

Міністерство освіти і науки України

Херсонський національний технічний університет

ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Т. 3, № 1

Рекомендовано до друку Вченою радою
Херсонського національного технічного університету
(протокол № 7 від 29 травня 2020 року)

Журнал включений до Реєстру наукових фахових видань України категорії Б
на підставі Наказу МОН України від 17 березня 2020 року № 409.

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:
Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List,
CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

Херсон 2020

Редакційна рада

Головний редактор

Тулученко Г.Я.

д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Заступники головного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України, перший проректор Херсонського національного технічного університету.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили.

Відповідальний секретар

Омельчук А.А.

к.т.н., доцент кафедри інтелектуальних управляючих та обчислювальних систем Університету державної фіскальної служби України (м. Ірпінь, Київська обл.)

Члени редакційної колегії за спеціальностями:

Іноземні фахівці

Бабічев С.А.

д.т.н., доцент, (Чехія)

Гучек П.Й.

д.т.н., доцент, (Польща)

113 – Прикладна математика

Астіоненко І.О.

к.ф.-м.н., доцент

Гвоздева І.М.

д.т.н., професор

Гнатушенко Вікт.В.

д.т.н., доцент

Ляшенко В.П.

д.т.н., професор

Миргород В.Ф.

д.т.н., доцент

Різнюк В.В.

д.т.н., професор

Стрельнікова О.О.

д.т.н., професор

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор

122 – Комп'ютерні науки

Борисенко В.Д.	д.т.н., професор
Ванін В.В.	д.т.н., професор
Вірченко Г.А.	д.т.н., професор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., професор
Гумен О.М.	д.т.н., професор
Корчинський В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко В.І.	д.т.н., професор
Мартин Є.В.	д.т.н., професор
Найдиш А.В.	д.т.н., професор
Несвідомін В.М.	д.т.н., професор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., професор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., професор
Устенко С.А.	д.т.н., професор
Шоман О.В.	д.т.н., професор

126 – Інформаційні системи та технології

Аль-Амморі А.Н.	д.т.н., професор
Баклан І.В.	к.т.н., доцент
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Левикін В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко О.І.	к.т.н., доцент
Мороз Б.І.	д.т.н., професор
Стеценко І.В.	д.т.н., професор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., професор

151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Алексєєв М.О.	д.т.н., професор
Бардачов Ю.М.	д.т.н., професор
Головко В.І.	д.т.н., професор
Кондратець В.О.	д.т.н., професор
Мещеряков Л.І.	д.т.н., професор
Омельчук А.А.	к.т.н.
Осадчий С.І.	д.т.н., професор
Рожков С.О.	д.т.н., професор
Рудакова Г.В.	д.т.н., професор

Інші спеціальності

Мельник І.В.	д.т.н., професор
Розов Ю.Г.	д.т.н., професор

ISSN 2618-0332

Министерство образования и науки Украины

Херсонский национальный технический университет

ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Т. 3, № 1

Рекомендовано к печати Ученым советом
Херсонского национального технического университета
(протокол № 7 от 29 мая 2020 года)

Журнал включен в Реестр научных специализированных изданий Украины
категории Б на основании Приказа МОН Украины от 17 марта 2020 года № 409.

Журнал включен в наукометрические базы, электронные библиотеки и репозитории:
Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List,
CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

Херсон 2020

Редакционный совет

Главный редактор

Тулученко Г.Я.

д.т.н., профессор, заведующая кафедрой высшей математики и математического моделирования Херсонского национального университета.

Заместители главного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, первый проректор Херсонского национального технического университета.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Черноморского национального университета им. П. Могилы.

Ответственный секретарь

Омельчук А.А.

к.т.н., доцент кафедры интеллектуальных управляющих и вычислительных систем Университета государственной фискальной службы Украины (г. Ирпень, Киевская обл.)

Члены редакционной коллегии по специальностям:

Иностранные специалисты

Бабичев С.А.

д.т.н., доцент, (Чехия)

Гучек П.И.

д.т.н., доцент, (Польша)

113 – Прикладная математика

Астионенко И.А.

к.ф.-м.н., доцент

Гвоздева И.М.

д.т.н., профессор

Гнатушенко Викт.В.

д.т.н., доцент

Ляшенко В.П.

д.т.н., профессор

Миргород В.Ф.

д.т.н., доцент

Ризнык В.В.

д.т.н., профессор

Стрельникова Е.А.

д.т.н., профессор

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор

122 – Компьютерные науки

Борисенко В.Д.	д.т.н., профессор
Ванин В.В.	д.т.н., профессор
Вирченко Г.А.	д.т.н., профессор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., профессор
Гумен Е.Н.	д.т.н., профессор
Корчинский В.М.	д.т.н., профессор
Литвиненко В.И.	д.т.н., профессор
Мартин Е.В.	д.т.н., профессор
Найдыш А.В.	д.т.н., профессор
Несвидомин В.Н.	д.т.н., профессор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., профессор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., профессор
Устенко С.А.	д.т.н., профессор
Шоман О.В.	д.т.н., профессор

126 – Информационные системы и технологии

Аль-Аммори А.Н.	д.т.н., профессор
Баклан И.В.	к.т.н., доцент
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Левыкин В.М.	д.т.н., профессор
Литвиненко Е.И.	к.т.н., доцент
Мороз Б.И.	д.т.н., профессор
Стеценко И.В.	д.т.н., профессор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., профессор

151 – Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии

Алексеев М.А.	д.т.н., профессор
Бардачев Ю.Н.	д.т.н., профессор
Головко В.И.	д.т.н., профессор
Кондратец В.А.	д.т.н., профессор
Мещеряков Л.И.	д.т.н., профессор
Омельчук А.А.	к.т.н.
Осадчий С.И.	д.т.н., профессор
Рожков С.А.	д.т.н., профессор
Рудакова А.В.	д.т.н., профессор

Другие специальности

Мельник И.В.	д.т.н., профессор
Розов Ю.Г.	д.т.н., профессор

ISSN 2618-0332

Ministry of Education and Science of Ukraine

Kherson National Technical University

APPLIED QUESTIONS OF MATHEMATICAL MODELLING

V. 3, № 1

Recommended for publication by the Academic Council of
Kherson National Technical University
(Minutes № 7 on 29th May 2020)

The journal is included in the Register of scientific specialized publications of Ukraine of category B on the basis of Minutes of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated March 17, 2020 № 409.

The journal is included in the scientometric bases, electronic libraries and repositories: Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List, CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

Kherson 2020

Editorial Board

Editor-in-Chief

Tuluchenko H.Ya.

Professor, Doctor of Engineering Science, Head of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Modelling of Kherson National Technical University.

Deputies Editor-in-Chief

Rozov Yu.H.

Doctor of Engineering Science, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, First Vice-Rector of Kherson National Technical University.

Khomchenko A.N.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, Professor at the Department of Intelligent Information Systems of the Petro Mohyla Black Sea National University.

Executive Secretary

Omelchuk A.A.

Ph.D., Associate Professor at the Department of Intelligent Control and Computing Systems of University of State Fiscal Service of Ukraine (Irpin, Kyiv region).

Members of Editorial Board by specialities:

Foreign Specialists

Babichev S.A.

Doctor of Engineering Science, Associate Professor, (Czech Republic)

Guchek P.Y.

Doctor of Engineering Science, Associate Professor, (Republic of Poland)

113 – Applied Mathematics

Astionenko I.O.

Ph.D., Associate Professor

Hvozdeva I.M.

Doctor of Engineering Science, Professor

Hnatushenko Vikt.V.

Doctor of Engineering Science, Associate Professor

Liashenko V.P.

Doctor of Engineering Science, Professor

Myrhorod V.F.

Doctor of Engineering Science, Associate Professor

Riznyk V.V.

Doctor of Engineering Science, Professor

Strelnikova O.O.

Doctor of Engineering Science, Professor

Khomchenko A.N.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

122 – Computer Science

Borysenko V.D.	Doctor of Engineering Science, Professor
Vanin V.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Virchenko H.A.	Doctor of Engineering Science, Professor
Hnatushenko V.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Humen O.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Korchynskyi V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Lytvynenko V.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Martyn Ye.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Naidysh A.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Nesvidomin V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Pylypaka S.F.	Doctor of Engineering Science, Professor
Tuluchenko H.Ya.	Doctor of Engineering Science, Professor
Ustenko S.A.	Doctor of Engineering Science, Professor
Shoman O.V.	Doctor of Engineering Science, Professor

126 – Information Systems and Technologies

Al-Ammori A.N.	Doctor of Engineering Science, Professor
Baklan I.V.	Ph.D., Associate Professor
Ben A.P.	Ph.D., Associate Professor
Levykin V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Lytvynenko O.I.	Ph.D., Associate Professor
Moroz B.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Stetsenko I.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Tomashevskyi V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Sherstiuk V.H.	Doctor of Engineering Science, Professor

151 – Automation and Computer Integrated Technologies

Aleksieiev M.O.	Doctor of Engineering Science, Professor
Bardachov Yu.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Holovko V.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Kondratets V.O.	Doctor of Engineering Science, Professor
Meshcheriakov L.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Omelchuk A.A.	Ph.D.
Osadchyi S.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Rozhkov S.O.	Doctor of Engineering Science, Professor
Rudakova H.V.	Doctor of Engineering Science, Professor

Other Specialties

Melnyk I.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Rozov Yu.H.	Doctor of Engineering Science, Professor

ЗМІСТ

АНДРЕЙЦЕВ А.Ю., ВЯЛА Ю.Е., ГЕЙЛИК А.В., КЛЕЦЬКА Т.С., ЛЯШКО О.В. ПОРІВНЯННЯ АЛЬТЕРНАТИВНИХ СТРАТЕГІЙ ПОЕТАПНОЇ ЗАМІНИ ОБЛАДНАННЯ: СПЕЦІАЛЬНІ ВИПАДКИ	13
БУКІ О.Ю., МАЗМАНШВІЛІ О.С. ВИБІРКОВИЙ АНАЛІЗ РОБОТИ 5-КУЛЬКОВОГО СПЕКТРОМЕТРА БОННЕРА	24
ВЕРЕЩАГА В.М., РУБЦОВ М.О., ПАВЛЕНКО О.М. ГЛОБАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТОЧКОВИМ ПОЛІНОМОМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ КОМПОЗИЦІЇ ІЗ ТРЬОХ ТОЧОК, СЕРЕД ЯКИХ Є ДВОКРАТНА	33
ВІРЧЕНКО Г.А., ЯБЛОНСЬКИЙ П.М. ДЕЯКІ АСПЕКТИ КОМП'ЮТЕРНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ КРИВИХ БЕЗЬЄ	41
ДИМОВА Г.О. ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ	49
ДУБИНКО В.І., МАЗМАНШВІЛІ О.С., ЛАПТЄВ Д.В. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВОДОРОДНОГО КАТАЛІЗУ У БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ	59
ЄДИНОВИЧ М.Б., ПОЛИВОДА О.В., КУЗЬМІНА Т.О., РУДЕНКО І.О., ШЕСТАКОВ В.С. ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ОБ'ЄКТІВ УПРАВЛІННЯ У РЕЖИМІ РЕАЛЬНОГО ЧАСУ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФОАНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ	68
КОМЯК В.М., КЯЗИМОВ К.Т., ПАНКРАТОВ О.В. КВАЗІ-РНІ-ФУНКЦІЇ ДЛЯ АНАЛІТИЧНОГО ОПИСУ УМОВ НЕПЕРИТИНАННЯ СКЛАДЕНИХ ОБ'ЄКТІВ В ЗАДАЧАХ РОЗМІЩЕННЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ПОТОКІВ ЛЮДЕЙ	78
КРЕСАН Т.А., ПИЛИПАКА С.Ф., ГРИЩЕНКО І.Ю., БАБКА В.М., КРЕМЕЦЬ Я.С. ТРАЄКТОРІЇ ТОЧОК ПЛОСКОЇ ФІГУРИ, КРИВОЛІНІЙНИЙ КОНТУР ЯКОЇ КОТИТЬСЯ БЕЗ КОВЗАННЯ ПО ПРЯМІЙ ЛІНІЇ	87
ЛЯШЕНКО В.П., ТЕРЕЩЕНКО В.В. ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРСПЕКТИВ ВИКОРИСТАННЯ ТА ПРИНЦИПІВ ПОБУДОВИ МУЛЬТИАГЕНТНОЇ ПОШУКОВОЇ СИСТЕМИ	97
МАЗМАНШВІЛІ О.С., РЕШЕТНЯК М.Г. ПЕРЕТВОРЕННЯ МАСИВУ ДАНИХ ЦИЛІНДРИЧНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ МАГНЕТРОННОЇ ГАРМАТИ ТА ЗАДАЧА РАДІАЛЬНОГО РУХУ ЕЛЕКТРОНІВ	108
МЕЛЬНИК І.В., ПОЧИНОК А.В. ВИБІР МЕТОДУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ГРАНИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ КОРОТКОФОКУСНИХ ЕЛЕКТРОННИХ ПУЧКІВ ЗА УМОВИ ЇХНЬОГО ТРАНСПОРТУВАННЯ В ІОНІЗОВАНОМУ ГАЗІ	117
МОСКАЛЕНКО О.О., ГРИГОРОВА Т.А. АЛГОРИТМИ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ ДЛЯ ПОШУКУ ІНФОРМАЦІЇ В СИСТЕМАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ	131
НІЦІН О.Ю. ГРУПА СИМЕТРІЇ ОРНАМЕНТУ НА ЕСКІЗИ М. К. ЕШЕРА «ЯЩІРКИ» І РУХИ ПЛОЩИНІ, ЩО ОПИСУЮТЬ УТВОРЕННЯ ЙОГО ФІГУРНОЇ ПЛИТКИ	141
ОЛІЙНИК Ю.О. СИСТЕМА АНАЛІЗУ ТЕКСТОВИХ ПОТОКІВ ДАНИХ	149
ПЕРШИНА Ю.І., ПАСІЧНИК В.О. НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ РОЗРИВНИМИ ІНТЕРЛІНАЦІЙНИМИ СПЛАЙНАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ	159
ПЕТРИК Б.В., НЕЛАСА Г.В., ДУБРОВІН В.І. АНАЛІЗ ЧАСОВИХ ПОСЛІДОВНИХ ПОТОКІВ ДАНИХ МЕРЕЖЕВОГО ТРАФІКУ НА ОСНОВІ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ	168
РЕГІДА О.В. ДО ПИТАННЯ РОЗРОБЛЕННЯ МЕТОДИК ТА АЛГОРИТМІВ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ БУДІВЕЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ	178
СЛАВИЧ В.П., ДОБРОВА К.Д. МОДЕЛЬ ТА МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ОПОРНОГО ТА ОПТИМАЛЬНИХ ПЛАНІВ МОДИФІКОВАНОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ГРУПУВАННЯ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ ВАНТАЖУ	187
ТАЦІЙ Р.М., ЧМИР О.Ю., КАРАБИН О.О. ЗАГАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЗДОВЖНИХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ	194
ТИМОФІЄВА Н.К. ПРАВИЛА РОЗГОРТАННЯ ЗНАКОВИХ КОМБІНАТОРНИХ ПРОСТОРІВ	207
УСОВ А.В., СІКІРАШ Ю.Є. МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ	215
УСОВ А.В., КУНІЦІН М.В. СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТОПОГРАФІЇ РОБОЧОЇ ПОВЕРХНІ ВИРОБІВ НА ФІНІШНИХ ОПЕРАЦІЯХ	225
УСОВ А.В., СЛОБОДЯНЮК Н.В. МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ СИЛОВИМИ АГРЕГАТАМИ СУДНОВОГО КОМПЛЕКСУ НА НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМАХ ...	237
ХОМЧЕНКО А.Н., ЛИТВИНЕНКО О.І., АСТІОНЕНКО І.О. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ СУБСТИТУТ-БАЗИСИ СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА Q8	248

СОДЕРЖАНИЕ

АНДРЕЙЦЕВ А.Ю., ВЯЛА Ю.Э., ГЕЙЛИК А.В., КЛЕЦКАЯ Т.С., ЛЯШКО О.В. СРАВНЕНИЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ СТРАТЕГИЙ О ПОЭТАПНОЙ ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ: СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ	13
БУКИ А.Ю., МАЗМАНИШВИЛИ А.С. ВЫБОРОЧНЫЙ АНАЛИЗ РАБОТЫ 5-ШАРОВОГО СПЕКТРОМЕТРА БОННЕРА	24
ВЕРЕЩАГА В.М., РУБЦОВ Н.А., ПАВЛЕНКО А.М. ГЛОБАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТОЧЕЧНЫМ ПОЛИНОМНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОМПОЗИЦИИ ИЗ ТРЕХ ТОЧЕК, СРЕДИ КОТОРЫХ ЕСТЬ ДВУХКРАТНАЯ	33
ВИРЧЕНКО Г.А., ЯБЛОНСКИЙ П.Н. НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИВЫХ БЕЗЪЕ	41
ДЫМОВА А.О. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА	49
ДУБИНКО В.И., МАЗМАНИШВИЛИ А.С., ЛАПТЕВ Д.В. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДОРОДНОГО КАТАЛИЗА В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	59
ЕДИНОВИЧ М.Б., ПОЛИВОДА О.В., КУЗЬМИНА Т.О., РУДЕНКО И.О., ШЕСТАКОВ В.С. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ	68
КОМЯК В.М., КЯЗИМОВ К.Т., ПАНКРАТОВ А.В. КВАЗИ-PHI-ФУНКЦИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ УСЛОВИЙ НЕПЕРЕСЕЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКОВ ЛЮДЕЙ	78
КРЕСАН Т.А., ПИЛИПАКА С.Ф., ГРИЩЕНКО И.Ю., БАБКА В.Н., КРЕМЕЦ Я.С. ТРАЕКТОРИИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ, КРИВОЛИНЕЙНЫЙ КОНТУР КОТОРОЙ КАТИТСЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ ПО ПРЯМОЙ ЛИНИИ	87
ЛЯШЕНКО В.П., ТЕРЕЩЕНКО В.В. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРСПЕКТИВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ПРИНЦИПОВ ПОСТРОЕНИЯ МУЛЬТИАГЕНТНОЙ ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЫ	97
МАЗМАНИШВИЛИ А.С., РЕШЕТНЯК Н.Г. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАССИВА ДАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ МАГНЕТРОННОЙ ПУШКИ И ЗАДАЧА РАДИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ	108
МЕЛЬНИК И.В., ПОЧИНОК А.В. ВЫБОР МЕТОДА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГРАНИЧНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОРОТКОФОКУСНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ ПРИ ИХ ТРАНСПОРТИРОВКЕ В ИОНИЗИРОВАННОМ ГАЗЕ	117
МОСКАЛЕНКО А.А., ГРИГОРОВА Т.А. АЛГОРИТМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ ПОИСКА ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМАХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ	131
НИЦЫН А.Ю. ГРУППЫ СИММЕТРИИ ОРНАМЕНТА НА ЭСКИЗЕ М. К. ЭШЕРА «ЯЩЕРИЦЫ» И ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЕГО ФИГУРНОЙ ПЛИТКИ ...	141
ОЛЕЙНИК Ю.А. СИСТЕМА АНАЛИЗА ТЕКСТОВЫХ ПОТОКОВ ДАННЫХ	149
ПЕРШИНА Ю.И., ПАСЕЧНИК В.А. ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ РАЗРЫВНЫМИ ИНТЕРЛИНАЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	159
ПЕТРИК Б.В., НЕЛАСАЯ А.В., ДУБРОВИН В.И. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПОТОКОВ ДАННЫХ СЕТЕВОГО ТРАФИКА НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	168
РЕГИДА О.В. К ВОПРОСУ РАЗРАБОТКИ МЕТОДИК И АЛГОРИТМОВ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ	178
СЛАВИЧ В.П., ДОБРОВА К.Д. МОДЕЛЬ И МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОПОРНОГО И ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ГРУППИРОВАНИЯ ПОСТАВЩИКОВ ГРУЗОВ	187
ТАЦИЙ Р.М., ЧМЫРЬ О.Ю., КАРАБЫН О.О. ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ	194
ТИМОФЕЕВА Н.К. ПРАВИЛА РАЗВЕРТЫВАНИЯ ЗНАКОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ	207
УСОВ А.В., СИКИРАШ Ю.Е. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ	215
УСОВ А.В., КУНИЦЫН М.В. СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОГРАФИИ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ИЗДЕЛИЙ НА ФИНИШНЫХ ОПЕРАЦИЯХ	225
УСОВ А.В., СЛОБОДЯНИЮК Н.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИЛОВЫМИ АГРЕГАТАМИ СУДОВОГО КОМПЛЕКСА НА НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ ..	237
ХОМЧЕНКО А.Н., ЛИТВИНЕНКО Е.И., АСТИОНЕНКО И.А. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУБСТИТУТ-БАЗИСЫ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА Q_8	248

CONTENTS

ANDREYTSEV A.Yu., VIALA Yu.E., HEILYK A.V., KLETSKA T.S., LIASHKO O.V. COMPARISON OF ALTERNATIVE EQUIPMENT REPLACEMENT STRATEGIES: SPECIAL CASES	13
BUKI A.Yu., MAZMANISHVILI A.S. SELECTIVE ANALYS OF THE WORK OF 5-BALL BONNER SPECTROMETER	24
VERESHCHAHA V.M., RUBCOV M.O., PAVLENKO O.M. GLOBAL INTERPOLATION BY A POINT POLYNOMIC GEOMETRIC COMPOSITION OF THREE POINTS, AMONG THESE TWO-TIME	33
VIRCHENKO G.A., YABLONSKYI P.M. SOME ASPECTS OF COMPUTER GEOMETRIC MODELING USING BESIER CURVES	41
DYMOVA H.O. USE OF THE PERTURBATION THEORY METHOD FOR THE STUDY OF DYNAMIC EQUATIONS OF THE INTERBRANCH BALANCE	49
DUBINKO V.I., MAZMANISHVILI A.S., LAPTEV D.V. MATHEMATICAL MODELING OF THE HYDROGEN CATALYSIS IN THE BIOLOGICAL SYSTEMS	59
YEDYNOVYCH M.B., POLYVODA O.V., KUZMINA T.O., RUDENKO I.O., SHESTAKOV V.S. DETERM NATION OF CONTROL OBJECTS DYNAMIC PARAMETERS IN REAL-TIME MODE USING GRAPHO-ANALYTICAL METHODS OF IDENTIFICATION	68
KOMYAK V.M., KYAZIMOV K.T., PANKRATOV A.V. QUASI-PHI-FUNCTIONS FOR ANALYTICAL DESCRIPTION CONDITIONS OF NON-INTERSECTIONS OF COMPOUND OBJECTS IN THE PROBLEMS OF PLACING AND MODELING MOVEMENT OF MOVEMENTS OF PEOPLE	78
KRESAN T.A, PYLYPAKA S.F., GRISCHENKO I.Yu., BABKA V.M., KREMETS Ya.S. TRAJECTORIES OF POINTS OF A FLAT FIGURE, A CURVILINE CIRCUIT WHICH ROLLS WITHOUT SLIDING ON A DIRECT LINE	87
LYASHENKO V.P., TERESHCHENKO V.V. INVESTIGATION OF USAGE PROSPECTS AND PRINCIPLES OF MULTI-AGENT SEARCH ENGINE CONSTRUCTION	97
MAZMANISHVILI A.S., RESHETNYAK N.G. DATA TRANSFORMATION CYLINDRICAL MAGNETIC FIELD MAGNETRON GUN AND THE PROBLEM OF RADIAL MOTION OF ELECTRONS	108
MELNYK I.V., POCHYNOK A.V. CHOOSING THE METHOD OF INTERPOLATION OF THE BOUNDARY TRAJECTORIES OF SHORT-FOCUS ELECTRON BEAMS AND THEIR GUIDING IN THE IONIZED GAS	117
MOSKALENKO O.O., HRYHOROVA T.A. ARTIFICIAL INTELLIGENCE ALGORITHMS FOR SEARCHING INFORMATION IN E-LEARNING SYSTEMS	131
NITSYN A.Yu. ORGANENT SYMMETRY GROUP ON M. C ESHER'S SKETCH 'REPTILES' AND PLANE MOVEMENTS DESCRIBING THE FORMATION OF ITS FIGURED TILES	141
OLIINYK Yu.O. TEXT DATA STREAM ANALYSIS SYSTEM	149
PERSHINA I.I., PASICHNYK V.O. APPROXIMATION OF THE DISCONTINUOUS FUNCTION OF TWO VARIABLES BY DISCONTINUOUS INTERLINATION SPLINES USING TRIANGULAR ELEMENTS	159
PETRIK B.V., NELASA H.V., DUBROVIN V.I. ANALYSIS OF TIME SERIAL FLOWS OF NETWORK TRAFFIC DATA BASED ON A WAVELET TRANSFORM	168
REGIDA O.V. TO THE QUESTION OF THE DEVELOPMENT OF TECHNIQUES AND ALGORITHMS OF STRUCTURAL-PARAMETRIC MODELING OF BUILDING OBJECTS	178
SLAVIC V.P., DOBROVA K.D. MODEL AND METHOD OF TASKING SUPPORT AND OPTIMAL PLAN OF THE MODIFIED TRANSPORT PROBLEM IN ACTIVE GROUPS OF GOODS	187
TATSIJ R.M., CHMYR O.Yu., KARABYN O.O. THE TOTAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF ROD	194
TIMOFEEVA N.K. RULES FOR DEVELOPING SIGNIFICANT COMBINARY SPACES	207
USOV A.V., SIKIRASH Yu.Ye. MODELLING OF OPTIMAL DEVELOPMENT OF PRODUCTION SYSTEMS	215
USOV A.V., KUNITSYN M.V. STOCHASTIC MODELING OF THE TOPOGRAPHY OF THE WORKING SURFACE OF PRODUCTS AT FINISHING OPERATIONS	225
USOV A.V., SLOBODIANIUK N.V. DESIGN AND OPTIMAL MANAGEMENT POWER AGGREGATES OF SHIP COMPLEX ON NON-STATIONARY MODES	237
KHOMCHENKO A.N., LYTVYENENKO O.I., ASTIONENKO I.O. TRIGONOMETRIC SUBSTITUTE-BASES OF THE FINITE ELEMENT Q8	248

УДК 519.857

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ, Ю.Э. ВЯЛА, А.В. ГЕЙЛИК, Т.С. КЛЕЦКАЯ, О.В. ЛЯШКО
Государственный университет инфраструктуры и технологий

СРАВНЕНИЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ СТРАТЕГИЙ О ПОЭТАПНОЙ ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ: СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

В данной работе рассмотрены специальные случаи, возникающие при решении задачи о поэтапной замене оборудования, которым не было уделено внимание в работах, посвященных методам решения данной задачи. Она является продолжением исследования, проведенного в [8].

