином, поширення площі штучних покриттів по території міста сприятиме зниженню дії евапотранспірації і стійкому підвищенню РГВ та розвитку підтоплення. Проведено оцінку адекватності запропонованої математичної моделі за фактичними даними моніторингу рівня ґрунтових вод. Оцінка адекватності проводиться на двох різних за ландшафтними умовами ділянках. Перша ділянка переважно розташована посеред приватного сектору та має вільну від покриттів поверхню. Друга ділянка практично повністю вкрита штучними покриттями. Результати розрахунків на моделі визначили тісний взаємозв'язок між розрахунковими та фактичними значеннями моніторингу рівнів підземних вод. Це свідчить про адекватність створеної математичної моделі реальним фізичним умовам.*

*Ключові слова: додаткове живлення, рівень ґрунтових вод, евапотранспірація, підтоплення, математичне моделювання зміни рівня ґрунтових вод.*

Е.Н. СЕРІКОВА

Національний університет гражданской защиты Украины

Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАКТОРА ЭВАПОТРАНСPIРАЦИИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УРОВНЯ ҐРУНТОВЫХ ВОД ГОРОДСКИХ ТЕРРИТОРИЙ

*В работе проведено математическое моделирование изменения уровня ґрунтовых вод (УГВ) с учетом влияния искусственных покрытий поверхности почвы и*

<https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.6>

эвапотранспирации. Цель исследования – повысить точность прогнозов изменения уровня грунтовых вод для повышения экологической безопасности городских территорий, подтопленных грунтовыми водами. Прогноз максимального уровня грунтовых вод для города Харькова, без учета эффекта эвапотранспирации на перспективу 50 лет, свидетельствует, что на 1-й год подъем уровня составит 0,03 м, а на 50-й год - около 1,5 м. С целью оптимизации на основе предложенной математической модели водного баланса подземных вод для обеспечения экологической безопасности подтопленных территорий большого города, проведено балансирование расходных и приходных статей. Балансирование происходит при снижении дополнительного питания в 2,4 раза, то есть дополнительное питание необходимо уменьшить в среднем на 240 000 м<sup>3</sup>/сутки, а также при увеличении водоотбора из первого от поверхности водоносного горизонта в среднем в 15 раз, то есть при увеличении водоотбора в пределах г. Харьков в среднем на 300 000 м<sup>3</sup>/сут. Также сделан прогноз изменения УГВ с учетом действия эвапотранспирации на перспективу 50 лет. Под искусственными покрытиями на 1-й год подъем уровня составит 0,05 м, а на 50-й год – уже 2,56 м. На территории, свободной от искусственных покрытий УГВ будет стабилизирован действием эвапотранспирации. Таким образом, распространение площади искусственных покрытий по территории города будет способствовать снижению действия эвапотранспирации и устойчивому повышению УГВ и развитию подтопления. Проведена оценка адекватности предложенной математической модели по фактическим данным мониторинга уровня грунтовых вод. Оценка адекватности проводилась на двух различных по ландшафтными условиями участках. Первый участок преимущественно расположен посреди частного сектора и имеет свободную от покрытий поверхность. Вторым участком практически полностью покрыт искусственными покрытиями. Результаты расчетов на модели определили тесную взаимосвязь между расчетными и фактическими значениями мониторинга уровней подземных вод. Это свидетельствует об адекватности созданной математической модели реальным физическим условиям.

*Ключевые слова:* дополнительное питание, уровень грунтовых вод, эвапотранспирация, подтопление, математическое моделирование изменения уровня грунтовых вод.

O.M. SIERIKOVA

National University of Civil Defence of Ukraine

O.O. STRELNIKOVA

A.M. Pidhorny Institute for Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

## **EVAPOTRANSPIRATION FACTOR MATHEMATICAL MODELING IN GROUNDWATER LEVEL CHANGING PROCESS OF URBAN TERRITORIES**

*The mathematical modeling of groundwater level changing with influence of artificial surface covers and evapotranspiration factor has been developed in the paper. Objective of research is to improve the forecasts of groundwater level changing for environmental safety of urban areas flooded by groundwater. The prediction of maximum groundwater level altitude for the Kharkiv city, without taking into account the evapotranspiration effect on the 50 years perspective, indicates that for the 1<sup>st</sup> year the level rise will be 0,03 m, and for the 50<sup>th</sup> year near 1,5 m. In order to optimize groundwater balance using the proposed mathematical model for the ensuring ecological safety of urban flooded territories the*

<https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.6>

*expense and profitable balance of groundwater parts have been provided. Balancing occurs by the additional groundwater replenishment reducing in 2,4 times, that means to reduce additional groundwater replenishment an average on 240,000 m<sup>3</sup>/day, and increase the groundwater extraction in 15 times, that corresponds an average 300,000 m<sup>3</sup>/day. Also, the forecast of groundwater level changing included evapotranspiration effect for the 50 years future has been provided in the paper. Under artificial covers for the 1<sup>st</sup> year, there will be 0,05 m of the level rising, and for the 50<sup>th</sup> year it will be 2,56 m. On the territory, free of artificial covers, groundwater level will be stabilized by the evapotranspiration action. Thus, the proliferation of artificial surfaces in the city will contribute reducing the evapotranspiration effect and groundwater level sustained increase and flood development. Adequacy evaluation of proposed mathematical model on the actual groundwater level monitoring data has been realized. The adequacy evaluation is carried out on two different landscaped areas. The first section is mainly located in the middle of the private sector, and has a free surface. The second section is practically completely covered with artificial covers. The calculation results on the model have determined the good correlation between the calculated and actual monitoring values of groundwater levels. This indicates the adequacy of proposed mathematical model to real physical conditions.*

*Keywords: additional groundwater replenishment, groundwater level, evapotranspiration, flooding, mathematical modeling of groundwater level changing.*

### **Постановка проблеми**

Для значної кількості міст України характерне систематичне підвищення середнього рівня ґрунтових вод (РГВ) на забудованих територіях та розширення ділянок підтоплення. За 2011-2014 рр. площа підтоплення території України становила 7,9 млн. га, а кількість затоплених населених пунктів становила 4702. Більше того, в 2018 році площа підтоплення становила 8,9 млн. га, а кількість затоплених поселень становила 4747. Цей список починається з великих міст України [1].

Підтоплення призводить до руйнування матеріалів підземних комунікацій, забруднення усього підземного простору міст, зокрема верхніх горизонтів підземних вод, виникнення болотистих ділянок і затоплення підземних приміщень у житлових будинках. Такі процеси провокують розвиток цілого ряду екологічно небезпечних біологічних та фізико-хімічних явищ: активного розмноження кровососних комах, появи аскоміцетів, утворення отруйних випарів у повітрі, що шкідливо позначається на здоров'ї населення і спричиняє значні матеріальні збитки. Забезпечення екологічної безпеки територій, що зазнають підтоплення, шляхом попередження розвитку та ліквідації негативних наслідків цього процесу, є важливим завданням підтримання сталого розвитку міст.

На теперішній час залишаються актуальними завдання комплексної оцінки техногенного впливу великих міст на РГВ та прогнозування його зміни, враховуючи натурні дослідження та розроблення математичних моделей для уточненої оцінки підвищення рівня екологічної безпеки урбанізованих територій, що зазнають підтоплення.

Аналіз наукових досліджень показав, що у великих містах України насамперед відсутня необхідна моніторингова система контролю за режимом ґрунтових вод, що спричинено економічними труднощами. Тому оцінка та прогнозування розвитку процесу підтоплення останніх років на цих територіях значно ускладнюється. Методи та методики прогнозу підтоплення міських територій потребують розробки моделей, що враховують такі комплексні техногенні фактори, як штучні покриття, що зменшують транспірацію через рослини, випаровування з ґрунтових вод та зміну водного балансу підземних вод під впливом додаткового живлення і водовідбору з

грунтових вод. Таким чином, дослідження процесів та чинників зміни РГВ під час прогнозування максимального їх підняття, що дозволить кількісно оцінити ризик підтоплення, є актуальною науково-прикладною задачею у розрізі екологічної безпеки великих міст [1].

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

В роботах [2-4] надані загальні концепції антропогенного впливу на підземну гідросферу забудованих територій та методи боротьби з підтопленням.

Фактори, що впливають на розвиток підтоплення міст, були описані в роботах Яковлева Є.О., Щербака О.В., Ксенофонтowa Б.С., Таранова Р.А. та інш. [2, 4].

Яценко К.В., Алхаттер С., Сологаєв В.І., Парфентьев О.А. та інш. [3, 5] представили у дослідженнях методи прогнозування, моніторингу та розрахунку змін рівня ґрунтових вод.

Відомі вчені та фахівці, включаючи Яковлева Є.О. [4], Сологаєва В.І. [5], Чебанова О.Ю. [6] та інші розглядали динаміку рівня ґрунтових вод та розвиток процесу підтоплення міських та промислових територій.

Підтоплення та управління рівнем ґрунтових вод, управління поверхневим стоком висвітлено в роботах Jha A. K., Bloch R., Lamond J. [7], Bob M., Rahman N., Elamin A., Taher S. [8], Jiang Y., Zevenbergen C., Ma Y. [9] and others [10].

Відомі вчені та фахівці, зокрема Абрамов С.К., Дзекцер Ю.С. [11], Чебанов О.Ю. [12], Дегтярьов Б.М., Стрижельчик Г.Г. [13], Теліма С.В. [14], Яцик А.В. [15], Муфтахов А.Г. [16] та інші вивчали методи управління РГВ та боротьби з підтопленням міських та промислових територій. В даний час задачі інтегрованої оцінки техногенного впливу великих міст України на рівень ґрунтових вод та прогнозування його змін з урахуванням розробки поглиблених досліджень та математичних моделей для підвищення екологічної безпеки міських територій із загрозою підтоплення залишаються актуальними [1].

### **Мета дослідження**

Мета дослідження – розроблення математичної моделі для уточненого прогнозу зміни рівня ґрунтових вод для підвищення екологічної безпеки міських територій, підтоплених ґрунтовими водами.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

На прикладі м. Харкова для прогнозування рівневого режиму ґрунтових вод при зміні водогосподарських умов, розроблено математичну модель, що враховує істотні статті балансу: інфільтрацію атмосферних вод, додаткове живлення в ґрунтові води, транспірацію, випаровування, евапотранспірацію і водовідбір з підземних вод. На основі рівняння Муфтахова А.Ж. побудовано математичну модель, яка дозволила отримати розв'язок сформульованої задачі в замкнутому аналітичному вигляді (у вигляді рядів). Це дало можливість провести візуалізацію результатів і підтвердити попередньо отримані автором дані [17, 18] про вплив додаткового живлення на рівень ґрунтових вод з використанням традиційного інженерного підходу.

З метою створення математичної моделі обрано диференціальні рівняння для опису зміни РГВ та відповідні граничні умови.

При цьому прийняті такі припущення:

- зміна РГВ має усталений характер, про що свідчать дані багаторічних досліджень Геологічної партії в 3-х режимних водопунктах м. Харків;
- розглядаються ділянки з однорідними гідрогеологічними умовами вздовж одного з напрямків, що дозволяє використовувати рівняння плоскої фільтрації.

Для моделювання розглянуто рівняння фільтраційного напору у випадку плоскої фільтрації, яке може бути базовим для створення математичної моделі опису змін РГВ, якою можна врахувати фактори штучних покриттів та евапотранспірації:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \gamma_i^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

де  $h$  – рівень ґрунтових вод, м;  $x, y$  – координати, показані на рис. 1;  $\gamma$  – коефіцієнт анізотропії.

На території багатьох міст України значну площу займають штучні дорожні покриття і будівлі, що перешкоджають природним процесам інфільтрації атмосферних опадів, випаровування та транспірації. Тому при моделюванні зміни рівня ґрунтових вод враховано існування таких ділянок території, що частково покриті штучними покриттями, де вплив природних і техногенних факторів буде відбуватися лише на незабудованій поверхні цієї ділянки (рис. 1).

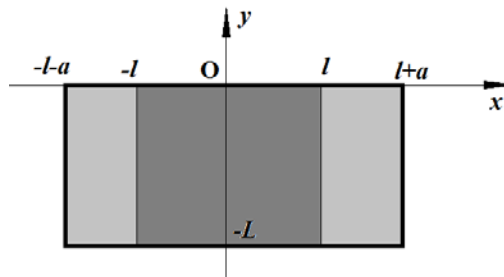


Рис. 1. Схема розрахункової області для визначення РГВ.

Припустимо, що на ділянках  $[-l-a; -l]$  та  $[l; l+a]$  відбувається вплив природних і техногенних факторів на зміну рівня ґрунтових вод; в той час як на ділянках  $[-l; 0]$  та  $[0; l]$  впливу на рівень ґрунтових вод не відбувається завдяки штучним покриттям (рис. 1). Тоді, враховуючи, що зовнішня нормаль на відрізку  $[-l; l]$  при  $y = -L$  співпадає з протилежним напрямком осі  $Oy$ , маємо таку граничну умову, що характеризує наявність штучних покриттів:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{-l \leq x \leq l, y = -L} = 0.$$

На ділянках  $[-l-a; -l]$  та  $[l; l+a]$  відбувається інфільтрація, водовідбір, транспірація і випаровування, тому маємо

$$-\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{l \leq x \leq l+a, y = -L} = f_1 + s_1 - g_1 - d_1 - k_1,$$

де  $f_1$  – додаткове живлення ґрунтових вод (прибуткова частина балансу ґрунтових вод);  $s_1$  – кількість опадів, яка інфільтрується в ґрунтові води (прибуткова частина балансу ґрунтових вод);  $g_1$  – інтенсивність транспірації (видаткова частина балансу ґрунтових вод);  $d_1$  – інтенсивність випаровування (видаткова частина балансу ґрунтових вод);  $k_1$  – водовідбір з ґрунтових вод (видаткова частина балансу ґрунтових вод).

Аналогічну умову ставимо на ділянці  $[-l-a; -l]$  при  $y = -L$ , позначаючи відповідні параметри водного балансу з індексом 2. В подальшому використовуємо симетричну модель, тому вважаємо, що

$$f_1 = f_2; s_1 = s_2; g_1 = g_2; d_1 = d_2; k_1 = k_2.$$

Отримаємо

$$-\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{l \leq x \leq -l-a, y = -L} = f_2 + s_2 - g_2 - d_2 - k_2.$$

Оскільки зміна рівнів ґрунтових вод та їх розповсюдження є локальними, і моделювання проводиться для обмежених ділянок міської території (промислових об'єктів, будівель і т. ін.) з однорідними гідрогеологічними умовами, можна прийняти, що боковий приплив і відтік рівні між собою, тому

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=l+a} = e_1(y) \\ \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=-l-a} = e_1(y) \end{cases}, \quad e_1(y) = \frac{2}{1 + (y/y_{50})^\tau}, \quad (2)$$

де  $\tau$  – відносна мінливість потенційної транспірації;  $y_{50}$  – параметр, що характеризує висоту капілярного всмоктування води;  $y$  – глибина, де відбувається тиск вологи, який всмоктує. У розрахунках прийнято значення  $\tau = 2,2$ .

У подальших розрахунках прийнято, що  $y_{50} = 3$ , тобто вважалось, що  $L = 6$  м. Якщо евапотранспірація не враховувалась, то значення  $L$  обговорюється окремо. Початковий рівень приймається за точку відліку,  $h=0$ :

$$h \Big|_{y=0} = 0.$$

Таким чином, сформульовано таку крайову задачу для визначення невідомої функції  $h(x, y)$ . Треба знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \gamma_i^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

при таких крайових умовах:

$$\frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{-l \leq x \leq l, y = -L} = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{l \leq x \leq l+a, y = -L} = f_1 + s_1 - g_1 - d_1 - k_1, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{l \leq x \leq -l-a, y = -L} = f_2 + s_2 - g_2 - d_2 - k_2, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=l+a} = e_1(y), \\ \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=-l-a} = e_1(y), \end{cases} \quad (6)$$

де функція  $e_1(y) = \frac{2}{1+(y/y_{50})^r}$  визначена в (2).

Зауважимо, що неможливо побудувати одну систему базисних функцій для цієї крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами на трьох межах. Тому в роботі запропоновано шукати невідому функцію  $h(x, y)$  у вигляді суми двох доданків:

$$h(x, y) = h(x, y)_1 + h_2(x, y).$$

Кожній функції  $h_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$  відповідає своя крайова задача, при чому в кожній з цих задач наявні однорідні граничні умови, що дає змогу побудувати системи незалежних базисних функцій. Такий засіб не лише дозволяє побудувати розв'язок сформульованої крайової задачі (1), (3)–(6), що враховує наявність штучних покриттів, інфільтрацію, випаровування та транспірацію, а також ефект евапотранспірації, але й дослідити окремо вплив штучних покриттів та ефект евапотранспірації. Так, крайова задача для функції  $h_1(x, y)$  описує наявність штучних покриттів, інфільтрацію, випаровування та транспірацію, але не враховує ефект евапотранспірації в залежності від глибини. Цю задачу сформулюємо таким чином:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} = 0, \\ h_1 \Big|_{y=0} = 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} \Big|_{-l \leq x \leq l, y = -L} = 0, \\ -\frac{\partial h_1}{\partial y} \Big|_{-l-a \leq x < -l, y = -L} = f_1 + s_1 - k_1, \\ -\frac{\partial h_1}{\partial y} \Big|_{l < x \leq l+a, y = -L} = f_1 + s_1 - k_1, \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} \Big|_{x=\pm(l+a)} = 0, \end{cases} \quad (7)$$



де  $f_1$  – додаткове живлення ґрунтових вод (прибуткова частина балансу ґрунтових вод);  $s_1$  – кількість опадів, яка інфільтрується в ґрунтові води (прибуткова частина балансу ґрунтових вод);  $k_1$  – водовідбір з ґрунтових вод (видаткова частина балансу ґрунтових вод).

Величина початкового РГВ є довільною.

Отримано значення зміни РГВ при незмінній евапотранспірації, що візуалізовано розрахунками для обмежених ділянок території м. Харків на рис. 2, де зображена функція  $h_1(x,y)$ . Отримані також значення зміни РГВ при змінній евапотранспірації, які зображені на рис. 3.

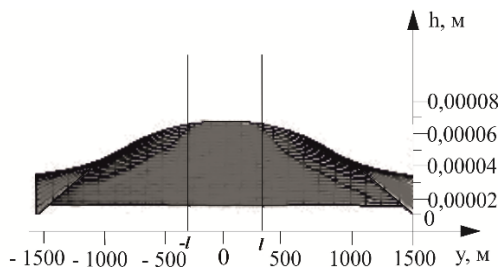


Рис. 2. Середньодобова зміна РГВ за профілем моделі, без врахування дії евапотранспірації.

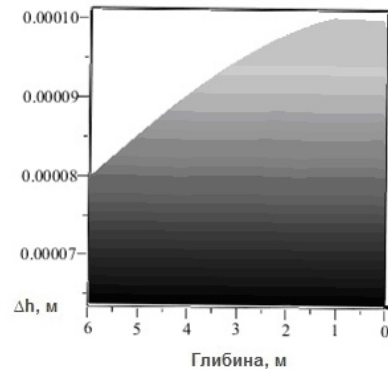


Рис. 3. Зміна РГВ при змінній евапотранспірації.

Розроблений прогноз максимально високих РГВ (рис. 2) міських територій на прикладі м. Харків без врахування дії евапотранспірації на перспективу 50 років вказує, що на 1-й рік підйом рівня складе 0,03 м, а на 50-й рік – вже 1,5 м. З метою оптимізації водного балансу підземних вод для забезпечення екологічної безпеки підтоплених територій великого міста, було проведено балансування видаткових та прибуткових статей. Балансування відбувається при зниженні додаткового живлення в 2,4 рази, тобто додаткове живлення необхідно зменшити в середньому на 240 000 м<sup>3</sup>/добу, а також при збільшенні водовідбору з першого від поверхні водоносного горизонту в середньому в 15 разів, тобто при збільшенні водовідбору в межах м. Харків в середньому на 300 000 м<sup>3</sup>/добу. На збільшення водовідбору необхідно витратити 24 000 кВт·ч, що відповідає 48 тис. грн/доб. Оскільки якість ґрунтових вод у м. Харків невисока, розрахований об'єм води може бути використаний для технічних цілей або обводнення річок.

Також зроблено прогноз зміни РГВ із урахуванням дії евапотранспірації (рис. 3) на перспективу 50 років. Під штучними покриттями на 1-й рік підйом рівня складе 0,05 м, а на 50-й рік – вже 2,56 м. На території, вільній від штучних покриттів РГВ буде стабілізований дією евапотранспірації. Таким чином, поширення площі штучних покриттів по території міста сприятиме зниженню дії евапотранспірації і стійкому підвищенню РГВ та розвитку підтоплення [1].