При решении поставленной задачи методом динамического программирования иногда возникает ситуация, когда в зоне замены находятся элементы, для которых более предпочтительно сохранение оборудования. Возможно несколько путей преодоления данной проблемы. Некоторые из них рассмотрены в [8].

Данное исследование предполагает расширение планового периода, что позволяет рассмотреть и сравнить альтернативные стратегии обновления.

Увеличение планового периода позволяет рассмотреть возможность сохранения оборудования большего возраста, если это приносит большую прибыль, чем его замена. С другой стороны, уменьшается степень доверия к показателям в последних интервалах этого периода, что связано с изменением конъюнктуры рынка и уменьшением достоверности долгосрочных прогнозов.

Применение различных способов устранения указанной выше проблемы продемонстрировано на абстрактном примере. Проведено сравнение различных стратегий обновления, основанное на анализе распределения прибыли по годам планового периода. Рассмотрено также распределение инвестиций по годам, что существенно влияет на выбор оптимальной стратегии обновления.

Акцентируется внимание на том, что лицо, принимающее решение, более склонно к выбору стратегий, приносящих большую прибыль в первые интервалы планового периода и требующих более равномерного распределения инвестиций.

Данный пример для простоты предполагает равномерное распределение оборудования по возрасту в начале планового периода. Однако, приведенные формулы для расчета прибылей и инвестиций являются универсальными и могут быть использованы в любых практических расчетах.

В заключение следует отметить, что наиболее эффективными, описанные подходы являются при выборе оптимальных стратегий обновления оборудования с небольшим сроком морального износа. При этом интервал (шаг) планового периода может быть равным не году, а кварталу или даже месяцу.

Ключевые слова: динамическое программирование, замена оборудования, стратегия, функция Беллмана, безусловная оптимизация.

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ, Ю.Е. ВЯЛА, А.В. ГЕЙЛИК, Т.С. КЛЕЦКА, О.В. ЛЯШКО
Державний університет інфраструктури та технологій

ПОРІВНЯННЯ АЛЬТЕРНАТИВНИХ СТРАТЕГІЙ ПОЕТАПНОЇ ЗАМІНИ ОБЛАДНАННЯ: СПЕЦІАЛЬНІ ВИПАДКИ

У даній роботі розглянуті спеціальні випадки, що виникають при розв'язанні задачі поетапної заміни обладнання, яким не приділено увагу в роботах, присвячених методам її розв'язання. Вона є продовженням дослідження, проведеного в [8].

При розв'язанні поставленої задачі методом динамічного програмування іноді виникає ситуація, коли в зоні заміни знаходяться елементи, для яких більш доцільним є збереження обладнання. Можливі декілька шляхів подолання даної проблеми. Деякі з них розглянуті в [8].

Дане дослідження передбачає розширення планового періоду, що дозволяє розглянути і порівняти альтернативні стратегії оновлення.

Збільшення планового періоду дозволяє розглянути можливість збереження обладнання більшого віку, якщо це приносить більший прибуток, ніж його заміна. З іншого боку зменшується ступінь довіри до показників в останніх інтервалах цього періоду, що пов'язано зі зміною кон'юнктури ринку і зменшенням достовірності довгострокових прогнозів.

Застосування різних способів усунення зазначеної вище проблеми продемонстровано на абстрактному прикладі. Проведено порівняння різних стратегій оновлення, що базуються на аналізі розподілу прибутків по роках планового періоду. Розглянуто також розподіл інвестицій по роках, що істотно впливає на вибір оптимальної стратегії відновлення.

Акцентовано увагу на тому, що особа, яка приймає рішення, більш схильна до вибору стратегій, які приносять більший прибуток в початкові інтервали планового періоду і вимагають більш рівномірного розподілу інвестицій.

Даний приклад для простоти передбачає рівномірний розподіл обладнання за віком на початку планового періоду. Однак, наведені формули для розрахунку прибутків і інвестицій є універсальними і можуть бути використані в будь-яких практичних розрахунках.

На завершення слід зазначити, що найбільш ефективними, описані підходи є при виборі оптимальних стратегій оновлення обладнання з невеликим терміном морального зношування. При цьому інтервал (крок) планового періоду може дорівнювати не року, а кварталу або навіть місяцю.

Ключові слова: динамічне програмування, заміна обладнання, стратегія, функція Беллмана, безумовна оптимізація.

A.Yu. ANDREYTSSEV, Yu.E. VIALA, A.V. HEILYK, T.S. KLETSKA, O.V. LIASHKO
State University of Infrastructure and Technologies

COMPARISON OF ALTERNATIVE EQUIPMENT REPLACEMENT STRATEGIES: SPECIAL CASES

In this paper, we consider special cases that arise when solving the problem of phased replacement of equipment, which were not paid attention to in the works devoted to methods for solving this problem. It is a continuation of the study conducted in [8].

When solving the problem by dynamic programming, sometimes a situation arises when there are elements in the replacement zone for which it is more preferable to keep the equipment. There are several ways to overcome this problem. Some of them are considered in [8].

This study involves an extension of the planning period, which allows us to consider and compare alternative update strategies.

The increase in the planning period allows us to consider the possibility of keeping equipment of a greater age, if it brings more profit than replacing it. On the other hand, the degree of confidence in the indicators in the last intervals of this period is reduced, which is associated with a change in market conditions and a decrease in the reliability of long-term forecasts.

The application of various methods to eliminate the above problem is demonstrated by an abstract example. A comparison of various update strategies based on an analysis of the distribution of profits by years of the planning period is carried out. The distribution of investments by year is also considered, which significantly affects the choice of the optimal update strategy.

Attention is focused on the fact that the decision-maker is more inclined to choose strategies that bring greater profit in the initial intervals of the planning period and require a more even distribution of investments.

For simplicity, this example assumes an even distribution of equipment by age at the beginning of the planning period. However, the formulas given for calculating profits and investments are universal and can be used in any practical calculations.

In conclusion, it should be noted that the most effective approaches described are in the selection of optimal equipment upgrade strategies with a short period of obsolescence. Moreover, the interval (step) of the planning period may not be equal to a year, but to a quarter of a year or a month.

Keywords: dynamic programming, equipment replacement, strategy, Bellman function, unconditional optimization.

Постановка проблемы

Функционирование любой производственной, в частности, транспортной и информационной системы связано с использованием оборудования, которое подвержено как физическому, так и моральному износу. Следовательно, периодически возникает вопрос о его обновлении. Поскольку в большинстве случаев единовременная замена всего оборудования требует больших материальных затрат, то актуальной становится задача выработки оптимальной стратегии поэтапной его замены. Критерием оптимальности в данном случае является прибыль, которая может быть получена в течении планового периода (промежутка времени, на которой разрабатывается стратегия обновления). Кроме того, в процессе выработки стратегии необходимо учитывать распределение инвестиций и прогнозирование изменений конъюнктуры рынка. Этим обусловлена актуальность рассмотрения методов решения задачи о поэтапном обновлении оборудования, а именно особых случаев, возникающих при применении существующих алгоритмов её решения.

Анализ последних исследований и публикаций

Наиболее популярным и эффективным методом решения сформулированной задачи является метод динамического программирования, основанный на использовании принципа оптимальности Беллмана [1]. Алгоритмы применения данного метода детально описаны в [2–4]. В [5] рассмотрен пример, недостатком которого является предположение о том, что в начале планового периода обновляется всё оборудование. А это, напомним, требует больших вложений. И данная ситуация на практике возникает довольно редко. Влияние случайных факторов на адекватность модели рассмотрено в [6]. Безусловно, ведутся исследования по разработке программного обеспечения используемых алгоритмов (см., например, [2, 3, 7]). Рассмотрению специальных случаев, возникающих в процессе решения задачи об обновлении, посвящена работа [8].

Цель исследования

В данной статье мы рассмотрим спектр способов возможного преодоления проблемы невозможности построения функции Беллмана, описанной в [8], проведём их

сравнение на абстрактном примере, а также рассмотрим вопрос о распределении инвестиций и прибыли по годам при применении каждой из стратегий.

Изложение основного материала исследования

Пусть в нашем распоряжении имеется оборудование возраста от одного до n лет. В начале каждого года принимается решение о его сохранении либо замене. Необходимо разработать стратегию поэтапного обновления оборудования на ближайшие n лет, приносящую максимальную совокупную прибыль.

Уравнения Беллмана на последнем шаге имеют вид:

$$F_n(t) = \max \begin{cases} \Pr(t) & \text{сохранение} \\ \Pr(0) - p + S(t) & \text{замена} \end{cases},$$

а на каждом последующем –

$$F_k(t) = \max \begin{cases} \Pr(t) + F_{k+1}(t+1) & \text{сохранение} \\ \Pr(0) - p + F_{k+1}(1) + S(t) & \text{замена} \end{cases}.$$

Здесь t – возраст оборудования к началу определённого года; k – номер года в плановом периоде; $\Pr(t)$ – прибыль от эксплуатации оборудования возраста t ; $S(t)$ – остаточная стоимость оборудования соответствующего возраста; p – цена нового оборудования; $F_k(t)$ – максимально возможная прибыль за годы, начиная с k .

Отметим, что при $\Pr(t) + F_{k+1}(t+1) = \Pr(0) - p + F_{k+1}(1) + S(t)$ оборудование сохраняется. Но в некоторых случаях возникает проблема, когда на некотором шаге $F_k(n-1) = \Pr(n-1) + F_{k+1}(n)$ и, следовательно, оборудование возраста $n-1$ год должно быть сохранено. А так как $F_{k+1}(n+1)$ – неизвестно, поскольку в плановом периоде n лет, то значение $F_k(n)$ не может быть определено.

В [8] были предложены три способа преодоления данной проблемы. Один из них основан на увеличении длительности планового периода. В данной работе мы предлагаем ещё один способ построения функции Беллмана с учетом прогнозируемых значений прибыли и остаточной стоимости оборудования, возраста больше, чем имеющееся в наличии.

Прогнозы могут основываться на информации об этих значениях на аналогичных предприятиях, имеющих в наличии оборудование большего возраста. От точности прогнозов зависит уровень адекватности модели. По этой причине существенное увеличение длительности планового периода нежелательно.

Рассмотрим абстрактный пример (см. [8]). Продолжительность планового периода 6 лет. Данные о прибыли и остаточной стоимости оборудования возраста t приведены в таблице 1, а цена единицы нового оборудования – $p = 14$ ден.ед.

Таблица 1

Исходные данные							
t	0	1	2	3	4	5	6
$\Pr(t)$	8	7	7	6	6	6	5
$S(t)$	12	8	6	4	2	2	2

Увеличим длительность планового периода до десяти лет на основе прогнозируемых значений прибыли от эксплуатации и остаточной стоимости оборудования возраста от 7 до 10 лет (см. таблицу 2).

Таблица 2

Данные, с учетом прогнозов

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Pr(t)$	8	7	7	6	6	6	5	4	3	2	0
$S(t)$	12	8	6	4	2	2	2	2	2	2	1

Однако, в отличие от третьего способа, описанного в [8], не будем отбрасывать фиктивную часть таблицы. Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3

Значения функции Беллмана для десятилетнего планового периода

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(t)$	53	52	51	50	48	46	45	45	45	44
$F_2(t)$	49	46	45	45	44	42	41	40	40	38
$F_3(t)$	44	42	39	39	39	38	37	37	37	36
$F_4(t)$	41	37	35	33	33	33	33	33	33	32
$F_5(t)$	37	34	30	28	28	28	28	28	28	27
$F_6(t)$	32	30	27	24	22	22	22	22	22	21
$F_7(t)$	26	25	23	21	18	16	16	16	16	15
$F_8(t)$	20	19	18	17	15	12	10	10	10	9
$F_9(t)$	14	13	12	12	11	9	7	5	3	2
$F_{10}(t)$	7	7	6	6	6	5	4	3	2	0

Отметим, что в начале четвертого года возникает следующая ситуация: оборудование трёхлетнего возраста необходимо заменить, для четырёх- и пятилетнего – большую прибыль принесет сохранение (в таблице соответствующие прибыли выделены двойным подчёркиванием), а для шестилетнего варианты замены и сохранения равноприбыльны (одинарное подчёркивание), следовательно, более предпочтительно его сохранение.

Данная ситуация возникает из-за того, что остаточная стоимость оборудования трёхлетнего возраста выше, чем $S(4)$ и $S(5)$, а прибыли от дальнейшей эксплуатации одинаковы. В таблице 3 серым цветом выделены клетки, для которых при сохранении оборудования четырёх- и пятилетнего возраста в четвёртом году планового периода будет получена совокупная прибыль на единицу больше, чем при его замене, то есть в первом году для оборудования возраста один и два года 54 и 53 ден. ед. соответственно.

На этапе безусловной оптимизации будем для простоты считать, что к началу первого года планового периода мы имеем шесть единиц оборудования (по одной возраста от одного до шести лет). Из таблицы видно, что в начале первого и второго года оборудование не заменяется, а в начале третьего года необходимо заменить одну единицу оборудования, возраст которого достиг восьми лет.

В начале четвёртого года возможны две стратегии. Первая: заменить всё оборудование, возраст которого превышает два года (а это пять единиц). При этом

$F_4(4) = F_4(5) = 33$ и, следовательно, $F_3(3) = F_3(4) = 39$, $F_2(2) = 46$, $F_2(3) = 45$, $F_1(1) = 53$, $F_1(2) = 52$. Вторая стратегия: заменить оборудование возраста 3, 7 и 8 лет $F_4(4) = F_4(5) = 34$, $F_3(3) = F_3(4) = 40$, $F_2(2) = 47$, $F_2(3) = 46$, $F_1(1) = 54$, $F_1(2) = 53$. А поскольку трехлетнего оборудования нет в наличии, то заменяются две единицы.

Результаты распределения количества оборудования различного возраста при применении первой стратегии приведены в таблице 4, а второй – в таблице 5.

Отметим, что возможность применения различных стратегий возникает из-за ситуации, описанной выше. Данные в таблицах за семь, а не за шесть лет приведены, поскольку для получения распределения прибылей по годам, нам понадобятся данные за седьмой год. В таблицах приведено распределение количества оборудования на начало года: до принятия решения о его замене или сохранении.

Таблица 4

Распределение количества оборудования различного возраста (стратегия 4.1)

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_1(t)$	1	1	1	1	1	1		
$K_2(t)$		1	1	1	1	1	1	
$K_3(t)$			1	1	1	1	1	1
$K_4(t)$	1			1	1	1	1	1
$K_5(t)$	2	1			1	1	1	
$K_6(t)$	2	2	1			1		
$K_7(t)$	1	2	2	1				

Таблица 5

Распределение количества оборудования различного возраста (стратегия 4.2)

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_1(t)$	1	1	1	1	1	1		
$K_2(t)$		1	1	1	1	1	1	
$K_3(t)$			1	1	1	1	1	1
$K_4(t)$	1			1	1	1	1	1
$K_5(t)$	5	1						
$K_6(t)$		5	1					
$K_7(t)$			5	1				

Прибыль, полученная за каждый год планового периода, вычисляется по формуле:

$$G \text{Pr}(i) = \sum_{t=1}^n (K_i(t)F_i(t) - K_{i+1}(t)F_{i+1}(t)). \quad (1)$$

Распределение прибылей по годам при применении третьего и четвертого (стратегий 4.1, 4.2) способов приведено в таблице 6.

Мы видим, что наибольшая совокупная прибыль должна быть получена при применении стратегии с использованием третьего способа построения функции Беллмана (см. [8]): построения усечённой таблицы.

Однако, сравнивая таблицы распределений количества оборудования, мы видим, что к началу шестого года, средний возраст оборудования при использовании третьего способа значительно выше, чем при применении стратегии 4.2. Следовательно, в ближайшее время после окончания планового периода, понадобится очередное обновление.

Таблица 6

Распределение прибылей по годам при применении стратегий 3, 4.1 и 4.2

i	1	2	3	4	5	6	GPr
$GPr_3(i)$	28	28	28	37	34	30	185
$GPr_{41}(i)$	37	34	23	16	19	30	159
$GPr_{42}(i)$	37	34	23	-13	42	41	164

На прибыль влияют инвестиции, распределение которых по годам:

$$I(i) = \sum_{t=1}^n K'_i(t)(p - S(t)).$$

где $K'_i(t)$ – количество оборудования возраста t , которое заменяется в начале соответствующего года.

При применении стратегии 3, будет вложено 36 ден.ед. на протяжении шестилетнего периода, а при применении стратегии 4 – 72 ден.ед., что приводит к уменьшению прибыли в первый год после вложений и увеличению в последующем.

Таким образом, предлагаемый нами способ является более эффективным, чем рассмотренные ранее. Его надёжность связана с точностью прогнозов и существенно зависит от конъюнктуры рынка.

Применяя стратегию 4, мы видим, что оборудование более, чем восьмилетнего возраста отсутствует. Исходя из этого, мы можем рассмотреть ещё один способ: усечения матрицы значений функции Беллмана до восьми лет. Более того, мы можем рассматривать усечённые матрицы 7x7 или 9x9 сравнивать прибыли и инвестиции и принимать соответствующие решения.

Преимущество данного способа заключается в том, что мы можем рассматривать усечённые таблицы и сравнивать результаты, получаемые при применении различных стратегий. Например, таблица 5, приведенная в [8] получается из таблицы 3, приведенной в данной работе, если отбросить первые четыре строки и изменить нумерацию.

В таблицах 7 и 8 приведено распределение оборудования по годам при условии усечения матрицы значений функции Беллмана до восьми лет.

При замене одной единицы оборудования будет затрачено $p - S(t)$ ден.ед. Поэтому кроме распределения прибылей необходимо проанализировать и распределение инвестиций по годам. Мы видим, что стратегия 3 приносит большую прибыль в плановом периоде за счёт того, что в обновление оборудования вкладывается 36 ден.ед. При применении стратегий 4.1 и 4.2 – 72 ден.ед. Однако, для 4.2 в начале четвёртого года необходимо вложить одновременно 60 ден.ед. Для

стратегии 5.1 и 5.2 инвестиции составили 58 ден.ед. Отметим, что остаточная стоимость оборудования возраста 3 года $S(3)=4$, а для оборудования большего возраста $S(t)=2$. Таким образом, необходимо вовремя продать оборудование трёхлетнего возраста.

Для стратегий 5.1 и 5.2 к концу шестого года будем иметь только одну единицу возраста шесть лет, а остальное оборудование не более, чем четырёхлетнего возраста.

Таблица 7

Распределение оборудования по годам при условии усечения матрицы значений функции Беллмана до восьми лет (стратегия 5.1)

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_1(t)$	1	1	1	1	1	1		
$K_2(t)$		1	1	1	1	1	1	
$K_3(t)$	2		1		1	1	1	
$K_4(t)$	2	2		1		1		
$K_5(t)$	1	2	2		1			
$K_6(t)$		1	2	2		1		
$K_7(t)$			1	2	2		1	

Таблица 8

Распределение оборудования по годам при условии усечения матрицы значений функции Беллмана до восьми лет (стратегия 5.2)

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_1(t)$	1	1	1	1	1	1		
$K_2(t)$		1	1	1	1	1	1	
$K_3(t)$	5		1					
$K_4(t)$		5		1				
$K_5(t)$			5		1			
$K_6(t)$				5		1		
$K_7(t)$					5		1	

Отметим, что стратегия 5.2 в течение восьми лет принесет меньшую прибыль, чем стратегия 5.1 и требует больших инвестиций не втором году планового периода. Однако, за первые четыре года планового периода она принесёт 108 ден.ед. прибыли, а 5.1 – 103 ден.ед. Это может повлиять на решение в пользу применения стратегии 5.2, поскольку оценка прибыли в более поздних периодах становится меньше с учётом влияния случайных факторов, которые сложно предсказать.

В [8] приведена таблица распределений прибылей по годам для стратегий, соответствующих первым трём способам построения функции Беллмана, из которой видно, что наиболее эффективной является стратегия 3, поскольку требует наименьших вложений, и приносит наибольшую совокупную прибыль для любого периода, начиная с первого года вплоть до шестого. Поэтому мы будем сравнивать лишь стратегии 3, 4.1, 4.2, 5.1 и 5.2. Применение стратегий 4.1 и 4.2 требует больших инвестиций и приносит значительно меньшую прибыль, чем остальные. Кроме того, на их адекватность

большее влияние оказывает точность прогнозов. Поэтому эксперт вряд ли станет их рассматривать.

Таким образом, при принятии решения, рассматриваются стратегии 3, 5.1, 5.2.

В таблице 9 приведено распределение прибылей по годам при использовании этих стратегий, а в таблице 10 – распределение инвестиций.

В этом отношении стратегия 3 только в первый год принесёт меньшую прибыль, чем 5.1 и 5.2. А уже за первые два года планового периода прибыль от её применения превысит прибыль от применения 5.1. Однако, к концу планового шестилетнего периода возраст оборудования в этом случае будет от 4-х до 9 лет, и наверняка, потребуется заменить более, чем одну единицу.

Таблица 9

Распределение прибылей по годам при использовании стратегий 3, 5.1 и 5.2

i	1	2	3	4	5	6	GPr
$GPr_3(i)$	28	28	28	37	34	30	185
$GPr_{51}(i)$	37	18	18	30	39	36	178
$GPr_{52}(i)$	37	-11	41	41	36	35	179

Таблица 10

Распределение инвестиций по годам при использовании стратегий 3, 5.1 и 5.2

i	1	2	3	4	5	6	GI
$I_3(i)$	12	12	12				36
$I_{51}(i)$		22	24	12			58
$I_{52}(i)$		58					58

Безусловно, выбор оптимальной стратегии обновления оборудования зависит от распределения количества оборудования к началу первого года. Например, если к началу первого года, мы имеем по две единицы оборудования, возраста 1 2 лет и по одной – 5 и 6 лет, то прибыли составят, соответственно 198 ден.ед для стратегии 3 и 189 ден.ед для стратегии 5. При этом инвестиции – 24 ден.ед и 44 ден.ед соответственно. Отметим, однако, что при неизменной конъюнктуре рынка, в случае применения стратегии 3 в начале следующего планового периода необходимо будет заменить оборудование возраста шесть и более лет. А это 4 единицы, а для стратегии 5 замен не будет (в данном случае заменяется 2 единицы оборудования).

Выводы

На уровень адекватности рассматриваемой нами модели существенное влияние оказывает конъюнктура рынка. В частности, расширение мобильных сетей в 2005–2006 годах привело к резкому падению цен на средства связи, что повлияло на достоверность прогнозов и, следовательно, принятые ранее стратегии обновления оказались ошибочными.

Для удобства мы рассматриваем шаг в один год. Однако, в случае оборудования с быстрым моральным износом, можно уменьшить шаг до одного квартала, если конечно это не связано с сезонным изменением в эксплуатации (например, сельскохозяйственное оборудование). Кроме того, для простоты мы рассмотрели случай равномерного распределения количества оборудования по возрасту. Но поскольку формула (1) справедлива для любых распределений, то это не оказывает влияния на алгоритм выработки оптимальных стратегий обновления.

Список использованной литературы

1. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton. New Jersey: Princeton University Press, 2010. 392 p.
2. Taha H. Operations Research: An Introduction, 10th Edition. Boston: Princeton, 2017. 848 p.
3. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. М.: Финансы и статистика, 2001. 544 с.
4. Denardo, E. V. Dynamic Programming: Models and Applications. New York, Courier Corporation, 2012. 240 p.
5. Bertsekas, D. P. Dynamic Programming and Optimal Control. Belmont, Massachusetts, 2012. 1270 p.
6. Gelrud Ya. D., Gollay A. V. Mathematical Models of Replacement and Wearing of Equipment *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2018. Т. 18, № 2. С. 121–130.
7. Шумейко О. А. Динамічна модель оптимального розподілу інвестицій при заміні обладнання. *Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем*. 2012. №17. С. 255–267.
8. Андрейцев А. Ю., Вяла Ю. Э., Гейлик А. В., Ляшко О. В., Смирнов И. В. Задача о замене оборудования: некоторые специальные случаи. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. №2(69). С. 153–159.

References

1. Bellman, R. (2010). Dynamic Programming. Princeton. New Jersey: Princeton University Press.
2. Taha, H. (2017). Operations Research: An Introduction. 10th Edition. Boston: Princeton.
3. Fomin, G. P. (2001). Matematicheskie metody i modeli v kommercheskoy deyatelnosti. M.: Finansyi i statistika.
4. Denardo, E. V. (2012). Dynamic Programming: Models and Applications. New York: Courier Corporation.
5. Bertsekas, D. P. (2012). Dynamic Programming and Optimal Control Belmont, Massachusetts Institute of Technology.
6. Gelrud, Ya. D., & Gollay, A. V. (2018). Mathematical Models of Replacement and Wearing of Equipment. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Kompyuternye tehnologii, upravlenie, radioelektronika»*. **18**, 2, 121–130.
7. Shumeiko, O. A. (2012). Dynamichna model optymalnoho rozpodilu investytsii pry zaminni obladdnannia. *Ekonomiko-matematychni modeliuvannia sotsialno-ekonomichnykh system*. **17**, 255–267.
8. Andreytsev, A. Yu., Vyala, Yu. E., Heylik, A. V., Liashko, O. V., & Smyrnov, Y. V. (2019). Zadacha o zamene oborudovaniya: nekotorye spetsyalnye sluchai. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **2** (69), 153–159.