### Оцінка адекватності моделі

Оцінка адекватності моделі проводилась на двох різних за ландшафтними умовами ділянках. Перша ділянка переважно розташована посеред приватного сектору, та має вільну від покриттів поверхню. Друга ділянка практично повністю вкрита штучними покриттями.

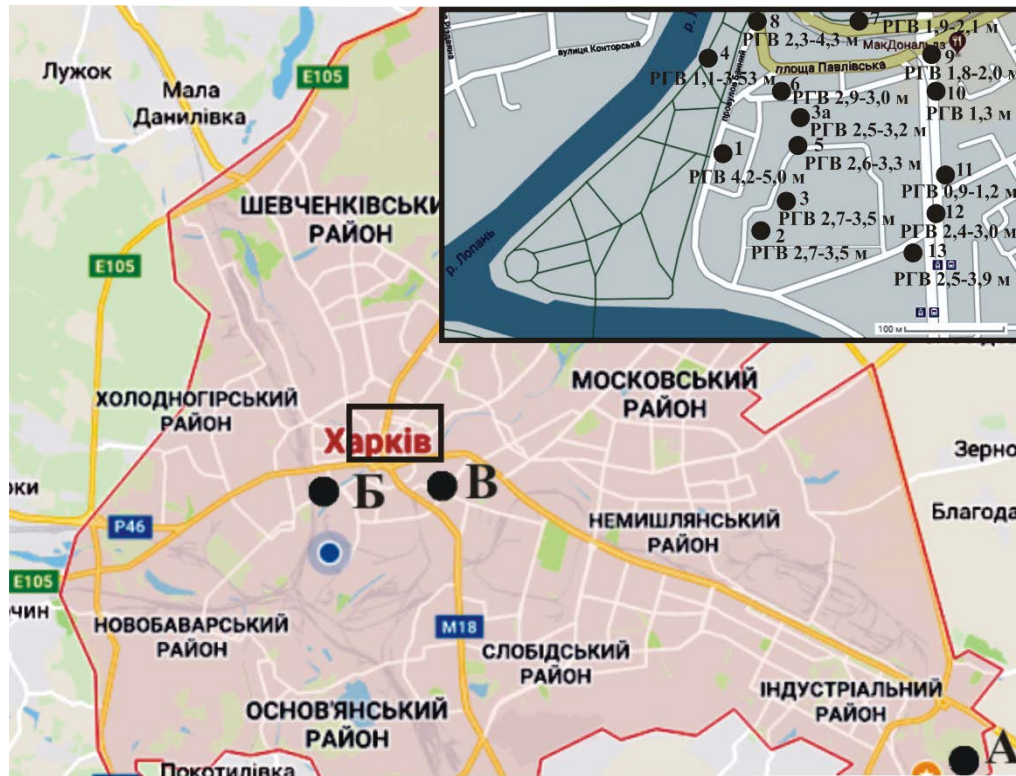


Рис. 4. Пункти спостереження за РГВ за період з 1965 по 2017 рр. (у прямокутнику винесено дані спостережень за РГВ УкрНДПНТІЗ).

Розташування постів спостережень та точки контролю за РГВ, що розглядаються в роботі, надано на рис. 4. Точки А, В, В – режимні водопункти державної спостережної мережі у м. Харків, і спеціальні спостережні пункти Українського головного виробничого НДІ інженерно-технічних та екологічних вишукувань (УкрНДПНТІЗ) для моніторингу зміни РГВ, в яких проводились вимірювання [19, 20].

Таблиця 1  
Порівняння моніторингових даних з прогнозованими щодо зміни РГВ

№ точки	Фактична глибина РГВ	Абс. відм. устя, м	Рік дослідження, р.	Кількість років дослідження	Фактична зміна РГВ, м	Зміна РГВ на моделі без врахування дії евапотранспірації, м	Зміна РГВ на моделі із врахуванням дії евапотранспірації, м
2	2,7-3,5	103,08	1978	38	1,4-2,2	2,08	1,25
10	1,3	103,4	2016				
1	4,2-5,0	99,7	1965	36	1,6-1,7	1,97	1,45
5	2,6-3,3	100,05	2001				
8	2,3-4,3	100,0-102,32	1993	8	-0,6-1,3*	0,44	-0,27-0,23
6	2,9-3,0	101,4	2001				
А	5,10		2004	13	-0,3*	Неможливо врахувати	-0,40*
	5,40		2017				
В	2,37		2004	13	-0,45*	Неможливо врахувати	-0,45*
	2,82		2017				

\* – РГВ знизився.

Точки *A*, *B*, *B* на ділянці, що розглядається, знаходяться посеред приватного сектору, де більша частина території незабудована та озеленена, що сприяє інтенсифікації процесу евапотранспірації. Зміна РГВ за багаторічний період в свердловинах на ТОВ «САН ІНБЕВ Україна» (точка *A*), на вул. Конторській (раніше Червоножовтнева, точка *B*) та на вул. О. Невського (точка *B*) наведена на рис. 4.

Порівняння моніторингових даних з прогнозованими щодо зміни РГВ наведені в табл. 1.

Порівняння результатів моделювання та даних натурних спостережень вказує на адекватність створеної моделі фактичним даним, що надані у таблиці 1. Врахування дії евапотранспірації дозволяє робити більш точний прогноз зміни РГВ. Отже, дія евапотранспірації стабілізує та знижує РГВ (точки *A*, *B*). А на територіях, вкритих штучними покриттями (точки 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10) дія евапотранспірації неможлива, тому відбувається підйом РГВ.

### **Висновки**

Вперше розроблено математичну модель зміни рівня ґрунтових вод, що водночас враховує вплив штучних покриттів та евапотранспірацію. На прикладі міста Харкова розроблено прогнозний варіант максимального підвищення рівня ґрунтових вод в умовах природно-техногенних геосистем великих міст. Запропоновано заходи щодо оптимізації балансу ґрунтових вод завдяки врахуванню впливу техногенних факторів на ґрунтові води.

Проведено оцінку адекватності запропонованої математичної моделі за фактичними даними моніторингу рівня ґрунтових вод. Результати розрахунків на моделі визначили добре узгодження між розрахунковими та фактичними значеннями моніторингу рівнів підземних вод. Це свідчить про адекватність створеної математичної моделі реальним природним умовам.

### **Список використаної літератури**

1. Серікова О. М. Прогнозування і управління рівнем ґрунтових вод для підвищення екологічної безпеки забудованих територій України: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 21.06.01. Суми, 2019. 24 с.
2. Ксенофонтов Б. С., Таранов Р. А., Козодаев А. С., Воропаева А.А., Виноградов М. С., Сенік Е. В. Проблемы подтопления и затопления селитебных территорий: возможные пути решения. *Безопасность жизнедеятельности*. 2015. № 7 (175). С. 23–27.
3. Ященко К. В., Алхаттер С. Регулирование уровня грунтовых вод для охраны земель от подтопления и иссушения. *Научное обеспечение агропромышленного комплекса: материалы IX Всероссийской конференции молодых ученых (Россия, г. Краснодар, 24-26 ноября 2015 г.)*. Краснодар, 2015. С. 908–909.
4. Щербак О. В., Яковлев Є. О., Долін В. В. Моделювання гідрогеофільтраційного поля ґрунтових вод у зоні впливу металургійного виробництва. *Мінеральні ресурси України*. 2018. № 3. С. 19–25.
5. Сологаєв В. И., Парфентьев О. А. О мониторинге подтопления территорий городов и сельских поселений на примере пятиэтажного кирпичного здания. *Вестник Омского государственного аграрного университета*. 2016. № 2 (22). С. 127–133.
6. Chebanov O., Zadniprovska A. Zoning groundwater flooding risks in the cities and urban agglomeration areas of Ukraine. *Risk in Water Resources Management. Proceedings of the Symposium H03 held during IUGG 2011 (Australia, Melbourne, July 2011)*. Melbourne, 2011. P. 71–76.

7. Jha A. K., Bloch R., Lamond J. Cities and flooding: a guide to integrated urban flood risk management for the 21st century. The World Bank. Washinton DC. 2012. 638 p.
8. Bob M., Rahman N., Elamin A., Taher S. Rising Groundwater Levels Problem in Urban Areas: A Case Study from the Central Area of Madinah City. Saudi Arabia. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2016. Vol. 41, Issue 4. P. 1461–1472.
9. Jiang Y., Zevenbergen C., Ma Y. Urban pluvial flooding and stormwater management: A contemporary review of China's challenges and "sponge cities" strategy. *Environmental Science and Policy*. 2018. Vol. 80. P. 132–143.
10. Environment Agency, Management of the London Basin Chalk Aquifer. Status Report 2018 of Environment Agency. 2018. 38 p. URL: [https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment\\_data/file/735451/2018\\_Final.pdf](https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/735451/2018_Final.pdf)
11. Абрамов С. К., Дзекцер Е. С., Гавшина З. П. Факторы подтопления территорий промышленных предприятий и меры борьбы с ними. *Промышленное строительство*. 1971. № 1. С. 21–32.
12. Чебанов А. Ю. Поиск эффективных решений проблемы подтопления городов. *Коммунальное хозяйство городов*. 2002. № 47. С. 133–138.
13. Стрижельчик Г. Г. Концептуальные вопросы борьбы с подтоплением городских территорий. *Екологія довкілля та безпека життєдіяльності*. 2003. № 6. С. 24–27.
14. Телима С. В. Прогнозування процесів підтоплення міських територій та промислово-міських агломерацій в сучасних умовах. Методи і методика досліджень. *Містобудування та терит. планує*. 2005. Вип. 22.. С. 367–378.
15. Яцик А. В. Підтоплення земель в Україні. *Вопросы химии и химической технологии*. 2002. № 5. С. 292–295.
16. Муфтахов А. Ж. Гидродинамические основы прогноза подтопления промплощадок и фильтрационные расчеты защитного дренажа в сложных гидрогеологических условиях: автореф. дис. ... д-ра техн. наук : Москва, 1975. 44 с.
17. Serikova E., Strelnikova E., Yakovlev V. Mathematical Model of Dangerous Changing the Groundwater Level in Ukrainian Industrial Cities. *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*. USA. 2015. Vol. 1, №. 2. P. 86–90.
18. Серикова Е. Н., Стрельникова Е. А., Яковлев В. В. Математическое моделирование изменения уровней грунтовых вод в городах с учетом ведущих режимобразующих факторов. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2014. № 4 (51). С. 182–191.
19. Серикова Е. Н., Стрельникова Е. А. Изменение уровня грунтовых вод в городской экосистеме г. Харькова. *Вісник НТУ«ХПИ»*. 2016. № 4 (1176). С.132–137.
20. Серикова Е. Н., Стрельникова Е. А., Яковлев В. В., Анищенко Л. Я., Писня Л. А. Оценка адекватности предлагаемой математической модели прогноза на фактических данных мониторинга уровня грунтовых вод в центральной части г. Харькова. *ScienceRise*. 2017. №11(40). С. 43–47. DOI: 10.15587/2313-8416.2017.116369

### References

1. Sierikova, O. M. (2019). Prohnozuvannya i upravlinnia rivnem gruntovykh vod dlia pidvyshchennia ekolohichnoi bezpeky zabudovanykh terytorii Ukrainy: avtoref. dys. ... kand. tekhn. nauk : 21.06.01. Sumy, 2019. 24 s.
2. Ksenofontov, B. S., Taranov, R. A., Kozodaev, A. S., Voropaeva, A. A., Vinogradov, M. S., & Senik, E. V. (2015). Problemyi podtopleniya i zatopleniya selitebnyih territoriy: vozmozhnyie puti resheniya. *Bezopasnost zhiznedeyatelnosti*. 7 (175), 23–27.
3. Yaschenko, K. V., & Alhatter, S. (2015). Regulirovanie urovnya gruntovyih vod dlya ohranyi zemel ot podtopleniya i issusheniya. Proceedings of the *Nauchnoe*

- obespechenie agropromyshlennogo kompleksa: IX Vserossiyskoy konferentsii molodykh uchenykh.* (Rossiya, g. Krasnodar, 24-26 noyabrya 2015). Krasnodar, pp. 908–909.
4. Shcherbak, O. V., Yakovliev, Ye. O., & Dolin, V. V. (2018). Modeliuvannia hidroheofiltratsiinoho polia gruntovykh vod u zoni vplyvu metalurhiinoho vyrobnytstva. *Mineralni resursy Ukrainy*. **3**, 19–25.
  5. Sologaeв, V. I., & Parfentev, O. A. (2016). O monitoringe podtopleniya territoriy gorodov i selskih poseleniy na primere pyatietazhnogo kirpichnogo zdaniya. *Vestnik Omskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*. **2** (22), 127–133.
  6. Chebanov, O., & Zadniprovska, A. Zoning groundwater flooding risks in the cities and urban agglomeration areas of Ukraine. Risk in Water Resources Management. Proceedings of the *Symposium H03 held during IUGG 2011* (Australia, Melbourne, July 2011). Melbourne, pp. 71–76.
  7. Jha, A. K., Bloch, R., & Lamond, J. (2012). Cities and flooding: a guide to integrated urban flood risk management for the 21st century. The World Bank. Washinton DC.
  8. Bob, M., Rahman, N., Elamin, A., & Taher, S. (2016). Rising Groundwater Levels Problem in Urban Areas: A Case Study from the Central Area of Madinah City. Saudi Arabia. *Arabian Journal for Science and Engineering*. **41**, 4, 1461–1472.
  9. Jiang, Y., Zevenbergen, C., & Ma, Y. (2018). Urban pluvial flooding and stormwater management: A contemporary review of China's challenges and 'sponge cities' strategy. *Environmental Science and Policy*. **80**, 132–143.
  10. Environment Agency, Management of the London Basin Chalk Aquifer. Status Report 2018 of Environment Agency. 2018. 38 p. Retrieved from [https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment\\_data/file/735451/2018\\_Final.pdf](https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/735451/2018_Final.pdf)
  11. Abramov, S. K., Dzekter, E. S., & Gavshina, Z. P. (1971). Faktoryi podtopleniya territoriy promyshlennykh predpriyatiy i meryi borbyi s nimi. *Promyshlennoe stroitelstvo*. **1**, 21–32.
  12. Chebanov, A. Yu. (2002). Poisk effektivnykh resheniy problemy podtopleniya gorodov. *Kommunalnoe hozyaystvo gorodov*. **47**, 133–138.
  13. Strizhelchik, G. G. (2003). Kontseptualnyie voprosy borbyi s podtopleniem gorodskih territoriy. *Ekolohiia dovkillia ta bezpeka zhyttiediialnosti*. **6**, 24–27.
  14. Telyma, S. V. (2005). Prohnozuvannia protsesiv pidtoplennia miskykh terytorii ta promyslovo-miskykh ahlomeratsii v suchasnykh umovakh. *Metody i metodyka doslidzhen. Mistobuduvannia ta teryt. planuv.* **22**, 367–378.
  15. Iatsyk, A. V. (2002). Pidtoplennia zemel v Ukraini. *Voprosy himii i himicheskoy tehnologii*. **5**, 292–295.
  16. Muftahov, A. Zh. (1975). Hidrodinamicheskie osnovy prognoza podtopleniya promploschadok i filtratsionnyie raschetyi zaschitnogo drenazha v slozhnykh gidrogeologicheskikh usloviyah: avtoref. dis. ... d-ra tehn. nauk : Moskva, 1975.
  17. Serikova, E., Strelnikova, E., & Yakovlev, V. (2015). Mathematical Model of Dangerous Changing the Groundwater Level in Ukrainian Industrial Cities. *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*. USA. **1**, 2, 86–90.
  18. Serikova, E. N., Strelnikova, E. A., & Yakovlev, V. V. (2014). Matematycheskoe modelyrovanye yzmeneniya urovnei hruntovykh vod v horodakh s uchetom vedushchykh rezhymoobrazuiushchykh faktorov. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **4** (51), 182–191.
  19. Serikova, E. N., & Strelnikova, E. A. (2016). Izmenenie urovnya gruntovykh vod v gorodskoy ekosisteme g. Harkova. *Visnik NTU«HPI»*. **4** (1176), 132–137.
  20. Serikova, E. N., Strelnikova, E. A., Yakovlev, V. V., Anischenko, L. Ya., & Pisnya, L. A. (2017). Otsenka adekvatnosti predlagaemoy matematicheskoy modeli prognoza na fakticheskikh daniykh monitoringa urovnya gruntovykh vod v tsentralnoy chasti g. Harkova. *ScienceRise*. **11** (40), 43–47. DOI: 10.15587/2313-8416.2017.116369

УДК 681.3.06.14

В.І. СВИРИДОВ

Херсонська філія Національного університету кораблебудування

О.П. ФАЛЬЧЕНКО

Херсонський морехідний коледж рибної промисловості

### **ДІАГНОСТУВАННЯ СУДНОВОГО УСТАТКУВАННЯ ПРИ ВИКОРИСТАННІ РІЗНИХ МОДЕЛЕЙ ВІБРАЦІЇ**

*Розглянуті моделі діагностики суднового устаткування та доцільність їх використання. Найбільш ефективними методами діагностування судових машин та механізмів є віброакустичні методи, які використовують ту або іншу модель сигналу вібрації. Проаналізовано конкретні моделі вібрації в якості вібродіагностичних моделей. Проведено аналіз властивостей розглянутих моделей випадкових процесів, що характеризують різні процеси в теорії і при проведенні експериментальних досліджень. На підставі експериментальних досліджень знайшли підтвердження різні моделі, які дозволяють розробити і отримати практичні методи діагностування.*

*Ключові слова: моделі вібрації, діагностика, дослідження, обладнання.*

В.И. СВИРИДОВ

Херсонский филиал Национального университета кораблестроения

О.П. ФАЛЬЧЕНКО

Херсонский мореходный колледж рыбной промышленности

### **ДИАГНОСТИРОВАНИЕ СУДОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ВИБРАЦИИ**

*Рассмотрены модели диагностики судового оборудования и целесообразность их использования. Наиболее эффективными методами диагностирования судовых машин и механизмов являются виброакустические методы, которые используют ту или иную модель сигнала вибрации. Проанализированы конкретные модели вибрации в качестве вибродиагностических моделей. Проведен анализ свойств рассматриваемых моделей случайных процессов, характеризующих различные процессы в теории и при проведении экспериментальных исследований. На основании экспериментальных исследований нашли подтверждение разные модели, которые позволяют разработать и получить практические методы диагностирования.*

*Ключевые слова: модели вибрации, диагностика, исследования, оборудование.*

V.I. SVYRYDOV

Kherson Branch of the National University of Shipbuilding

O.P. FALCHENKO

Kherson Naval College of Fisheries

### **DIAGNOSIS OF VESSEL EQUIPMENT WHEN USING VARIOUS MODELS OF VIBRATION**

*Models of the diagnostic equipment of ship equipment are considered, and specific models of vibration of mechanisms are identified and their expediency to use models of vibration diagnostics is revealed. The most effective methods for the diagnosis of ship engines and mechanisms are vibroacoustic methods are the same as the complete model of the vibration signal.*

*Classes of vibroacoustic methods of analysis were analyzed, according to the step in which of the supersonic factors.*

*The properties of the considered models of random processes characterizing various processes in theory and in the course of experimental studies are considered. Dependent harmonic vibrations consider its deterministic parameters, as well as vibrations with multiple frequencies in total with Gaussian noise forming a non-stationary Gaussian process, and simulation stability, which will manifest itself, as in the case of a deterministic process, taking into account time components. Random impulse processes described by a random impulse process model described by Poisson's law, which is a superposition of randomly generated deterministic or independent of others, were analyzed. Complex additive multiplicative processes, which are determined by many sources, where there are various vibrational forces of different nature, different physical nature.*

*In the considered classification of processes according to statistical characteristics and frequency dependence, probabilistic process models are analyzed, which, together with the mathematical definition of the relationship between various elementary processes and probabilistic characteristics of the parameters of elementary processes, forms models of random processes of various classes. An analysis of the properties of the considered models of random processes allows us to compare the above parameters characterizing the different essence of the process and the ongoing experimental studies. Based on the experiments, various models were confirmed, practical diagnostic methods were developed and obtained.*

*Keywords: models of vibration, diagnostics, research, power equipment.*

### **Постановка проблеми**

Перехід суден на обслуговування та ремонт устаткування за технічним станом передбачає наявність діагностичного забезпечення для різних машин і механізмів суден.

Відомо [1], що найбільш ефективними методами діагностування суднових машин і механізмів є віброакустичні методи, які використовують ту або іншу модель сигналу вібрації. Будь-яка модель покликана відображати лише одне або кілька певних властивостей даного явища і завжди містить обмежену інформацію про нього.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Аналіз джерел [1–5] показує, що розрізняють детерміновані і ймовірнісні математичні моделі сигналу вібрації. Більш загальна – ймовірнісна модель, що відображає, як стійкі властивості, так і випадковий характер спостережуваного явища. Виділяються наступні класи явищ, за ступенем вмісту випадкових факторів:

1) повністю випадкові, визначені безліччю однорідних факторів (електронні шуми, броунівський рух, тиск газів – явища, обумовлені дією нескінченної кількості частинок);

2) з переважанням одного або декількох сильних чинників і безліччю слабких однорідних факторів (періодичний сигнал на тлі власних шумів підсилувача і т. п.);

3) описувані квазидетермінованими функціями, тобто регулярними функціями, деякі параметри яких представляються випадковими, якщо вони не впливають на результат або невідомі досліднику.

У практиці статистичних вимірювань використання статистичних моделей грає просту роль: на підставі наявного досвіду вибирається одна-дві конкретні (апріорні) моделі дослідження, звідки йде перелік статистичних показників, параметрів, які необхідно виміряти. В результаті вимірювань підтверджується вибір однієї з апріорних моделей, яка тепер стає апостеріорною моделлю процесу для даної постановки завдання.

### Мета дослідження

Проаналізувати конкретні моделі вібрацій, характерних для суднових машин і механізмів і зробити висновок про їх доцільність використання в якості вібродіагностичних моделей.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Однією з найпростіших моделей, яка описує вид вібраційного процесу, що протікає в насосному агрегаті, який часто зустрічається, є сума гауссівського шуму (вібрації)  $v(t)$  і гармонічних складових:

$$\zeta(t) = v(t) + \sum_{k=1}^n a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1)$$

Властивості цього процесу і його клас визначаються властивостями параметрів  $a_k, \omega_k, \varphi_k$ . Проаналізуємо окремі випадки розглянутої моделі.

**Незалежні гармонічні коливання з випадковими, рівно розподіленими фазами**  $W(\varphi_k) = 1/2\pi, \pi < \varphi < \pi$ . Сума синусоїд з гауссівським шумом з нульовим математичним сподіванням  $\chi_{1v} = 0$  та дисперсією  $\chi_{2v} = G_v^2$  визначається характеристичною функцією:

$$\theta(u) = e^{-\frac{\sigma_v^2 u^2}{2}} \prod_{k=1}^n J_0(a_k u), \quad (2)$$

де  $J_0(z)$  – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \sigma_v^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2; \mu_4 = 3\mu_2^2 - \frac{3}{8} \sum_{k=1}^n a_k^4; \\ \mu_6 &= 15\mu_2^3 - \frac{45}{8} \mu_2 \sum_{k=1}^n a_k^4 + \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n a_k^6; \quad \text{і т.п.} \end{aligned}$$

Щільність ймовірності  $W(x)$ , яка може бути знайдена як перетворення Фур'є від  $\theta(u)$ , в разі переважання однієї з складових набуває двовершинного характеру. В силу симетрії розподілу осей непарні моменти дорівнюють нулю, а парні моменти визначаються виразами: за знайденими  $\mu_i$  вираховуються кумулянти розподілу:

$$\chi_2 = \mu_2 = \chi_{2v} + \sum_{k=1}^n \chi_{2k}; \chi_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2.$$

Кореляційна функція будь-якого порядку процесу в цілому в силу незалежності адитивних складових визначається сумою кореляційних функцій доданків, тією ж властивістю володіє і спектр процесу:

$$G_\xi(\omega) = G_v(\omega) + \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{2} \delta(\omega - \omega_k),$$

де шумова складова має неперервний спектр, а гармонічні коливання – дискретні.



Розглянемо властивості характеристик, одержаних при процесі фільтрації. У широкій смузі частот при великому числі гармонічних складових (навіть при  $a_k / \sigma_v > 1$ ) властивості процесу не сильно відрізняються від гауссівського,  $\gamma_4 \approx -3/2n$ , де  $n$  – число гармонічних складових в смузі фільтра. Звуження смуги частот призводить до зменшення числа  $n$  гармонічних складових і, внаслідок цього, до збільшення абсолютної величини коефіцієнта ексцесу в смузі частот  $\Delta f$ . При дуже вузькій смузі фільтра маємо  $\gamma_4(\Delta f) \approx -3/2$ , на частоті  $\omega_k$  для кожної гармонічної складової  $\gamma_4(\Delta f) = 0$ .

**Незалежні гармонічні коливання з детермінованими параметрами  $a_k, \omega_k, \varphi_k$ .** Коливання з некрatними частотами в сумі з гауссівським шумом  $v(t)$  утворюють нестационарний гауссівський процес, причому нестационарність буде проявлятися, як і в випадку детермінованого процесу, у вигляді залежного від часу математичного сподівання, що визначається сумою гармонічних складових  $\sum_{k=1}^n a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$ .

**Функціонально пов'язані гармонічні коливання з кратними частотами в сумі з гауссівським шумом.** Ця модель процесу являє (в довільно обраній смузі частот) суму шуму з кінцевим числом гармонік звукоряду періодичного процесу  $f(t)$ :

$$\zeta(t) = v(t) + f(t) = v(t) + \sum_{k=p}^{p+n} a_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k). \quad (3)$$

Як і в попередніх випадках, властивості цієї моделі процесу визначаються властивостями параметрів гармонічних коливань. При детермінованих  $a_k, \omega_1, \varphi_k$  маємо розглянутий вище випадок нестационарного за математичним сподіванням гауссівського процесу. При випадковому характері початкових фаз в даній моделі доцільно ставити випадкову змінну зсуву  $t_0$  періодичної складової  $f(t, T_1)$  процесу, яка рівномірно розподілена в межах періоду  $T_1 = 2\pi / \omega_1$  коливань  $W(t) = 1/T_1, 0 < t < T_1$ .

В останньому випадку неважко отримати такі характеристики:

$$\mu_1 = 0; \mu_2 = \sigma_v^2 + \sigma_f^2; \chi_2 = \chi_{2v} + \chi_{2f}; \mu_3 = \mu_{3f}; \mu_4 = 3\sigma_v^4 + 6\sigma_v^2\sigma_f^2 + \mu_{4f}; \chi_4 = \chi_{4f},$$

які свідчать про стаціонарність і негауссовість процесу.

Кореляційна функція процесу має два доданки:

$$K_\zeta(\tau) = K_v(\tau) + n \frac{\sin \frac{n\Delta\omega\tau}{2}}{n \sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0\tau.$$

Перший з яких приймає малі значення при  $\tau > \tau_k$ , тому при великих затримках виявляється вид і періодичний характер періодичної складової процесу. Отже, спектральний і кореляційний аналізи дозволяють розділити та виявити відмінність даного процесу від гауссівського шуму.

**Випадкові імпульсні процеси.** Багато акустичних шумів кавітаційного походження описуються моделлю випадкового імпульсного процесу, яка ґрунтується на законі Пуассона. Пуассонівський процес представляє собою суперпозицію

випадково виникаючих незалежно один від одного імпульсів, детермінованих або випадкових за формою  $F(t)$ :

$$p(t) = \sum_i a_i F(t - t_i), \quad (4)$$

для якого ймовірність виникнення  $k$  імпульсів усередині інтервалу часу  $T$  задається розподілом Пуассона:

$$p_k(T) = \frac{(n_0 T)^k}{k!} e^{-n_0 T}, \quad (5)$$

де  $n_0$  – середнє число імпульсів, що виникають в одиницю часу.

Кумулянтні функції стаціонарного пуассонівського процесу визначаємо за формулою:

$$\chi_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = n_0 \langle a^s \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) F(u - \tau_2) \dots F(u - \tau_s) du.$$

Енергетичний спектр пуассонівського процесу визначається виразом [4]:

$$G(\omega) = \frac{2}{\mu_c} \langle g(\omega) \rangle^2 [A^2 + \sigma^2 + 2(\sigma^2 R_p + A^2) f_\mu(\omega)], \quad (6)$$

де  $\langle g(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F(t) \rangle e^{-i\omega t} dt$  – спектр елементарного імпульсу;

$\mu_c = 1/n_0$  – середній інтервал надходження імпульсів;

$A, \sigma$  – середня амплітуда і дисперсія амплітуд імпульсів;

$R_p$  – коефіцієнт кореляції амплітуд імпульсів;

$f_\mu = \text{Re}\{[\theta_{1\mu}(\omega) / [1 - \theta_{1\mu}(\omega)]]\}$ ;

$\theta_{1\mu}(\omega)$  – характеристична функція інтервалів  $\mu$  проходження імпульсів.

Іншою поширеною моделлю імпульсного сигнального процесу є телеграфний сигнал – процес, який може набувати лише двох значень  $x_1$  та  $x_2$  в моменти часу  $t_k$ , які визначаються відповідним ймовірнісним законом. Для симетричного телеграфного сигналу при пуассонівському законі розподілу ймовірності зміни знаку сигналу ( $x_1 = h, x_2 = -h$ ) за час  $T$  кореляційна функція є експоненціальною:

$$R(\tau) = h^2 \exp(-2n_0 |\tau|). \quad (7)$$

Для квантового в часі телеграфного сигналу (зміна знака відбувається лише в моменти часу, кратні  $T$ ) кореляційна функція дорівнює

$$R(\tau) = h^2 |1 - \tau/T|. \quad (8)$$

І що саме важливо при будь-якому вигляді кореляційної функції телеграфного сигналу, його кумулянтна функція четвертого порядку завжди дорівнює

$$\chi_4(\tau) = -2R^2(\tau). \quad (9)$$

Спектр телеграфного сигналу при пуассонівському законі ймовірності змін знаку дає:

$$G_{\text{п}}(\omega) = (h^2/\pi) \times (2n_o/(4n_o^2 + \omega^2)), \quad (10)$$

а для телеграфного сигналу з детермінованими тактовими інтервалами має вигляд:

$$G_{\text{д}}(\omega) = (h^2T/2\pi) \times (\Delta T/2)^{-2} \sin^2(\omega T/2). \quad (11)$$

У багатьох випадках кавітаційні шуми носять характер нестационарного потоку імпульсів, коли потік рідини, що набігає на обтічне тіло, не є стаціонарним. В цьому випадку кавітаційний шум, що випромінюється кожної лопаттю, є модульованим. У першому наближенні такий шум описується мультиплікативною моделлю:

$$z_1(t) = [1 + mx(t)] \xi(t).$$

Однак, ця модель не відображає залежності коефіцієнта модуляції  $m$  від середньої частоти  $\omega_{\text{ср}}$  смуги шуму, не відображає вона і наявність частотної модуляції шуму.

Нехай деякий параметр  $\lambda$  потоку імпульсів (4) є модульованим  $\lambda = \lambda_o(1 + mx_t)$ . Визначаємо коефіцієнт модуляції як

$$m_{\lambda} = \Delta\lambda/\lambda,$$

де  $\Delta\lambda$  – амплітуда коливань параметра  $\lambda$  відносно його середнього значення  $\lambda_o$ .

Тоді енергетичний спектр процесу буде змінюватися у часі, тобто також виявиться модульованим  $G = G[\omega, \lambda(t)]$  з коефіцієнтом амплітудної модуляції

$$m_G = \Delta G/G_o = [(\partial G/\partial \lambda)\Delta\lambda]/G_o = [\partial G(\omega, \lambda)] \times m_{\lambda} \lambda_o / (\partial \lambda \times G_o). \quad (12)$$

Коефіцієнт модуляції  $m_{\sigma}$  шуму  $p(t)$  в заданій смузі частот  $\Delta\omega_s = 2\pi\Delta f_s$  визначимо через відносну зміну в часі середнього квадратичного значення  $\sigma_p$  процесу  $p(t)$ , що розглядається в інтервалі часу  $T \ll \tau_x$ :

$$\sigma_p(\omega, \lambda) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) G(\omega, \lambda) d\omega \right]^{1/2} \approx [\Delta f_s G(\omega_{cp}, \lambda)]^{1/2},$$

де  $K(\omega)$  – частотна характеристика смугового фільтра з смугою пропускання  $\Delta f_s$ .

Тоді коефіцієнт модуляції дорівнює

$$m_{\sigma} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_p} = \frac{\partial}{\partial \lambda} [\Delta f_s G(\omega, \lambda)]^{1/2} m_{\lambda} \lambda_o / [\Delta f_s G(\omega, \lambda)]^{1/2}. \quad (13)$$

З виразу (13) випливає, що в загальному випадку  $m_\sigma = 0,5m_G$ . Спектр  $G(\omega, \lambda)$  визначасмо за формулою (6), для якої залежний від часу параметр  $\lambda$  визначається з формули (13) за допомогою амплітуди імпульсів  $A$ .

Виконані за виразами (12)–(13) розрахунки призводять до наступних результатів:

а) при модуляції амплітуд імпульсів і довільному вигляді спектра  $G(\omega)$ :

$$\frac{m_\sigma^{(A)}}{m_A} = \frac{A^2[1 + 2f_\mu(\omega)]}{\sigma^2 + A^2[1 + 2f_\mu(\omega)]}; m_\sigma^A \approx m_A \quad \text{при } f_\mu \rightarrow 0; \quad (14)$$

б) при модуляції інтервалів слідування імпульсів:

$$m_\sigma^{(\mu_c)} = -\frac{m_\mu}{2} + m_f \frac{A^2 f_\mu(\omega)}{2[\sigma^2 + A^2[1 + 2f_\mu(\omega)]]}, \quad (15)$$

тобто при експоненціальному розподілі інтервалів проходження імпульсів, коли  $f_\mu(\omega) = 0$ , маємо  $m_\sigma^{(\mu)} = -m_\mu/2$ ;

в) при модуляції згасання  $\beta$  експоненціальних імпульсів або згасання  $\alpha$  імпульсів відповідно маємо

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_\sigma^{(\beta)}}{m_\beta} &= -\frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2} \\ \frac{m_\sigma^{(\alpha)}}{m_\alpha} &= -\frac{2\alpha^2}{\omega_1^2} (\omega_0^2 + \omega^2) \langle g^2(\omega) \rangle \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

г) при модуляції частоти  $\omega_1$  заповнення імпульсів:

$$\frac{m_\sigma^{(\omega_1)}}{m_\omega} = 1 - \langle g^2(\omega) \rangle (\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2), \quad (17)$$

причому в смузі частот, поблизу  $\omega_1$  виникає квадратична модуляція, яка характеризується появою в складі обвідної другої гармоніки модулюючої функції

$$m^2 + 4Q^2 m_\omega^2, \quad \text{де } Q^2 = (\alpha^2 + \omega_1^2)/4\alpha^2.$$

Отримані дані показують наступне:

– модуляція амплітуди ( $A$ ) та інтервалів проходження імпульсів ( $\mu_c$ ) приводить до модуляції процесу, що не залежить від несучої частоти;

– модуляція форми імпульсів – згасання  $\alpha$  або  $\beta$  імпульсів, або частоти заповнення  $\omega_1$  імпульсів призводять до залежності коефіцієнта модуляції від несучої частоти;

– при модуляції частоти заповнення імпульсів виникає ефект нелінійності модуляції спектру, тобто в області поблизу середньої частоти заповнення імпульсів з'являється друга гармоніка частоти модуляції.

Дисперсія суми некорельованих випадкових величин дорівнює сумі дисперсій. З цього випливає твердження, яке покладене в основу методу диверсифікації:

$$n_c(0) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\int_0^\infty \omega^2 K^2(\omega) G(\omega) d\omega}{\int_0^\infty K^2(\omega) G(\omega) d\omega} \right]^{1/2}, \quad (18)$$

де  $K^2(\omega)$  – квадрат частотної характеристики смугового фільтра.

У кінцевому рахунку ефект модуляції визначається еволюцією енергетичного спектра, і якщо значення збільшень останнього будуть знайдені для заданих значень модулюючої функції, тоді з виразів (12) і (13) легко знаходиться коефіцієнт модуляції процесу.

Звернемося до дослідження глибини частотної модуляції. Визначимо миттєву частоту процесу в заданій смузі частот  $\Delta f$  як число нулів процесу в одиницю часу при заданому знаку його похідної (середнє число періодів процесу). У квазістаціонарному наближенні або за умови повільної зміни параметрів процесу скористаємося відомим виразом [4] для середнього числа нулів. Цей вираз відповідає методу експериментальних досліджень параметрів миттєвої частоти шуму, коли визначають інтервали часу між «нулями» процесу, а миттєву частоту отримують як функцію, значення якої протилежні цим інтервалам. Застосуємо вираз (18) для визначення миттєвої частоти процесу в смузі частот  $\Delta \omega$  ідеального фільтра з прямокутною частотною характеристикою на середній частоті  $\omega_{op}$ . Представимо функцію  $G(\omega)$  рядом Тейлора по змінній  $\omega_\phi$ :

$$G(\omega) = G_o(\omega_\phi) + (\omega - \omega_\phi) \hat{G}_o(\omega_\phi) + \check{G}_o(\omega_\phi)(\omega - \omega_\phi)^2/2 + \dots,$$

тоді із формули (12) отримаємо

$$\omega_c^2 = \frac{\omega_\phi^2 + \frac{\Delta \omega^2}{12} \left[ \frac{G_o'}{G_o} 2\omega_\phi - 1,2 \frac{G_o'}{G_o} \frac{\omega_\phi^2 (\omega_\phi + \Delta \omega)^2}{(\Delta \omega)^2} \right]}{1 + \frac{G_o''}{G_o} \frac{(\Delta \omega)^2}{24}}. \quad (19)$$

У багатьох випадках достатньо обмежитися першим наближенням:

$$\omega_c^2 \approx \omega_\phi^2 + \frac{\Delta \omega^2}{12} \cdot \left( 1 + 2 \frac{G_o'}{G_o} \omega_\phi \right) \quad \text{або} \quad \omega_c \approx \omega_\phi + \frac{\Delta \omega^2}{24} \left( 1 + 2 \frac{G_o'}{G_o} \omega_\phi \right). \quad (20)$$

Визначимо глибину частотної модуляції як відношення девіації частоти до середньої частоти процесу в досліджуваній смузі частот:

$$m_{ч.м} = \frac{\delta \omega}{\omega_c} = \frac{\omega_c(\lambda + \Delta \lambda) - \omega_c(\lambda)}{\omega_c(\lambda)}, \quad (21)$$

де  $\lambda$  – модульований параметр послідовності імпульсів.

Після нескладних перетворень, враховуючи, що  $G = G(\omega, \lambda)$ , з формул (20) і (21)

отримаємо:

$$m_{ч.м} = \frac{\Delta\omega^2}{12\omega_\phi} \left[ \frac{\Delta G'_o}{G_o} - \frac{\Delta G_o}{G_o} \frac{G'_o}{G_o} \right] = \frac{\Delta\omega^2 \lambda m_\lambda}{12\omega_\phi G_o} \left[ \frac{\partial^2 G(\omega, \lambda)}{\partial \omega \partial \lambda} - \frac{1}{G_o} \frac{\partial G}{\partial \omega} \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right]_{\omega=\omega_\phi} \quad (22)$$

З розв'язку (22), для випадків модуляції параметрів потоку імпульсів, отримаємо:

а) при модуляції амплітуд імпульсів:

$$m_{ч.м}^{(A)} = \frac{m_A \Delta\omega^2}{3\omega_\phi} \frac{A^2}{A^2 + \sigma^2 + 2A^2 f_\mu(\omega)} \frac{\partial f_\mu(\omega)}{\partial \omega} \left\{ 1 - \frac{A^2 [1 + 2f_\mu(\omega)]}{A^2 + \sigma^2 + 2A^2 f_\mu(\omega)} \right\}, \quad (23)$$

зокрема,  $m_{ч.м}^{(A)} = 0$  при  $f_\mu(\omega) \equiv 0$ ;

б) при модуляції інтервалів проходження імпульсів:

$$\frac{m_{ч.м}^{(\mu)}}{m_\mu} = \frac{\Delta\omega^2 \mu_c}{G\omega_\phi} \frac{A^2}{A^2 + \sigma^2 + 2A^2 f_\mu} \frac{\partial^2 f_\mu(\omega, \lambda)}{\partial \mu_c \partial \omega}, \quad (24)$$

умови  $f_\mu \equiv 0$  або  $\partial^2 f_\mu(\omega, \lambda) / \partial \mu_c \partial \omega$  призводять до відсутності частотної модуляції;

в) при модуляції затухання  $\beta$  експоненціальних імпульсів:

$$\frac{m_{ч.м}^{(\beta)}}{m_\beta} = \frac{\Delta\omega^2 \beta^2}{3(\beta^2 + \omega^2)^2}; \quad (25)$$

г) при модуляції загасання  $\alpha$  експоненціальних імпульсів

$$\frac{m_{ч.м}^{(\alpha)}}{m_\alpha} = \frac{2}{3} \frac{\Delta\omega^2 \alpha^2}{\omega_1^2} \times \langle g^2(\omega) \rangle \left[ \frac{2}{\omega_1^2} \langle g^2(\omega) \rangle (3\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)(\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega^2) - 1 \right] \quad (26)$$

знак  $m_{ч.м}^{(\alpha)} / m_\alpha$  змінюється при переході від низьких частот до високих, а поблизу частоти заповнення  $\omega_1$  частотна модуляція відсутня;

д) при модуляції частоти заповнення  $\omega_1$  імпульсів

$$\frac{m_{ч.м}^{(\omega)}}{m_\omega} = \frac{2}{3} \frac{\Delta\omega^2}{\omega_1^2} |g^2(\omega)| \left[ 2 |g^2(\omega)| (3\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2) + \omega_1^2 \right] \quad (27)$$

глибина модуляції змінюється з частотою, набуваючи мінімальних значень частоти  $\omega_1$ . Частотна модуляція з'являється при модуляції параметрів форми імпульсів, а глибина частотної модуляції в смузі частот пропорційна квадрату смуги, що пропускає  $\Delta\omega$  фільтр.