Андрейцев Андрей Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: andr7765@i.ua, ORCID 0000-0003-3969-185X.

Вяла Юлия Эдуардовна – старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: j-mineewa@ukr.net, ORCID 0000-0003-0369-3570.

Гейлик Анастасия Вадимовна – к.п.н., доцент кафедры высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: geilik@meta.ua, ORCID 0000-0002-4675-5711.

Клецкая Татьяна Сергеевна – к.и.н., доцент, доцент кафедры высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: vellaer@i.ua, ORCID 0000-0003-3969-185X.

Ляшко Ольга Викторовна – к.ф.-м.н., доцент, заведующая кафедрой высшей и прикладной математики Государственного университета инфраструктуры и технологий, e-mail: olga_liashko@ukr.net, ORCID 0000-0003-2616-898X.

УДК 681.3.06 + 539.1.074.8

А.Ю. БУКИ, А.С. МАЗМАНИШВИЛИ
 Национальный Научный Центр «Харьковский Физико-Технический Институт»

ВЫБОРОЧНЫЙ АНАЛИЗ РАБОТЫ 5-ШАРОВОГО СПЕКТРОМЕТРА БОННЕРА

Проанализированы данные, полученные при создании шарового нейтронного спектрометра Боннера активационного типа, состоящего из 5 полиэтиленовых шаров. В качестве активируемого материала использовался индий. Проведены измерения, в которых пучок электронов с энергией $E=12$ МэВ преобразовывался в 100-микронном танталовом (e,γ) -конверторе в γ -излучение, которое попадало на свинцовый

(γ, n) -конвертор. Нейтроны из конвертора падали на шары спектрометра, в каждом из них отеплялась неодинаковая их часть, и поэтому активация индиевых таблеток была разной. После облучения на ускорителе из шаров извлекались индиевые таблетки и помещались в γ -спектрометр, где определялась степень активации таблетки. Таким образом, результатом измерений были 5 чисел, характеризующих активацию таблеток из 5 шаров. Предполагая некоторую функцию $F(E, a_j)$, которая может описать спектр нейтронов и зависит от нескольких параметров a_j , и, располагая функцией отклика i -ого шара $\phi_i(E)$, активация может быть представлена как свёртка функций $F(E, a_j)$ и $\phi_i(E)$. Предложена модель математической обработки данных измерений наведенной в индии радиоактивности. Построена модель, основанная на минимизации функционала качества и нелинейных регрессионных уравнениях. С помощью стохастического рекуррентного алгоритма решена задача восстановления спектра нейтронов. Для использованной четырехпараметрической модели спектра типа распределения Максвелла получены оценки его параметров, а также оценки погрешностей оценок параметров.

Ключевые слова: спектр потока нейтронов, спектрометр Боннера, стохастический рекуррентный алгоритм, оценка параметров спектра, оценка погрешности оценки.

О.Ю. БУКІ, О.С. МАЗМАНІШВІЛІ
 Національний Науковий Центр «Харківський Фізико-Технічний Інститут»

ВИБІРКОВИЙ АНАЛІЗ РОБОТИ 5-КУЛЬКОВОГО СПЕКТРОМЕТРА БОННЕРА

Проаналізовані дані, які отримані при створенні кулькового нейтронного спектрометра Боннера активаційного типу, що містить 5 поліетиленованих кульок. У якості активованого матеріалу використовувався індій. Здійснено вимірювання, в яких пучок електронів із енергією $E=12$ МеВ перетворювався в 100-мікронному танталовому (e, γ) -конверторі на γ -випромінювання, яке потрапляло на свинцовий (γ, n) -конвертор. Нейтрони з конвертора потрапляли на кульки спектрометра, в кожному з них отеплялася неоднакова їх частина, і тому активация індієвих таблеток була різною. Після опромінювання на прискорювачі з кульок вилучалися індикаторні таблетки і розміщувалися в γ -спектрометрі, де визначався ступінь активации таблеток. Таким чином, результатом вимірювань є 5 чисел, які характеризують активацию таблетки з 5 кульок. Передбачаючи деяку функцию $F(E, a_j)$, яка може описати спектр нейтронів і залежить від декількох параметрів a_j , і, маючи функцию

відгуку i -ої кульки $\phi_i(E)$, активація може бути представлена як згортка функцій $F(E, a_j)$ та $\phi_i(E)$. Запропоновано модель математичної обробки даних вимірювань наведеної в індії радіоактивності. Побудовано модель, яка заснована на мінімізації функціонала якості та нелінійних регресійних рівнянь. За допомогою стохастичного рекурентного алгоритму розв'язана задача відновлення спектра нейтронів. Для використаної чотирьохпараметричної моделі спектра типу розподілу Максвелла отримано оцінки його параметрів, а також оцінки похибок оцінок параметрів.

Ключові слова: спектр потоку нейтронів, спектрометр Боннера, стохастичний рекурентний алгоритм, оцінка параметрів спектра, оцінка похибки оцінки.

A.Yu. BUKI, A.S. MAZMANISHVILI

National Science Center 'Kharkov Institute of Physics & Technology', Kharkov, Ukraine

SELECTIVE ANALYS OF THE WORK OF 5-BALL BONNER SPECTROMETER

The data obtained during the test of the generated Bonner neutron spectrometer of an activation type consisting of 5 polyethylene balls are analyzed. Indium was used as the activated material. Measurements were made an electron beam with energy $E=12$ MeV was transformed into a 100-micron tantalum (e,γ)-converter into γ -radiation, which fell on the lead plumbum (γ,n)-converter. The neutrons from converter were incident on the spectrometer balls. Different parts of the neutrons arrived in each of them, and therefore the activation of indium tablets was different. After irradiation on the accelerator, indium tablets were extracted from the balls, and was placed in a γ spectrometer, where the degree of activation of the tablet was determined. Thus, the results of the measurements were 5 numbers characterizing the activation of 5-ball tablets. Assuming some function $F(E, a_j)$, which can describe the neutron spectrum and depends on several parameters a_j , and, by having the response function of the i^{th} ball $\phi_i(E)$, activation can be represented as a convolution of functions $F(E, a_j)$ and $\phi_i(E)$. The results of mathematical processing of measurement data of radioactivity induced in Indium are presented. Model based on minimization of the quality functional and nonlinear regression equations is constructed. Using the stochastic recurrent algorithm, the problem of neutron spectrum restoration is solved. For the used four-parameter model of the spectrum, such as the Maxwell distribution, estimates of its parameters are obtained, as well as estimates of the errors of parameter estimates.

Keywords: neutron flux spectrum, Bonner spectrometer, stochastic recurrence algorithm, estimation of spectrum parameters, estimation of estimation error.

Постановка проблеми

При анализе данных, получаемых при использовании шарового нейтронного спектрометра Боннера активационного типа, как правило, применяются поисковые методы градиентного типа. В них рассматривается пробная спектральная функция с параметрами, оценки значений которых ищутся. С увеличением числа используемых параметров возможно возникновение неустойчивостей, что чаще всего связано с использованием неадекватных областей их возможных значений. Методы стохастического поиска используют только начальные значения, при этом устойчивость их работы слабо связана с числом оцениваемых параметров, а длительность выполнения необходимых численных операций зависит от количества исследуемых параметров гораздо медленней, чем при использовании градиентных методов.

Анализ последних исследований и публикаций

Конструкция и применение шарового спектрометра Боннера была изложена в [1]. Примеры расчета зависимости вероятности активации таблетки от энергии нейтрона (функции отклика $F_i(E_j)$) для полиэтиленовых шаров приведены в [2]. Общие свойства нейтронных потоков и процессов их замедления изложены в [3]. Вопросам оптимизации ядерных реакторов и особенностей их проектирования с использованием численного моделирования посвящена работа [4].

Цель исследования

Целью работы является демонстрация применимости стохастических методов при выполнении расчетов по восстановлению спектра нейтронов из измерений шарового спектрометра Боннера. Используемые экспериментальные данные получены для потока нейтронов из конвертора, на который из ускорителя ЛУЭ-300 ХФТИ падал пучок электронов с энергией $E=12$ МэВ. Для проведения измерений используется 5-ти шаровой нейтронный спектрометр активационного типа.

Изложение основного материала исследования

Экспериментальная установка и методика исследований

В ННЦ ХФТИ для работ с нейтронами, которые генерируются в (e,n) -конверторе электронного ускорителя, создан шаровой спектрометр. Спектрометр состоит из 5 полиэтиленовых шаров различного диаметра от 90 до 245 мм. Пучок электронов, попадая в $(e-\gamma-n)$ -конвертор, генерирует излучение нейтронов (рис. 1).

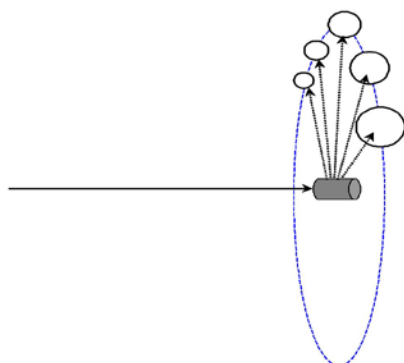


Рис. 1. Схема эксперимента. Пучок электронов (линия), конвертор (цилиндр), нейтроны из конвертора (точечные стрелки), полиэтиленовые шары спектрометра (кружки).

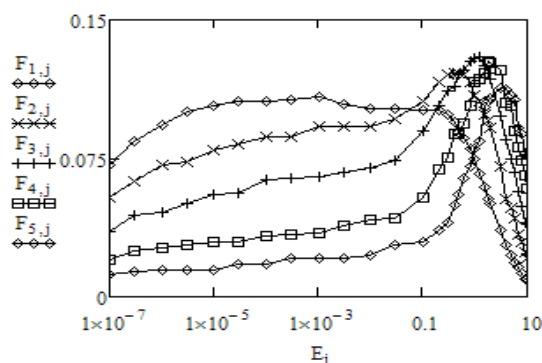


Рис. 2. Функции отклика F_{ij} .

На расстоянии 1 м от конвертора расположены полиэтиленовые шары, в центре каждого из которых находится таблетка из индия. У изотопа ^{115}In высокое сечение поглощения нейтронов с энергиями < 4 эВ. В результате поглощения этим изотопом нейтрона образуется радиоактивное ядро ^{116}In , распад которого приводит к излучению γ -квантов, в основном, с энергией 412 кэВ. В результате облучения шаров нейтронами активируется содержащийся в таблетке основной изотоп индия ^{115}In , который затем распадается с периодом полураспада $T_{1/2}=54.2$ мин. После сеанса облучения из шаров извлекаются таблетки. Величина активации каждой таблетки определяется по интенсивности её γ -излучения с энергией $E=416,9$ МэВ. Для измерения гамма-

излучения используется германий-литиевый гамма спектрометр с энергетическим разрешением в районе 400 кэВ, равным 2,5 кэВ.

На рис. 2 показаны функции отклика шаров, которые использовались в эксперименте. По горизонтальной оси отложена энергия налетающих нейтронов E_j в логарифмическом масштабе.

Дифференциация нейтронов по энергии происходит при прохождении ими полиэтиленовых шаров. Внутри шара нейтроны в результате рассеяния на ядрах замедляются, их энергия уменьшается, при этом по мере достижения нейтроном тепловой энергии возрастает вероятность его поглощения веществом шара или индиевой таблеткой. Нейтроны большей энергии приходят к индиевой таблетке, не успевая замедлиться на столько, чтобы активировать ядра изотопа ^{115}In . Если же энергия нейтронов мала, то они успевают отеплиться, не доходя до индиевой таблетки. Для нейтрона, ставшего тепловым, возрастает вероятность его поглощения на пути к таблетке, при этом уменьшается вероятность активации этой таблетки. Для i -го шара зависимость вероятности активации таблетки от энергии нейтрона называется функцией отклика $F_{i,j}=F_i(E_j)=S_i N_i(E_i)/N_i(E_j)$, где S_i – площадь поперечного сечения i -го шара, $N_i(E_i)/N_i(E_j)$ – вероятность активации i -й таблетки нейтроном, $N_i(E_j)$ – число нейтронов, налетевших на i -й шар с начальной энергией E_j , $N_i(E_i)$ – число нейтронов, которые замедлились до энергии активации E_i и попали в таблетку.

Количество активированных ядер в каждой из таблеток шаров спектрометра приведено в табл. 1. В ней используются обозначения: i и D_i – номер и диаметр шара; $N_i \pm \Delta N_i$ – количество активированных ядер в i -й таблетке.

Таблица 1

Активация ядер в индиевых таблетках шаров

i	D_i , мм	N_i	ΔN_i
1	90	79000	2000
2	120	89000	2200
3	152	115000	2600
4	200	93000	3200
5	245	68000	2600

Подготовка данных к математическому моделированию

Для получения энергетического спектра нейтронного потока, измерения в котором проведены посредством шарового спектрометра Боннера, необходимо задать функцию, способную изобразить этот спектр. Разработана модель, обеспечивающая симуляцию распространения нейтронов в веществе в диапазоне энергий от 10⁻⁸ до нескольких МэВ, которая показала достаточно высокую скорость. На её основе рассчитаны функции отклика шарового нейтронного спектрометра. Как показано в [2], рабочий диапазон рассматриваемого спектрометра 0.05–5.0 МэВ. При этих энергиях нейтронный поток из свинцового конвертора имеет вид пика с максимумом при энергии около 0.5 МэВ [4]. Форма этого пика может быть описана функцией типа распределения Максвелла:

$$\Phi(E, a) = a_1 E^{a_3} \exp(-a_2 E) + a_4 / E, \quad (1)$$

в которой к функции Максвелла добавлено слагаемое, описывающее вклад в спектр тех нейтронов, энергия которых значительно меньше 0.5 МэВ.

Если набор параметров $\{a\}$ такой, что задаваемый ими вид функции $\Phi(E, a)$ близок к реальному спектру нейтронов, то свертки функции $\Phi(E, a)$ с функциями отклика $F_i(E_j)$ должны дать набор чисел, который с точностью до общего множителя пропорционален набору из количеств активированных ядер в таблетках, полученного в эксперименте, то есть набору N_i из табл. 1. В рамках такого подхода задача сводится к процедуре нахождения оценки $\hat{a}=(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4)$ значений четырех параметров $a=(a_1, a_2, a_3, a_4)$, фигурирующих в (2). Из вышеизложенного следует, что для восстановления спектра нейтронов необходимо путём подбора параметров $\{a\}$ функции $\Phi(E, a)$ минимизировать разности между всеми экспериментальными значениями N_i и соответствующих им свертками функций $F_i(E_j)$ и $\Phi(E, a)$.

В работе применяется стохастическая процедура, состоящая из цикла поиска из N шагов. На каждом из них формируется подвыборка объемом K , в которой ищется локальный минимум критерия качества. Найденный локальный минимум используется на очередном шаге глобального цикла. Длительность глобального цикла поиска регулируется так, чтобы осуществить выход в периферийную область стационарных значений критерия. В рамках алгоритма число нейтронов, активировавших таблетку в i -ом шаре, записывается в виде:

$$N_i = \int_{-\infty}^{\infty} F(E)\Phi(E, a) dE, \quad (2)$$

после чего это представление для N_i заменяется конечной суммой:

$$H_i = \sum_{j=1}^J F_{i,j} \Phi(E_j, a) \Delta E_j, \quad (3)$$

где E_j – набор энергий ($j=1, \dots, J$), $\Delta E_j = E_j - E_{j-1}$, $F_{i,j}=F_j(E, j)$. В результате приходим к системе из 5 уравнений регрессионного типа $N_i=H_i$, $i=1, \dots, 5$, статистический анализ которой дает возможность найти решение – искомые оценки $\hat{a}=(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4)$ параметров $a=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ распределения. Аналогичный алгоритм осуществляется при нахождении оценок погрешностей оценок.

Математическое моделирование

Алгоритм нахождения искомых оценок можно описать в виде следующей последовательности шагов:

1. Выбор начальных значений $a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, a_{0,4}$ параметров a_1, a_2, a_3, a_4 .
2. Выбор параметров численного расчета
 - 2.1. N – количество итерационных шагов глобального поиска;
 K – количество шагов локального поиска на каждом шаге итерации;
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ – относительные радиусы поиска на шагах итерации по n .
 - 2.2. Построение критерия качества ($m=1, 2, 3, 4$ – индексы оцениваемых параметров):

$$\chi_{n,k} = \sum_{i=1}^I \left[\frac{1}{\Delta N_i} \left(N_i - \sum_{j=1}^J F_{i,j} \Phi(E_j, a_{n,m}) \Delta E_j \right) \right]^2. \quad (4)$$

3. Формирование глобального цикла по $n=1, \dots, N$.
 - 3.1. На каждом шаге цикла по n построить локальную подвыборку объемом K , в

которой для каждого из K значений критерия параметры $a_{n,m}$ задавать согласно формуле $a_{n,m} = a_{n-1,m} + \sigma_m(\text{rnd}(1)-0.5)$, $m=1, 2, 3, 4$, с использованием стандартного датчика $\text{rnd}(1)$ равномерно распределенных случайных величин на $(0;1)$. Таким образом, на каждом $(n+1)$ -ом шаге глобального счетчика стохастический поиск осуществляется внутри 4-куба, центр которого имеет координаты $\hat{a}=(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4)$, при этом размеры ребер этого 4-куба составляют $a_{n,m}\sigma_m$, $m=1, 2, 3, 4$.

- 3.2. Найти в подвыборке локальный минимум среди K значений критерия $\chi_n = \min(\chi_{n,k})$, $k=1, \dots, K$.
- 3.3. В цикле по n найти глобальный минимум среди выборки из N значений критерия (4): $\chi_N = \min(\chi_n)$, $n=1, \dots, N$.
4. Присвоить значения оценок параметров: $\hat{a}_1 = \hat{a}_{N,1}$, $\hat{a}_2 = \hat{a}_{N,2}$, $\hat{a}_3 = \hat{a}_{N,3}$, $\hat{a}_4 = \hat{a}_{N,4}$.
5. Полученные значения оценок $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4$ являются по своей природе случайными величинами. Поэтому для их статистической аттестации необходимо предъявить оценку их погрешности $\Delta\hat{a}=(\Delta\hat{a}_1, \Delta\hat{a}_2, \Delta\hat{a}_3, \Delta\hat{a}_4)$. С этой целью рассмотрим вариацию уравнений: $\delta N_i = \delta H_i$, $i=1, \dots, 5$, где

$$\delta H_i = \sum_{j=1}^J F_{i,j} \left(\sum_{m=1}^4 \delta a_m \partial \Phi(E_j, a) / \partial a_m \right) \Delta E_j. \quad (5)$$

В результате приходим к системе из 5 уравнений регрессионного типа $\Delta N_i = \Delta H_i$, $i=1, \dots, 5$, и построим при $a_m = \hat{a}_m$, $m=1, \dots, 4$, критерий качества:

$$\eta_{n,k} = \sum_{i=1}^I \left[\frac{1}{\Delta N_i} \left(\Delta N_i - \sum_{j=1}^J F_{i,j} \left(\sum_{m=1}^4 \Delta a_m \partial \Phi(E_j, a) / \partial a_m \right) \Delta E_j \right) \right]^2. \quad (6)$$

6. Опираясь на найденные значения \hat{a}_m , $m=1, 2, 3, 4$, выполнить над критерием $\chi_{n,k}$ действия, описанные в п. 3 алгоритма, и найти глобальный минимум среди выборки из N значений критерия $\chi_N = \min(\chi_n)$, $n=1, \dots, N$, после чего присвоить найденные значения оценок погрешностей оценкам параметров: $\Delta\hat{a}_1 = \Delta\hat{a}_{N,1}$, $\Delta\hat{a}_2 = \Delta\hat{a}_{N,2}$, $\Delta\hat{a}_3 = \Delta\hat{a}_{N,3}$, $\Delta\hat{a}_4 = \Delta\hat{a}_{N,4}$.

Результаты вычислений и их обсуждение

Сформулирована модель математической обработки данных измерений наведенной в индии радиоактивности. На основании модели, основанной на минимизации функционала качества и нелинейных регрессионных уравнениях, с помощью стохастического рекуррентного алгоритма рассматривалась задача восстановления спектра нейтронов. Было создано программное средство для нахождения оценок. При проведении вычислений оказалось достаточным выбрать: границы циклов $N=1000$, $K=100$ и радиусы поиска $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, равные 0,6. На старте вычислений было выбрано: $a_{0,1}=1800000$; $a_{0,2}=1.0$; $a_{0,3}=1.0$; $a_{0,4}=0.01$. Количество точек по энергетической шкале выбиралось на этапе расчета функций отклика $F_i(E_j)$ и составило 33, что видно на рис. 2.

На рис. 3 показана итерационная динамика критериев (4) и (6). Видно, что начиная с $n=200$ значение функционала χ_n остается неизменным. Это дает основание полагать оценки, определяемые после $n=200$, достаточно статистически обоснованными. Что касается реализаций функционала η_n , то они также после $n=400$ в основном флуктуируют вокруг одного среднего.

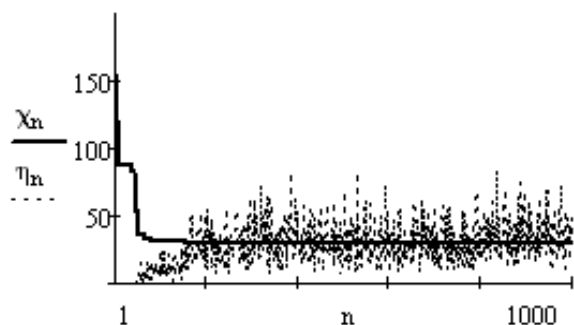


Рис. 3. Динамика минимума функционалов (4) и (6).

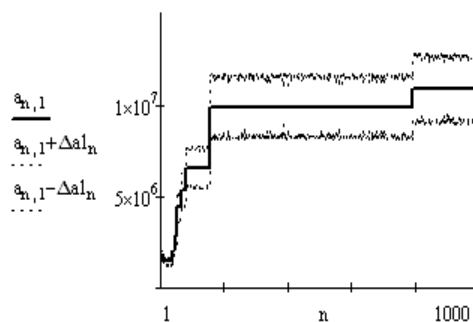


Рис. 4. Динамика оценок \hat{a}_1 и $\Delta \hat{a}_{n,1}$.

На рис. 4–7 показаны динамика искомых оценок (указаны сплошной линией) и их погрешностей (указаны пунктирной линией). Пример эволюции оценки параметра \hat{a}_1 и оценки погрешности оценки параметра $\Delta \hat{a}_1$ приведен на рис. 4. Видно, что в результате итерационного процесса искомые \hat{a}_1 и $\Delta \hat{a}_1$ оценки вышли на свои стационарные значения.

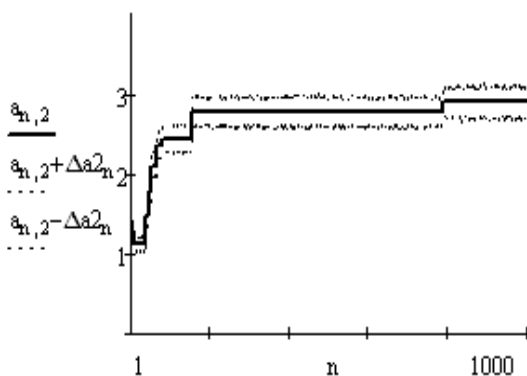


Рис. 5. Динамика оценок \hat{a}_2 и $\Delta \hat{a}_{n,2}$.

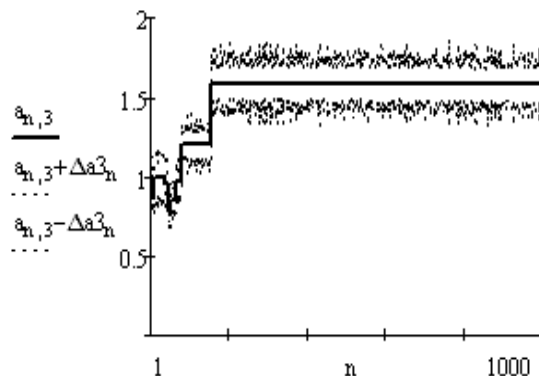


Рис. 6. Динамика оценок \hat{a}_3 и $\Delta \hat{a}_{n,3}$.

На рис. 5, 6 и 7 показаны аналогичные зависимости для оценок \hat{a}_1 , \hat{a}_2 , \hat{a}_3 и \hat{a}_4 соответственно. Из рис. 7 следует, что $\hat{a}_4=0$. Поскольку у спектрометра граница рабочего диапазона со стороны малых энергий порядка 0.01 МэВ, то заметный вклад гиперболического члена должен проявляться при более низких энергиях.

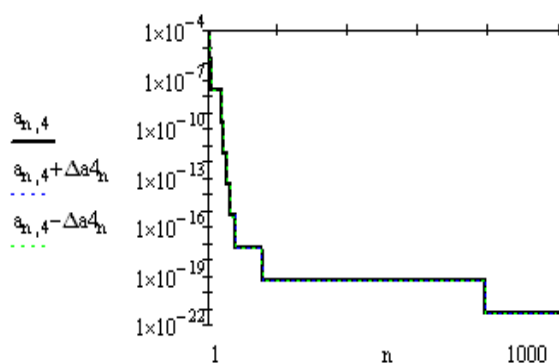


Рис. 7. Динамика оценок \hat{a}_4 и $\Delta \hat{a}_{N,4}$.

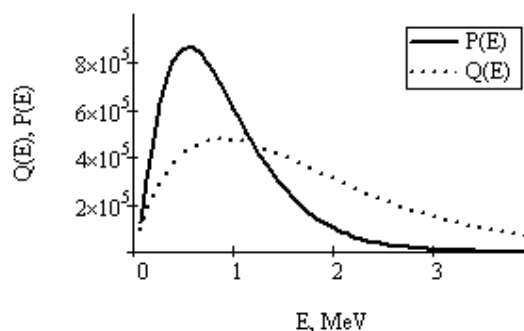


Рис. 8. Энергетические спектры нейтронов: исходный $Q(E)$ и восстановленный $P(E)$.

На рис. 8 приведены исходный спектр $Q(E)$, рассчитанный с помощью начальных значений параметров $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $a_{0,3}$, $a_{0,4}$, и результирующий спектр $P(E)$, полученный на основе найденных оценок \hat{a}_1 , \hat{a}_2 , \hat{a}_3 и \hat{a}_4 . Из рис. 8 видно, что максимум спектра нейтронов приходится на энергию 0.5 МэВ.

Итак, в результате получены следующие значения для оценок искомых величин:

Таблица 2

Основные результаты расчета

$a_{0,1}=1800000$	$a_{0,2}=1.0$	$a_{0,3}=1.0$	$a_{0,4}=0.010$
$\hat{a}_1=1086000 \pm 189000$	$\hat{a}_2=2.889 \pm 0.202$	$\hat{a}_3=1.579 \pm 0.102$	$\hat{a}_4=0.000$

Как видно из табл. 2 и рис. 8, подстановка найденных оценок параметров приводит к распределению, общий вид и положение максимума которого оказались близкими к ожидаемому. Практика минимизации функций с помощью программ, базирующихся на принципе градиентного спуска, показывает их нередкое зависание или авосты. Как видно из полученных результатов, стохастический метод лишен этого недостатка. Это явилось преимуществом для практики применения этого метода.

Выводы

Создан шаровой нейтронный спектрометр активационного типа, состоящий из 5-ти полиэтиленовых шаров, содержащих цилиндрическую таблетку из индия. Пучок электронов с энергией $E=12$ МэВ преобразовывался в танталовом (e, γ)-конверторе в гамма-излучение, которое попадало на свинцовый (γ, n)-конвертор. Нейтроны из этого конвертора падали на шары спектрометра. Так как размеры шаров разные, то в каждом из них активация индиевых таблеток была разной. После облучения из шаров были извлечены индиевые таблетки и каждая из них помещалась в гамма-спектрометр, где по интенсивности линии излучения 413 кэВ определялась степень активации таблетки 5 чисел, характеризующие активацию таблеток из 5-ти шаров. Рассматривая функцию, которая описывает спектр нейтронов и зависит от нескольких параметров, и, располагая функцией отклика i -ого шара, активация может быть представлена как свёртка этих двух функций. Поэтому для 5 экспериментальных значений N_i образуется 5 уравнений, из решения которых оценивается спектр нейтронов.

Предложена модель математической обработки данных измерений наведенной в индии радиоактивности. Построена модель, основанная на минимизации функционала качества и нелинейных регрессионных уравнениях.

С помощью стохастического рекуррентного алгоритма решена задача восстановления спектра нейтронов. Для использованной четырехпараметрической модели спектра типа распределения Максвелла получены оценки его параметров, а также оценки погрешностей оценок параметров.

Полученный в работе опыт может быть использован для оптимизации конструкции нейтронного спектрометра.

Список использованной литературы

1. Bramblett R. L., Ewing R. I., Bonner T. W. A New Type of Neutron Spectrometer. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*. 1960. № 9. P. 1–12.
2. Буки А. Ю., Каленик С. А., Семисалов И. Л. Опытный образец нейтронного спектрометра Боннера активационного типа. *Вестник Харьковского Национального Университета. Серия физическая: Ядра, частицы, поля*. 2012. Вып. 4(56), № 1025. С. 35–42.
3. Власов Н. А. Нейтроны. Москва : Наука, 1971. 551 с.
4. Рудик А. П. Оптимизация физических характеристик ядерных реакторов. Москва : Атомиздат, 1979. 280 с.

References

1. Bramblett, R. L., Ewing, R. I., & Bonner, T. W. (1960). A New Type of Neutron Spectrometer. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*. **9**, 1–12.
2. Buki, A. Yu., Kalenik, S. A., & Semisalov, I. L. (2012). Opyitnyiy obrazets neytronnogo spektrometra Bonnera aktivatsionnogo tipa. *Vestnik Harkovskogo Natsionalnogo Universiteta. Seriya fizicheskaya: Yadra, chastitsyi, polya*. **4(56)**, 1025, 35–42.
3. Vlasov, N. A. (1971). *Neytronyi*. Moskva : Nauka.
4. Rudik, A. P. (1979). *Optimizatsiya fizicheskikh harakteristik yadernyih reaktorov*. Moskva : Atomizdat.

Буки Александр Юрьевич – д.ф.-м.н., старший научный сотрудник НИЦ ХФТИ, e-mail: abuki@ukr.net.

Мазманишвили Александр Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор, старший научный сотрудник НИЦ ХФТИ, e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

УДК 514.180

В.М. ВЕРЕЩАГА, М.О. РУБЦОВ, О.М. ПАВЛЕНКО

Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького

Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша

ГЛОБАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТОЧКОВИМ ПОЛІНОМОМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ КОМПОЗИЦІЇ ІЗ ТРЬОХ ТОЧОК, СЕРЕД ЯКИХ Є ДВОКРАТНА

У статті показано послідовність виконання параметризації, уздовж координатної осі, вихідної дискретно поданої лінії (ДПЛ) та надано у загальному вигляді інтерполяційний точковий поліном. Розглядається можливий варіант виконання інтерполяції дискретно поданої кривої (ДПК), яку утворюють три точки, які перетворилися у трикратну точку та надаються значення параметрів щодо цього варіанту. Вказується на те, що з появою на ДПЛ кратних точок у складових елементах параметричного точкового полінома виникають невизначеності. Доведено, що усі ці невизначеності розкриваються, границями яких, у вузлових точках є нуль або одиниця. Вказується на те, що з появою на ДПЛ кратних точок у складових елементах параметричного полінома Лагранжа виникають невизначеності. Доведено, що усі ці невизначеності розкриваються, границями яких, у вузлових точках є нуль або одиниця. Показано, що невизначеності, які виникають з появою кратних точок на ДПЛ, не є перешкодою для глобальної інтерполяції із застосуванням параметричного точкового полінома. Тобто, для будь-якої композиції з трьох точок, побудова та структура запису параметричного точкового полінома лишається без змін. При цьому, ніяких обмежень на створення композиції з трьох точок не існує. Доведено, що усі ці невизначеності розкриваються, границями яких, у вузлових точках є нуль або одиниця. Показано, що невизначеності, які виникають з появою кратних точок на ДПЛ, не є перешкодою для глобальної інтерполяції із застосуванням параметричного полінома за формою Лагранжа. Цей факт доведено у даній статті. Надано композиційну числову матрицю, у відповідності до якої відбувається обумовлена інтерполяція. Елементами цієї композиційної матриці є значення характеристичних функцій інтерполянта у вузлових точках. Показано, що елементи композиційної матриці інтерполяції не змінюються за наявності будь-якої геометричної композиції з трьох точок. Може змінюватись лише статус цих елементів. В одному випадку їх значення є точними, а у іншому – вони можуть бути границею, до якої прямує значення характеристичної функції інтерполяційного точкового параметричного полінома.

Ключові слова: кратні точки, геометрична композиція, композиційна матриця, розкриття невизначеностей, точковий поліном.

В.М. ВЕРЕЩАГА, Н.А. РУБЦОВ, А.М. ПАВЛЕНКО

Мелітопольский государственный педагогический университет
имени Богдана Хмельницкого

Мелітопольская школа прикладной геометрии имени Владимира Найдыша

ГЛОБАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТОЧЕЧНЫМ ПОЛИНОМОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОМПОЗИЦИИ ИЗ ТРЕХ ТОЧЕК, СРЕДИ КОТОРЫХ ЕСТЬ ДВУХКРАТНАЯ

В статье показана последовательность выполнения параметризации, вдоль координатной оси, исходной дискретно представленной линии (ДПЛ) и предоставлено в общем виде интерполяционный точечный полином. Рассматривается возможный

вариант выполнения интерполяции дискретно представленной кривой (ДПК), которую образуют три точки, которые превратились в трехкратную точку и предоставляются значения параметров по этому варианту. Указывается на то, что с появлением на ДПЛ кратных точек в составляющих элементах параметрического точечного полинома возникают неопределенности. Доказано, что все эти неопределенности раскрываются, границами которых, в узловых точках является ноль или единица. Указывается на то, что с появлением на ДПЛ кратных точек в составляющих элементах параметрического полинома Лагранжа возникают неопределенности. Доказано, что все эти неопределенности раскрываются, границами которых, в узловых точках являются ноль или единица. Показано, что неопределенности, которые возникают с появлением кратных точек на ДПЛ, не является препятствием для глобальной интерполяции с применением параметрического точечного полинома. То есть, для любой композиции из трех точек, построение и структура записи параметрического точечного полинома остается без изменений. При этом, никаких ограничений на создание композиции из трех точек не существует. Доказано, что все эти неопределенности раскрываются, границами которых, в узловых точках являются ноль или единица. Показано, что неопределенности, которые возникают с появлением кратных точек на ДПЛ, не является препятствием для глобальной интерполяции с применением параметрического полинома по форме Лагранжа. Этот факт доказан в данной статье. Предоставлено композиционную числовую матрицу, в соответствии с которой происходит обусловлена интерполяция. Элементами этой композиционной матрицы является значение характеристических функций интерполянта в узловых точках. Показано, что элементы композиционной матрицы интерполяции не изменяются при наличии любой геометрической композиции из трех точек. Может изменяться только статус этих элементов. В одном случае их значения являются точными, а в другом - они могут быть границей, к которой следует значение характеристической функции интерполяционного точечного параметрического полинома.

Ключевые слова: кратные точки, геометрическая композиция, композиционная матрица, раскрытия неопределенностей, точечный полином.

V.M. VERESHCHANA, M.O. RUBCOV, O.M. PAVLENKO

Bogdan Khmelnytsky Melitopol State Pedagogical University
Volodimir Naydysh Melitopol School of Applied Geometry

GLOBAL INTERPOLATION BY A POINT POLYNOMIC GEOMETRIC COMPOSITION OF THREE POINTS, AMONG THESE TWO-TIME

The article shows the sequence of performing parameterization, along the coordinate axis, of the original discretely presented line (DPL) and provides in general form an interpolation point polynomial. A possible embodiment of the interpolation of a discretely presented curve (DPC) is considered, which is formed by three points that have turned into a triple point and the parameter values for this option are provided. It is indicated that with the appearance of multiple points on the DPL in the constituent elements of a parametric point polynomial, uncertainties arise. It is proved that all these uncertainties are revealed, the boundaries of which, at nodal points, is zero or one. It is indicated that with the appearance of multiple points on the DPL in the constituent elements of the parametric Lagrange polynomial, uncertainties arise. It is proved that all these uncertainties are revealed, the boundaries of which, at nodal points, are zero or one. It is shown that the uncertainties that arise with the appearance of multiple points on the LPL are not an obstacle to global

interpolation using a parametric point polynomial. That is, for any composition of three points, the construction and recording structure of a parametric point polynomial remains unchanged. At the same time, there are no restrictions on creating a composition of three points. It is proved that all these uncertainties are revealed, the boundaries of which, at nodal points, are zero or one. It is shown that the uncertainties that arise with the appearance of multiple points on the LPL are not an obstacle to global interpolation using a parametric polynomial in the Lagrange form. This fact is proved in this article. A composite numerical matrix is provided according to which interpolation occurs. The elements of this compositional matrix is the value of the characteristic functions of the interpolant at the nodal points. It is shown that the elements of the composite interpolation matrix do not change in the presence of any geometric composition of three points. Only the status of these elements can be changed. In one case, their values are accurate, and in the other, they can be the boundary to which the value of the characteristic function of the interpolation point parametric polynomial follows.

Keywords: multiple points, geometric composition, compositional matrix, disclosure of uncertainties, point polynomial.

Постановка проблеми

Геометричне моделювання об'ємних об'єктів довільної форми потребує побудови його поверхні. Зазвичай, побудова поверхонь відбувається шляхом нанесення на неї сітки. Якщо на поверхні геометричного тіла довільної форми нанести сітку, що має незмінну кількість ліній у прямому та трансверсальному напрямках, то будуть виникати чарунки різних розмірів, як великі, так і дуже замалі. На великих чарунках буде збільшуватись похибка відтворення поверхні, а на малих – будуть збільшуватись витрати ресурсів моделювання, що буде зменшувати ефективність та якість моделювання. Сказане обґрунтовує необхідність розробки способу моделювання сіток на поверхнях об'ємних геометричних тіл довільної форми, який мав би можливість використовувати сітки зі змінною кількістю ліній. Змінна кількість ліній у сітках викликає появу дво-, три-,...,n-кратних точок. Отже, розробка та доведення можливості застосування способу інтерполяції дискретно поданих ліній, що утримують кратні точки ϵ , у певній мірі, проблемою, яка і буде розв'язуватись у даній статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Ця робота виконана у рамках і є подальшим розвитком композиційного геометричного моделювання [1, 4, 5, 7], який було розроблено на базі точкового числення Балюби-Найдиша [2, 3].

У згаданих роботах вказується на те, що будь-яка геометрична фігура (ГФ) розглядається як скінчена дискретна непуста множина точок, яка може утримувати різного роду підмножини, що представляють собою цілісний геометричний об'єкт (ГО), який являє собою геометричну композицію, при цьому зміна або заміна будь-якого з елементів геометричної композиції не тягне за собою ніяких змін для решти інших елементів композиції. Геометрична композиція відрізняється від іншого роду композицій тим, що для кожного з її елементів встановлено власні розміри та розміри, що визначають взаємне розташування усіх елементів. Окрім того, у композиційному геометричному моделюванні кожна вихідна геометрична фігура подається у вигляді двох складових – геометричної і параметричної частин. Такий поділ на дві частини обґрунтовується тим, що будь-яку ГФ визначає безпосередньо наявна кількість вихідних точок, а ні в якому разі, не їх взаємне розташування. Наявність точок ГФ представляє її геометричну частину, а взаємне розташування точок ГФ представляє її

параметричну частину. Представлення вихідної ГФ у вигляді двох частин названо, у роботах [1, 4, 5, 7], уніфікацією ГФ.

Композиційне геометричне моделювання базується на застосуванні композиційних матриць. Існуюча теорія матриць [9] вивчає матриці, що описують алгебраїчні системи, у алгебраїчних описах яких їх складові елементи знаходяться у певній комбінаційній залежності один від одного. Наявність таких комбінаційних залежностей, зі зміною одного будь-якого з елементів, тягне за собою відповідні зміни вихідних значень для решти інших.

Окрім цього, наявність взаємозалежностей між елементами у описах алгебраїчних систем впливає на результати розв'язків через обмеження свободи вибору складових вихідних елементів. І навпаки, у композиційних матрицях елементи обираються вільно, незалежно один від одного, кількість яких відповідає вимогам до певної композиції. Наприклад, трикутник – визначається трьома точками і, при цьому, для загального виду трикутника не існує жодних обмежень щодо взаємного розташування цих трьох точок. Отже, композиційні матриці призначені для опису геометричних фігур.

У роботі [6, 8] розглядається спосіб розгортання-згортання чарунок, який передбачає наявність на дискретно поданих кривих (ДПК) кратних точок. Однак, у роботах [6, 8] не було доведено можливість проведення інтерполяції ДПК з наявними кратними точками. Чим і викликано написання даної статті, теоретичним підґрунтям для якої є теорія нескінченно малих [9].

Мета дослідження

Розробка способу інтерполяції, доведення його правдивості і можливостей застосування для різних варіантів розташування кратних точок на дискретно поданих лініях для геометричної композиції з трьох точок.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай необхідно глобально інтерполювати ДПК, що має за вузли інтерполяції

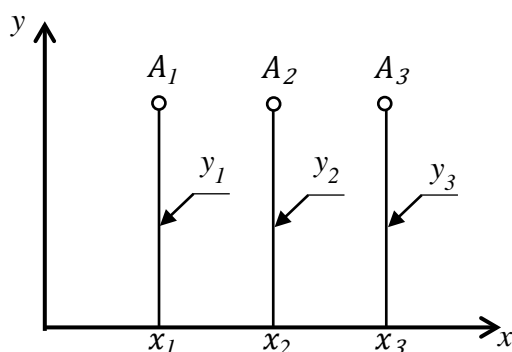


Рис. 1. Вихідна ДПК.

три базисні точки A_i для $i=\overline{(1, 3)}$ (рис. 1), які утворюють геометричну композицію (геометричну фігуру – ГФ) з трьох точок. Введемо позначення:

$$x_{11} = x_1 - x_1; x_{21} = x_2 - x_1; x_{31} = x_3 - x_1. \quad (1)$$

Введемо параметри для вихідної ГФ (рис. 1) уздовж осі Ox:

$$t_1 = \frac{x_{11}}{x_{31}} = 0; t_2 = \frac{x_{21}}{x_{31}}; t_3 = \frac{x_{31}}{x_{31}} = 1. \quad (2)$$

Тоді інтерполяційний точковий поліном, що глобально інтерполює вихідну ДПК (рис. 1), матиме вигляд [1, 7]:

$$y_M = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} y_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 (t_j - t), \quad \text{для } i=\overline{(1, 3)}, \quad (3)$$

де y_M – поточна точка на інтерполяційній кривій (3); λ_i – знаменник коефіцієнту, який приводить до одиниці значення відповідної характеристичної функції (ХФ) в i -му вузлі.

Характеристичні функції (ХФ) – це вирази $\frac{1}{\lambda_i}$, які для відповідного i -го вузла позначимо через $P_i(t)$. Тоді рівняння (3) прийме вигляд:

$$y_M = \sum_{i=1}^3 y_i \cdot P_i(t) \quad (4)$$

Розкриємо вирази ХФ із (4), дістанемо:

$$P_1(t) = \frac{(t_2-t)(t_3-t)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}; P_2(t) = \frac{(t_1-t)(t_3-t)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}; P_3(t) = \frac{(t_1-t)(t_2-t)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)} \quad (5)$$

Усе викладене вище є відомими фактами [1, 4, 5, 7]. Однак, сучасні методи геометричного моделювання потребують виконувати інтерполяцію ДПК з наявними кратними точками [6, 8]. У статті [10] було розглянуто випадок, коли кратними були точки A_1 та A_2 . Розглянемо можливість виконання інтерполяції ДПК, яку утворюють три точки, серед яких є кратні (A_2 і A_3).

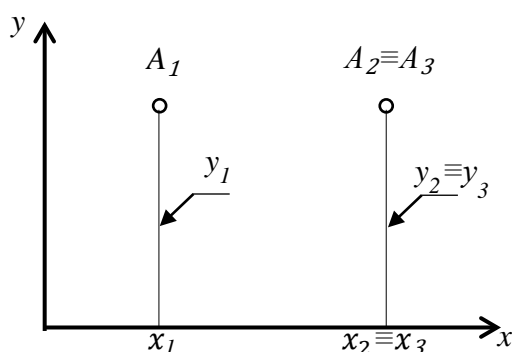


Рис. 2. Варіант вихідної ДПК з двократними точками.

Нехай точки A_2 і A_3 є двократними, тобто $A_2 \equiv A_3$ (рис. 2). Тоді значення параметрів t , що відповідають (2) будуть дорівнювати:

$$t_1=0; t_2=1; t_3=1. \quad (6)$$

Для кожного зі значень параметрів (6) розрахуємо значення характеристичних функцій із (5).

1) Для $t = t_1$ маємо:

$$P_1(t_1) = \frac{(1-0)(1-0)}{(1-0)(1-0)} = 1; P_2(t_1) = \frac{(0-0)(1-0)}{(0-1)(1-1)} = \left(\frac{0}{0}\right); P_3(t_1) = \frac{(0-0)(1-0)}{(0-1)(1-1)} = \left(\frac{0}{0}\right). \quad (7)$$

Розкриємо невизначеності з (7)

$$\lim_{t \rightarrow t_1} P_2(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{(t_1-t_1)(t_3-t_1)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)} = 0, \quad (8)$$

оскільки $t_1-t_1=0$ – точний нуль, а $t_3-t_1 \rightarrow 1$; $t_1-t_2 \rightarrow -1$; $t_3-t_2 \rightarrow 0$.

$$\lim_{t \rightarrow t_1} P_3(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{(t_1-t_1)(t_2-t_1)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)} = 0, \quad (9)$$

тому що $t_1-t_1=0$ – точний нуль, а $t_2-t_1 \rightarrow 1$; $t_1-t_3 \rightarrow -1$; $t_2-t_3 \rightarrow 0$.

2) Для $t = t_2$ маємо:

$$P_1(t_2) = \frac{(1-1)(1-1)}{(1-0)(1-0)} = 0; P_2(t_2) = \frac{(0-1)(1-1)}{(0-1)(1-1)} = \left(\frac{0}{0}\right); P_3(t_2) = \frac{(0-1)(1-1)}{(0-1)(1-1)} = \left(\frac{0}{0}\right). \quad (10)$$

Розкриємо невизначеності з (10):

$$\lim_{t \rightarrow t_2} P_2(t_2) = \lim_{t \rightarrow t_2} \frac{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)} = 1, \quad (11)$$

через те, що t_3-t_2 у чисельнику і знаменнику скорочуються.

$$\lim_{t \rightarrow t_2} P_3(t_2) = \lim_{t \rightarrow t_2} \frac{(t_1-t_2)(t_2-t_2)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)} = 0, \quad (12)$$

оскільки $t_2-t_2=0$ – точний нуль, а $t_1-t_2 \rightarrow -1$; $t_1-t_3 \rightarrow -1$; $t_2-t_3 \rightarrow 0$.

3) Для $t = t_3$ маємо:

$$P_1(t_3) = \frac{(1-1)(1-1)}{(1-0)(1-0)} = 0; P_2(t_3) = \frac{(0-1)(1-1)}{(0-1)(1-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_3(t_3) = \frac{(0-1)(1-1)}{(0-1)(1-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Розкриємо невизначеності з (13)

$$\lim_{t \rightarrow t_3} P_2(t_3) = \lim_{t \rightarrow t_3} \frac{(t_1-t_2)(t_2-t_3)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)} = 0, \quad (14)$$

через те, що $t_2-t_3=0$ – точний нуль, а $t_1-t_3 \rightarrow -1$; $t_1-t_2 \rightarrow -1$; $t_3-t_2 \rightarrow 0$.

$$\lim_{t \rightarrow t_3} P_3(t_3) = \lim_{t \rightarrow t_3} \frac{(t_1-t_3)(t_2-t_3)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)} = 1, \quad (15)$$

тому що у чисельнику і знаменнику перший множник $\frac{-1}{-1}=1$, а другий – скорочується.

Як бачимо, для варіанту наявними кратними точками, наявність невизначеностей (7), (10), (13) не стає на перешкоді для здійснення інтерполяції точковим поліномом через те, що вказані невизначеності розкриваються (8), (9), (11), (12), (14), (15) у повній відповідності до вимог, щодо інтерполяції дискретно поданої лінії, яку наведено на рис.1, тобто без наявних особливостей щодо розташування вихідних точок.

Висновки

У даній статті доведено, що для будь-якої композиції, яку утворюють три точки, що подають ДПК, є можливим застосовувати, у якості інтерполянта, точковий поліном і який, при цьому, однаково записується для ДПК з наявними кратними точками.

Список використаної літератури

1. Адоньєв Є. О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 44 с.
2. Балюба И. Г. Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. К.: КГТУСА, 1995. 36 с.
3. Балюба И. Г., Найдыш В. М. Точечное исчисление / Под ред. В. М. Верещаги. Мелітополь: Изд-во МГПУ им. Б. Хмельницького, 2015. 234 с.
4. Верещага В. М., Найдыш А. В., Адоньєв Є. О., Лисенко К. Ю. Основи композиційного геометричного моделювання. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.

5. Верещага В. М., Найдіш А. В., Адоньєв Є. О. Метод композиційного геометричного моделювання: монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 310 с.
6. Верещага В. М., Павленко О. М., Найдіш А. В. Моделювання горизонтального земельного майданчика у точковому численні: монографія. Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2019. 187 с.
7. Верещага В. М. Композиційне геометричне моделювання: монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017. 108 с.
8. Павленко О. М. Геометричне моделювання вертикального планування горизонтальної земельної ділянки засобами точкового БН-числення: автореф. дис. ... канд. техн. наук, Мелітополь: ТДАТУ, 2017. 25с.
9. Рубцов М. О., Кравець В. І., Назарова О. П. Вища математика: у 2-х ч. Ч. 1. Мелітополь: видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2015. 242 с.
10. Верещага В. М., Найдіш А. В., Рубцов М. О., Павленко О. М. Глобальна інтерполяція композиції з трьох точок параметричними поліномами за формою Лагранжа, що мають кратні точки. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2020. Вип. 97. С. 29–35.