**Складні адитивно-мультиплікативні процеси.** Шуми і вібрації суднового

устаткування викликаються безліччю джерел. Шуми і вібрації одного механізму також викликаються коливальними силами різного характеру, різної фізичної природи. Тому узагальненою моделлю реального шуму або вібрації є адитивна модель, що включає наступні складові:

- гауссівський стаціонарний шум (небілий)  $\xi(t)$ ;
- негауссівський стаціонарний шум  $v(t)$ ;
- модульовані шуми  $z_i(t) = [1 + m_x(t)]\eta(t)$ ,

а також періодичні процеси  $f(t) = \sum_k c_k \cos(k\omega_k t + \varphi_k)$  з різними значеннями основної частоти  $\omega_i$ , які в більш загальному випадку можуть мати амплітудну і частотну модуляції, тобто повинні представлятися моделлю:

$$f_j(t) = \sum_k (1 + m_j x_{j,t}) c_{kj} \cos\{k\omega_j [1 + m_j^{(ч.м)} y(t)] + \varphi_{kj}\}.$$

Весь цей складний адитивний процес має множник  $\Phi(t)$ , який відображає зміну рівня в процесі, в часі, в наслідку. В загальному випадку адитивно-мультиплікативна модель має вигляд:

$$F(t) = \Phi(t) \left[ \xi(t) + v(t) + \sum_i z_i(t) + \sum_j f_j(t) \right]. \quad (28)$$

Кожний доданок характеризується своїм спектром і частотною залежністю статичних характеристик. У різних смугах частот переважають різні джерела, тому статистичні характеристики, вимірювані в суміжних смугах частот, мають бути різними.

Розглянемо характеристики складного адитивного процесу, приймаючи  $\Phi(t) = 1$  в (28). Дисперсія адитивного процесу в силу некорельованості доданків дорівнює

$$\sigma_F^2 = \sigma_\xi^2 + \sigma_v^2 + \sum_i \sigma_{z_i}^2 + \sum_j \sigma_{f_j}^2. \quad (29)$$

Кумулянти вищих порядків для незалежних доданків також адитивні:

$$\chi_{kF} = \chi_{k\xi} + \chi_{kv} + \sum_i \chi_{kz_i} + \sum_j \chi_{kf_j}. \quad (30)$$

Нормовані коефіцієнти (асиметрії, ексцесу та вищого прядка), які неважко показати, виразимо через аналогічні коефіцієнти доданків і їх дисперсії:

$$\gamma_{kF} = \frac{\chi_{kF}}{(\sigma_F^2)^{k/2}} = \sum_q \frac{\sigma_q^k}{\left[ \sum_q \sigma_q^2 \right]^{k/2}} \gamma_{kq}. \quad (31)$$

Коефіцієнт модуляції в смузі частот при підсумовуванні шумів зменшується також відповідно відношенню дисперсій доданків:

$$m_F = m_z \frac{\sigma_z^2}{\sigma_F^2}. \quad (32)$$

Цей результат впливає з аналізу виразу, що описує адитивний процес  $F(t)$  у вигляді нового модульованого процесу, утвореного підсумовуванням модульованого процесу  $z(t)$  і немодульованого процесів, представлених складовою  $N(t)$ :

$$F(t) = (1 + m_F x_t) y_t = (1 + m_z x_t) \eta(t) + N(t), \quad (33)$$

де  $m_F$  – коефіцієнт модуляції сумарного процесу  $F(t)$ .

Переходячи до дисперсії лівої і правої частин виразу (33) і вважаючи, що складові в (27) представлені стаціонарними модулями, отримуємо

$$(1 + m_F x_t)^2 \sigma_y^2 = (1 + m_z x_t)^2 \sigma_\eta^2 + \sigma_N^2, \quad (34)$$

звідки впливають дві умови еквівалентності модульованих процесів:

$$\sigma_y^2 = \sigma_\eta^2 + \sigma_N^2; \quad m_F \sigma_y^2 = m_z \sigma_\eta^2. \quad (35)$$

Із останнього отримуємо формулу (32). Для суми залежних процесів в загальному випадку кумулянти визначаємо за формулою [4]:

$$\chi_k^{(\Sigma)} = \sum_{l_1+l_2+\dots+l_N=k} \frac{k!}{l_1! l_2! \dots l_N!} \langle \xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} \dots \xi_N^{l_N} \rangle, \quad (36)$$

де підсумовування йде по всіх  $l$ , але так, щоб виконувалася умова  $l_1+l_2+\dots+l_N=k$ .

Бачимо, що для адитивності дисперсій достатні лише некорельовані доданки.

Коефіцієнт модуляції суми відфільтрованих шумів визначається ступенем корельованості  $r$  підсумовуваних шумів і при  $r \approx 1$  маємо  $m_\Sigma \approx m_i$ , а при  $r < 1$  отримуємо  $m_\Sigma < m_i$  (де  $m_i$  – коефіцієнт модуляції доданків).

**Класифікація процесів за статистичними характеристиками і їх частотною залежністю.** Ймовірнісні моделі процесів включають в себе як математичне визначення зв'язку різних елементарних процесів, так і ймовірні характеристики параметрів елементарних процесів. В результаті з однієї і тієї ж множини реалізацій можна набрати різні складові реалізацій, що утворюють моделі випадкових процесів різних класів.

Отримані результати дозволяють розглянути наступну класифікацію процесів, якщо обмежитись стаціонарними моделями описаних вище процесів:

- за видом і рівнями згладженого (за частотою) енергетичного спектра;
- за видом і параметрами складових дискретного спектра (частотою, амплітудою, наявністю частотної або амплітудної модуляції);
- за залежністю від частоти коефіцієнтів ексцесу;
- за наявністю модуляції, залежно від частоти і параметрів модулюючої функції.

Таким чином, можна відрізнити негауссівський шум від гауссівського за наявністю ненульових коефіцієнтів ексцесу і виділити ці шуми з числа інших процесів за відсутністю дискретних складових в їх спектрі і в спектрі обвідної. Коефіцієнт ексцесу може служити також ознакою, що дозволяє встановити наявність модуляції в окремих ділянках спектра ( $\gamma_4 < 0$ ) або модуляції ( $\gamma_4 > 0$ ) без виконання спектрального аналізу. Складні адитивно-мультиплікативні процеси, що містять складові відмінного



класу, мають складну частотну залежність статистичних характеристик. Так, суднові шуми і вібрації містять, як правило, дискретні складові на низьких частотах і модульовані шуми на вищих звукових частотах.

Це призводить до частотної залежності коефіцієнта ексцесу:  $\gamma_4(\omega) < 0$  на низьких та  $\gamma_4(\omega) > 0$  на високих частотах, до частотної залежності коефіцієнта модуляції – зростання рівня модуляції шуму на високих частотах. Виконаємо аналіз властивостей розглянутих моделей випадкових процесів на підставі табл. 1, в якій для порівняння наведені параметри, які характеризують різні процеси в теорії та при експериментальних дослідженнях. Нелінійне перетворення гауссівського шуму відрізняється ненульовими значеннями кумулянтів вищих порядків, за якими на практиці визначають у смугах частот коефіцієнт ексцесу  $\gamma_4$ .

Друга модель, заснована на використанні гауссівського шуму, – модульований шум. Як в теорії, так і на практиці додатковими характеристиками цього процесу є коефіцієнти ексцесу  $\gamma_4$  в смугах частот, що дають інтегральну характеристику ефекту модуляції.

Конкретні значення парціальних коефіцієнтів модуляції  $m_k$  характеризують періодичну модулюючу функцію, представляючи її рядом Фур'є.

Синус з випадковою початковою фазою є найпростішою моделлю, яка характеризується амплітудою  $A$  та частотою  $\omega$ , як в теорії, так і на практиці.

Таблиця 1

Статистичні характеристики та параметри реальних фізичних процесів, які подаються різними математичними моделями

Моделі процесів	Характеристики та параметри	
	Теорія	Експеримент
Гауссівський стаціонарний шум	$M_1, R(\tau), G(\omega)$	$G(\omega)$
Негауссівський стаціонарний шум	$M_1, R(\tau), G(\omega), \gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_s$	$G(\omega), \gamma_4$
Модульований шум (періодична модуляція)	$M_1, R(\tau), G(\omega), \gamma_4, m_k$	$G(\omega), \gamma_4, m_k$
Синус з випадковою початковою фазою	$A, \omega$	$A, \omega$
Імпульсний стаціонарний пуассонівський процес	$n_0, F(t)$	$G(\omega)$
Імпульсний модульований процес	$n_0(t), F[\lambda(t)]$	$G(\omega), \gamma_4, m_A(\omega), m_{\text{чм}}(\omega)$

### Висновки

1. Вібрації суднових машин та механізмів можуть бути представлені в загальному вигляді за допомогою адитивно-мультиплікативної моделі вібрації.

2. Розглянуті вище моделі доцільно та раціонально використовувати при вібродіагностуванні суднових машин і механізмів.

3. При проведенні експериментальних досліджень для виявлення діагностичних ознак різних дефектів суднового обладнання доцільно мати пакет комп'ютерних програм, які дозволяють проводити спектральний аналіз вібрації, спектральний аналіз обвідної складової, та пакет статистичної обробки результатів вимірювань вібрації.

### Список використаної літератури

1. Барков А. В., Баркова Н. А. Вибрационная диагностика машин и оборудования. Анализ вибрации. СПб: СПбМТУ, 2004. 156 с.
2. Барков А. В., Баркова Н. А., Азовцев А. Ю. Мониторинг и диагностика роторных

- машин по вибрации. СПб.: СПбГМТУ, 2012. 159 с.
3. Петрухин В. В., Петрухин С. В. Основы вибродиагностики и средства измерения вибрации. Вологда: Инфра-Инженерия, 2010. 168 с.
  4. Костюков В. Н., Науменко А. П. Основы виброакустической диагностики и мониторинга машин. Омск: Издательство ОмГТУ, 2011. 360 с.
  5. Голдин А. С. Вибрация роторных машин. М.: Машиностроение, 1999. 344 с.

#### **References**

1. Barkov, A. V., & Barkova, N. A. (2004). Vibratsionnaya diagnostika mashin i oborudovaniya. Analiz vibratsii. SPb: SPbMTU.
2. Barkov, A. V., Barkova, N. A., & Azovtsev, A. Yu. (2012). Monitoring i diagnostika rotornyih mashin po vibratsii. SPb.: SPbGMTU.
3. Petruhin, V. V., & Petruhin, S. V. (2010). Osnovyi vibrodiagnostiki i sredstva izmereniya vibratsii. Vologda: Infra-Inzheneriya.
4. Kostyukov, V. N., & Naumenko, A. P. (2011). Osnovyi vibroakusticheskoy diagnostiki i monitoringa mashin. Omsk: Izdatelstvo OmGTU.
5. Goldin, A. S. (1999). Vibratsiya rotornyih mashin. M.: Mashinostroenie.

УДК 510.6

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО

Херсонський національний технічний університет

П.Й. ГУЧЕК

Інститут біокибернетики і біомедичної інженерії ім. М. Налеча Польської академії наук, Польща

### АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО ОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПРАВИЛЬНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

*У роботі виявлено, що обране для дослідження лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке має правильну особливу точку, за допомогою перетворення Куммера-Ліувілля зводиться до виродженого гіпергеометричного рівняння, яке подане в формі Уиттекера. Встановлені співвідношення між коефіцієнтами заданого рівняння, виродженого гіпергеометричного рівняння у загальному вигляді та у формі Уиттекера. На основі цих співвідношень показано, що досліджуване рівняння має лише один незалежний фундаментальний розв'язок у вигляді виродженої гіпергеометричної функції. Другий фундаментальний розв'язок може бути знайдений або за допомогою метода Фробеніуса у вигляді узагальненого степеневого ряду, або виражений через функцію Трикомі. В останньому випадку загальний розв'язок досліджуваного рівняння є лінійною комбінацією функцій Уиттекера.*

*Ключові слова: вироджене гіпергеометричне рівняння, рівняння Уиттекера, метод Фробеніуса, функція Трикомі, функції Уиттекера.*

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО

Херсонский национальный технический университет

П.И. ГУЧЕК

Институт биокибернетики и биомедицинской инженерии им. М. Налеча Польской академии наук, Польша

### АНАЛИЗ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРАВИЛЬНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

*В работе установлено, что выбранное для исследования линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее правильную особую точку, с помощью преобразования Куммера-Лиувилля приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению, представленному в форме Уиттекера. Найдены соотношения между коэффициентами заданного уравнения, вырожденного гипергеометрического уравнения в общем виде и в форме Уиттекера. На основе этих соотношений показано, что исследуемое уравнение имеет только одно независимое фундаментальное решение в виде вырожденной гипергеометрической функции. Второе фундаментальное решение может быть найдено или с помощью метода Фробениуса в виде обобщенного степенного ряда, или выражено через функцию*

Трикоми. В последнем случае общее решение исследуемого уравнения является линейной комбинацией функций Уиттекера.

Ключевые слова: вырожденное гипергеометрическое уравнение, уравнение Уиттекера, метод Фробениуса, функция Трикоми, функции Уиттекера.

H.Ya. TULUCHENKO

Kherson National Technical University

P.Y. GUCHEK

Nalecz Institute of Biocybernetics and Biomedical Engineering, Poland

## ANALYSIS OF THE GENERAL SOLUTION OF ONE LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION WITH REGULAR SINGULAR POINT

*The processes are studied in the applied fields can be described by differential equations, the structure of which is different from the structure of classical differential equations, which have currently well understood the methods of solving.*

*Finding the Kummer-Liouville transform for a certain pair of (even linear) differential equations is related to the solution of the non-linear differential equation Yermakov, which has an analytical solution in a limited number of cases of its coefficients.*

*Therefore, the reduction of a specific ordinary differential equation (which has practical interest in a particular field of application) to a known type of differential equation remains an urgent task for research.*

*It is established that the linear homogeneous second-order differential equation that has the regular singular point chosen for the study is reduced to a confluent hypergeometric equation presented in the form of Whittaker using the Kummer-Liouville transform in the work. Relations between the coefficients of the given differential equation and the confluent hypergeometric equation in the general form and in the Whittaker form are found. Based on these relations, it is shown that the equation under study has only one independent fundamental solution in the form of a confluent hypergeometric function. The second fundamental solution can be found either in the form of a generalized power series using the Frobenius method, or can be expressed through the Tricomi function. In the latter case, the general solution of the equation under study is a linear combination of Whittaker functions. Each fundamental solution is a series of special kind which is centered at a regular singular point of the differential equation. The possibility of the adoption by the Tricomi function of a finite expression in the form of a polynomial with respect to the variable  $x$  or  $1/x$  for physically plausible values of the coefficients of the differential equation under study is inspected.*

*Keywords: confluent hypergeometric equation, Whittaker equation, Frobenius method, Tricomi function, Whittaker functions.*

### Постановка проблеми

Досліджувані в прикладних галузях процеси можуть описуватися диференціальними рівняннями, структура яких відрізняється від структури класичних рівнянь, методи розв'язання яких є на теперішній час добре вивченими. Як відзначав академік В.І. Арнольд: «У теперішній час теорія диференціальних рівнянь представляє собою складно осяжний конгломерат великої кількості різноманітних ідей і методів, у вищому ступені корисний для усіляких застосувань ...» [1, С. 5]. Саме ця неосяжність теорії диференціальних рівнянь часто стає перепоною для її ефективного практичного застосування.

Знаходження перетворення Куммера-Ліувілля для певної пари (навіть лінійних) диференціальних рівнянь пов'язане із розв'язанням нелінійного диференціального рівняння Єрмакова, яке має аналітичний розв'язок в обмеженій кількості випадків значень його коефіцієнтів [2, 3].

Тому зведення конкретного звичайного диференціального рівняння (яке має практичний інтерес для певної прикладної галузі) до відомого виду рівнянь залишається актуальною задачею для досліджень.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [4] аналізується структура розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку виду:

$$\frac{d^2}{dr^2}u(r) + \left( \frac{k_0^2 \alpha}{\alpha - \beta_0^2 r} - k_0^2 \right) u(r) = 0, \quad (1)$$

де  $u(r)$  – шукана функція;  $\alpha, \beta_0, k_0 \in R$ ;  $\alpha, \beta_0^2, k_0^2 > 0$ .

Загальний розв'язок рівняння (1) шукається у вигляді лінійної комбінації двох фундаментальних розв'язків:  $u_+(r)$  та  $u_-(r)$ , кожний із яких подається у вигляді добутку експоненціальної функції та степеневого ряду. Розвинення у степеневі ряди здійснюється у точці  $r = 0$ .

Також у роботі [4] показано, що один розв'язок (а саме  $u_+(r)$ ) містить саме поліном, тобто, починаючи з деякого номера, коефіцієнти степеневого ряду обертаються на нуль. Інший фундаментальний розв'язок  $u_-(r)$  виражається через перший  $u_+(r)$ :

$$u_-(r) = Cu_+(r) \cdot \int \frac{dr}{u_+^2(r)}.$$

При чому має місце така асимптотична поведінка розв'язків, коли  $r \rightarrow \infty$ :  $u_+(r) \rightarrow \infty$ , а  $u_-(r) \rightarrow 0$  експоненціально.

Авторами роботи [4] відзначається, що рівняння виду (1) виникають при моделюванні траєкторно-хвильового руху електрона у воднеподібному атомі за допомогою V-функцій [5].

Очевидно [6, С. 237], що досліджуване диференціальне рівняння (1) є окремим випадком виродженого гіпергеометричного рівняння:

$$x \cdot \frac{d^2}{dx^2} y(x) + (c - x) \frac{d}{dx} y(x) - ay(x) = 0, \quad (2)$$

яке часто зручно подавати в стандартній формі Уіттекера:

$$\frac{d^2}{dx^2} z(x) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2} \right) \cdot z(x) = 0. \quad (3)$$

Перехід від рівняння (2) до рівняння (3) здійснюється за допомогою підстановок:

$$y(x) = x^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}} z(x); \quad a = \frac{1}{2} - k + \mu; \quad c = 1 + 2\mu. \quad (4)$$

Як відомо [6, С. 238], рівняння виду (2) та (3) можуть бути проінтегровані за допомогою виродженої гіпергеометричної функції.

#### Мета дослідження

Показати, що досліджуване рівняння (1) є окремим випадком рівняння Уіттекера (3). Враховуючи особливу структуру рівняння (1), знайти його загальний розв'язок у вигляді лінійної комбінації окремих випадків гіпергеометричної функції.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

**Структура досліджуваного рівняння.** У роботі [4] вся увага приділена пошуку загального розв'язку рівняння (1) на основі степеневих рядів. Проте очевидно, що, коли  $r = \beta_0^2 / \alpha$  друга похідна шуканої функції  $\frac{d^2}{dr^2} u(r)$  повинна обернутися на нескінченність, якщо сама шукана функція  $u(r)$  в цей момент часу приймає скінченні значення. Точка  $r = \beta_0^2 / \alpha$  є особливою точкою рівняння (1). Загальний розв'язок диференціального рівняння з особливою точкою шукають у вигляді лінійної комбінації окремих випадків гіпергеометричної функції [6, С. 241, 247].

Встановимо відповідності між значеннями коефіцієнтів рівняння (1) та рівнянь (2) і (3).