References

1. Adoniev, Ye. O. (2018). Kompozytsiyni metod heometrychnoho modeliuвання bahatofaktornykh system: avtoref. ... d-ra tekhn. nauk. K.: KNUBA.
2. Balyuba, I. G. (1995). Konstruktivnaya geometriya mnogoobraziy na osnove tochechnogo ischisleniya: avtoref. dis. ... d-ra tehn. nauk. K.: KGTUSA.
3. Balyuba, I. G., & Naydyish, V. M. (2015). Tochechnoe ischislenie / Pod red. V. M. Vereschagi. Melitopol: Izd-vo MGPU im. B. Hmel'nitskogo.
4. Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V., Adoniev Ye. O., & Lysenko K. Yu. (2019). Osnovy kompozytsiinoho heometrychnoho modeliuвання. Melitopol: FOP Odnoroh T.V.
5. Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V., & Adoniev, Ye. O. (2019). Metod kompozytsiinoho heometrychnoho modeliuвання: monohrafiia. Melitopol: FOP Odnoroh T.V.
6. Vereshchaha, V. M., Pavlenko, O. M., & Naidysh, A. V. (2019). Modeliuвання horyzontal'nogo zemel'nogo maidanchyka u tochkovomu chyslenni: monohrafiia. Melitopol: MDPU imeni Bohdana Khmelnytskoho.
7. Vereshchaha, V. M. (2017). Kompozytsiine heometrychne modeliuвання: monohrafiia. Melitopol: FOP Odnoroh T.V.
8. Pavlenko, O. M. (2017). Heometrychne modeliuвання vertykal'nogo planuvannya horyzontal'noi zemel'noi dilianky zasobamy tochkovoho BN-chyslennia: avtoref. dys...kand.. tekhn. nauk. Melitopol: TDATU.
9. Rubtsov, M. O., Kravets, V. I., & Nazarova, O. P. (2015). Vyshcha matematyka: u 2-kh ch. Ch. 1. Melitopol: vydavnytstvo MDPU im. B. Khmelnytskoho.
10. Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V., Rubtsov, M. O., & Pavlenko, O. M. (2020). Hlobalna interpoliatsiia kompozytsii z trokh tochk parametrychnymy polinomamy za formoiu Lahranzha, shcho maiut kratni tochku. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. **97**, 29–35.

Верещага Віктор Михайлович – д.т.н., професор, завідувач кафедри математики та фізики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького, e-mail: mail337@i.ua

Рубцов Микола Олексійович – к.т.н., доцент, доцент кафедри математики та фізики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького, e-mail: rubtsovnik3077@gmail.com

Павленко Олександр Михайлович – к.т.н., доцент, доцент кафедри математики та інформаційних технологій Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького, e-mail: alexander8944@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8646-2622

УДК 004.925.8

Г.А. ВИРЧЕНКО, П.М. ЯБЛОНСЬКИЙ
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ДЕЯКІ АСПЕКТИ КОМП'ЮТЕРНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ КРИВИХ БЕЗЬЄ

На сьогоднішній день комп'ютерні інформаційні технології відіграють важливу роль у багатьох сферах життя нашого суспільства. Це стосується таких галузей діяльності як промисловість, сільське господарство, наука, освіта, медицина, культура та інших. Нині окреслені напрямки неможливо уявити без інтенсивного застосування комп'ютерної графіки, базовим компонентом якої є геометричне моделювання. Тому його подальший розвиток становить актуальну науково-прикладну проблему.

Широка популярність графічних комп'ютерних пристроїв і відповідного програмного забезпечення обумовлена простотою, зручністю та наочністю їх використання. Основу сучасних засобів векторного геометричного моделювання становлять належні параметричні лінії, зокрема, криві Безьє різних степенів, серед яких найбільш розповсюджені кубічні лінії. Це пов'язано з їх достатньою гнучкістю, прогнозованим характером формоутворення та ефективністю комп'ютерної реалізації. Однак у певних випадках виникає необхідність застосування кривих Безьє й інших степенів, як нижчих, так і вищих. Зазначений факт потребує опрацювання та покращення відповідного математичного апарату.

Статтю присвячено вдосконаленню комп'ютерного обчислення площ криволінійних трапецій, обмежених лініями Безьє, поліпшенню належних математичних і комп'ютерних програмних засобів. Такі задачі постійно виникають, зокрема, під час варіантних ітераційних оптимізаційних інженерних розрахунків різноманітних технічних конструкцій на міцність у зв'язку з параметричними обчисленнями площ поперечних перерізів силових елементів тощо. У дослідженні докладно розглянуто запропонований математичний апарат, акцентовано його переваги порівняно з існуючими методами, наведено відповідні приклади. Подані матеріали можуть бути успішно впроваджені у практику з метою покращення багатьох засобів геометричного моделювання сучасної комп'ютерної графіки.

Ключові слова: геометричне моделювання, комп'ютерні інформаційні технології, криві Безьє, площі криволінійних трапецій.

Г.А. ВИРЧЕНКО, П.Н. ЯБЛОНСКИЙ
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИВЫХ БЕЗЬЕ

На сегодняшний день компьютерные информационные технологии играют важную роль в различных сферах жизни общества. Это касается таких отраслей деятельности как промышленность, сельское хозяйство, наука, образование, медицина, культура и других. Сейчас указанные направления невозможно представить без интенсивного применения компьютерной графики, базовым компонентом которой является геометрическое моделирование. Поэтому его дальнейшее развитие составляет актуальную научно-прикладную проблему.

Широкая популярность графических компьютерных устройств и соответствующего программного обеспечения обусловлена простотой, удобством и наглядностью их использования. Основу современных средств векторного геометрического моделирования составляют соответствующие параметрические линии, в частности, кривые Безье различных степеней, среди которых наиболее распространены кубические линии. Это связано с их достаточной гибкостью, прогнозируемым характером формообразования и эффективностью компьютерной реализации. Однако в определенных случаях возникает необходимость применения кривых Безье и других степеней, как низших, так и высших. Указанный факт требует проработки и улучшения соответствующего математического аппарата.

Статья посвящена совершенствованию компьютерного вычисления площадей криволинейных трапеций, ограниченных линиями Безье, улучшению надлежащих математических и программных средств. Такие задачи постоянно возникают, в частности, при вариантных итерационных оптимизационных инженерных расчетах различных технических конструкций на прочность в связи с параметрическими вычислениями площадей поперечных сечений силовых элементов и т. д. В исследовании подробно рассмотрен предложенный математический аппарат, акцентированы его преимущества по сравнению с существующими методами, приведены соответствующие примеры. Представленные материалы могут быть успешно внедрены в практику с целью улучшения многих средств геометрического моделирования современной компьютерной графики.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, компьютерные информационные технологии, кривые Безье, площади криволинейных трапеций.

G.A. VIRCHENKO, P.M. YABLONSKYI
National Technical University of Ukraine
'Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute'

SOME ASPECTS OF COMPUTER GEOMETRIC MODELING USING BESIER CURVES

In our time, computer information technologies play a very important role in various areas of modern society. This applies to such branches as industry, agriculture, science, education, medicine, culture and others. Today, the outlined directions cannot be imagined without the intensive use of computer graphics, the basic component of which is geometric modeling. Therefore, its further development is an urgent scientific and applied problem.

The wide popularity of graphic computer devices and related software is due to their simplicity, convenience and visibility of use. The basis of many modern means of vector geometric modeling is the corresponding parametric lines, in particular, Bezier curves of various degrees, among which the most common are cubic lines. This is due to their sufficient flexibility, the predicted nature of the formation and the effectiveness of computer implementation. However, in some cases it is necessary to use Bezier curves and other degrees, both lower and higher. This fact requires elaboration and improvement of the corresponding mathematical apparatus and computer software.

The article is devoted to the further improvement of computer calculation of the areas of curvilinear trapezoids bounded by Bezier curves, the amelioration of appropriate mathematical apparatus and computer software. Such problems constantly spring up, in particular, in case of variant iterative optimization engineering calculations of various technical structures for strength in connection with parametric calculations of the cross-sectional areas of power elements, etc. The study examines in detail the proposed mathematical apparatus and the corresponding computer algorithms, emphasizes their

advantages over existing methods and provides relevant examples. The presented materials can be successfully implemented in practice in order to improve many means of geometric modeling of modern computer graphics. Some perspectives for the further development of the presented scientific research are determined.

Keywords: geometric modeling, computer information technologies, Bezier curves, curved trapezoid areas.

Постановка проблеми

У наш час комп'ютерні інформаційні технології широко розповсюджені в різноманітних сферах життєдіяльності людини, зокрема, у промисловості, сільському господарстві, медицині, культурі та в інших галузях. Зазначені засоби нині важко уявити без інтенсивного використання комп'ютерної графіки, базовим компонентом якої є геометричне моделювання. Тому його подальший розвиток вважається актуальною науково-прикладною проблемою.

Основу багатьох сучасних засобів векторного геометричного моделювання становлять параметричні лінії, зокрема, криві Безьє різних степенів, серед яких найбільш популярні кубічні лінії. Це обумовлено їх гнучкістю, прогнозованим формоутворенням та ефективною комп'ютерною реалізацією. Однак у певних випадках виникає потреба застосування кривих Безьє й інших степенів, як нижчих, так і вищих. Зазначений факт потребує належного покращення відповідного математичного апарату.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Прикладом наукових розвідок школи прикладної геометрії НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» щодо використання кривих Безьє для конструювання технічних об'єктів є, зокрема, праці [1–3], де розглянуто задачі формоутворення поверхонь крила та фюзеляжу літака. Теоретичні основи геометричного моделювання даними лініями подано в роботі [4]. Інформацію стосовно розрахунків площ криволінійних трапецій наведено у виданні [5]. Публікацією [6] для кривих Безьє третього степеня запропоновано удосконалення цих обчислень щодо підвищення ефективності їх комп'ютерної реалізації.

Мета дослідження

Головними завданнями статті є подальше узагальнення матеріалів роботи [6] для розрахунків площ криволінійних трапецій, обмежених лініями Безьє різних степенів, аналіз належних прикладів, формулювання перспектив подальшого розвитку напрацьованого підходу та його впровадження в сучасні комп'ютерні інформаційні технології.

Викладення основного матеріалу дослідження

Згідно з виданням [5] площа S криволінійної трапеції, яка обмежена плоскою параметричною кривою $\mathbf{r}(u)$, що визначена в декартовій системі координат Oxy , обчислюється за формулою

$$S = \int_{u_1}^{u_2} r_y(u) \dot{r}_x(u) du, \quad (1)$$

де $r_x(u)$, $r_y(u)$ – це $x(u)$ та $y(u)$ координати радіус-вектора $\mathbf{r}(u)$;
 $u \in [0, 1]$ – параметр.

Кубічна крива Безьє (рис. 1) має рівняння

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)^3 \mathbf{r}_0 + 3u(1-u)^2 \mathbf{r}_1 + 3u^2(1-u) \mathbf{r}_2 + u^3 \mathbf{r}_3, \quad (2)$$

де $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$, $\mathbf{r}_1(x_1, y_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2, y_2)$, $\mathbf{r}_3(x_3, y_3)$ – радіус-вектори вершин характеристичної ламаної, яка в даному випадку опукла та однозначна, що забезпечує потрібну властивість лінії (2);

$u \in [0, 1]$ – параметр.

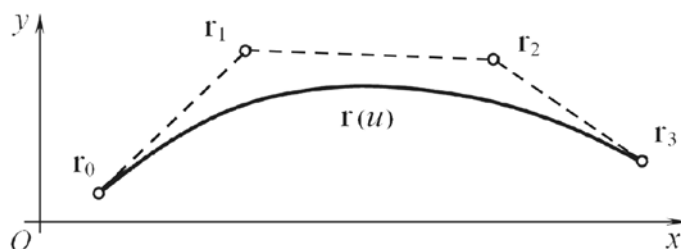


Рис. 1. Площа крива Безьє третього степеня.

У праці [6] показано, що обчислення інтеграла (1) для кривої (2) еквівалентно добутку матриць:

$$S = K \cdot X \cdot Y, \quad (3)$$

$$\text{де } K = (k_i)_1^6, \quad k_1 = \int_0^1 (1-u)^5 du = \frac{1}{6}, \quad k_2 = \int_0^1 u(1-u)^4 du = \frac{1}{30}, \quad k_3 = \int_0^1 u^2(1-u)^3 du = \frac{1}{60},$$

$$k_4 = \int_0^1 u^3(1-u)^2 du = \frac{1}{60}, \quad k_5 = \int_0^1 u^4(1-u) du = \frac{1}{30}, \quad k_6 = \int_0^1 u^5 du = \frac{1}{6};$$

$$X_1=3(x_1-x_0), \quad X_2=6(x_2-x_1), \quad X_3=3(x_3-x_2);$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 3X_1 & 0 & 0 \\ X_3 & 3X_2 & 3X_1 & 0 \\ 0 & 3X_3 & 3X_2 & X_1 \\ 0 & 0 & 3X_3 & X_2 \\ 0 & 0 & 0 & X_3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

перша матриця K із яких містить сталі числові коефіцієнти, друга матриця X та третя Y визначаються, відповідно, абсцисами й ординатами вершин характеристичної ламаної опрацьовуваної лінії.

Було розглянуто практичне використання запропонованого підходу на прикладі розрахунків площ поперечних перерізів крила літака між стінками лонжеронів, верхня та нижня поверхні якого сформовані кривими Безьє третього степеня. Зазначено, що розв'язати дану задачу можна й іншими способами, зокрема, чисельним інтегруванням методами прямокутників та трапецій. Перевагами ж розробленого підходу є суттєве зменшення кількості математичних обчислень і точний результат. Це особливо важливо для варіантної ітераційної комплексної оптимізації складних технічних виробів, у поданому випадку сучасного літака, де виконуються сотні тисяч подібних розрахунків. Також проаналізовано питання подальшого підвищення обчислювальної продуктивності викладеного математичного апарату комп'ютерними програмними засобами, зокрема, шляхом виключення з опрацювання нульових елементів матриці X формули (3).

Радіус-вектор $\mathbf{r}(u)$ кривої Безьє n -го степеня має вигляд:

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k} \mathbf{r}_k, \quad (4)$$

де $\mathbf{r}_k(x_k, y_k)$ – радіус-вектори вершин характеристичної ламаної у досліджуваному випадку;

$u \in [0, 1]$ – параметр.

Похідна виразу (4) за параметром u визначається залежністю

$$\dot{\mathbf{r}}(u) = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} u^k (1-u)^{n-1-k} (\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k). \quad (5)$$

На підставі співвідношень (1), (4) та (5) для квадратичної кривої Безьє ($n=2$)

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)^2 \mathbf{r}_0 + 2u(1-u)\mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2, \quad (6)$$

отримуємо

$$S = K \cdot X \cdot Y, \quad (7)$$

де $K = (k_i)_1^4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$; $X_1=(x_1-x_0)$, $X_2=(x_2-x_1)$; $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ X_2 & 2X_1 & 0 \\ 0 & 2X_2 & X_1 \\ 0 & 0 & X_2 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Для лінії Безьє першого степеня ($n=1$) відповідно маємо

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)\mathbf{r}_0 + u\mathbf{r}_1 \quad (8)$$

та

$$S = K \cdot X \cdot Y, \quad (9)$$

де $K = (k_i)_1^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $X_1=(x_1-x_0)$; $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Вирази (8) і (9) являють собою відому формулу обчислення площі трапеції.

Розглянемо приклад використання співвідношень (6) та (7). Симетричний аеродинамічний профіль (рис. 2) визначений кривими Безьє другого степеня $\mathbf{r}_\theta(u)$ і $\mathbf{r}_H(u)$. Нехай застосовано наступні координати в міліметрах:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{0\theta}=(x_{0\theta}, y_{0\theta})=\mathbf{r}_{0H}=(x_{0H}, y_{0H})=(0, 0), \quad \mathbf{r}_{1\theta}=(x_{1\theta}, y_{1\theta})=(0, 120), \\ \mathbf{r}_{1H}=(x_{1H}, y_{1H})=(0, -120), \quad \mathbf{r}_{2\theta}=(x_{2\theta}, y_{2\theta})=\mathbf{r}_{2H}=(x_{2H}, y_{2H})=(1000, 0). \end{aligned} \quad (10)$$

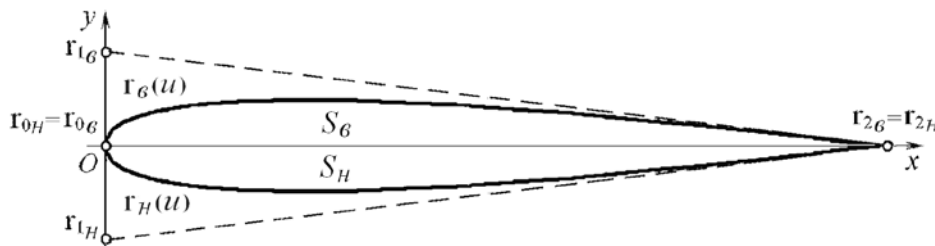


Рис. 2. Аеродинамічний профіль крила літака.

З рис. 2 видно, що необхідна площа S поперечного перерізу крила, обмеженого лініями $\mathbf{r}_g(\underline{u})$ і $\mathbf{r}_n(\underline{u})$, розраховується як сума рівних площ S_g верхньої та S_n нижньої криволінійних трапецій. На підставі формул (6), (7) і (10)

$$S = S_g + S_n = 2S_g = 2 \cdot 40000 \text{ мм}^2 = 80000 \text{ мм}^2.$$

Залежності (3), (7), (9) подаються також як

$$S = X \cdot K \cdot Y, \quad (11)$$

де $X = (x_i)_0^n$ та $Y^T = (y_i)_0^n$ – матриці абсцис та ординат вершин характеристичної ламаної кривої Безьє n -го степеня, K – матриця коефіцієнтів, що для першого, другого і третього степеня має відповідний вигляд:

$$n = 1, K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 \\ -k_1 & -k_0 \end{pmatrix}, k_0 = -\frac{1}{2}, k_1 = -\frac{1}{2};$$

$$n = 2, K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 \\ -k_2 & -k_1 & -k_0 \end{pmatrix}, k_0 = -\frac{1}{2}, k_1 = -\frac{1}{3}, k_2 = -\frac{1}{6};$$

$$n = 3, K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ -k_1 & 0 & k_2 & k_2 \\ -k_2 & -k_2 & 0 & k_1 \\ -k_3 & -k_2 & -k_1 & -k_0 \end{pmatrix}, k_0 = -\frac{1}{2}, k_1 = -\frac{3}{10}, k_2 = -\frac{3}{20}, k_3 = -\frac{1}{20}.$$

На початку статті зазначалось, що у практиці комп'ютерного геометричного моделювання застосовуються лінії Безьє й вищих, ніж третій, степенів. У цьому випадку описаний підхід для розрахунків площ криволінійних трапецій використовується за аналогією. Тоді для четвертого та п'ятого степеня маємо:

$$n = 4, K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_4 & k_5 \\ -k_1 & 0 & k_3 & k_3 & k_4 \\ -k_2 & -k_3 & 0 & k_3 & k_2 \\ -k_4 & -k_3 & -k_3 & 0 & k_1 \\ -k_5 & -k_4 & -k_2 & -k_1 & -k_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} k_0 &= -\frac{1}{2}, k_1 = -\frac{2}{7}, k_2 = -\frac{1}{7}, \\ k_3 &= -\frac{4}{35}, k_4 = -\frac{2}{35}, k_5 = -\frac{1}{70}; \end{aligned}$$

$$n = 5, K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_5 & k_6 & k_7 \\ -k_1 & 0 & k_3 & k_3 & k_5 & k_6 \\ -k_2 & -k_3 & 0 & k_4 & k_3 & k_5 \\ -k_5 & -k_3 & -k_4 & 0 & k_3 & k_2 \\ -k_6 & -k_5 & -k_3 & -k_3 & 0 & k_1 \\ -k_7 & -k_6 & -k_5 & -k_2 & -k_1 & -k_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} k_0 &= -\frac{1}{2}, k_1 = -\frac{5}{18}, k_2 = -\frac{5}{36}, k_3 = -\frac{25}{252}, \\ k_4 &= -\frac{5}{63}, k_5 = -\frac{5}{84}, k_6 = -\frac{5}{252}, k_7 = -\frac{1}{252}. \end{aligned} \quad (12)$$

Зауважимо, що для кривих Безьє вищих степенів характерно ускладнення математичного апарату та зниження комп'ютерної продуктивності їх опрацювання. Також дані лінії схильні до небажаних осциляцій і дещо втрачають передбачуваність свого формоутворення. Однак, поряд із окресленими недоліками, вони після належного наукового дослідження мають гарні перспективи успішного застосування в сучасних автоматизованих графічних засобах.

З точки зору структурно-параметричного геометричного моделювання матриці коефіцієнтів K у формулах (3), (7), (9), (11), (12) є сталими структурними складовими для кожного степеня кривої Безьє (інваріантними до координат останньої), а матриці X та Y – змінними параметричними компонентами (координатами) конкретної лінії.

Висновки

У даній публікації проаналізовано деякі питання вдосконалення обчислення площ криволінійних трапецій, обмежених кривими Безьє різних степенів. Напрацьовані матеріали можуть бути успішно використані у графічних середовищах сучасних комп'ютерних інформаційних технологій.

Список використаної літератури

1. Ванін І. В., Вірченко Г. А. Геометричне моделювання аеродинамічних профілів кривими Безьє третього порядку. *Праці Таврійської державної агротехнологічної академії*. 2004. Т. 26. Вип. 4. С. 91–95.
2. Ванін І. В., Вірченко Г. А. Геометричне моделювання крила літака на стадії ескізного проектування з використанням кривих Безьє третього порядку. *Праці Таврійської державної агротехнологічної академії*. 2006. Т. 31. Вип. 4. С. 89–95.
3. Вірченко Г. А. Параметричне моделювання теоретичної поверхні хвостової частини фюзеляжу пасажирського літака. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2015. Вип. 93. С. 10–13.
4. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. Москва: Мир, 2001. 604 с.
5. Гусак А. А., Гусак Г. М., Бричикова Е. А. Справочник по высшей математике. Минск: ТетраСистемс, 1999. 640 с.
6. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Яблонський П. М. До питання геометричного моделювання з використанням кривих Безьє. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2020. Вип. 98. С. 29–34.

References

1. Vanin, I. V., & Virchenko, G. A. (2004). Neometrychne modeliuвання aerodynamichnykh profiliv kryvymy Bezie tretoho poriadku. *Pratsi Tavriiskoi derzhavnoi ahrotekhnolohichnoi akademii*. **26**, 4, 91–95.
2. Vanin, I. V., & Virchenko, G. A. (2006). Neometrychne modeliuвання kryla litaka na stadii eskiznoho proektuvannya z vykorystanniam kryvykh Bezie tretoho poriadku. *Pratsi Tavriiskoi derzhavnoi ahrotekhnolohichnoi akademii*. **31**, 4. 89–95.
3. Virchenko, G. A. (2015). Parametrychne modeliuвання teoretychnoi poverkhni khvostovoi chastyny fuzeliazhu pasazhyrskoho litaka. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. **93**, 10–13.
4. Rodzhers, D., & Adams, Dzh. (2001). Matematicheskie osnovy mashinnoy grafiki. Moskva: Mir.
5. Gusak, A. A., Gusak G. M., & Brichikova E. A. (1999). Spravochnik po vyisshey matematike. Minsk: TetraSistems.

6. Vanin, V. V., Virchenko, G. A., & Yablonskyi, P. M. (2020). Do pytannia heometrychnoho modeliuvannia z vykorystanniam kryvykh Bezie. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. **98**, 29–34.

Вірченко Геннадій Анатолійович – д.т.н., професор, професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп’ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: virchga@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9586-4538.

Яблонський Петро Миколайович – к.т.н., доцент, доцент кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп’ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: upn@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1971-5140.

УДК 519.71

Г.О. ДИМОВА

Херсонський державний аграрно-економічний університет

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Економічна система охоплює параметри і характеристики суспільного виробництва, розподілу, обміну та споживання матеріальних благ. В економічній системі вибір і формування як структури, так і способу функціонування є задачами управління, що забезпечують динаміку соціально-економічного розвитку.

У структурі системи управління можна виділити: об'єкт управління – це безпосередній пристрій, агрегат, підсистема загальної системи, в якій реалізується мета функціонування всієї системи; управляюча система – представляє собою орган управління (суб'єкт управління), що фіксує параметри об'єкта управління і виробляє керуючі впливи на об'єкт управління; обернений зв'язок – це об'єкт, підсистема, за допомогою якої реалізується вплив управляючої системи на керований об'єкт. Ці елементи разом утворюють замкнену систему управління.

Задачі управління економічною системою погано структуровані, і не завжди модель може бути побудована однозначним способом. Це означає, що цілі функціонування багатьох економічних систем не завжди можуть бути чітко сформульовані. Задача управління такою системою полягає в тому, щоб прийняти найкраще рішення для цієї системи.

Одним з ефективних методів дослідження економічної динаміки як в теоретичному, так і в прикладному аспекті є динамічні моделі витрати-випуск (моделі міжгалузевого балансу). Математичні залежності між величиною капітальних вкладень і приростом продукції є основою побудови різних варіантів динамічних моделей міжгалузевого балансу. Відмінною рисою динамічних моделей міжгалузевого балансу є виділення виробничих капіталовкладень (інвестицій) зі складу кінцевої продукції і вивчення їх впливу на зростання обсягу виробництва. В роботі складається та аналізується нелінійний варіант динамічної моделі Леонт'єва, розглядається можливість дослідження динамічних рівнянь міжгалузевого балансу при виникненні збурень в елементах матриць прямих матеріальних затрат та внутрішніх інвестицій. За результатами дослідження зроблені висновки про вплив збурень на матриці внутрішніх інвестицій і матеріальних витрат.

Ключові слова: характеристичне рівняння, власне значення, власний вектор, матриця, збурення, збіжність степеневих рядів, евклідова норма.

А.О. ДЫМОВА

Херсонский государственный аграрно-экономический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Экономическая система охватывает параметры и характеристики общественного производства, распределения, обмена и потребления материальных благ. В экономической системе выбор и формирование как структуры, так и способа функционирования являются задачами управления, обеспечивающими динамику социально-экономического развития.

В структуре системы управления можно выделить: объект управления - непосредственное устройство, агрегат, подсистема общей системы, в которой реализуется цель функционирования всей системы; управляющая система - орган управления (субъект управления), фиксирующий параметры объекта управления и вырабатывающий управляющие воздействия на объект управления; обратная связь - это объект, подсистема, с помощью которой реализуется воздействие управляющей системы на управляемый объект. Эти элементы вместе образуют замкнутую систему управления.

Задачи управления экономической системой плохо структурированы, и не всегда модель может быть построена однозначно. Это означает, что цели функционирования многих экономических систем не всегда могут быть четко сформулированы. Задача управления такой системой состоит в том, чтобы принять наилучшее решение для этой системы.

Одним из эффективных методов исследования экономической динамики как в теоретическом, так и в прикладном аспекте являются динамические модели затраты-выпуск (модели межотраслевого баланса). Математические зависимости между величиной капитальных вложений и приростом продукции является основой построения различных вариантов динамических моделей межотраслевого баланса. Отличительной особенностью динамических моделей межотраслевого баланса является выделение производственных капиталовложений (инвестиций) из состава конечной продукции и изучения их влияния на рост объема производства. В работе составляется и анализируется нелинейный вариант динамической модели Леонтьева, рассматривается возможность исследования динамических уравнений межотраслевого баланса при возникновении возмущений в элементах матриц прямых материальных затрат и инвестиций. По результатам исследования сделаны выводы о влиянии возмущений на матрицы внутренних инвестиций и материальных затрат.

Ключевые слова: характеристическое уравнение, собственное значение, собственный вектор, матрица, возмущения, сходимость степенных рядов, евклидова норма.

H. DYMOVA

Kherson State Agrarian and Economic University

USE OF THE PERTURBATION THEORY METHOD FOR THE STUDY OF DYNAMIC EQUATIONS OF THE INTERBRANCH BALANCE

The economic system covers the parameters and characteristics of social production, distribution, exchange and consumption of material goods. In the economic system, the choice and formation of both the structure and the way of functioning are management tasks that ensure the dynamics of socio-economic development.

In the structure of the control system, one can distinguish: the control object – the direct device, unit, subsystem of the general system, in which the goal of the functioning of the entire system is realized; management system – management body (management entity), fixing the parameters of the control object and generating control actions on the control object; feedback is an object, a subsystem, with the help of which the control system acts on a managed object. These elements together form a closed control system.

Economic management tasks are poorly structured and not always a model can be constructed unambiguously. This means that the goals of the functioning of many economic systems cannot always be clearly formulated. The task of managing such a system is to make the best decision for this system.

One of the effective methods for studying economic dynamics in both theoretical and applied aspects are dynamic input-output models (models of interindustry balance). Mathematical dependencies between the value of capital investments and production growth is the basis for constructing various options for dynamic models of interbranch balance. A distinctive feature of the dynamic models of the interindustry balance is the allocation of industrial investments (investments) from the composition of the final product and the study of their impact on the growth of production volume. A nonlinear version of the Leontiev dynamic model is compiled and analyzed, the possibility of studying the dynamic equations of the interindustry balance in the event of disturbances in the elements of the direct material cost and investment matrices is considered. Based on the results of the study, conclusions are drawn about the influence of disturbances on the matrix of domestic investment and material costs.

Keywords: characteristic equation, eigenvalue, eigenvector, matrix, perturbation, convergence of power series, euclidean norm.

Постановка проблеми

Економічна система охоплює параметри і характеристики суспільного виробництва, розподілу, обміну та споживання матеріальних благ. В економічній системі вибір і формування як структури, так і способу функціонування є задачами управління, що забезпечують динаміку соціально-економічного розвитку.

У структурі системи управління можна виділити: об'єкт управління – безпосередньо пристрій, агрегат, підсистема загальної системи, в якій реалізується мета функціонування всієї системи; управляюча система – орган управління (суб'єкт управління), що фіксує параметри об'єкта управління і виробляє управляючі впливи на об'єкт управління; обернений зв'язок – об'єкт, підсистема, за допомогою якої реалізується вплив управляючої системи на керований об'єкт. Ці елементи формують в сукупності замкнуту систему управління. Необхідно дослідити рівняння економічної динаміки на стійкість методом теорії збурень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Міжгалузевий баланс служить базою визначення взаємозбалансованої системи основних показників і відображає кругообіг суспільного продукту на міжгалузевому рівні. Аналіз структурних взаємодій міжгалузевого балансу описаний математичною моделлю В. Леонт'єва (США) [6].

Мета дослідження

Мета роботи полягає в дослідженні динамічних рівнянь міжгалузевого балансу при виникненні збурень в елементах матриць прямих матеріальних затрат та внутрішніх інвестицій.

Викладення основного матеріалу

У статистичному балансі капіталовкладення відображаються загальною величиною в складі кінцевої продукції [6]. У динамічній же схемі вироблений кінцевий продукт $Y_i(t)$ в i -й галузі за період t ділиться на дві частини: $C_i(t)$ та $K_i(t)$, тобто

$$Y_i(t) = K_i(t) + C_i(t). \quad (1)$$

Величина $C_i(t)$ призначена для опису об'ємів особистого і суспільного споживання, накопичення в невиробничій сфері, на експорт і т.п. Величина $K_i(t)$ описує приріст фондів в галузях, тобто

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^n \Delta \varphi_{ij}(t), \quad (2)$$

де $\Delta \varphi_{ij}(t)$ – кількість продукції i -ої галузі, що направляється в поточному періоді в j -у галузь в якості виробничих капіталовкладень (для збільшення кількості виробничого обладнання, споруд і т.п.).

Таким чином, система рівнянь виробництва і розподілу продукції за період t в динамічному балансі має вигляд:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{j=1}^n x_{ij}(t) + \sum_{j=1}^n \Delta \varphi_{ij}(t) + C_i(t), \quad i = \overline{1, n} \\ x_{ij}(t) &= a_{ij}(t)x_j(t), \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $a_{ij}(t)$ – коефіцієнт прямих матеріальних витрат в період t ;
 $C_i(t)$ – частина кінцевого продукту, що йде на споживання.

Приріст продукції j -ї галузі за період t дорівнює

$$\Delta x_j(t) = x_j(t) - x_j(t-1).$$

Прийmemo, що приріст фондів прямо пропорційний приросту продукції, тобто

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{ij}(t) &= b_{ij}(t)\Delta x_j(t), \\ b_{ij}(t) &= \frac{\Delta \varphi_{ij}(t)}{\Delta x_j(t)}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $b_{ij}(t)$ – коефіцієнт пропорційності, який показує скільки продукції i -ї галузі треба вкласти в j -у галузь, щоб збільшити випуск в цій галузі на одиницю (капіталомісткість одиниці випуску продукції j -ї галузі – коефіцієнт вкладень).

З співвідношень (3) випливає, що

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)\Delta x_j(t) + C_i(t). \quad (5)$$

Оскільки в неперервному випадку $\frac{d\varphi_{ij}(t)}{dt} = b_{ij}(t)\frac{dx_j(t)}{dt}$, тому

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)\frac{dx_j(t)}{dt} + C_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Вираз (6) є динамічною моделлю В. Леонтєва [6].

Коефіцієнти $a_{ij}(t)$ утворюють матрицю прямих витрат $\mathbf{A}(t)$ розміром $(n \times n)$. Коефіцієнти $b_{ij}(t)$ утворюють матрицю $\mathbf{B}(t)$ – матрицю внутрішніх інвестицій розміром $(n \times n)$.

Ввівши вектор $\bar{C}(t)$ кінцевого продукту, що йде на споживання з точністю до структури споживання в період t $\bar{C}(t) = x(t) \bar{d}(t)$, $\bar{d}(t)$ – вектор, що задає структуру споживання, і вектор трудомісткості продукції $\bar{l}(t) = (l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t))$, $\sum_{j=1}^n l_j(t) x_j(t) = L(t)$ – загальну кількість трудових ресурсів, задіяних в економічній системі, отримаємо систему $(n+1)$ рівнянь:

$$\bar{x}(t) = \mathbf{A}(t)\bar{x}(t) + \mathbf{B}(t) \frac{d\bar{x}(t)}{dt} + \bar{x}(t)\bar{d}(t), \quad (7)$$

$$\bar{l}(t)\bar{x}(t) = L(t), \quad (8)$$

де останнє рівняння може виступати в якості обмеження по трудовим ресурсам.

Наведемо рівняння (7) в стандартній формі:

$$\bar{x}(t) [\mathbf{I} - \mathbf{A}(t) - \bar{d}(t)] = \mathbf{B}(t) \frac{d\bar{x}(t)}{dt},$$

де $\mathbf{B}(t) \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{x}(t) [\mathbf{I} - \mathbf{A}(t) - \bar{d}(t)]$.

Вважаючи структуру споживання постійною і позначивши $\mathbf{A}(t) - \bar{d}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)$, отримаємо:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}(t)] \mathbf{B}^{-1}(t) \bar{x}(t). \quad (9)$$

У моделі (9) передбачається, що приріст продукції поточного періоду обумовлюється вкладеннями, зробленими в цьому ж періоді. Хоча в реальних системах матеріального балансу існує запізнювання інвестицій, амортизація основних виробничих фондів.

Розв'язком рівняння (9) є вектор $\bar{x}(t)$, координатами якого є значення валового продукту при відомих матрицях матеріальних витрат $\mathbf{A}(t)$ і матрицях виробничих інвестицій $\mathbf{B}(t)$, які за змістом функціонування економічної системи повинні бути невід'ємно визначеними. Крім того, матриця $\mathbf{A}(t)$ повинна бути нерозкладеною і продуктивною [4, 6, 7], що еквівалентно одній з наступних вимог:

1) максимальне власне число матриці $\mathbf{A}(t)$ $\lambda(A) < 1$;

2) матриця $(\mathbf{I} - \mathbf{A}(t))^{-1}$ – додатно визначена;

3) матричний ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i(t)$ є збіжним;

4)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}(t))^{-1}. \quad (10)$$

Як показано в [5, 6, 7] плавна зміна елементів матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} може привести до порушення їх продуктивності, нерозкладеності і додатної визначеності, що призведе до якісних змін розв'язків рівнянь матеріального балансу і до нестійкого функціонування економічної системи. Тому роль виродженої критичної точки грають вироджені власні значення матриць $\mathbf{A}(t)$ і $\mathbf{B}(t)$ [1, 5, 8].

Нехай зазначені матриці задовольняють умові:

$$|a_{ij}| < 1, \quad |b_{ij}| < 1 \quad (11)$$

і змінилася умова внутрішніх інвестицій.

Нехай λ_1 – просте власне значення матриці \mathbf{A} при деякому t . Знайдемо відповідне власне значення матриці

$$(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B}). \quad (12)$$

Характеристичне рівняння матриці \mathbf{A} має вигляд:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + C_0 = 0. \quad (13)$$

Тоді отримуємо таке характеристичне рівняння матриці (12):

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{B}) = \lambda^n + C_{n-1}(\varepsilon)\lambda^{n-1} + C_{n-2}(\varepsilon)\lambda^{n-2} + \dots + C_0(\varepsilon) = 0, \quad (14)$$

де $C_r(\varepsilon)$ – поліноми степеня $(n-r)$ такі, що

$$C_r(0) = C_r. \quad (15)$$

Це стає очевидним (відповідно до теорії алгебраїчних функцій), якщо запишемо точний вираз для $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{B})$ [1–2]. Можна накласти вимоги [4]:

$$C_r(\varepsilon) = C_r + C_{r1}\varepsilon + C_{r2}\varepsilon^2 + \dots + C_{r,n-r}\varepsilon^{n-r}. \quad (16)$$

Розглянемо випадок, коли λ_1 – простий корінь рівняння (13), тоді для $|\varepsilon| < 1$ існує простий корінь рівняння (14), який задається збіжним степеневим рядом:

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \dots \quad (17)$$

Очевидно, що $\lambda_1(\varepsilon) \rightarrow \lambda_1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Збурення елементів матриці ε визначає збурення власного значення λ_1 характеристичного полінома матриці \mathbf{A} , що внаслідок неперервної залежності змін коефіцієнтів характеристичного полінома від змін елементів матриці \mathbf{A} , в свою чергу, приведе до зміни власного вектора x_1 матриці \mathbf{A} , а вона приведе до зміни напряму і величини руху економічної системи. Оскільки λ_1 – просте власне значення матриці $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})$, тому на основі теорії лінійних рівнянь [3, 7] за компоненти власного вектора x можна взяти

$$(A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nn}), \quad (18)$$

де A_{ni} – алгебраїчне доповнення (n, i) -го елемента $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})$, а, отже, A_{ni} – це поліноми степеня λ_1 , не вищого за $(n - 1)$.

Застосуємо цей результат до простого власного значення $\lambda_1(\varepsilon)$ матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B})$. Введемо позначення: \mathbf{x}_1 – власний вектор матриці \mathbf{A} ; $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ – власний вектор матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B})$. Тоді елементи вектора $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ – це поліноми за ε , і завдяки тому, що степеневий ряд для $\lambda_1(\varepsilon)$ збігається при заданих ε , кожний елемент вектора $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ можна представити збіжним степеневим рядом за ε , постійний член в якому – це відповідний елемент вектора \mathbf{x}_1 . Звідси отримуємо:

$$\mathbf{x}_1(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots, \quad (19)$$

де кожна компонента векторного ряду (19) в правій частині є абсолютно збіжним степеневим рядом за ε .

Аналогічно результату (17) для власного значення, отримуємо результат для власного вектора.

Розглянемо більш складний випадок: матриця \mathbf{A} має елементарні дільники. В цьому випадку існує система правих і лівих власних векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ та $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ таких, що

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j = 0 \quad (i \neq j), \quad (20)$$

хоча ці вектори єдині, якщо всі власні значення прості [1, 2, 3].

Виразимо кожний вектор \mathbf{z}_i у ряді (19) через вектори \mathbf{x}_j :

$$\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} \mathbf{x}_j. \quad (21)$$

Тоді маємо

$$\mathbf{x}_1(\varepsilon) = \mathbf{x}_1 + \varepsilon \sum_{j=1}^n S_{j1} \mathbf{x}_j + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^n S_{j2} \mathbf{x}_j + \dots, \quad (22)$$

і, збираючи разом члени з \mathbf{x}_j , отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(\varepsilon) = & (1 + \varepsilon S_{11} + \varepsilon^2 S_{12} + \dots) \mathbf{x}_1 + (\varepsilon S_{21} + \varepsilon^2 S_{22} + \dots) \mathbf{x}_2 + \dots + \\ & + (\varepsilon S_{n1} + \varepsilon^2 S_{n2} + \dots) \mathbf{x}_n. \end{aligned} \quad (23)$$

Збіжність n степеневих рядів, що стоять в дужках, є простий наслідок абсолютної збіжності рядів (19).

Отримаємо точне значення виразу для збурення першого порядку в термінах правих і лівих власних векторів (20). Позначимо

$$S_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (24)$$

де \mathbf{y}_j та \mathbf{x}_j – нормовані ліві та праві власні вектори.

Якщо \mathbf{y}_j і \mathbf{x}_j дійсні, тоді S_i є косинусом кута між цими векторами [2, 3]. В будь-якому випадку $|S_i| = |\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j| \leq \|\mathbf{y}_i\|_2 \cdot \|\mathbf{x}_j\|_2 = 1$, де $\|\mathbf{y}_i\|_2, \|\mathbf{x}_j\|_2$ – евклідові норми векторів.

Для нормованих векторів формула (23) має вигляд:

$$\mathbf{x}_1(\varepsilon) = x_1 + (\varepsilon t_{21} + \varepsilon^2 t_{22} + \dots) \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + (\varepsilon t_{n1} + \varepsilon^2 t_{n2} + \dots) \cdot \mathbf{x}_n. \quad (25)$$

Визначимо величину

$$\beta_{ij} = \mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_j, \quad (26)$$

$$|\beta_{ij}| = |\mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_j| \leq \|\mathbf{B}\|_2 \|\mathbf{y}_i\|_2 \|\mathbf{x}_j\|_2. \quad (27)$$

За визначенням

$$(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B}) \mathbf{x}_1(\varepsilon) = \lambda_1(\varepsilon) \mathbf{x}_1(\varepsilon) \quad (28)$$

і завдяки тому, що просте власне значення $\lambda_1(\varepsilon)$ матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B})$ і всі компоненти вектора $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ представляються збіжними степеневими рядами, можна прирівняти члени при однакових степенях ε в цьому рівнянні. Використовуючи співвідношення (17) та (27), отримаємо

$$\mathbf{A} \left(\sum_{i=2}^n t_{i1} \mathbf{x}_i \right) + \mathbf{B} \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \left(\sum_{i=2}^n t_{i1} \mathbf{x}_i \right) + k_1 \mathbf{x}_1 \quad (29)$$

або

$$\sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) t_{i1} \mathbf{x}_i + \mathbf{B} \mathbf{x}_1 = k_1 \mathbf{x}_1. \quad (30)$$

Помноживши зліва отримане рівняння на \mathbf{Y}_1^T , і з урахуванням того, що $\mathbf{Y}_1^T \mathbf{x}_i = 0$ ($i \neq 1$), маємо

$$k_1 = \frac{\mathbf{Y}_1^T \mathbf{B} \mathbf{x}_1}{\mathbf{Y}_1^T \mathbf{x}_1} = \frac{\beta_{11}}{S_1}. \quad (31)$$

Отже,

$$|k_1| \leq \frac{n}{|S_1|}. \quad (32)$$

Помноживши рівність (30) зліва на \mathbf{Y}_i^T , отримаємо

$$(\lambda_i - \lambda_1) t_{i1} S_i + \beta_{i1} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (33)$$

Отже, з подання (25) випливає, що член першого порядку в збуренні x_1 має вигляд:

$$\varepsilon \left[\frac{\beta_{21}x_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)S_2} + \frac{\beta_{31}x_3}{(\lambda_1 - \lambda_3)S_3} + \dots + \frac{\beta_{n1}x_n}{(\lambda_1 - \lambda_n)S_n} \right] = \varepsilon \sum_{i=2}^n \frac{\beta_{i1}}{S_i(\lambda_1 - \lambda_i)} x_i. \quad (34)$$

Розглядаючи власні вектори, розкладаємо їх збурення на компоненти в напрямках $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Якщо \mathbf{x}_i ортогональні (це має місце, коли матриця \mathbf{A} має n елементарних дільників), тоді можна оцінити відхилення економічної системи при заданих збуреннях ε . За параметр ε можна взяти коефіцієнт інфляції. При великих значеннях косинуса кута між векторами $\mathbf{x}_i^T(\varepsilon), \mathbf{x}_i$ складові векторів практично збігаються і система є стійкою до збурень. Випадок кратних власних значень і нелінійних дільників матриць \mathbf{A} та \mathbf{B} може бути досліджений з переходом до канонічних форм Жордана і з використанням теорем Гершгоріна [1, 2, 4, 7, 9].

Висновки

1. При простому власному значенні матриці матеріальних витрат \mathbf{A} дослідження впливу збурень на матриці внутрішніх інвестицій \mathbf{B} і матеріальних витрат \mathbf{A} може бути зведено до знаходження косинуса кута між векторами \mathbf{x}_1 та $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$.
2. При наявності n елементарних дільників матриці \mathbf{A} дослідження впливу збурення ε може бути зведено до знаходження косинусів кутів між власними векторами, які відповідають різним власним значенням. Малі значення косинусів кутів між векторами $\mathbf{x}_i(\varepsilon)$ та \mathbf{x}_i означають значний дрейф економічної системи під дією інфляції.
3. Випадок кратних власних значень і нелінійних дільників вимагає більш складного дослідження з залученням, крім теорії збурень і алгебраїчних функцій, математичного апарату канонічних форм Жордана [1].

Список використаної літератури

1. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров. *Успехи математических наук*. 1971. Т. XXVI. № 2 (158). С. 101–114.
2. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976. 649 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
4. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
5. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 1. М.: Мир, 1981. 344 с.
6. Кротов В. Ф., Лагоша Б. А., Лагоша С. М. Основы теории оптимального управления. М.: Мир, 1990. 430 с.
7. Марасанов В. В., Дымова А. О., Дымов В. С. Проекционные методы оценки состояний динамической системы при частично наблюдаемых выходных координатах. *Проблеми інформаційних технологій*. 2016. №1(019). С. 259–264.
8. Марасанов В. В., Дымова А. О., Дымов В. С. Исследование на чувствительность моделей динамических систем, полученных проекционным методом. *Проблеми інформаційних технологій*. 2016. №1(019). С. 169–173.
9. Димова Г. О. Дослідження чутливості та стійкості моделей динамічних систем. Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. 2017. № 28–29. С. 55–59.

References

1. Arnold, V. I. (1971). About Matrices Depending on Parameters. *Successes of Mathematical Sciences*. XXVI, 2 (158), 101–114.
2. Van der Varden, B. L. (1976). Algebra. M.: Science.

3. Gantmakher, F. R. (2004). *Matrix Theory*. M.: FIZMATLIT.
4. Lancaster, P. (1978), *Matrix Theory*. M.: Science.
5. Gilmore, R. (1981). *Applied Catastrophe Theory*. T. 1. M.: World.
6. Krotov, V. F., Lagosha, B. A., & Lagosha, S. M. (1990). *Fundamentals of the Theory of Optimal Control*. M.: World.
7. Marasanov, V. V., Dymova, A. O., & Dymov, V. S. (2016). Projection Methods for Estimating the States of a Dynamical System with Partially Observed Output Coordinates. *Problems of Informational Technologies*. **1** (019), 259–264.
8. Marasanov, V. V, Dymova, A. O., & Dymov, V. S. (2016). Sensitivity Investigation of the Dynamic Systems Models Obtained by the Projection Method. *Problems of Informational Technologies*. **1** (019), 169–173.
9. Dymova, H. O. (2017). Investigation of Sensitivity and Stability of Models of Dynamic Systems. *Computer-Integrated Technologies: Education, Science, Production*. **28-29**, 55–59.

Димова Ганна Олегівна – к.т.н., доцент кафедри прикладної математики та економічної кібернетики Херсонського державного аграрно-економічного університету, e-mail: anndymova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5294-1756.

УДК 519.688

В.И. ДУБИНКО, А.С. МАЗМАНИШВИЛИ
Национальный Научный Центр 'ХФТИ' НАНУ, Харьков, Украина

Д.В. ЛАПТЕВ
Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАНУ, Харьков, Украина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДОРОДНОГО КАТАЛИЗА В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Работа посвящена изложению математической модели и результатов численных расчетов по туннелированию волновой функции в двухъямном потенциале. Предложен и использован биквадратичный потенциал двухъямного вида. Целью работы являлось изучения явления туннелирования квантово-механической частицы в том случае, когда высота барьера между ямами значительно превосходит начальную энергию частицы. На основе математической модели временной эволюции волновой функции построен численный алгоритм и создана программа решения уравнения Шредингера, описывающего временную эволюцию волновой функции частицы. Физическая задача основывается на включении в потенциал временной зависимости стохастического и синусоидального вида, содержащей частоту и индекс модуляции. Таким образом, реализуется случай параметрической накачки квантовой системы – частицы в нестационарном потенциале. Проведена проверка отсутствия туннелирования в режиме, когда отключены модуляции обоих видов. Для различных случаев частотной модуляции приведены результаты численного моделирования процесса туннелирования. Показана возможность регулировки эффективности туннелирования путем выбора частоты модуляции. Показано также, что добавление в модуляцию потенциала гармонического шума типа стохастического процесса Орнштейна-Уленбека приводит к увеличению скорости туннелирования. Путем направленного изменения параметров модуляции возможно регулировать скоростью туннелирования волновой функции частицы.

Ключевые слова: водородный катализ, уравнение Шредингера, туннелирование волновой функции, математическое моделирование.

В.І. ДУБИНКО, О.С. МАЗМАНШВІЛІ
Національний Науковий Центр 'ХФТІ' НАНУ, 61108, Україна

Д.В. ЛАПТЄВ
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАНУ, Харків, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВОДОРОДНОГО КАТАЛІЗУ У БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ

Робота присвячена опису математичної моделі і результатів чисельних розрахунків по тунелюванню хвильової функції в двох'ямному потенціалі. Запропоновано і використано біквадратичний потенціал двох'ямного виду. Ціллю роботи є дослідження явища тунелювання квантово-механічних частинок в тому випадку, коли висота бар'єру між ямами значно перевершує початкову енергію частинок. На основі математичної моделі хвильової функції створено чисельний алгоритм і розроблена програма розв'язку рівняння Шредингера, що описує часову еволюцію хвильової функції частинки. Фізична задача базується на включенні в потенціал часової залежності стохастичного та синусоїдального виду, що містить

частоту і індекс модуляції. Таким чином, реалізується випадок параметричної накачки квантової системи – частки у нестационарному потенціалі. В результаті чисельних експериментів отримано режими модуляції, при яких має місце тунелювання. Проведена перевірка відсутності тунелювання в режимі, коли відключено модуляцію обох типів. Для різних випадків частотної модуляції наведені результати чисельного моделювання процесу тунелювання. Показана можливість регулювання ефективності тунелювання шляхом вибору частоти модуляції. Показано також, що включення в модуляцію потенціалу гармонічного шуму типу стохастичного процесу Орнштейна-Уленбека приводить до збільшення швидкості тунелювання. Шляхом направленої зміни параметрів модуляції можливо регулювати швидкість тунелювання хвильової функції частинки.

Ключові слова: водородний катализ, рівняння Шредингера, тунелювання хвильової функції, математичне моделювання.