Для спрощення подальших розрахунків подамо рівняння (1) у новому вигляді. Введемо заміну змінної:

$$\begin{aligned} -2 \cdot \frac{k_0}{\beta_0^2} \cdot (\alpha - \beta_0^2 r) &= x; \\ r &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k_0 \beta_0^2} \cdot (\beta_0^2 x + 2k_0 \alpha). \end{aligned}$$

Тоді рівняння (1) набуває вигляду:

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + \left( -\frac{1}{4} - \frac{\frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}}{x} \right) \cdot u(x) = 0. \quad (5)$$

Порівнюючи структуру коефіцієнтів у рівняннях (3) і (5), отримуємо співвідношення:

$$k = -\frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}; \quad \mu = \pm \frac{1}{2}; \quad (6)$$

Із співвідношень (6) випливає, що коефіцієнт  $c$  у формулах (4) може приймати два значення: 0 та 2. Обидва вони є цілими числами. Отже, рівняння (5) є окремим випадком рівняння Уїттекера (3) [6, С. 241].

**Перший незалежний розв'язок досліджуваного рівняння.** Якщо  $\mu = \frac{1}{2}$  і  $c = 2$ , тоді одним з розв'язків рівняння (2) є вироджена гіпергеометрична функція [6, С. 241, 247].

$$y_1(x) = \Phi(a; 2; x),$$

$$\text{де } a = \frac{1}{2} - k + \mu = \frac{1}{2} - \left(-\frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2};$$

$$\Phi(a; c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\prod_{j=1}^n (a+j-1)}{\prod_{j=1}^n (c+j-1)} \cdot \frac{x^n}{n!} \right) - \text{ряд Куммера.}$$

Відповідний розв'язок рівняння (5) має вигляд:

$$u_1(x) = x^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot y_1(x) = x e^{-\frac{x}{2}} \cdot \Phi(a; 2; x), \tag{7}$$

$$\text{де } a = 1 + \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2};$$

Якщо  $\mu = -\frac{1}{2}$  і  $c = 0$ , тоді одним з розв'язків рівняння (2) є вироджена гіпергеометрична функція:

$$y_*(x) = x^{1-c} \Phi(a-c+1; 2-c; x),$$

тобто

$$y_*(x) = x \Phi(a+1; 2; x),$$

$$\text{де } a = \frac{1}{2} - k + \mu = \frac{1}{2} - \left(-\frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}.$$

Відповідний розв'язок рівняння (5) має вигляд:

$$u_*(x) = x^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot y_*(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot x \Phi(a+1; 2; x), \tag{8}$$

$$\text{де } a = \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2};$$

Пересвідчуємося, що частинні розв'язки (7) і (8) співпадають з точністю до позначень.

**Другий незалежний розв'язок досліджуваного рівняння.** Другий незалежний розв'язок може бути знайдений звичайним методом Фробеніуса [6, С. 248]. Реалізуємо цю ідею. Будемо шукати розв'язок рівняння (5) у вигляді узагальненого степеневого ряду:

$$u(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \quad (9)$$

Виконаємо формальне диференціювання ряду (9):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u(x) &= px^{p-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n + x^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1}; \\ \frac{d}{dx} u(x) &= px^{p-1} \cdot \left( C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \right) + x^{p-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^n; \\ \frac{d}{dx} u(x) &= x^{p-1} \cdot \left( pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n)C_n x^n \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Знайдемо вираз другої похідної для ряду (9):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= (p-1) \cdot x^{p-2} \cdot \left( pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n)C_n x^n \right) + x^{p-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (p+n)nC_n x^{n-1}; \\ \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= (p-1) \cdot x^{p-2} \cdot \left( pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n)C_n x^n \right) + x^{p-2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (p+n)nC_n x^n; \\ \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= x^{p-2} \cdot \left( (p-1) \cdot pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \cdot (p+n)C_n x^n \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Підставимо отримані вирази (9), (10) і (11) в рівняння (5):

$$\begin{aligned} x^{p-2} \cdot \left( (p-1) \cdot pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \cdot (p+n)C_n x^n \right) + \\ + \left( -\frac{1}{4} - \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2 x} \right) \cdot x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0. \end{aligned}$$

Перепишемо отримане рівняння у вигляді, зручному для порівняння коефіцієнтів при однакових степенях змінної  $x$ :

$$x^{p-2} \cdot \left( (p-1) \cdot pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \cdot (p+n)C_n x^n \right) -$$



$$-\frac{1}{4} \cdot x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} \cdot x^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0.$$

Поділимо отримане рівняння на  $x^{p-2}$ :

$$(p-1) \cdot p C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \cdot (p+n) C_n x^n - \\ - \frac{1}{4} \cdot x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} \cdot x^1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0.$$

та перепозначимо індекси в двох останніх сумах:

$$(p-1) \cdot p C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \cdot (p+n) C_n x^n - \\ - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} x^n - \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n = 0;$$

Відділимо в першій та останній сумах перші доданки, щоб всі суми починалися з однакового значення індексу:

$$(p-1) \cdot p C_0 + p \cdot (p+1) C_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (p+n-1) \cdot (p+n) C_n x^n - \\ - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} x^n - \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} \cdot C_0 x - \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-1} x^n = 0;$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при змінній  $x$  в однакових степенях, отримаємо систему для знаходження коефіцієнтів ряду (9):

$$(p-1) \cdot p C_0 = 0; \\ p \cdot (p+1) C_1 - \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} \cdot C_0 = 0; \\ (p+n-1) \cdot (p+n) C_n - \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} \cdot C_{n-1} - \frac{1}{4} \cdot C_{n-2} = 0, \quad n \geq 2. \tag{12}$$

З першого рівняння системи (12) встановлюємо, що для подальших розрахунків будемо використовувати значення параметра  $p = 1$ , оскільки два інші можливі кореня рівняння приводять або до тривіального розв'язку  $u(x) = 0$  досліджуваного рівняння, коли  $C_0 = 0$ , або ряд (9) перетворюється на звичайний степеневий ряд, який не може бути розв'язком диференціального рівняння з особливою точкою, коли  $p = 0$ .

Запишемо систему (12) при значенні параметра  $p = 1$ :

$$C_0 \in R; \tag{13}$$

$$C_1 = \frac{k_0 \alpha}{4\beta_0^2} \cdot C_0;$$

$$C_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot \left( \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} \cdot C_{n-1} + \frac{1}{4} \cdot C_{n-2} \right), \quad n \geq 2.$$

Тоді другий незалежний розв'язок рівняння (5) має вигляд:

$$u_2(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n,$$

де значення коефіцієнтів  $C_n$  визначаються з системи (13).

Загальний розв'язок рівняння (5) має вигляд:

$$u(x) = A \cdot u_1(x) + B \cdot u_2(x) = A \cdot x e^{-\frac{x}{2}} \cdot \Phi(a; 2; x) + B \cdot x \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n,$$

де  $A, B \in R$ .

**Загальний розв'язок досліджуваного рівняння в функціях Уіттекера.** Уіттекером введені дві функції, які також складають фундаментальну систему для досліджуваного рівняння (3):

$$z_1(x) = M_{\chi, \mu}(x) = x^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \Phi(a; c; x);$$

$$z_2(x) = W_{\chi, \mu}(x) = x^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \psi(a; c; x);$$

де  $\chi = -a + \frac{c}{2}$ ,  $\mu = \frac{c}{2} - \frac{1}{2}$ ,  $\psi(a; c; x)$  – функція Трікомі [6, С. 251].

Тоді загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд:

$$z(x) = A \cdot z_1(x) + B \cdot z_2(x) = A \cdot M_{\chi, \mu}(x) + B \cdot W_{\chi, \mu}(x),$$

де  $A, B \in R$ .

Відомо [6, С. 251; 7, С. 430], що функція Трікомі є однозначною в двох випадках:

- 1) коли  $a = 0, -1, -2, \dots$ , функція Трікомі є многочленом від  $x$ ;
- 2) коли  $a = 1, 2, \dots, n$ ,  $c = n + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , функція Трікомі є многочленом від  $x^{-1}$ .

Вище було показано, що для досліджуваного рівняння можливі два види співвідношень між коефіцієнтами:

- 1)  $\mu = \frac{1}{2}$ ,  $c = 2$ ,  $a = 1 + \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}$ ;
- 2)  $\mu = -\frac{1}{2}$ ,  $c = 0$ ,  $a = \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}$ .

Отже, для досліджуваного рівняння функція Трикомі може мати точне подання тільки як многочлен від  $x$ , коли  $1 + \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} = 0, -1, -2, \dots$ , тобто  $\frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} = -1, -2, \dots$ . Що є неможливим за їх фізичним змістом.

### Висновки

Досліджено властивості лінійного однорідного диференціального рівняння з роботи [4]. Показано, що за допомогою перетворення Куммера-Ліувілля його можна привести до вигляду рівняння Уіттекера. Отримані явні вирази незалежних фундаментальних розв'язків при різних методах їх пошуку, оскільки дана задача не обмежується єдиною системою фундаментальних розв'язків. Кожний фундаментальний розв'язок є рядом спеціального виду, коли розвинення здійснюється в особливій точці диференціального рівняння. Встановлено, що функція Трикомі для фізично правдоподібних значень коефіцієнтів досліджуваного диференціального рівняння не може набувати скінченних виразів у вигляді многочленів відносно незалежної змінної  $x$  та  $1/x$ .

### Список використаної літератури

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1977. 304 с.
2. Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. Москва: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 464 с.
3. Korman Philip. (2019). A remark on Pinney's equation URL: <https://arxiv.org/pdf/1902.02739.pdf>
4. Валишин Н. Т., Ибрагимов И. С., Ковалевский И. В. Решение одного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. *Научно-технический вестник Поволжья*. 2018. №4. С. 12–14. DOI: 10.24153/2079-5920-2018-8-4-12-14
5. Valishin N., Moiseev S. A Method of V-function: Ultimate Solution to the Direct and Inverse Problems of Dynamics for a Hydrogen-like Atom. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied Physics*. 2017. Vol. 4, №5(88). P. 23–32. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.108831
6. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Москва: Наука, 1965. 296 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1976. 576 с.

### References

1. Arnold, V. I. (1977). *Dopolnitelnyie glavyyi teorii obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy*. Moskva: Nauka.
2. Berkovich, L. M. (2002). *Faktorizatsiya i preobrazovaniya differentsialnyih uravneniy. Metody i prilozheniya*. Moskva: NITs «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika».
3. Korman Philip. (2019). A remark on Pinney's equation. Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/1902.02739.pdf>
4. Valishin, N. T., Ibragimov, I. S., & Kovalevskiy, I. V. (2018). Reshenie odnogo lineynogo odnorodnogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka. *Nauchno-tehnicheskii vestnik Povolzhya*. **4**, 12–14. DOI: 10.24153/2079-5920-2018-8-4-12-14
5. Valishin, N., & Moiseev, S. (2017). A Method of V-function: Ultimate Solution to the Direct and Inverse Problems of Dynamics for a Hydrogen-like Atom. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied Physics*. **4**, 5(88), 23–32. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.108831
6. Beytmen, G., & Erdeyi, A. (1965). *Vyisshie transtsendentnyie funktsii*. T. 1. *Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsiya Lezhandra*. Moskva: Nauka.
7. Kamke, E. (1976). *Spravochnik po obyiknovennyim differentsialnyim uravneniyam*. Moskva: Nauka.

УДК 539.3

О.О. УСАТОВА, Д.В. КРЮТЧЕНКО

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

### ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В КОАКСІАЛЬНИХ ОБОЛОНКАХ

*В наш час існує багато невирішених проблем стосовно міцності коаксіальних оболонок, частково наповнених ідеальною нестисливою рідиною. Тому у зв'язку з цим, виникає необхідність розгляду задач, пов'язаних із дослідженням динамічної взаємодії коаксіальних оболонок з рідиною. Задачі нестационарного деформування таких оболонок є найменш дослідженими і потребують більшої уваги. Визначивши область інтегрування в задачах стосовно коаксіальної оболонки, можна застосувати інтегрування за часом системи рівнянь Нав'є–Стокса, яка описує поведінку ідеальної і в'язкої рідини, але виникає утруднення, а саме коли рідина є нестисливою або слабо стислива – в такому випадку не використовують прямий спосіб інтегрування за часом. Використовуючи метод граничних елементів, можна розв'язати відповідну крайову задачу. Зауважимо, що рух рідини є безвихровим, і це дозволяє нам використовувати потенціал швидкостей, який задовольняє рівнянню Лапласа та граничним умовам, як на жорстких поверхнях оболонки, так і на вільній поверхні рідини, оскільки рух об'єму рідини повністю визначається рухом поверхонь, що його обмежують. Опис поведінки рідини з вільною поверхнею може бути зведений до сукупності залежностей, які представляють собою умови кінематичного і динамічного характеру. Кінематичні умови можна розглядати як механічні зв'язки, які накладають обмеження на варіації невідомих, динамічні граничні умови випливають з варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського як природні. Тиск рідини буде задовольняти рівнянню Коші–Лагранжа. Стінки оболонки можна вважати абсолютно твердими. Власні частоти коливання рідини значно менші, ніж власні частоти коливання пружної оболонки з рідиною. Впливом поверхневого натягу можна знехтувати, тобто вплив поверхневого натягу на коливання рідини вважаємо малим. Проведено розрахунки, які дають можливість визначити частоти і форми плескання рідини в коаксіальних оболонках. Розглянуті вимушені коливання рідини під дією горизонтальних гармонічних, імпульсних та сейсмічних навантажень.*

*Ключові слова: коаксіальні оболонки, метод граничних елементів, вимушені коливання, ідеальна нестислива рідина.*

О.А. УСАТОВА, Д.В. КРЮТЧЕНКО

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В КОАКСИАЛЬНЫХ ОБОЛОЧКАХ

*В наше время существует много нерешенных проблем относительно прочности коаксиальных оболочек, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью. В связи с этим, возникает необходимость рассмотрения задач, связанных с исследованием динамического взаимодействия коаксиальных оболочек с жидкостью. Задачи нестационарного деформирования таких оболочек являются наименее исследованными и нуждаются в большем внимании. Предполагается, что жидкость является несжимаемой или слабо сжимаемой. Используя метод граничных элементов, можно решить соответствующую краевую задачу. Заметим, что движение жидкости является безвихревым и это позволяет нам использовать потенциал скоростей, который удовлетворяет условию Лапласа и граничным условиям, на*

<https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9>

*жестких поверхностях оболочки, и на свободной поверхности жидкости, так как движение объема жидкости полностью определяется движением поверхности, что его ограничивают. Описание поведения жидкости со свободной поверхностью может быть сведено к совокупности зависимостей, которые представляют собою условия кинематического и динамического характера. Кинематические условия можно рассмотреть, как механические связи, которые накладывают ограничения на вариации неизвестных, динамические условия вытекают из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, как естественные. Давление жидкости будет удовлетворять условию Коши–Лагранжа. Стенки оболочки можно считать абсолютно жесткими. Собственные частоты колебаний жидкости, значительно меньше, чем собственные частоты колебаний упругой оболочки с жидкостью. Влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь, то есть влияние поверхностного натяжения на колебания жидкости, представляем малым. Проведены расчеты, которые дают возможность определить частоты и формы плескания жидкости в коаксиальных оболочках. Рассмотрены вынужденные колебания жидкости под действием горизонтальных гармонических, импульсных и сейсмических нагрузок.*

*Ключевые слова: коаксиальные оболочки, метод граничных элементов, вынужденные колебания, идеальная несжимаемая жидкость.*

O.A. USATOVA, D.V. KRUTCHENKO

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences

## **FORCED LIQUID OSCILLATIONS IN COAXIAL SHELLS**

*There are many unsolved problems regarding the strength of coaxial shells partially filled with an ideal incompressible fluid. In this regard, it becomes necessary to consider problems associated with studying the dynamic interaction of coaxial shells with a liquid. The problems of unsteady deformation of such shells are insufficiently studied and need more attention. Having determined the region of integration, supposed that the fluid is incompressible or weakly compressible, and using the boundary element method, we can solve the corresponding boundary value problem. Note that the fluid motion is vortex-free and this allows us to use the velocity potential, which satisfies the Laplace equation and the boundary conditions, both on rigid surfaces of the shell and on the fluid free surface, since the motion of the fluid volume is completely determined by the motion of its boundary surface. A description of the liquid behavior with the free surface can be summarized in set of dependencies, which are conditions of a kinematic and dynamic nature. Kinematic conditions can be considered as mechanical bonds that impose restrictions on the variations of the unknowns, dynamic conditions follow from the variational principle of Hamilton–Ostrogradsky, as natural ones. The fluid pressure will satisfy the Cauchy–Lagrange conditions. The walls of the shell can be considered as rigid ones. The natural frequencies of the fluid are essentially less than the natural frequencies of the elastic shell with the liquid. The effect of surface tension can be neglected, that is, the effect of surface tension on fluid vibrations is small. The calculations are performed, which make it possible to determine the frequencies and modes of liquid sloshing in coaxial shells. The forced oscillations of the fluid under the influence of horizontal harmonic, impulse and seismic loads are considered.*

*Keywords: coaxial shells, boundary element method, forced oscillations, ideal incompressible fluid.*

### Постановка проблеми

Коаксіальні оболонки є об'єктом багатьох теоретичних та експериментальних досліджень, в зв'язку з тим, що вони широко застосовуються як конструктивні елементи в різних галузях промисловості. При заповненні оболонки рідиною змінюються її динамічні властивості, тому дослідження коливання рідини є актуальною проблемою.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Зауважимо, що математичне формулювання задачі динаміки системи «резервуар–рідина», з вільною поверхнею в випадку нерухомого резервуара, є крайовою задачею Неймана для рівняння Лапласа, з двома граничними умовами на вільній поверхні рідини [1]. При горизонтальному положенні конструкції та її частковому заповненні порушується симетричність за окружною координатою, що створює потребу для використання більш складних просторових моделей [2–5]. Для числового розв'язання вказаних крайових задач використовують методи скінченних різниць [6], граничних та скінченних елементів [7, 8], а також методи скінченних об'ємів [9].

В роботі для розрахунку використовували метод граничних елементів, а також були розглянуті випадки впливу сейсмічного та імпульсного навантаження [10].

### Мета дослідження

Розробити методику визначення частоти і форми плескання рідини в коаксіальних оболонках за допомогою методу граничних елементів. Розглянути вимушені коливання під дією горизонтальних гармонічних, імпульсних та сейсмічних навантажень.

### Викладення основного матеріалу дослідження

#### Формулювання задачі та основні співвідношення

Розглядається система двох коаксіальних оболонок обертання при частковому заповненні рідиною (рис. 1).

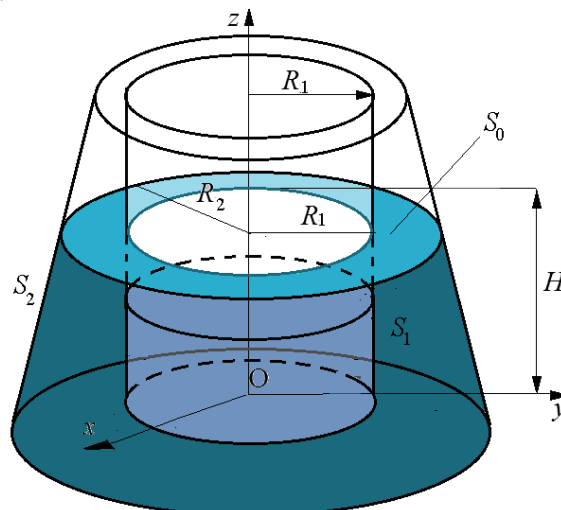


Рис. 1. Коаксіальні оболонки, частково заповнені рідиною.

Оболонки вважаються жорсткими. Рідина, що заповнює оболонки, є ідеальною та нестисливою. Якщо рух рідини починається із стану спокою, тоді згідно з теоремою Томпсона, рух рідини є потенціальним, оскільки він був потенціальним в початковий

момент часу. В цих умовах існує потенціал швидкостей  $\varphi(x, y, z, t)$ , що задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

На жорстких поверхнях оболонок виконується умова непротікання:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_2} = 0. \quad (2)$$

На вільній поверхні мають виконуватись кінематична та динамічна граничні умови. Кінематична умова полягає в тому, що точки рідини, які знаходились на вільній поверхні в початковий момент часу, залишаються на цій поверхні протягом всього часу руху. Ця умова має вигляд:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (3)$$

де функція  $\zeta$  описує зміну положення та форми вільної поверхні за часом.

Динамічна умова є умовою рівності тиску рідини атмосферному тиску на поверхні рідини і описується таким рівнянням:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0, \quad (4)$$

де  $g$  є прискоренням вільного падіння.

Для однозначного розв'язання ставимо додаткову умову у вигляді:

$$\int_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS = 0. \quad (5)$$

Співвідношення (1)–(5) складають спектральну задачу для оболонкових конструкцій з рідиною [11–12].

В роботі [13] за допомогою методу граничних елементів в осесиметричному формулюванні [14] отримані форми та частоти вільних коливань системи (оболонка–рідина, тобто розв'язано спектральну задачу (1)–(5). Ці форми будемо надалі використовувати, як базисну систему для задачі на вимушені коливання.