V.I. DUBINKO, A.S. MAZMANISHVILI

National Science Center 'Kharkov Institute of Physics & Technology' NASU, 61108, Kharkov, Ukraine

D.V. LAPTEV

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering NASU, 61103, Kharkov, Ukraine

MATHEMATICAL MODELING OF THE HYDROGEN CATALYSIS IN THE BIOLOGICAL SYSTEMS

The paper is devoted to the presentation of the mathematical model and the numerical calculations results for the tunneling of the wave function in a double-well potential. The biquadratic potential of a double-well form is proposed and used. The aim of the study was to study the phenomenon of tunneling of a quantum mechanical particle in the case when the height of the barrier between the wells significantly exceeds the initial energy of the particle. Based on a mathematical model of the time evolution of the wave function, a numerical algorithm has been developed and a program has been created for solving the Schrödinger equation, which describes the time evolution of the particle's wave function. The physical problem is based on the inclusion in the potential of the time dependency of the stochastic and the sinusoidal form, containing the frequency and modulation index. Thus, the case of a parametric pumping of a quantum system – a particle in a nonstationary potential– is realized. This model can describe the behavior of biological systems in which protons are tunneling between the biologically active sites of complex organic molecules due to the influence of temperature fluctuations, electromagnetic wave irradiation, etc. As a result of numerical experiments, modulation regimes were obtained at which tunneling took place. The absence of tunneling was checked in the regime when sinusoidal modulation was disabled. For various cases of frequency modulation, the results of numerical simulation of the tunneling process are presented. The possibility of adjusting the tunneling efficiency by selecting the modulation frequency is shown. It is also shown that the inclusion in the modulation of the harmonic noise potential of the type of stochastic Ornstein-Uhlenbeck process leads to an increase in the tunneling rate. By the directional change of the modulation parameters, it is possible to control the particle wave function tunneling rate.

Keywords: hydrogen catalysis, Schrödinger equation, wave function tunneling, mathematical modeling.

Постановка проблеми

Квадратичний потенціал в квантовій теорії має важке значення як при аналізі спектрів випромінювання, так і в якості прикладу, допускаючого точні і придатні для аналізу рішення відповідного рівняння Шредингера. Явні рішення в такому потенціалі і його обобщеннях дозволяють проаналізувати динаміку хвильових функцій і пов'язаних з нею квантово-механічних середніх. В практиці застосування рівняння Шредингера найбільш часто використовується стаціонарний випадок, для якого коефіцієнти рівняння постійні. Двухъямний потенціал традиційно застосовується в задачах тунелювання квантово-механічних частинок і пов'язаних з ними хвильових пакетів.

Аналіз останніх результатів і публікацій

Реакції переносу протонів були популярною областю досліджень в течение багатьох років [1–3]. В таких реакціях протон рухається вздовж потенціалу, що містить одну або дві ями. В випадку двухъямного потенціалу, різниця енергій двох ям є важким параметром, як це пов'язано з відносительною популяцією АН-В і А-НВ таутомерів. Швидкість, з якою протон може переходити з однієї ями в іншу, сильно залежить від висоти енергетичного бар'єра, який відокремлює їх [3–5]. При цьому також важкими є і інші характеристики потенціалу, такі як ширина бар'єра. Квантово-механічні методи дозволяють розрахувати енергію будь-якої конфігурації ядер [6–7].

Ціль дослідження

Цілью роботи є вивчення явища тунелювання квантово-механічної частинки в двухъямному потенціалі в тому випадку, коли висота бар'єра між ямами значно перевищує початкову енергію частинки. Предмет дослідження складає застосування частотного (квадрупольного) механізму модуляції потенціалу для забезпечення стійкого тунелювання хвильової функції. Предметом дослідження є тимчасова еволюція форми і місця хвильової функції квантово-механічної частинки в залежності від параметрів синусоїдальної модуляції потенціалу. Засобом дослідження є чисельний алгоритм і побудована на основі математичної моделі програма рішення рівняння Шредингера, що описує тимчасову еволюцію хвильової функції частинки. Фізична задача базується на включенні в потенціал тимчасової залежності синусоїдального і стохастичного виду, що містить частоту і індекс модуляції.

Изложение основного материала исследования

Процеси електронного транспорту, що протікають в біологічних макромолекулярних системах, є фундаментальними фізичними процесами. В багатьох біохімічних реакціях електронний перенос є необхідним ланкою в ланці послідовних функціональних перетворень біологічних систем. Основу елементарного акту процесу переносу електрона складає тунельний ефект – квантовий стрибок між центрами локалізації електрона в молекулярній системі.

Розглянемо молекулярну систему, що містить водородні зв'язки. Сечення поверхні потенціальної енергії цієї системи вздовж лінії водородної зв'язки має профіль, який може містити як один, так і два мінімуми. В останньому випадку цей профіль називається двухъямним, і говорять, що водородна зв'язка має двухъямний потенціал. Наявність двухъямного потенціалу водородної зв'язки є

необходимым условием для переноса протона вдоль этой связи. Этот перенос обусловлен возможностью туннельного и/или активационного перехода протона из одной потенциальной ямы в другую вдоль линии водородной связи.

В работе для исследования эффекта туннелирования рассмотрено уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x, t) \psi(x, t), \quad (1)$$

в котором использован двухъямный потенциал выбранного вида. В качестве примера общего случая был рассмотрен потенциал четвертой степени вида:

$$V(x, t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left[a(t) \left(\frac{x}{\xi} \right)^4 - b(t) \left(\frac{x}{\xi} \right)^2 + \frac{b^2(t)}{4a(t)} \right], a(t) = \frac{\alpha - \beta \cos(\varepsilon\omega_0 t)}{2\sqrt{\alpha}}, b(t) = \frac{\sqrt{\alpha - \beta \cos(\varepsilon\omega_0 t)}}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (2)$$

Здесь параметр ξ пропорционален среднеквадратичной флуктуации (среднеквадратичному отклонению) нулевых колебаний линейного осциллятора в стационарном случае $\delta x = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. Заметим, что среднеквадратичное отклонение атомов – это экспериментально измеримая квантовая характеристика колебаний атомов в кристаллической решётке, $\xi = \sqrt{\hbar/m\omega_0} = \sqrt{2}\delta x_0$. Если разложить в ряд Тейлора функцию $V(x, t)$ вблизи одного из минимумов и ограничиться членами второй степени (т.е. аппроксимировать кривую параболой), а также считать, что параметры потенциала слабо меняются со временем (параметр $\beta/\alpha \ll 1$ мал), то в главном приближении по малому параметру β/α величина ω_0 будет играть роль собственной частоты параболического потенциала. Таким образом, параметр ω_0 – это собственная частота колебаний в яме, если её форму описать параболой, что справедливо при малых колебаниях у дна ямы. Параметры потенциала изменяются со временем таким образом, что энергия, соответствующая минимумам и максимуму потенциала, не меняется, при этом происходит периодическое изменение x -координат минимумов $x_{\min}^{(-)}, x_{\min}^{(+)}$ (и, соответственно, расстояния между минимумами), x -координата максимума не меняется со временем, $x_{\max} = 0$.

Высота барьера $\Delta V(t)$ и положения минимумов $x_{\min}^{(-)}, x_{\min}^{(+)}$ определяются соотношениями:

$$\frac{\Delta V(t)}{(\hbar\omega_0/2)} = \frac{b^2(t)}{4a(t)} = \frac{1}{8\sqrt{\alpha}} = const, \quad \frac{x_{\min}^{(\pm)}(t)}{\xi} = \pm \sqrt{\frac{b(t)}{2a(t)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha - \beta \cos(\varepsilon\omega_0 t)}}. \quad (3)$$

В случае $\beta = 0$ для положения минимумов (3) получаем: $x_{\min}^{(\pm)}(t)/\xi = \pm(4\alpha)^{-1/4}$.

Переходя к безразмерным переменным:

$$\tau = \frac{\omega_0 t}{2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\xi} = \frac{x}{\sqrt{\hbar/m\omega_0}}, \quad u(\tilde{x}, \tau) = \frac{V(x/\xi, \omega_0 t/2)}{(\hbar\omega_0/2)} = \frac{V(\tilde{x}, \tau)}{(\hbar\omega_0/2)}, \quad (4)$$

приходимо к уравнению Шредингера (1) в безразмерном виде:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{x}^2} + u(\tilde{x}, \tau) \psi, \quad (5)$$

где потенциал в безразмерных переменных имеет вид:

$$u(\tilde{x}, \tau) = a(\tau) \tilde{x}^4 - b(\tau) \tilde{x}^2, \quad a(\tau) = \frac{\alpha - \beta \cos(\varepsilon \tau)}{2\sqrt{\alpha}}, \quad b(\tau) = \frac{\sqrt{\alpha - \beta \cos(\varepsilon \tau)}}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (6)$$

Для проведения численных экспериментов были выбраны значения глобальных параметров: $\alpha = 0.0005$, $\beta = 0.0001$ и $\omega_0 = 1$. При этом координаты минимумов потенциала находятся в точках $x_{\min}^{(\pm)}(t)/\xi = \pm(4\alpha)^{-1/4} = \pm 4.729$. Параметр ε подбирался при оптимизации туннелирования и равнялся 0.0, 2.0 и 1.7. В работе проведены численные расчёты квантово-механических средних: полной энергии частицы и плотности энергии по формулам:

$$E(\tau) = \xi \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tilde{x}, \tau) d\tilde{x}, \quad w(\tilde{x}, \tau) = \frac{\hbar \omega_0}{2} \left\{ \left| \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} \right|^2 + u(\tilde{x}, \tau) |\psi|^2 \right\}. \quad (7)$$

Координата частицы измеряется в единицах величины ξ , время – в единицах собственных периодов $T = 2\pi/\omega_0$ параболического потенциала, соответствующего дну ямы, энергия изменяется в единицах энергии нулевых колебаний $\hbar \omega_0/2$ в одной из ям.

Моделирование туннелирования частиц

На рис. 1 показана форма потенциала на старте $\tau = 0$. Кроме потенциала показан квадрат модуля (умноженный на 7) $p(\tilde{x}, 0) = 7|\psi(\tilde{x}, 0)|^2$ волновой функции:

$$\psi(\tilde{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi \xi^2}} \exp\left(-\frac{(\tilde{x} - \tilde{x}_{\min})^2}{2}\right). \quad (8)$$

Для нахождения решений уравнения (1) с начальным условием (4) была использована построенная пошаговая Маткад-программа, основанная на методе Рунге-Кутты 4-го порядка.

В отсутствие модуляции волновая функция локализуется в левой яме.

На рис. 2 приведена временная зависимость плотности $p(\tilde{x}, \tau) = |\psi(\tilde{x}, \tau)|^2$ на временном интервале $0 \leq \tau \leq 4000$. Небольшие колебания плотности связаны с отличием потенциала в левой яме от параболической формы. Высота барьера составляет $h_b = 1/8\sqrt{\alpha} = 5.590$, а энергия E частицы в начальный момент равняется 0.456. Погрешность полученных результатов не превышает 0.0008.

Для различных случаев частотной модуляции приведены результаты численного моделирования процесса туннелирования. На рис. 3–4 показаны результаты моделирования при $\varepsilon = 2.0$ на временном интервале $0 \leq t \leq 4000$. Расчёты проведены в условиях модуляции потенциала синусоидальным возмущением с частотой $\omega = 2.0$ (в

отсутствии гармонического шума Орнштейна-Уленбека). Мощности возмущений относились как (1.0+0.0).

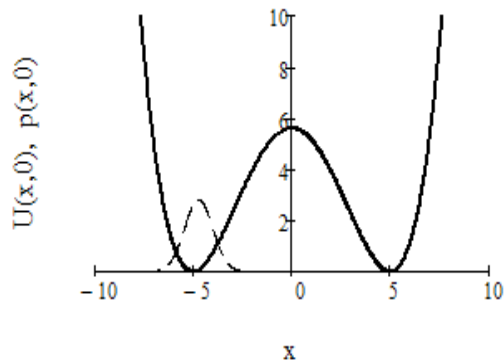


Рис. 1. Форма потенциала на старте и квадрат модуля (умноженный на 7) волновой функции (пунктир).

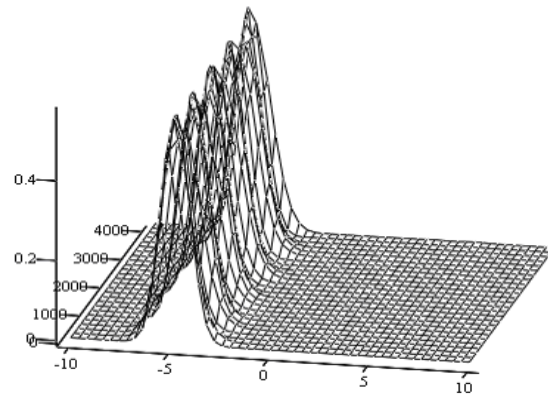


Рис. 2. Эволюция плотности $p(\tilde{x}, t)$ на временном интервале $0 \leq t \leq 2500$.

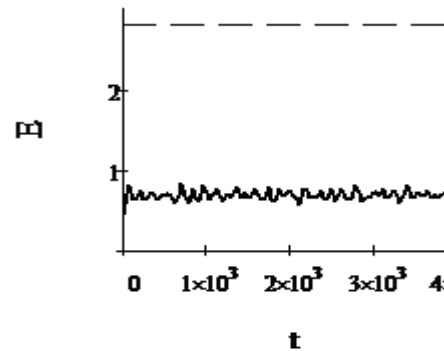
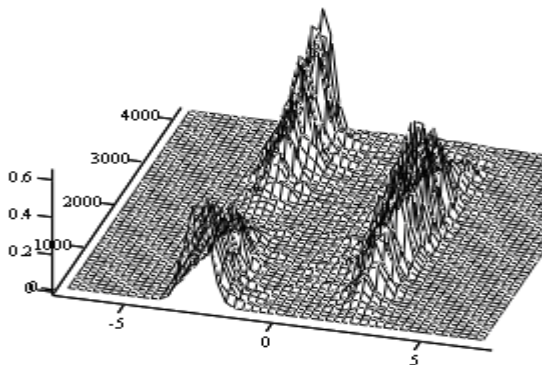


Рис. 3. Моделирование эффекта туннелирования, $\varepsilon = 2$. Слева – эволюция плотности распределения. Справа – динамика энергии частицы E, пунктиром указана высота барьера.

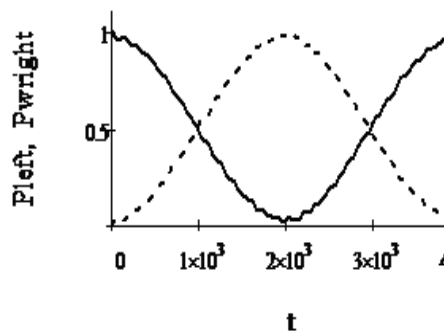
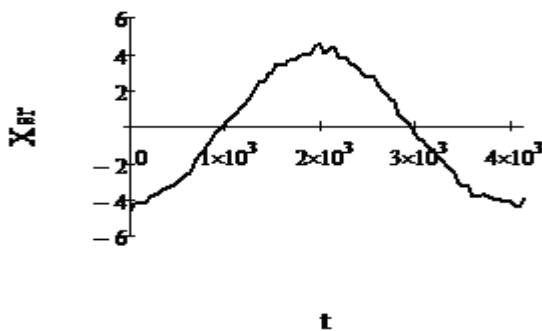


Рис. 4. Моделирование эффекта туннелирования, $\varepsilon = 2$. Слева – динамика средней координаты частицы X_{sr} . Справа – эволюция относительных долей плотности, относящихся к левой яме (сплошная линия) и к правой (пунктир).

На рис. 5 и 6 показаны результаты моделирования при $\varepsilon = 2.0$ на временном интервале $0 \leq \tau \leq 4000$, которые проведены в условиях модуляции потенциала синусоидальным возмущением с частотой $\omega = 2.0$ в смеси со стохастическим шумом Орнштейна-Уленбека с частотой $\omega = 2.0$ и декрементом (шириной линии) $\nu = 0.01$. Мощности возмущений относились как $(1.0+0.2)$.

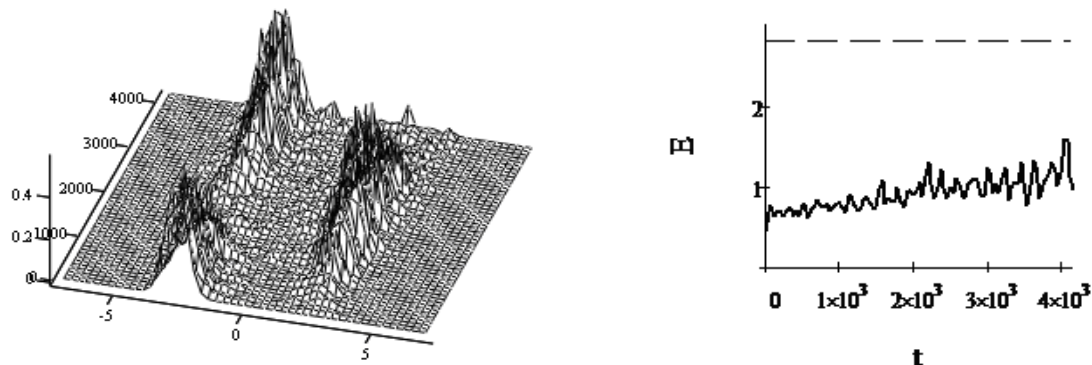


Рис. 5. Моделирование эффекта туннелирования, $\varepsilon = 2$. Слева – эволюция плотности распределения. Справа – динамика энергии частицы E , пунктиром указана высота барьера.



Рис. 6. Моделирование эффекта туннелирования, $\varepsilon = 2$. Слева – динамика средней координаты частицы X_{sr} . Справа – эволюция относительных долей плотности, относящихся к левой яме (сплошная линия) и к правой (пунктир).

На рис. 7 и 8 показаны результаты моделирования при $\varepsilon = 2.0$ на временном интервале $0 \leq \tau \leq 4000$, которые были проведены в условиях модуляции потенциала только стохастическим шумом Орнштейна-Уленбека с частотой $\omega = 2.0$ и декрементом (шириной линии) $\nu = 0.01$. Мощности возмущений относились как $(1.0+0.4)$.

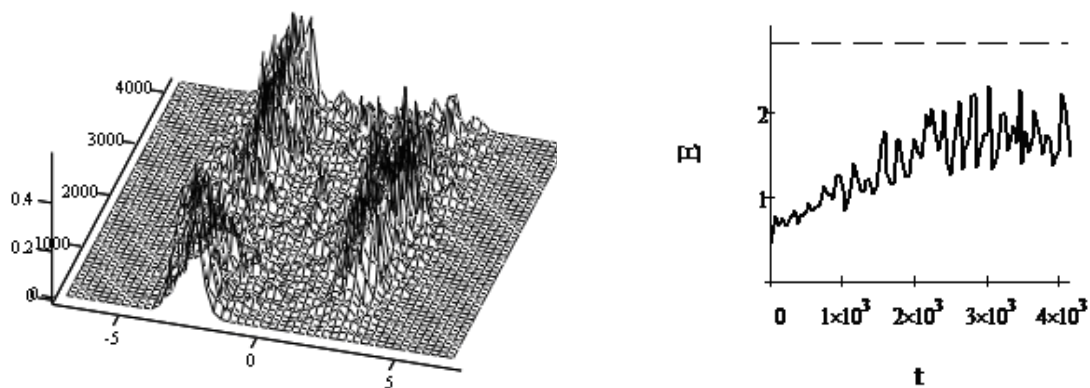


Рис. 7. Моделирование эффекта туннелирования, $\varepsilon = 2$. Слева – эволюция плотности распределения. Справа – динамика энергии частицы E , пунктиром указана высота барьера.

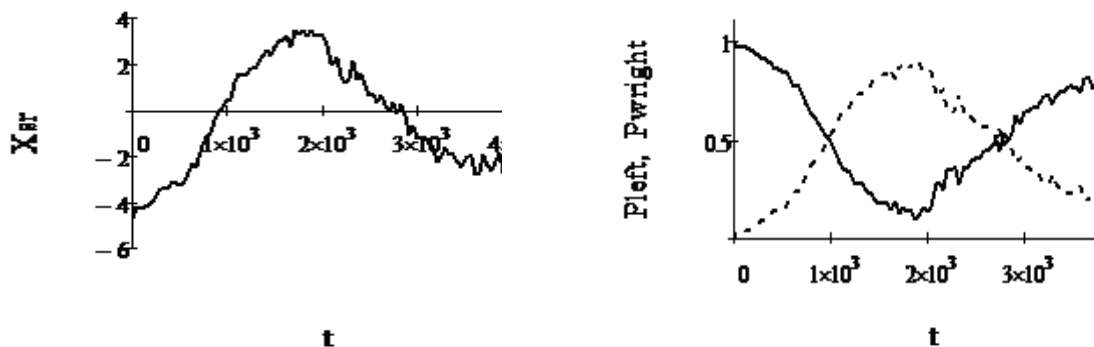


Рис. 8. Моделирование эффекта туннелирования, $\varepsilon = 2$. Слева – динамика средней координаты частицы X_{gr} . Справа – эволюция относительных долей плотности, относящихся к левой яме (сплошная линия) и к правой (пунктир).

Видно, что имеет место устойчивое туннелирование частицы из левой ямы потенциала в правую яму. При этом эффективность туннелирования и энергия частицы с ростом парциального вклада стохастического шума при неизменном вкладе регулярной синусоидальной составляющей модуляции имеют тенденцию к усилению.

Обсуждение

Выше мы рассмотрели процесс туннелирования протона вдоль линии водородной связи в двухъямном потенциале. При этом полагалось, что протон расположен на отрезке прямой, соединяющей два электроотрицательных атома, образующих водородную связь. Это случай недеформированной водородной связи. Экспериментальные исследования показывают, что такая связь является наиболее сильной. В реальных средах в результате теплового движения атомов может произойти переориентация молекул или их фрагментов, что может вызвать относительный сдвиг фрагментов молекул, образующих водородную связь. В результате водородная связь может деформироваться или даже вообще разорваться. При такой деформации меняются параметры водородной связи и, следовательно, меняется вероятность туннелирования протона и время релаксации. Одним из наиболее очевидных следствий деформации изгиба водородной связи является увеличение расстояния между минимумами двухъямного потенциала. Другими словами, деформация водородной связи увеличивает ширину энергетического барьера, разделяющего потенциальные ямы.

Выводы

В работе изложены результаты численных расчетов по туннелированию волновой функции в двухъямном потенциале. Предложен и использован биквадратичный потенциал двухъямного вида. Целью работы является изучение явления туннелирования квантово-механической частицы в двухъямном потенциале в том случае, когда высота барьера между ямами значительно превосходит начальную энергию частицы. На основе математической модели временной эволюции волновой функции построен численный алгоритм и создана программа решения уравнения Шредингера, описывающего временную эволюцию волновой функции частицы. Физическая задача основывается на включении в потенциал временной зависимости стохастического и синусоидального вида, содержащей частоту и индекс модуляции. Таким образом, реализуется случай параметрической накачки квантовой системы – частицы в нестационарном потенциале. Проведена проверка отсутствия туннелирования в режиме, когда отключены модуляции обоих видов. Для различных случаев частотной модуляции приведены результаты численного моделирования

процесса туннелирования. Показана возможность регулировки эффективности туннелирования путем выбора частоты модуляции. Показано также, что включение в модуляцию потенциала гармонического шума – стохастического процесса Орнштейна-Уленбека – приводит к увеличению скорости туннелирования. Путем направленного изменения параметров модуляции возможно регулировать скоростью туннелирования волновой функции частицы.

Список использованной литературы

1. Winful H. G. Tunneling Time, the Hartman Effect, and Superluminality: A Proposed Resolution of an Old Paradox. *Physics Reports*. 2006. Vol. 436. P. 1–69.
2. Buttiker M., Landauer R. Traversal Time for Tunneling. *Physical Review Letters*. 1982. Vol. 49. № 23. P. 1739–1742.
3. Antoniou D., Schwartz S.D. Internal Enzyme Motions as a Source of Catalytic Activity: Rate-Promoting Vibrations and Hydrogen Tunneling. *Journal of Physical Chemistry B*. 2001. Vol. 105. P. 5553–5558.
4. Craven G. T., Nitzan A. Electron Transfer across a Thermal Gradient. *PNAS*. 2016. Vol. 113(34). P. 9421–9429.
5. Klinman JP., Kohen A. Hydrogen Tunneling Links Protein Dynamics to Enzyme Catalysis. *Annual Review Biochem*. 2013. Vol. 82. P. 471–496.
6. Dubinko V. I., Laptev D. V. Chemical and Nuclear Catalysis Driven by Localized Anharmonic Vibrations. *Letters on Materials*. 2016. Vol. 6 (1) P. 16–21.

References

1. Winful, H. G. (2006). Tunneling Time, the Hartman Effect, and Superluminality: A Proposed Resolution of an Old Paradox. *Physics Reports*. **436**, 1–69.
2. Buttiker, M., & Landauer, R. (1982). Traversal Time for Tunneling. *Physical Review Letters*. **49**, 23, 1739–1742.
3. Antoniou, D., & Schwartz, S. D. (2001). Internal Enzyme Motions as a Source of Catalytic Activity: Rate-Promoting Vibrations and Hydrogen Tunneling. *Journal of Physical Chemistry B*. **105**, 5553–5558.
4. Craven, G. T., & Nitzan, A. (2016). Electron Transfer across a Thermal Gradient. *PNAS*. **113**(34), 9421–9429.
5. Klinman, JP., & Kohen, A. (2013). Hydrogen Tunneling Links Protein Dynamics to Enzyme Catalysis. *Annual Review Biochem*. **82**, 471–496.
6. Dubinko, V. I., & Laptev, D. V. (2016). Chemical and Nuclear Catalysis Driven by Localized Anharmonic Vibrations. *Letters on Materials*. **6** (1), 16–21.

Дубинко Владимир Иванович – д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник ННЦ ХФТИ, e-mail: vdubinko@hotmail.com.

Мазманишвили Александр Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор, старший научный сотрудник ННЦ ХФТИ, e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

Лаптев Денис Владимирович – к.ф.-м.н., младший научный сотрудник ФТИИТ им. Б.И. Веркина НАНУ, e-mail: laptev.denis.18@gmail.com.