Будемо шукати потенціал швидкостей  $\varphi$  та функцію  $\zeta$  у вигляді рядів:

$$\varphi(r, z, t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(r, \theta, z), \quad (6)$$

$$\zeta(r, t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}. \quad (7)$$

Тут функції  $\varphi_k$  є розв'язками таких крайових задач:

$$\Delta\varphi_k=0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = \left. \frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_2} = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}(r, \theta, z) = \frac{\omega_k^2}{g}\varphi(r, z, \theta) \right|_{S_0}. \quad (10)$$

Тобто  $\varphi_k$  та  $\omega_k$  є формами і частотами вільних коливань рідини в системі коаксіальних оболонок. Числові методи розв'язання крайових задач (7)–(9) на основі використання інтегральних зображень та прямого формулювання методу граничних елементів розроблені в [14, 15].

### Визначення форми вільної поверхні

Розглянемо вимушені коливання рідини в системі коаксіальних оболонок під дією горизонтального навантаження. Згідно з [11, 16] має місце така динамічна умова на вільній поверхні рідини:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a_x(t)x + g\zeta = 0. \quad (11)$$

Тут  $g$  – прискорення вільного падіння,  $\mathbf{a}_x = \nabla[x \cdot a_x(t)]$  є горизонтальним прискоренням, що зумовлено дією зовнішніх сил. Зауважимо, що форми коливань рідини є ортогональними функціями [17]. У випадку горизонтального навантаження реалізуються лише неосесиметричні форми коливань, що відповідають першій гармоніці:  $\alpha = 1$  [11].

Підставимо ряди (6)–(7), які відповідають формам коливань при  $\alpha = 1$  та вираз (12) в крайову умову (11). Отримаємо, враховуючи, що  $x = r \cos\theta$ , таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{c}(t)\varphi_k(r, \theta, H) + g \sum_{k=1}^{\infty} c(t) \frac{\partial\varphi_k(r, \theta, H)}{\partial z} + r a_x(t) = 0.$$

Згідно з умовою (10) знайдемо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{c}(t)\varphi_k(r, \theta, H) + \sum_{k=1}^{\infty} c(t)\omega_k^2\varphi_k(r, \theta, H) + r a_x(t) = 0. \quad (13)$$

Далі знаходимо скалярний добуток співвідношень (13) на базисні функції  $\varphi_l$ . Внаслідок ортогональності [17] будемо мати незв'язану систему диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\ddot{c}_k(t) + \omega_k^2 c_k(t) + a_x(t)(r, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

де скалярний добуток  $(r, \varphi_k)$  визначається за формулою:



$$(r, \varphi_k) = \iint_{S_0} r \varphi_k(r, \theta, H) dS.$$

Задача полягає у визначенні невідомих коефіцієнтів, залежних від часу, та побудови форми вільної поверхні за умови дії гармонічних, імпульсних та сейсмічних навантажень.

У випадку гармонічного навантаження маємо:

$$a_x(t) = a_0 \cos \omega_0 t, \quad (15)$$

де  $a_0, \omega_0$  є відповідно амплітудою та частотою сили, що змушує.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів  $c_k(t)$  потрібно задати початкові умови. Оскільки за припущенням система «оболонка–рідина» в початковий момент знаходилась у стані спокою, тому

$$c_k(0) = 0, \quad \dot{c}_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Позначимо  $A_k = a_0(r, \varphi_k)$ . Згідно з умовами (16) невідомі коефіцієнти мають вигляд:

$$c_k(t) = \frac{A_k}{\omega_k^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega_k t).$$

Якщо діє імпульсне навантаження:

$$a_x(t) = a_0 a(t), \quad a(t) = \begin{cases} 1, & t < T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases} \quad (17)$$

де час  $T$  є періодом дії імпульсного навантаження,

згідно з [18] отримано такий розв'язок рівнянь (14):

$$c_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_k^2} - \frac{1}{\omega_k^2} \cos(\omega_k t), & 0 \leq t \leq T, \\ \frac{1}{\omega_k^2} - \frac{1}{\omega_k^2} \cos(\omega_k t) - \frac{1}{\omega_k^2} + \frac{1}{\omega_k^2} \cos \omega_k(t - T), & t > T. \end{cases}$$

Нехай сейсмічне навантаження моделюється таким чином [18]:

$$a_x(t) = \begin{cases} a_0 \sin(12\pi t/5) \cos(2\pi t), & t < T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases} \quad (18)$$

Позначимо  $\Omega_1 = \frac{12}{5}\pi$ ,  $\Omega_2 = \frac{9}{5}\pi$ . Отримаємо при  $t < T$

$$c_k(t) = -\frac{A_k}{\Omega_1^2 - \omega_k^2} \left[ \frac{\Omega_1 \sin(\omega_k t)}{\omega_k} - \sin(\Omega_1 t) \right] + \frac{A_k}{\Omega_2^2 - \omega_k^2} \left[ \frac{\Omega_2 \sin(\omega_k t)}{\omega_k} - \sin(\Omega_2 t) \right],$$

а при  $t > T$

$$c_k(t) = -\frac{A_k}{\Omega_1^2 - \omega_k^2} \left[ \frac{\Omega_1 \sin(\omega_k(t-T))}{\omega_k} - \sin(\Omega_1(t-T)) \right] + \frac{A_k}{\Omega_2^2 - \omega_k^2} \left[ \frac{\Omega_2 \sin(\omega_k(t-T))}{\omega_k} - \sin(\Omega_2(t-T)) \right].$$

Таким чином, отримані коефіцієнти рядів для функцій  $\varphi$  та  $\zeta$ . Це дає змогу дослідити зміну рівня підйому вільної поверхні за часом.

### Аналіз числових результатів

Досліджені коливання рідини в системі циліндричних оболонок під дією зовнішніх навантажень. Вважалося, що  $R_2 = 1$  м,  $H = 1$  м (рис. 1). Також вважалося, що у всіх розглянутих випадках рух рідини починався із стану спокою.

Зауважимо, що розглядалися форми коливань, які відповідають  $\alpha = 1$ , [9].

В табл. 1 наведені найнижчі частоти вільних коливань рідини при різних співвідношеннях радіусів оболонок  $R_1 / R_2$  (рис. 1).

Таблиця 1

Частоти коливань рідини в коаксіальних оболонках,  $\alpha = 1$

$R_1 / R_2$	0.0	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9
$\omega$	4.247	4.247	4.204	4.086	3.937	3.785	3.641	3.516	3.403	3.212

На рис. 2 зображено поведінку вільної поверхні рідини в точці з такими циліндричними координатами:  $r = 1$ ,  $\theta = 0$ ,  $z = 1$  під дією гармонічного навантаження (15) для оболонкової системи при  $R_1 / R_2 = 0.5$ .

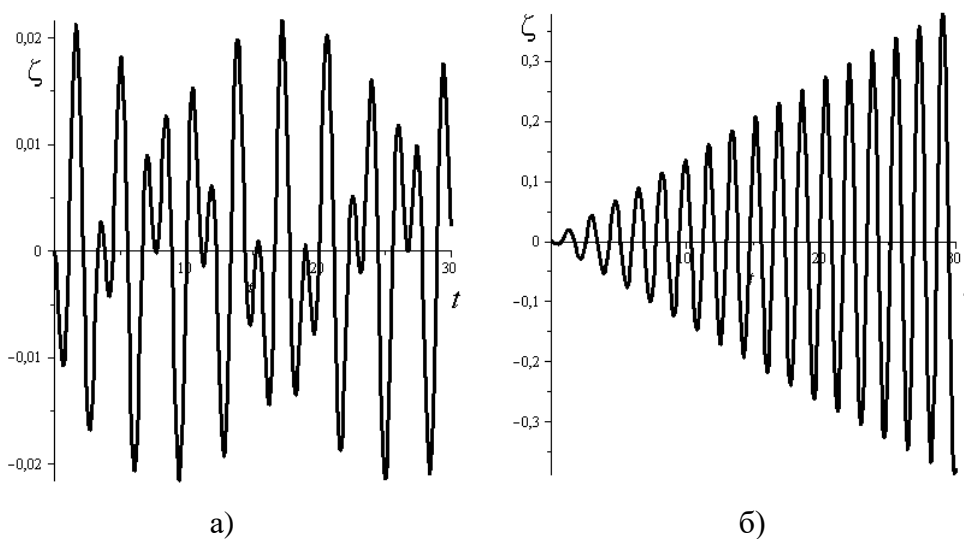


Рис. 2. Зміна вільної поверхні за часом під дією гармонічного навантаження.

Рис. 2а) та 2б) відповідають гармонічним навантаженням з параметрами  $a_0 = 0.1$ ,  $\omega_0 = 2$  та  $a_0 = 0.1$ ,  $\omega_0 = 3.64$  відповідно.

На рис.3 зображено зміну за часом вільної поверхні за умови дії імпульсного (рис. 3а) та сейсмічного навантаження (рис. 3б).

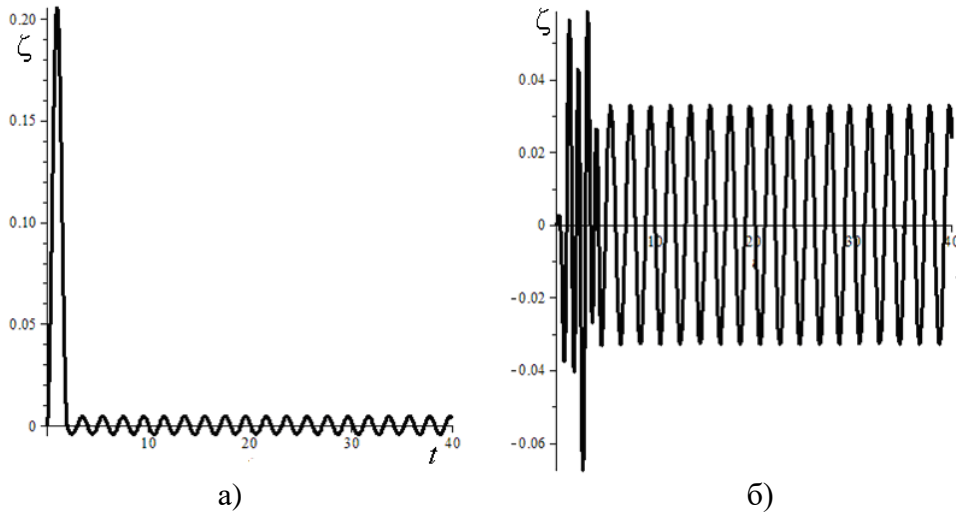


Рис. 3. Зміна вільної поверхні за часом під дією імпульсного та сейсмічного навантаження.

Параметри імпульсного навантаження  $T = 2$ ,  $a_0 = 2$ . При сейсмічному навантаженні також вважалось, що  $a_0 = 2$ .

При дії гармонічного навантаження, якщо частота зовнішньої сили відрізняється від частоти вільних коливань, відбувається періодичний рух вільної поверхні з обмеженими амплітудами.

### Висновки

За допомогою методу граничних елементів розроблено методику, що дає можливість визначити частоти і форми плескання рідини в коаксіальних оболонках. Потенціал швидкостей та функція, що описує форму вільної поверхні, зображені у вигляді рядів за формами вільних коливань рідини в коаксіальних оболонках. Ці форми отримано методом граничних елементів в аксіально-симетричному формулюванні. Розглянуто вимушені коливання під дією горизонтальних гармонічних, імпульсних та сейсмічних навантаження.

### Список використаної літератури

1. Лимарченко О. С. Нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы. Киев: Адверта, 2017. 130 с.
2. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Numerical modeling of spatial vibrations of cylindrical shells, partially filled with fluid. *Computational Technologies*. 2013. Vol. 18. № 2. P. 12–24.
3. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural Vibrations and Stability of Elliptical Cylindrical Shells Containing Fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016. Vol. 16. № 10. DOI: 10.1142/S0219455415500765
4. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*. 2015. Vol. 90. P. 12–22.
5. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Сенин А. Н. Анализ пространственных колебаний коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2018. Т. 11. № 4. С. 448–462.

<https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9>

6. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
7. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *International Journal of Engineering and Advanced Research Technology*. 2015. Vol. 1. № 1. P. 45–50.
8. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 5. С. 95–106.
9. Погрибный В. Б., Стрельникова Е. А., Шувалова Ю. С. Численное решение уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов на структурированной сетке с гибкими границами. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2014. № 3(50). С.413–417.
10. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced Vibrations of Tanks Partially Filled with the Liquid Under Seismic Load. Proceedings of the *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods: XXXIII International Conference* (UK, New Forest, 28-30 June, 2011). 2011. Vol. 52: WIT, Transactions on Modelling and Simulation. P. 285–296.
11. Ibrahim R. A. *Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 972 p.
12. Клигман Е. П., Клигман И. Е., Матвеев В. П. Спектральная задача для оболочек с жидкостью. *Прикладная механика и техническая физика*. 2005. Т. 46. № 6. С. 128–135.
13. Науменко Ю. В., Розова Л. В., Стрельникова Е. А., Усатова О. А. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах колебаний жидкости в коаксиальных оболочках. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2019. Вип. 41. С. 65–72.
14. Gnitko V., Naumenko Y., Strelnikova E. Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 867–881.
15. Еселева Е. В., Гнитко В. И., Стрельникова Е. А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. №1. С. 105–118.
16. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary Element Method in Nonlinear Sloshing Analysis for Shells of Revolution under Longitudinal Excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 111. P. 78–87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.
17. Gavrilyuk I., Lukovsky I., Trotsenko Yu., Timokha A. Sloshing in a Vertical Circular Cylindrical Tank with an Annular Baffle. Part 1. Linear Fundamental Solutions. *Journal of Engineering Mathematics*. 2006. Vol. 54. P. 71–88.
18. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. 2019. Vol. 5. P. 31–41.

#### References

1. Limarchenko, O. S. (2017). *Nelineynyye zadachi dinamiki zhidkosti v rezervuarah netsilindricheskoy formy*. Kiev: Adverta.
2. Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenko V. P. (2013). Numerical modeling of spatial vibrations of cylindrical shells, partially filled with fluid. *Computational Technologies*. **18**, 2, 12–24.
3. Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenko, V. P. (2016). Natural Vibrations and Stability of Elliptical Cylindrical Shells Containing Fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. **16**, 10. DOI: 10.1142/S0219455415500765  
<https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.9>

4. Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenکو, V. P. (2015). Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*. **90**, 12–22.
5. Bochkaryov, S. A., Lekomtsev, S. V., & Senin, A. N. (2018). Analiz prostranstvennykh kolebaniy koaksialnykh tsilindricheskikh obolochek, chastichno zapolnennykh zhidkostyu. *Vyichislitel'naya mehanika sploshnykh sred*. **11**, 4, 448–462.
6. Mokin, B. I., Mokin, V. B., & Mokin, O. B. (2010). Matematychni metody identyfikatsii dynamichnykh system. Vinnytsia: VNTU.
7. Medvedovskaya, T., Strelnikova, E., & Medvedyeva, K. (2015). Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *International Journal of Engineering and Advanced Research Technology*. **1**, 1, 45–50.
8. Kvasnytsia, H., & Shynkarenko, H. (2002). Adaptivni aproksymatsii metodu skinchennykh elementiv dlia zadach elastostatyky. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Seriya: Prykladna matematyka ta informatyka*. **5**, 95–106.
9. Pogribnyiy, V. B., Strelnikova, E. A., & Shuvalova, Yu. S. (2014). Chislennoe reshenie uravneniy Nave-Stoksa metodom konechnykh ob'emov na strukturirovannoy setke s gibkimi granitsami. *Vestnik Hersonskogo natsionalnogo tehnikeskogo universiteta*. **3**(50), 413–417.
10. Gnitko, V., Marchenko, U., Naumenko, V., & Strelnikova, E. (2011). Forced Vibrations of Tanks Partially Filled with the Liquid Under Seismic Load. Proceedings of the *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods: XXXIII International Conference* (UK, New Forest, 28-30 June, 2011). Vol. 52: WIT, Transactions on Modelling and Simulation, pp. 285–296.
11. Ibrahim, R. A. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
12. Kligman, E. P., Kligman, I. E., & Matveenکو, V. P. (2005). Spektral'naya zadacha dlya obolochek s zhidkostyu. *Prikladnaya mehanika i tehnikeskaya fizika*. **46**, 6, 128–135.
13. Naumenko, Yu. V., Rozova, L. V., Strelnikova, E. A., & Usatova, O. A. (2019) Metod singulyarnykh integralnykh uravneniy v zadachah kolebaniy zhidkosti v koaksialnykh obolochkah. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnogo universytetu imeni V. N. Karazina. Seriya: Matematychni modeliuvannia. Informatsiini tekhnologii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*. **41**, 65–72.
14. Gnitko, V., Naumenko, Y., & Strelnikova, E. (2017). Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. **22**, 4, 867–881.
15. Eseleva, E. V., Gnitko, V. I., & Strelnikova, E. A. (2006). Sobstvennyie kolebaniya sudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu. *Problemy mashinostroeniya*. **1**, 105–118.
16. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., & Degtyarev, K. (2020). Boundary Element Method in Nonlinear Sloshing Analysis for Shells of Revolution under Longitudinal Excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **111**, 78–87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.
17. Gavrilyuk, I., Lukovsky, I., Trotsenko, Yu., Timokha, A. (2006). Sloshing in a Vertical Circular Cylindrical Tank with an Annular Baffle. Part 1. Linear Fundamental Solutions. *Journal of Engineering Mathematics*. **54**, 71–88.
18. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., & Gnitko, V. (2019). Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. **5**, 31–41.

УДК 519.65

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили  
О.І ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТИОНЕНКО  
Херсонський національний технічний університет

### **«ДУТА» МОДА ЯК КОГНІТИВНА МОДЕЛЬ ПОБУДОВИ ТРИКУТНИКА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ**

*Трикутники відіграють надзвичайно важливу роль в методі скінченних елементів (МСЕ). Робота присвячена дослідженню маловідомих властивостей «дутої» моди – внутрішньої функції десятипараметричного базису поліноміальної інтерполяції трикутного скінченного елемента.*

*«Дуті» моди – це моди, які мають відмінні від нуля амплітуди всередині елемента і амплітуди, що дорівнюють нулю на його сторонах. У методі скінченних елементів внутрішні вузли є небажаними, тому їх виключають разом із відповідними функціями форми. Перший метод виключення наведений у монографії Р. Галлагера і полягає у процедурі конденсації стосовно матриці жорсткості елемента. Другий метод – це безпосередня модифікація функцій форми таким чином, щоб виключити степені вільності, пов'язані з внутрішніми вузлами. Е. Мітчелл наводить приклади виключення внутрішніх вузлів на комплексах і мультиплексах.*

*На трикутному елементі третього порядку десятий вузол в баріцентрі усувають, як правило, за «рецептом» Сьярле-Равьяра. В результаті конденсації (редукції) «дута» мода лишається поза увагою дослідників і не використовується в практичних розрахунках. Ми розглядаємо «дуту» моду як самостійну математичну модель і шляхом когнітивно-графічного аналізу виявляємо маловідомі особливості формоутворення поверхні і корисні аналогії. Доведено існування зв'язків «дутої» моди з поліномами Ерміта-Кунса, квадратурами Гаусса (версія Бернуллі та версія Лежандра), задачею Прандтля про кручення призматичних стержнів.*

*У даній роботі внутрішня мода трикутного скінченного елемента третього порядку, як і решта функцій базису, вперше використовувалась для реалізації поліноміальної інтерполяції функцій двох аргументів в умовах гіпотези Лагранжа. Когнітивно-графічний аналіз поверхні «дутої» моди дозволив більш глибоко проаналізувати всі властивості цієї моделі і відкрив потенціал для створення нових базисів і оптимізації існуючих. Ми маємо чергове підтвердження відомого факту: математика завжди дає більше, ніж від неї очікують. Немає сумніву, що «дута» мода – це яскравий приклад когнітивної моделі.*

*Ключові слова: скінченний елемент третього порядку, «дута» мода, метод перерізів поверхні, когнітивно-графічний аналіз, поліноми Ерміта-Кунса, квадратури Гаусса, задача Прандтля про кручення стержнів.*

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили  
Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО  
Херсонский национальный технический университет

### **«ДУТАЯ» МОДА КАК КОГНИТИВНАЯ МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКА**

*Треугольники играют чрезвычайно важную роль в методе конечных элементов (МКЭ). Работа посвящена исследованию малоизвестных свойств «дутой» моды – внутренней функции десятипараметрического базиса полиномиальной интерполяции треугольного конечного элемента.*

«Дутые» моды – это моды, которые имеют отличные от нуля амплитуды внутри элемента и амплитуды, которые равны нулю на его сторонах. В методе конечных элементов внутренние узлы нежелательны, поэтому их исключают вместе с соответствующими функциями формы. Первый метод исключения приведен в монографии Р. Галлагера и состоит в процедуре конденсации относительно матрицы жесткости элемента. Второй метод – это непосредственная модификация функций формы таким образом, чтобы исключить степени свободы, связанные с внутренними узлами. Э. Митчелл приводит примеры исключения внутренних узлов на комплексах и мультиплексах.

На треугольном элементе третьего порядка десятый узел в барицентре исключают, как правило, по «рецепту» Сьярле-Равьяра. В результате конденсации (редукции) «дутая» мода остается без внимания исследователей и не используется в практических расчетах. Мы рассматриваем «дутую» моду как самостоятельную математическую модель и путем когнитивно-графического анализа обнаруживаем малоизвестные особенности формообразования поверхности и полезные аналогии. Доказано существования связей «дутой» моды с полиномами Эрмита-Кунса, квадратурами Гаусса (версия Бернулли и версия Лежандра), задачей Прандтля о кручении призматических стержней.

В данной работе внутренняя мода треугольного конечного элемента третьего порядка, как и другие функции базиса, впервые использовалась для реализации полиномиальной интерполяции функций двух аргументов в условиях гипотезы Лагранжа. Когнитивно-графический анализ поверхности «дутой» моды позволил более глубоко проанализировать все свойства этой модели и открыл потенциал для создания новых базисов и оптимизации существующих. Мы имеем очередное подтверждение известного факта: математика всегда дает больше, чем от неё ожидают. Нет сомнения, что «дутая» мода – это яркий пример когнитивной модели.

Ключевые слова: конечный элемент третьего порядка, «дутая» мода, метод сечений поверхности, когнитивно-графический анализ, полиномы Эрмита-Кунса, квадратуры Гаусса, задача Прандтля о кручении стержней.

A.N. KHOMCHENKO  
Petro Mohyla Black Sea National University  
O.I. LYTVYNNENKO, I.O. ASTIONENKO  
Kherson National Technical University

### **'BLOWN' MODE AS COGNITIVE MODEL OF BUILDING THE TRIANGLE OF THIRD ORDER**

*Triangles play an extremely important role in the finite element method (FEM). The work is devoted to the investigation of the little-known properties of the 'blown' mode – the internal function of the ten-parameter basis of the polynomial interpolation of a triangular finite element.*

*'Blown' modes are modes that have non-zero amplitudes inside the element and amplitudes equal to zero on its sides. The internal nodes are undesirable in the finite element method, so they are excluded along with the respective shape functions. The first method of exclusion is given in R. Gallagher's monograph and involves the condensation procedure with respect to the stiffness matrix of the element. The second method is to directly modify the functions of the form in such a way as to eliminate the degrees of freedom associated with the internal nodes. E. Mitchell gives examples of excluding internal nodes on complexes and multiplexes.*

*On the triangular element of the third order the tenth node in the barycenter is eliminated, as a rule, according to the 'recipe' of Ciarlet Raviart. As a result of condensation (reduction) the 'blown' mode remains unaddressed by researchers and is not used in practical calculations. We consider 'blown' mode as an independent mathematical model and by cognitive-graphical analysis we discover little-known features of surface formation and useful analogies. The existence of links of the 'blown' mode with Hermite-Koons polynomials, Gauss quadratures (Bernoulli's version and Legendre's version), and Prandtl's problem of prismatic rods torsion is proved.*

*In this work the internal mode of a triangular finite element of the third order, like the rest of the basis functions, was first used to realize the polynomial interpolation of the functions of two arguments under the conditions of the Lagrange hypothesis. Cognitive-graphical analysis of the surface of the 'blown' mode allowed to analyze more deeply all the properties of this model and opened the potential to create new bases and optimize existing ones. We have another confirmation of the well-known fact: mathematics always gives more than expected. There is no doubt that 'blown' mode is a bright example of a cognitive model.*

*Keywords: finite element of the third order, 'blown' mode, method of surface cuttings, cognitive-graphical analysis, Hermite-Koons polynomials, Gauss quadratures, Prandtl's problem of rods torsion.*

### **Постановка проблеми**

Трикутники відіграють надзвичайно важливу роль в методі скінченних елементів (МСЕ). Достатньо згадати трикутник Куранта (1943) і комірку Куранта із шести трикутників. Цікаво, що трикутні СЕ мають тісний зв'язок із трикутними числами Піфагора. Через 25 століть сучасний МСЕ успішно використовує трикутні СЕ першого порядку – симплекси (три вузли у вершинах), другого порядку (шість вузлів: три у вершинах і три на середині сторін), третього порядку (десять вузлів: дев'ять вузлів рівномірно розташовані по периметру, включаючи вершини, десятий вузол в барицентрі трикутника).

Привертає увагу поява внутрішнього вузла. До речі, внутрішній вузол виникає не тільки в процедурах інтерполяції за Лагранжем (усі вузли прості), але і в моделях Ерміта-Кунса (з кратними вузлами у вершинах). Проблема небажаних внутрішніх вузлів виникає і на квадратних СЕ [17]. Саме тому з'явилися процедури конденсації (редукції), які разом із внутрішнім вузлом усувають і відповідну базисну функцію. Таким чином, функція впливу («дута» мода), що асоціюється з барицентром СЕ, лишається поза увагою дослідників. Це проблема, тому що оригінальний рельєф таких поверхонь часто приховує цікаву інформацію, яка виходить за рамки класичної задачі відновлення функції двох аргументів. Це буде проілюстровано на прикладі «дутої» моди трикутного СЕ третього порядку.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Ми розглядаємо десятку базисну функцію трикутника третього порядку («дуту» моду) як самостійну математичну модель, як приклад формоутворення поверхні, що нагадує мильну плівку на трикутному контурі. Немає сумніву, що «дута» мода – це яскравий приклад когнітивної моделі, але з цієї точки зору вона ще не розглядалася, принаймні в МСЕ. Зрозуміло, що наші посилання будуть обмежені джерелами, в яких йдеться взагалі про трикутні СЕ, зокрема, про трикутник третього порядку. Поліноми третього порядку, зазвичай, будують на основі певної інтерполяційної гіпотези, яка впливає на кількість вузлів СЕ. Практичне застосування трикутників в задачах відновлення функцій починалося з лагранжевих моделей (десять параметрів полінома і десять вузлів). Інформацію про такі СЕ можна знайти в [1–6]. В задачах згину пластин поширені ермітові моделі (параметрів – десять, вузлів – чотири: три вузла в вершинах і



один в барицентрі). Ці моделі використовують не тільки значення функції у вузлах, але і значення перших похідних по  $x$  та  $y$  (тільки у кутах). Про ермітові трикутники можна прочитати в [6–11]. Важливо, що локальна степінь вільності («дута» мода) має місце в обох випадках. Ця функція необхідна для створення базису десятипараметричної інтерполяції. Але після цього десяту функцію усувають, наприклад, за «рецептом» конденсації Сьярле-Равьяра [2]. В нашій роботі ми шукаємо побічні корисні властивості «дутої» моди, усуваючи решту базисних функцій трикутника. Когнітивно-графічний аналіз «дутої» моди виконується вперше.

### Мета дослідження

**Мета дослідження** – побудувати геометрично базисну функцію («дута» моду) трикутного скінченного елемента третього порядку. Шляхом когнітивно-графічного аналізу встановити цікаві і корисні властивості поверхні, які виявляють додаткові характеристики адекватності моделі.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Не порушуючи загальності, будемо розглядати правильний трикутник. Ця модель дуже зручна і корисна в процедурах паркетування, в задачах чистого кручення призматичних стержнів. У МСЕ саме правильний трикутник забезпечує мінімальну похибку в розрахунках [9, 10]. На рис. 1 в системі прямокутних координат  $Ox$  зображено трикутник, вписаний в коло  $R = 1$ .

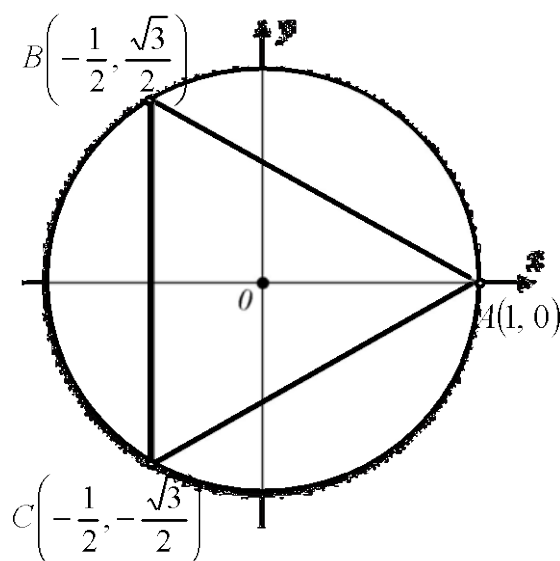


Рис. 1. Трикутний СЕ з внутрішнім вузлом в барицентрі  $(0; 0)$ .

У центрі нашої уваги десятий вузол в барицентрі трикутника  $(0; 0)$ . Інші дев'ять вузлів (вони не розглядаються) розташовані рівномірно (включаючи вершини) на границі СЕ. Традиційно побудова базису СЕ передбачає складання та розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею  $10 \times 10$ . Якщо нам потрібна лише одна функція (внутрішня мода), її можна сконструювати геометрично. Це нагадує метод Уачспреса [12] (product of planes). Головне – не порушувати умови інтерполяційної гіпотези Лагранжа: «дута» мода дорівнює 1 в барицентрі і 0 – на границі трикутника (тобто в будь-якому іншому вузлі). Запишемо рівняння сторін СЕ:

$$(AB): -x - \sqrt{3}y + 1 = 0; \quad (BC): 2x + 1 = 0; \quad (AC): -x + \sqrt{3}y + 1 = 0.$$

Поверхня, що проходить через точку  $(0; 0; 1)$  і «захоплює» контур трикутника, моделюється прямим перемноженням рівнянь трьох площин (граней піраміди):

$$f(x, y) = 1 + 2x(x^2 - 3y^2) - 3(x^2 + y^2). \quad (1)$$

В барицентричних координатах Мьобіуса ця поверхня виглядає так [1–3]:

$$N_0(x, y) = 27L_1 \cdot L_2 \cdot L_3,$$

де  $L_i(x, y)$  – барицентричні координати симплекса.

До речі, якщо скористатися зв'язком між барицентричними і декартовими координатами, можна після деяких перетворень отримати рівняння (1). Зацікавлений читач може самостійно побудувати 3D-зображення поверхні  $f(x, y)$ , щоб зрозуміти, чому Галлагер [11] називає її «дутою». Можна дізнатися більше про те, що приховує рівняння (1). Для цього ми скористалися відомим методом перерізів. На рис. 2.а зображено переріз поверхні (1) площиною  $y = 0$ . Неважко впізнати кубічний поліном Кунса [13, 14, 15, 16]:

$$f(x, 0) = 1 + 2x^3 - 3x^2, \quad (2)$$

який досліджував ще Ерміт, а до нього Чебишев. Кунс успішно використовує фрагмент кривої на канонічному відрізку  $[0; 1]$  і, головне, розповсюджує ідеї попередників на інтерполяцію функцій двох аргументів. Якщо уважно придивитися до кубічної параболи Чебишева-Ерміта-Кунса, з'явиться можливість додати ще Лагранжа, Бернуллі і Гаусса. Теорема Лагранжа про середнє значення функції, яка диференційована на відрізку  $[0; 1]$  має вигляд:

$$\frac{f(1; 0) - f(0; 0)}{+1} = f'(c; 0),$$

або  $6c^2 - 6c = -1$ , звідки  $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$  і  $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

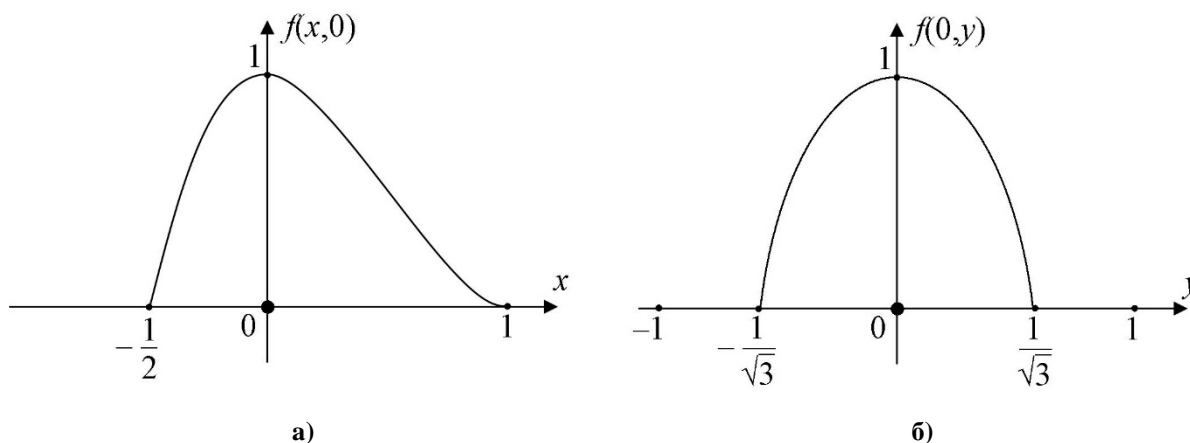


Рис. 2. а) переріз поверхні  $f(x, y)$  площиною  $y=0$ ; б) переріз поверхні  $f(x, y)$  площиною  $x=0$ .

Точки  $c_1, c_2$  – нулі полінома Бернуллі другого порядку – використовують як вузли інтегрування квадратурної формули Гаусса:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \approx \frac{1}{2}(\varphi(c_1) + \varphi(c_2)).$$

На рис. 2.6 зображено переріз поверхні (1) площиною  $x=0$ . Це квадратична парабола:

$$f(0; y) = 1 - 3y^2.$$

У цьому випадку ми отримуємо дві відомі точки:  $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  і  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  – нулі полінома Лежандра другого порядку, які використовують як вузли інтегрування квадратури Гаусса на  $[-1; 1]$ :

$$\int_{-1}^1 \varphi(y) dy \approx \varphi(c_1) + \varphi(c_2).$$

Читач, знайомий з мембранною аналогією Прандтля [1], помітив, що функція (1) нагадує поверхню напруження в теорії кручення стержнів некругового перерізу. Функція напруження Прандтля задовольняє рівнянню Пуассона зі спеціальною правою частиною:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2. \quad (3)$$

При нульових значеннях функції на границі:

$$F(x, y)|_r = 0. \quad (4)$$

Для «дутої» моди умова (4) виконується за означенням. Тепер її зовсім просто зробити розв'язком рівняння Пуассона, якщо «стиснути» поверхню (1) вздовж  $Oz$  із коефіцієнтом  $\frac{1}{6}$ . Таким чином, функція напруження Прандтля для стержня з трикутним перерізом має вигляд:

$$F(x, y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x(x^2 - 3y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (5)$$

Існує ймовірнісна інтерпретація функції Прандтля, яку відкрив у 1953 р. математик із США Дж. Дуб.

### Висновки

Внутрішня мода трикутного скінченного елемента третього порядку, як і решта функцій базису, створювалася для реалізації поліноміальної інтерполяції функцій двох аргументів в умовах гіпотези Лагранжа. З цієї точки зору усі десять поліномів безумовно адекватні. Когнітивно-графічний аналіз поверхні «дутої» моди відкрив деякі

«таємниці» цієї моделі. Несподівані результати свідчать про існування надлишкового нереалізованого потенціалу адекватності. Ми маємо чергове підтвердження відомого факту: математика завжди дає більше, ніж від неї очікують. Цікаво проаналізувати «дуту» моду біквадратичного СЕ (дев'ять вузлів), але це тема наступної публікації.

### Список використаної літератури

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
2. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981. 216 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
4. Норри Д. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
5. Немчинов Ю. И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов): монография. К.: Будівельник, 1980. 231 с.
6. Деклу Ж. Метод конечных элементов: монография. М.: Мир, 1976. 95 с.
7. Стренг Г. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 350 с.
8. Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: монография. М.: Стройиздат, 1983. 488 с.
9. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений: монография. / Городецкий А.С., Заворицкий В.И., Лантух-Лященко А.И., Рассказов А.О. М.: Транспорт, 1981. 143 с.
10. Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам: монография. М.: Стройиздат, 1977. 132 с.
11. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
12. Wachspress E. I. A rational finite element basis. New York: Academic Press, 1975. 344 p.
13. Хомченко А. Н., Козуб Н. А. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность. *Проблеми інформаційних технологій*. 2009. Вип. 5. С. 145–148.
14. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. Когнитивно-графический анализ кривых Эрмита-Кунса 5-го порядка. *Системні технології*. 2016. Вип. 3 (104) С. 73–78.
15. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. Коноїди Ерміта-Кунса та їх властивості. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. Вип. 3 (66). Т.1. С.193–198.
16. Astionenko, I. O, Litvinenko, O. I., Osipova, N. V., Tuluchenko, G. Ya., & Khomchenko, A. N. (2016). Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *AIP Conference Proceedings Report*. **1773**, 1, 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
17. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. Фізично адекватна конденсація і мішані моделі серендипових елементів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2. № 1. С. 141–148. DOI: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-12>

### References

1. Segerlind, L. (1979). *Primenenie metoda konechnyih elementov*. М.: Mir.
2. Mitchell, E. (1981). *Metod konechnyih elementov dlya uravneniy s chastnyimi proizvodnyimi*. М.: Mir.
3. Zenkevich, O. (1975). *Metod konechnyih elementov v tehnikе*. М.: Mir.
4. Norri D. (1981). *Vvedenie v metod konechnyih elementov*. М.: Mir.

5. Nemchinov, Yu. I. (1980). Raschet prostranstvennykh konstruktsiy (metod konechnykh elementov): monografiya. K.: BudIvelnik.
6. Deklu, Zh. (1976). Metod konechnykh elementov: monografiya. M.: Mir.
7. Streng, G. (1977). Teoriya metoda konechnykh elementov. M.: Mir.
8. Aleksandrov, A. V., Laschenikov, B. Ya., & Shaposhnikov, N. N. (1983). Stroitel'naya mehanika. Tonkostennyye prostranstvennyye sistemy: monografiya. M.: Stroyizdat.
9. Gorodetskiy, A. S., Zavoritskiy, V. I., Lantuh-Lyaschenko, A. I., & Rasskazov, A. O. (1981). Metod konechnykh elementov v proektirovanii transportnykh sooruzheniy: monografiya. M.: Transport.
10. Rozin, L. A. (1977). Metod konechnykh elementov v primeneni k uprugim sistemam: monografiya. M.: Stroyizdat.
11. Gallager, R. (1984). Metod konechnykh elementov. Osnovy. M.: Mir.
12. Wachspress, E. I. (1975). A rational finite element basis. New York: Academic Press.
13. Homchenko, A. N., & Kozub, N. A. (2009). Interpolyatsiya po Kunsu i geometricheskaya veroyatnost. *Problemi InformatsIynih tehnologIy*. **5**, 145–148.
14. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I., & Khomchenko, A. N. (2016). Kognitivno-graficheskyy analiz krivykh Ermita-Kunsa 5-go poryadka. *Systemni tehnologiyi*. **3** (104), 73–78.
15. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O. I., & Astionenko, I. O. (2018). Konoidy Ermita-Kunsa ta yikh vlastyvoli. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **3**(66), 1, 193–198.
16. Astionenko, I. O., Litvinenko, O. I., Osipova, N. V., Tuluchenko, G. Ya., & Khomchenko, A. N. (2016). Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. AIP Conference Proceedings Report. **1773**, 1, 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
17. Khomchenko A. N., Lytvynenko O. I., Astionenko I. O. (2019). Fizychno adekvatna kondensatsiia i mishani modeli serendypovykh elementiv. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. **2**, 1, 141–148. DOI: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-12>

**ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ  
до наукового журналу  
«Прикладні питання математичного моделювання»**

**Параметри файлу:**

**Рукопис** повинен бути підготовлений за допомогою Microsoft Word-2003/2016; **формат сторінки** – А4, **орієнтація сторінки** – "книжкова"; **границі**: ліва – 2,5 см; права – 2,5 см; верхня – 2,5 см; нижня – 2,5 см; **інтервал між рядками** – 1,0; **інтервал між абзацами** "до", "після" – 0 пт.; **відступи** "ліворуч", "праворуч" – 0 пт.; **відступ першого рядка** – 1,25 см.

**Обов'язкові елементи статті:**

**УВАГА!** Блок «Відомості про авторів», «Назва статті», «Анотація» та «Перелік ключових слів» подається ТРЬОМА мовами (українською, англійською, російською) послідовно з однаковим форматкуванням.  
Перша анотація подається мовою статті.  
Текст анотацій всіма трьома мовами має бути ідентичний.  
Розмір анотацій – не менше 1800 знаків без пробілів.

- **індекс УДК** у верхньому лівому куті сторінки (Times New Roman, 12 пт.), **вказується один раз**;
- **ініціали і прізвище автора (авторів)** великими літерами (Times New Roman, 12 пт., вирівнювання – по правому краю) (на англійську ПІБ авторів перекладається з української мови);
- **повна назва організації**, де працює автор (Times New Roman, 10 пт., по правому краю);
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.);
- **назва статті** великими літерами, по центру (Times New Roman, 12 пт., жирний);
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.);
- **анотація** (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- **перелік ключових слів**, який починається зі слів: "Ключові слова:" (або "Ключевые слова:", "Keywords:") (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.).

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Основний текст статті (Times New Roman, 12 пт.), який, у відповідності до вимог МОН України, **обов'язково** повинен містити такі виділені елементи:

- Постановка проблеми;
- Аналіз останніх досліджень і публікацій;
- Мета дослідження;
- Викладення основного матеріалу дослідження;
- Висновки;
- Список використаної літератури;
- References.
- **інформацію про авторів (див. Зразок оформлення статті).**

**Додаткові вимоги до елементів статті:**

- **Рисунки**: підписи під рисунками – Times New Roman, 10 пт., жирний;
- **Формули**: для набору використовувати редактор формул Microsoft Equation 3.0 або MathType; формули по центру; нумерація формул – по правому краю;  
*Розміри формул за замовчуванням*: звичайний символ – 12 пт; великий індекс – 7 пт; маленький індекс – 5 пт; великий символ – 18 пт; маленький символ – 12 пт.
- **Програми**: для набору фрагментів використовувати шрифти Courier New (Courier);
- **Список літератури**: оформлюється у відповідності до вимог ДСТУ 8302:2015 "Інформація та документація. Бібліографічне посилання. Загальні вимоги та правила складання"; (<http://lib.pu.if.ua/files/dstu-8302-2015.pdf>);
- **References**: оформлюються за правилами транслітерації англійською мовою з української/російської мов.

Для транслітерації пропонуємо скористатися наступними ресурсами:

- транслітерація з російської мови: <http://translate.meta.ua/ru/translit/>
- транслітерація з української мови: <http://ukrlit.org/transliteratsiia>

## **ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ**

(Зразок складено з уривків окремих публікацій, автори є вигаданими особами)

УДК XXX.XX

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет  
О.І. КОВАЛЕНКО  
Херсонський державний університет

### **ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ**

*Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень...*

*Ключові слова: процедура побудови розкладу, картковий метод...*

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонский национальный технический университет  
А.И. КОВАЛЕНКО  
Херсонский государственный университет

### **СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ**

*Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний. В общей постановке она является процессом упорядочивания некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений ...*

*Ключевые слова: процедура построения расписания, карточный метод...*

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO  
Kherson National Technical University  
O.I. KOVALENKO  
Kherson State University

### **THE PROPERTIES OF SCHEDULE CONSTRUCTION PROCEDURE**

*The properties of the schedule construction procedure, which formalizes the card method for manual scheduling, are considered. In the general formulation it is a process of ordering a certain finite set of events in time under resource and other constraints ...*

*Keywords: the schedule construction procedure, card method...*

### **Постановка проблеми**

Задача складання розкладу є однією з найбільш розповсюджених задач, які вирішує кожна людина практично кожний день. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Аналіз існуючих методів розв'язання задачі складання розкладу занять показує, що розв'язання задач теорії розкладів має відому складність. За змістом ці задачі відносяться до класу комбінаторних, для яких суттєве значення має розмірність...

### Мета дослідження

Метою даного дослідження є автоматизація складання розкладу занять для системи дистанційного навчання з врахуванням завантаженості викладацького складу. Якість навчання, його економічна ефективність, зручність навчання студентів і роботи професорсько-викладацького складу залежить від вдало складеного розкладу.

...

### Висновки

Під час виконання роботи було розроблено власний математичний метод для складання розкладу, а саме було визначено ряд обмежень, які враховуються при складанні розкладу, створено цільову функцію для оцінки придатності ...

### Список використаної літератури

1. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
2. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 5. С. 95–106.
3. Тимофієва Н. К. Один спосіб моделювання інтелекту людини з використанням комбінаторного аналізу. *Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту. (ISDMCI'2014): матеріали X Міжнародної наукової конференції (Залізний Порт, 1923 травня 2014 р.)*. Херсон, 2014. С. 180-182.
4. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... д-ра. техн. наук. Київ, 2007. 32 с.

### References

1. Mokin, B. I., Mokin, V. B., & Mokin, O. B. (2010). Matematychni metody identyfikatsii dynamichnykh system. Vinnytsia: VNTU.
2. Kvasnytsia, H., & Shynkarenko, H. (2002). Adaptivni aproksymatsii metodu skinchennykh elementiv dlia zadach elastostatyky. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Seria: Prykladna matematika ta informatyka*. 5, 95–106.
3. Tymofiiieva, N. K. (2014) Odyn sposib modeliuвання intelektu liudyny z vykorystanniam kombinatornoho analiz. Proceedings of the *Intelektualni systemy pryiniattia rishen ta problemy obchysliuvalnoho intelektu. (ISDMCI'2014) : materialy X Mizhnarodnoi naukovoї konferentsii*. (Ukraine, Zaliznyi Port, May 28-31, 2014), Kherson, pp. 180–182.
4. Tymofiiieva, N. K. (2007). Teoretyko-chyslovi metody rozv'язannia zadach kombinatornoї optymizatsii. (Extended abstract of Doctor's thesis), Kyiv: In-t kibernetiky im. V.M. Hlushkova NAN Ukrainy.

Кравченко Віктор Вікторович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: [kravchenko@gmail.com](mailto:kravchenko@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Онопенко Сергій Васильович – аспірант кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету, e-mail: [onopenko@ukr.net](mailto:onopenko@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5196-5301.

Коваленко Олександр Іванович – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформатики Херсонського державного університету, e-mail: [kovalenko@i.ua](mailto:kovalenko@i.ua), ORCID: 0000-0002-6196-540.



**ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ**  
**для научного журнала**  
**«Прикладные вопросы математического моделирования»**

**Параметры файла:**

**Рукопись** должна быть подготовлена за помощью Microsoft Word-2003/2016; **формат страницы** – А4, **ориентация страницы** – "книжная"; **границы**: левая – 2,5 см; правая – 2,5 см; верхняя – 2,5 см; нижняя – 2,5 см; **интервал между строками** – 1,0; **интервал между абзацами** "до", "после" – 0 пт.; **отступы** "слева", "справа" – 0 пт.; **отступ первой строки** – 1,25 см.

**Обязательные элементы статьи:**

Внимание! Блок «Сведения об авторах», «Название статьи», «Аннотация» и «Список ключевых слов» представляется на ТРЕХ языках (украинском, английском, русском) последовательно с одинаковым форматированием.  
Первая аннотация дается на языке статьи.  
Текст аннотаций на всех трех языках должен быть идентичным.  
Размер аннотаций – не меньше 1800 знаков без пробелов.

- **индекс УДК** в верхнем левом углу страницы (Times New Roman, 12 пт.), **указывается один раз**;
- **инициалы и фамилия автора (авторов)** большими буквами на языке статьи (Times New Roman, 12 пт., выравнивание – по правому краю) (на английский язык ФИО авторов переводится с украинского языка);
- **полное название организации**, где работает автор (Times New Roman, 10 пт., по правому краю);
- *пустая строка* (Times New Roman, 12 пт.);
- **название статьи** большими буквами, по центру (Times New Roman, 12 пт., жирный);
- *пустая строка* (Times New Roman, 12 пт.);
- **аннотация** (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- **список ключевых слов**, который начинается со слов: "Ключевые слова:" (или "Ключові слова:") (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- *пустая строка* (Times New Roman, 12 пт.);

**Изложение основного материала исследования**

Основной текст статьи (Times New Roman, 12 пт.), который, согласно требований МОН Украины, **обязательно** должен содержать такие выделенные элементы:

- Постановка проблемы;
- Анализ последних исследований и публикаций;
- Цель исследования;
- Изложение основного материала исследования;
- Выводы;
- Список использованной литературы;
- References.
- **информацию об авторах (см. Образец оформления статьи).**

**Дополнительные требования к элементам статьи:**

- **Рисунки**: подписи под рисунками – Times New Roman, 10 пт., жирный;
- **Формулы**: для набора использовать редактор формул Microsoft Equation 3.0 или MathType; формулы по центру; нумерация формул – по правому краю;  
*Размеры по умолчанию: обычный символ – 12 пт; большой индекс – 7 пт; маленький индекс – 5 пт; большой символ – 18 пт; маленький символ – 12 пт.*
- **Программы**: для набора фрагментов использовать шрифты Courier New (Courier);
- **Список литературы**: оформляется согласно требований ДСТУ 8302:2015 "Информация и документация. Библиографические ссылки. Общие требования и правила составления"; (<http://lib.pu.if.ua/files/dstu-8302-2015.pdf>)
- **References**: оформляются по правилам транслитерации с украинского/русского языка на английский язык.
  - Для транслитерации предлагаем воспользоваться такими ресурсами:
  - транслитерация с русского языка: <http://translate.meta.ua/ru/translit/>
  - транслитерация с украинского языка: <http://ukrlit.org/transliteratsiia>

## **ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ**

(Образец составлен из отрывков разных публикаций, авторы являются вымышленными личностями)

УДК XXX.XX

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонский национальный технический университет  
А.И. КОВАЛЕНКО  
Херсонский государственный университет

### **СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ**

*Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний. В общей постановке она является процессом упорядочивания некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений ...*

*Ключевые слова: процедура построения расписания, карточный метод...*

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет  
О.І. КОВАЛЕНКО  
Херсонський державний університет

### **ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ**

*Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень...*

*Ключові слова: процедура побудови розкладу, картковий метод...*

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO  
Kherson National Technical University  
O.I. KOVALENKO  
Kherson State University

### **THE PROPERTIES OF SCHEDULE CONSTRUCTION PROCEDURE**

*The properties of the schedule construction procedure, which formalizes the card method for manual scheduling, are considered. In the general formulation it is a process of ordering a certain finite set of events in time under resource and other constraints ...*

*Keywords: the schedule construction procedure, card method...*

#### **Постановка проблемы**

Задача составления расписания является одной из наиболее распространенных задач, которые решает каждый человек практически каждый день. В общей постановке она является процессом упорядочения некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений.

### Анализ последних исследований и публикаций

Анализ существующих методов решения задачи составления расписания занятий показывает, что решение задач теории расписаний имеет известную сложность. По содержанию эти задачи относятся к классу комбинаторных, для которых существенное значение имеет размерность ...

### Цель исследования

Целью данного исследования является автоматизация составления расписания занятий для системы дистанционного обучения с учетом загруженности преподавательского состава. Качество обучения, его экономическая эффективность, удобство обучения студентов и работы профессорско-преподавательского состава зависит от удачно составленного расписания.

...

### Выводы

Во время выполнения работы был разработан собственный математический метод для составления расписания, а именно был определен ряд ограничений, которые учитываются при составлении расписания, создана целевая функция для оценки пригодности ...

### Список использованной литературы

1. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
2. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 5. С. 95–106.
3. Тимофієва Н. К. Один спосіб моделювання інтелекту людини з використанням комбінаторного аналізу. *Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту. (ISDMCF'2014)*: матеріали X Міжнародної наукової конференції (Залізний Порт, 1923 травня 2014 р.). Херсон, 2014. С. 180-182.
4. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... д-ра. техн. наук. Київ, 2007. 32 с.

### References

1. Mokin, B. I., Mokin, V. B., & Mokin, O. B. (2010). *Matematychni metody identyfikatsii dynamichnykh system*. Vinnytsia: VNTU.
2. Kvasnytsia, H., & Shynkarenko, H. (2002). *Adaptyvni aproksymatsii metodu skinchennykh elementiv dlia zadach elastostatyky. Visnyk Lvivskoho universytetu. Seria: Prykladna matematyka ta informatyka*. 5, 95–106.
3. Tymofiiieva, N. K. (2014) *Odyn sposib modeliuвання intelektu liudyny z vykorystanniam kombinatornoho analiz. Proceedings of the Intelektualni systemy pryiniattia rishen ta problemy obchysliuvalnoho intelektu. (ISDMCF'2014) : materialy X Mizhnarodnoi naukovoї konferentsii. (Ukraine, Zaliznyi Port, May 28-31, 2014), Kherson, pp. 180–182.*
4. Tymofiiieva, N. K. (2007). *Teoretyko-chyslovi metody rozv'iazannia zadach kombinatornoї optymizatsii. (Extended abstract of Doctor's thesis)*, Kyiv: In-t kibernetiky im. V.M. Hlushkova NAN Ukrainy.

Кравченко Виктор Викторович – д.ф.-м.н., профессор. профессор кафедры математического моделирования Херсонского национального технического университета, e-mail: [kravchenko@gmail.com](mailto:kravchenko@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Онопенко Сергей Васильевич – аспирант кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета, e-mail: [onopenko@ukr.net](mailto:onopenko@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5196-5301.

Коваленко Александр Иванович – к.т.н., доцент, доцент кафедры информатики Херсонского государственного университета, e-mail: [kovalenko@i.ua](mailto:kovalenko@i.ua), ORCID: 0000-0002-6196-540.

**ARTICLE SUBMISSION GUIDELINES**  
for scientific journal  
**'Applied Questions of Mathematical Modelling'**

**File parameters:**

The manuscript must be prepared with help of Microsoft Word-2003/2016; **page format** – A4, **page orientation** – "book"; **boundaries:** left – 2,5 cm; right – 2,5 cm; top – 2,5 cm; bottom – 2,5 cm; **line spacing** – 1,0; **interval between paragraphs** "before", "after" – 0 pt.; **ident** "left", "right" – 0 pt.; **ident of first line** – 1,25 cm.

**Required elements of the article:**

Attention! Unit 'Authors Details', 'Article Title', 'Abstract', and 'Keyword Lis't are presented in THREE languages (Ukrainian, English, Russian) in the same format.  
The first abstract is given in the language of the article.  
The text of the annotations in all three languages should be identical.  
Annotation size is at least 1800 characters without spaces.

- **index UDK** in the top left corner of the page (Times New Roman, 12 pt.), **is specified once**;
- **the initials and surname of author (authors)** in capital letters by article language (Times New Roman, 12 pt., alignment – right-aligned) (The authors' full name is translated from Ukrainian into English);
- **full name of the organization**, in which author works (Times New Roman, 10 pt., right-aligned);
- *empty line* (Times New Roman, 12 pt.);
- **the title of the article** in capital letters, centered (Times New Roman, 12 pt., bold);
- *empty line* (Times New Roman, 12 pt.);
- **abstract** in article language no less than 500 symbols (Times New Roman, 12 pt., italic);
- **a list of key words** that begins with the words: "*Keywords:*" (Times New Roman, 12 pt., italic);
- *empty line* (Times New Roman, 12 pt.);

**Description of Main Material of Research**

The main text (Times New Roman, 12 pt.), which, in accordance with the requirements of MES of Ukraine, must contain the following selected items:

- Problem Statement;
- Analysis of Recent Researches and Publications;
- Purpose of the Study;
- Description of Main Material of Research;
- Conclusions;
- References.
- **information about the authors (see A Sample of the Article).**

**Додаткові вимоги до елементів статті:**

- **Pictures:** the captions under the pictures – Times New Roman, 10 pt., bold;
- **Formulas:** for typing formulas use only equation editor Microsoft Equation 3.0 or MathType; formula is on the line center; the numbering of formulas is on the right edge.  
*Sizes by default: Full – 12 pt; Subscript/Superscript – 7 pt; Sub-Subscript/Superscript – 5 pt; Symbol – 18 pt; Sub-symbol – 12 pt.*
- **Programs:** for a set of fragments of the programs one should use the fonts Courier New (Courier);
- **References:** references for article in English is made in accordance with APA Style.

We suggest you use the following resources for transliteration:

- transliteration from Ukrainian: <http://ukrlit.org/transliteratsiia>
- transliteration from Russian: <http://translate.meta.ua/ru/translit/>

## **A SAMPLE OF THE ARTICLE**

(The sample is composed of excerpts from various publications, the authors are fictitious personalities)

UDC XXX.XX

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO  
Kherson National Technical University  
O.I. KOVALENKO  
Kherson State University

### **THE PROPERTIES OF SCHEDULE CONSTRUCTION PROCEDURE**

*The properties of the schedule construction procedure, which formalizes the card method for manual scheduling, are considered. In the general formulation it is a process of ordering a certain finite set of events in time under resource and other constraints ...*

*Keywords: the schedule construction procedure, card method...*

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет  
О.І. КОВАЛЕНКО  
Херсонський державний університет

### **ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ**

*Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень...*

*Ключові слова: процедура побудови розкладу, картковий метод...*

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО  
Херсонський національний технічний університет  
А.І. КОВАЛЕНКО  
Херсонський державний університет

### **СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ**

*Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний. В общей постановке она является процессом упорядочивания некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений ...*

*Ключевые слова: процедура построения расписания, карточный метод...*

#### **Problem Statement**

The task of scheduling is one of the most common tasks that every person solves almost every day. In a general setting, it is a process of ordering a finite set of events over time under resource and other constraints.

#### **Analysis of Recent Researches and Publications**

An analysis of existing methods for solving the problem of classes scheduling shows that the solution of tasks from the theory of schedules has a known complexity. In content, these tasks belong to the class of combinatorial ones, for which dimension is essential ...

### **Purpose of the Study**

The purpose of this study is an automation of classes scheduling for the distance learning system, taking into account the workload of the teaching staff. The quality of training, its economic efficiency, the convenience of students teaching and the work of the faculty members depends on a well-established schedule.

...

### **Conclusions**

During the execution of the research, our own mathematical method was developed for scheduling, namely, a number of restrictions were determined that are taken into account when scheduling, the objective function was created to assess suitability ...

### **References**

1. Ibrahim, R. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press.
2. Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenko, V. P. (2015). Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*, **90**, 12–22. DOI: 10.1142/S0219455415500765
3. Gultom, J. H., Harsono, M., Khameswara, T. D., & Santoso, H. (2017). Smart IoT Water Sprinkle and Monitoring System for Chili Plant. Proceedings of the *International Conference on Electrical Engineering and Computer Science (ICECOS)*. (Indonesia, Palembang, August 22-23, 2017). Palembang: Book Publishing, pp. 212–216. DOI: 10.1109/ICECOS.2017.8167136
4. Tymofiieva, N. K. (2007). *Theoretical and Numerical Methods for Solving Combinatorial Optimization Problems*. (Extended abstract of Doctor's thesis), Kyiv: V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine.

...

Kravchenko Victor Viktorovich – Doctor of Engineering Science, professor, professor at the Department of Mathematical Modelling of Kherson National Technical University, [kravchenko@gmail.com](mailto:kravchenko@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Onopenko Serhii Vasylovych – postgraduate student at the Department of Technical Cybernetics of Kherson National Technical University, [onopenko@ukr.net](mailto:onopenko@ukr.net), ORCID: 0000-0002-5196-5301.

Kovalenko Oleksandr Ivanovych – PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Department of the Informatics of Kherson State University, [kovalenko@yandex.ua](mailto:kovalenko@yandex.ua), ORCID: 0000-0002-6196-540.

# ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Відповідальний за випуск	Хомченко Анатолій Никифорович, д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України
Технічний редактор	Литвиненко Олена Іванівна, к.т.н., доцент
Макетування	Омельчук Антон Анатолійович, к.т.н.

Свідоцтво про державну реєстрацію засобу масової інформації –  
серія КВ № 23529-13369Р от 03.08.2018

Підписано до друку 24.12.2019 р. Формат 60x84/8 Папір  
офсетний. Ум. друк. аркушів 14,88. Замовлення № 03/0120.  
Наклад 120 прим.

© Херсонський національний технічний університет 2019

Адреса редакції: 73008, м. Херсон, Бериславське шосе, 24, корп. 3,  
каб. 425, тел. (0552) 32-69-95. E-mail: aqmm@kntu.net.ua

---

Видавництво та друк: «ОЛДІ-ПЛЮС»  
вул. Паровозна, 46-А, м. Херсон, 73034  
Свідоцтво ДК № 6532 від 13.12.2018 р.

Тел.: +38 (0552) 399-580, +38 (098) 559-45-45,  
+38 (095) 559-45-45, +38 (093) 559-45-45  
Для листування: а/с 20, м. Херсон, Україна, 73021  
E-mail: office@oldiplus.ua