УДК 519.713:681.52

М.Б. ЄДИНОВИЧ, О.В. ПОЛИВОДА, Т.О. КУЗЬМИНА,
І.О. РУДЕНКО, В.С. ШЕСТАКОВ
Херсонський національний технічний університет

ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ОБ'ЄКТІВ УПРАВЛІННЯ У РЕЖИМІ РЕАЛЬНОГО ЧАСУ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФОАНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

У статті досліджено можливість застосування сучасних апаратних і програмних засобів для автоматизації традиційних способів ідентифікації, з можливістю отримувати значення параметрів об'єктів управління у реальному часі. Проаналізовано відомі графоаналітичні способи ідентифікації об'єктів управління та доведено недоцільність їх використання при ідентифікації у режимі реального часу через необхідність ручного введення експериментальних даних. Для визначення динамічних параметрів типових лінійних об'єктів систем автоматичного управління запропоновано використовувати швидкість зміни вихідного сигналу досліджуваного об'єкту. Доведено, що застосування програмних пакетів Mathcad, Matlab дозволяє безпосередньо вираховувати швидкість зміни вихідного сигналу об'єкта управління, що значно скорочує час обробки даних, а використання пакету Matlab, завдяки вбудованому OPC серверу, дозволяє обробляти у реальному часі дані процесу, що надходять з датчиків або контролерів по цифровій мережі. Наведено структурну схему системи для дослідження запропонованого способу визначення динамічних характеристик об'єкта управління та блок-схема алгоритму обчислення динамічних параметрів об'єкта управління. Наведено приклад ідентифікації об'єкта управління першого порядку з використанням швидкості зміни вихідного сигналу. Експериментально визначені значення регульованого параметру (температура) зафіксовані датчиком, підключеним до аналогового входу контролера Овен ПЛКБ3. Дані з контролера по мережі Modbus передавалися через універсальний OPC-сервер Master OPC на персональний комп'ютер. У якості OPC-клієнта було використано середовище Matlab, де проводилися розрахунки параметрів динаміки досліджуваного об'єкта. Доведено, що запропонований спосіб дозволяє значно підвищити ефективність відомих графоаналітичних методів ідентифікації. З'ясовано, що шуми, присутні у сигналах датчиків можуть суттєво вплинути на точність визначення параметрів об'єкта управління, тому для зменшення впливу цих шумів необхідно застосовувати фільтри нижніх частот.

Ключові слова: ідентифікація, графоаналітичний метод, об'єкт управління, режим реального часу.

М.Б. ЕДИНОВИЧ, О.В. ПОЛИВОДА, Т.О. КУЗЬМИНА,
И.О. РУДЕНКО, В.С. ШЕСТАКОВ
Херсонский национальный технический университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В статье исследована возможность применения современных аппаратных и программных средств для автоматизации традиционных способов идентификации, с возможностью получать значения параметров объектов управления в реальном времени. Проанализированы известные графоаналитические способы идентификации

объектов управления и доказана нецелесообразность их использования при идентификации в режиме реального времени из-за необходимости ручного ввода экспериментальных данных. Для определения динамических параметров типовых линейных объектов систем автоматического управления предложено использовать скорость изменения выходного сигнала исследуемого объекта. Доказано, что применение программных пакетов Mathcad, Matlab позволяет непосредственно вычислять скорость изменения выходного сигнала объекта управления, что значительно сокращает время обработки данных, а использование пакета Matlab, благодаря встроенному OPC серверу, позволяет обрабатывать в реальном времени данные процесса, поступающие с датчиков или контроллеров по цифровой сети. Приведена структурная схема системы для исследования предложенного способа определения динамических характеристик объекта управления и блок-схема алгоритма вычисления динамических параметров объекта управления. Приведен пример идентификации объекта управления первого порядка с использованием скорости изменения выходного сигнала. Экспериментально определенные значения регулируемого параметра (температура) зафиксированы датчиком, подключенным к аналоговому входу контроллера Овен ПЛКБ3. Данные с контроллера по сети Modbus передавались через универсальный OPC-сервер Master OPC на персональный компьютер. В качестве OPC-клиента была использована среда Matlab, где проводились расчеты параметров динамики исследуемого объекта. Доказано, что предложенный способ позволяет значительно повысить эффективность известных графоаналитических методов идентификации. Выяснено, что шумы, присутствующие в сигналах датчиков могут существенно повлиять на точность определения параметров объекта управления, поэтому для уменьшения влияния этих шумов необходимо применять фильтры нижних частот.

Ключевые слова: идентификация, графоаналитический метод, объект управления, режим реального времени.

M.B. YEDYNOVYCH, O.V. POLYVODA, T.O. KUZMINA,
I.O. RUDENKO, V.S. SHESTAKOV
Kherson National Technical University

DETERMINATION OF CONTROL OBJECTS DYNAMIC PARAMETERS IN REAL-TIME MODE USING GRAPHO-ANALYTICAL METHODS OF IDENTIFICATION

The article explores the possibility of using modern hardware and software to automate traditional methods of identification, with the ability to obtain the values of the parameters of control objects in real time. The known graph-analytical methods of identification of control objects are analyzed and the inexpediency of their use in real-time identification due to the need for manual input of experimental data is proved. To determine the dynamic parameters of typical linear objects of automatic control systems, it is proposed to use the rate of change of the output signal of the researched object. It is proved that the use of software packages Mathcad and Matlab allows to directly calculate the rate of change of the output signal of the control object, which significantly reduces data processing time, and the use of Matlab environment, thanks to the built-in OPC server, allows real-time mode analysis of process data obtaining from sensors or digital network controllers. The block diagram of the system for the research of the proposed method for determining the dynamic characteristics of the control object and the block diagram of the algorithm for calculating the dynamic parameters of the control object are proposed. An example of identification of a first-order control object using the rate of change of the output signal is given.

Experimentally determined values of the controlled parameter (temperature) were recorded by a sensor connected to the analog input of the Oven PLC63 controller. Data from the controller over the Modbus network was transmitted via a universal OPC – Master OPC server on a personal computer. The Matlab environment was used as the OPC client, where the dynamics parameters of the researched object were calculated. It is proved that the proposed method can significantly increase the efficiency of known graph-analytical methods of identification. It was found that the noise present in the sensor signals can significantly affect the accuracy of determining the parameters of the control object, so to reduce the influence of these noises, it is necessary to use low-pass filters.

Keywords: identification, graph-analytical method, control object, real-time mode.

Постановка проблеми

Розробці будь-якої системи автоматичного управління (САУ) передують вивчення об'єкта управління й визначення його математичної моделі. Математична модель об'єкта включає математичний опис залежностей між основними змінними (вихідні регульовані змінні, збурення управління і впливу) й обмеженнями, що на них накладаються. Існують різні (статичні й динамічні) види математичних моделей, однак на практиці найбільше широко використовують математичні моделі у вигляді передавальних функцій. Для визначення передавальних функцій об'єктів застосовують аналітичні й експериментальні методи ідентифікації [1–4]. Аналітичні методи використовують тоді, коли добре вивчені й можуть бути описані кількісно фізичні процеси, що відбуваються в об'єкті. Коли такої інформації немає, або неможливо одержати модель аналітично, застосовують експериментальні методи. Разом з тим, створення точної робочої моделі складного об'єкта управління без експериментальної перевірки й доведення практично неможливо. З урахуванням того, що процес розробки САУ завжди обмежений за часом, на практиці широко використовують різні експериментальні (активні й пасивні) методи ідентифікації об'єктів управління. При активному експерименті на об'єкт подають пробні впливи різного виду (східчасті, імпульсні, гармонічні, випадкові й ін.) і фіксується реакція об'єкта на ці впливи. При пасивному експерименті пробні впливи не подають, а здійснюється безперервна реєстрація вхідних і вихідних змінних у процесі нормальної експлуатації об'єкта. Слід відзначити, що в більшості випадків розроблювачі САУ віддають перевагу активним експериментальним методам ідентифікації. Для визначення математичних моделей лінійних об'єктів за допомогою активного експерименту найбільше поширення дістали методи аналізу часових (перехідних і імпульсних перехідних) характеристик і методи аналізу частотних характеристик. Найбільш простим з них є метод аналізу перехідних характеристик, отриманих при подачі на вхід об'єкта східчастого впливу величиною відносно нормального (усталеного) режиму роботи об'єкта. На основі отриманих даних будується перехідна характеристика об'єкта і графоаналітичним способом визначаються динамічні і статичні параметри. Аналогічним способом проводиться обробка імпульсних характеристик, отриманих експериментальним шляхом. Але попри такі переваги як простота і наочність ці способи трудомісткі і займають багато часу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Широкого поширення набули методи ідентифікації детермінованих об'єктів шляхом визначення аналітичного виразу перехідної характеристики $h(t)$ [2] за експериментально отриманою реакцією об'єкта при східчастій зміні керуючого впливу на вході $u(t) = c \cdot 1(t)$, де $1(t)$ – функція одиничного стрибка, c – інтенсивність сигналу. Для відшукування аналітичних виразів передавальних функцій на основі

експериментально отриманих перехідних характеристик в інженерних розрахунках застосовуються графічні методи.

Значення часу транспортного запізнювання τ визначається як інтервал часу між моментом зміни вхідного сигналу й початком зміни вихідної величини. Далі для об'єкта, що має транспортне запізнювання, передавальна функція визначається як добуток двох передавальних функцій $W_1(p) = e^{-pt}$, що відповідає транспортному запізнюванню й $W_2(p)$, що відповідає перехідній функції $Y_2(p) = Y_{\text{вх}}(t - \tau)$, у якої за початок відліку приймається час $t = \tau$.

Статичний коефіцієнт передачі об'єкта визначається співвідношенням зміни значення вихідного сигналу, що встановився до величини вхідного впливу:

$$k = \frac{y(\infty) - y_0}{u_{\text{вх}} - u_0}, \quad (1)$$

де $y(\infty)$ – усталене значення вихідної величини при подачі на вхід об'єкта східчастого вхідного сигналу з рівнем $u_{\text{вх}}$; u_0 і y_0 – усталені значення вхідного й вихідного сигналів до початку проведення експерименту. Для інерційного об'єкта першого порядку стала часу об'єкта T визначається як відрізок часу, за який перехідна функція сягає 63% своєї усталеної величини. Це впливає з того, що при $t = \tau$ значення перехідної функції приблизно дорівнює

$$h(t)|_{t=\tau} = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = k \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0,63k. \quad (2)$$

Для величини кута нахилу дотичної до перехідної кривої в нульовий момент часу справедливе співвідношення:

$$\left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right|_{t=0} = \frac{k}{T}. \quad (3)$$

Тобто стала часу може бути визначена як момент часу, у який дотична до перехідного процесу у початковій точці траєкторії перетне усталене значення вихідної величини (рис. 1).

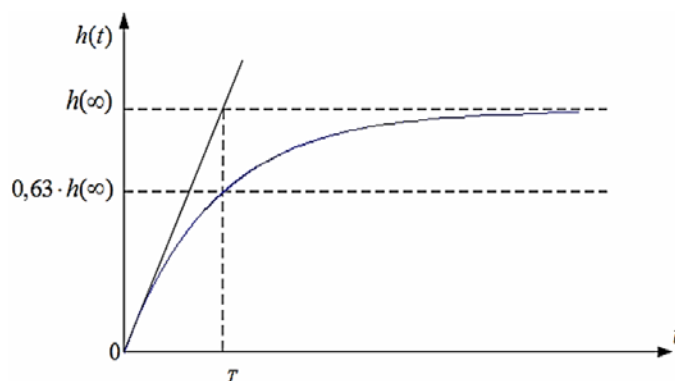


Рис. 1. Графічне визначення сталої часу інерційної ланки першого порядку.

Імпульсні перехідні характеристики $w(t)$, що представляють реакцію об'єкта при подачі на вхід імпульсу нескінченно малої тривалості й нескінченно великої

амплітуди, взаємно однозначно пов'язані з перехідними характеристиками $w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = L^{-1}\{W(p)\}$ також використовуються для ідентифікації об'єкта управління.

Процес ідентифікації аналогічний процесу ідентифікації по перехідній характеристиці і проводиться по відповідних математичних співвідношеннях для типових динамічних об'єктів [5].

На практиці точно реалізувати імпульсний вплив $u(t) = c \cdot \delta(t)$ на вхід об'єкта, близький за властивостями до ідеального δ -імпульсу неможливо, що пояснюється технічними причинами. Через відмінності при реалізації вхідного імпульсу експериментально знята імпульсна характеристика відрізняється від теоретичної. На рис. 2 представлено зіставлення експериментальної імпульсної перехідної характеристики 1 аперіодичного об'єкта першого порядку й теоретичної 2, побудованої за виразом

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (4)$$

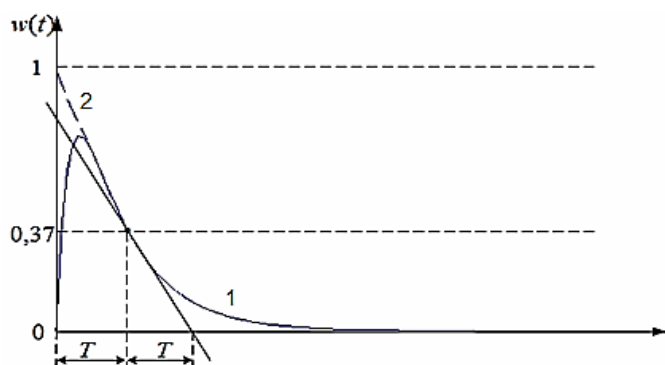


Рис. 2. Графічна ідентифікація за імпульсною ваговою функцією.

У роботі [3] пропонується автоматизований спосіб ідентифікації об'єктів управління за експериментальною імпульсною характеристикою. Оскільки імпульсні характеристики доволі важко використати безпосередньо в процесі синтезу автоматичних систем, автори пропонують апроксимувати експериментальну імпульсну характеристику передавальною функцією, яка, по-перше, адекватно відображала б динамічні властивості об'єкта з достатньою точністю, а по-друге, була б придатною для застосування обраного методу параметричного синтезу системи, що функціонує за відповідним алгоритмом.

Пропонований спосіб автоматизованого розв'язання задачі ідентифікації може бути реалізований, якщо її розглядати як класичну математичну задачу апроксимації експериментальних даних аналітичними виразами $y = f(x)$, умовно названий експериментально-математичною ідентифікацією об'єкта. У такій постановці задача ідентифікації відрізняється від математичної лише тим, що її розв'язок знаходять не у класі довільних функцій, а у класі функцій, що відповідають вибраним структурам математичних моделей об'єктів, оскільки це пов'язане з подальшим вибором алгоритму регулювання і методу параметричного синтезу системи.

Найширші можливості в плані автоматизації обробки результатів активного експерименту з дослідження динаміки об'єктів відкриваються при використанні пакета розширення *Curve Fitting Toolbox (Matlab)*, який дає змогу здійснити попереднє згладжування експериментальних даних і за допомогою різних методів наближення розв'язати нелінійну задачу підбору параметрів моделі об'єкта, апроксимуючи табличні залежності аналітичними виразами, оптимальними за критеріями *SSE*, *SSR*, *RMSE* [6].

Спочатку обирається вид апроксимуючої передавальної функції об'єкта (з числом невідомих коефіцієнтів ≤ 6 , що цілком достатньо для практики). Перехід у часову область здійснюється за допомогою рівняння імпульсної характеристики, що відповідає обраній математичній моделі об'єкта управління. Під час використання згаданих програм рівняння імпульсної характеристики $w(t)$ задається як апроксимуюча функція, коефіцієнти якої необхідно підібрати так, щоб забезпечувалася достатня точність апроксимації. Знаходження математичної моделі об'єкта зводиться до відомої математичної задачі апроксимації табличних даних аналітичними виразами з максимально можливою точністю. Час t у рівнянні імпульсної характеристики розглядається як аргумент x апроксимуючої функції, тобто $f(x) \equiv w(t)$.

Отже, відомі графоаналітичні способи ідентифікації об'єктів управління потребують ручного введення експериментальних даних, що робить неможливим проводити ідентифікацію у режимі реального часу. Спосіб ідентифікації об'єктів управління за експериментальною імпульсною характеристикою теж передбачає ручне введення інформації.

Мета дослідження

Метою дослідження є аналіз можливості застосування сучасних апаратних і програмних засобів для автоматизації традиційних способів ідентифікації, з можливістю отримувати значення параметрів об'єктів управління у реальному часі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Як відомо, перехідна характеристика об'єкта управління відображає насамперед його динамічні властивості, тобто швидкість реакції на вхідний вплив. Іншими словами це швидкість зміни вихідного сигналу. Цю швидкість можна визначити як тангенс кута нахилу дотичної до перехідної характеристики (3), рис. 1. Відомі графоаналітичні способи визначення динамічних параметрів об'єкта управління дозволяють визначити значення сталої часу T шляхом графічної обробки перехідної характеристики. Натомість застосування програмних пакетів Mathcad, Matlab дозволяє безпосередньо вираховувати швидкість зміни вихідного сигналу об'єкта управління і пов'язане з ним значення сталої часу T , що значно скорочує час обробки даних. Пакет Matlab завдяки вбудованому OPC серверу дозволяє обробляти у реальному часі дані процесу, що надходять з датчиків або контролерів по цифровій мережі.

Імпульсна перехідна функція $g(t)$ є похідною у часі перехідної функції $h(t)$, тобто швидкістю зміни вихідного сигналу [1]. На рис. 3 зображено перехідну характеристику та відповідну їй імпульсну функцію аперіодичної ланки першого порядку. Сталу часу T визначають як $h(t) = 0,63$ від усталеного значення перехідної функції, що є більш точним аніж застосування методу дотичної. Цьому рівню відповідає значення $g(t) = 0,44$, тобто відносна швидкість зміни V_T/V_{\max} вихідної змінної складає 0,44 від максимального значення. Аналогічно можна визначити значення запізнення у системі. Рівень швидкості V_τ/V_{\max} вихідного сигналу для визначення запізнення τ визначають технічними умовами. Зазвичай значення V_τ/V_{\max} лежить у діапазоні 0,1 – 0,2. Таким чином знаючи швидкість вихідної сигналу об'єкта можна легко визначати динамічні параметри типових лінійних об'єктів систем автоматичного управління. Визначення швидкості вихідного сигналу реалізується простим алгоритмом на основі даних отриманих від цифрових засобів управління САУ. Приклад реалізації запропонованого способу показано на рис. 4. Алгоритм розрахунку динамічних параметрів наведено на рис. 5.

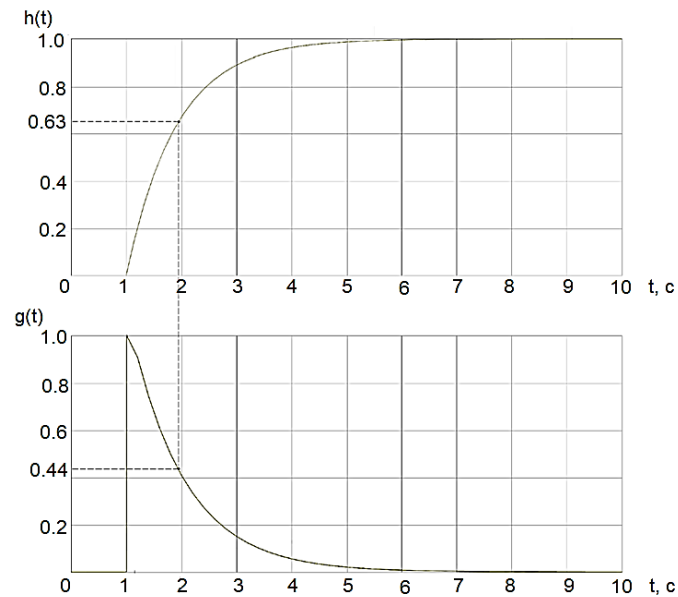


Рис. 3. Визначення сталої часу для об'єкта 1-го порядку по перехідній та імпульсній характеристикам.

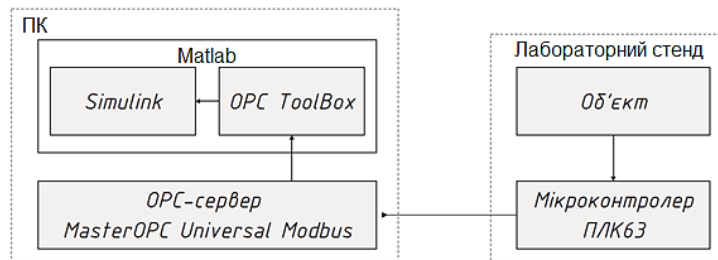


Рис. 4. Структурна схема системи для дослідження способу визначення динамічних характеристик об'єкта управління.

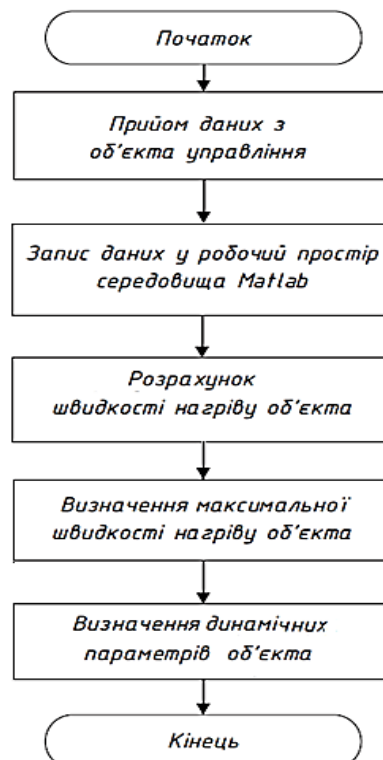


Рис. 5. Алгоритм обчислення динамічних параметрів ОУ.

Значення регульованого параметру (температура) фіксуються датчиком, підключеним до аналогового входу контролера Овен ПЛК63. Дані з контролера по мережі Modbus передаються через універсальний OPC-сервер Master OPC на персональному комп'ютері. У ролі OPC-клієнта було використано середовище Matlab, де проводилися розрахунки параметрів динаміки досліджуваного об'єкта.

Результати експерименту наведені на рис. 6.

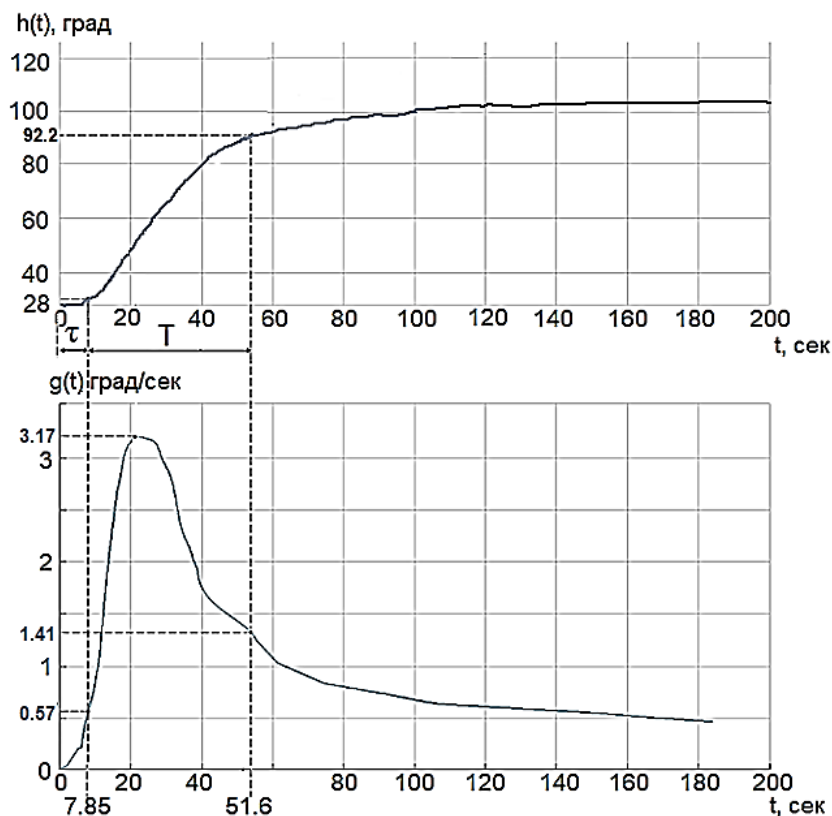


Рис. 6. Визначення сталої часу ОУ через швидкість зміни вихідного сигналу.

Для визначення сталої часу T і запізнення τ розраховується і запам'ятовується значення максимальної швидкості V_{\max} вихідного сигналу (температури). Також розраховуються значення V_T/V_{\max} . Значення сталої часу T і запізнення τ визначаються у моменти часу, коли $V_T/V_{\max} = 0,44$ і $V_\tau/V_{\max} = 0,18$.

Усталене значення температури у ході експерименту склало 103°C , початкове значення температури – 28°C . Відношення $V_\tau/V_{\max} = 0,57/3,17 = 0,18$. Запізнення у цей момент $\tau = 7,85$ с. Відношення $V_T/V_{\max} = 1,41/3,17 = 0,44$, що відповідає часу $51,6$ с і з врахуванням запізнення маємо значення сталої часу $T = 51,6 - 7,85 = 43,75$ с.

Температура, що відповідає часу $51,6$ с дорівнює $92,2^\circ\text{C}$. Усталене значення температури – 104°C із врахуванням початкової температури у лабораторії – 28°C будемо мати нагрів ОУ $64,2^\circ\text{C}$. Відношення $t_{\text{уст}}/t_T = 64,2/104 = 0,623$ має близьке значення до очікуваного $0,63$.

Вхідним сигналом в системі вважатимемо потужність нагрівача, що дорівнює 10 Вт. Тоді коефіцієнт передачі дорівнюватиме $k = 103/10 = 10,3$ $^\circ\text{C}/\text{Вт}$.

Передавальна функція у такому випадку матиме вигляд:

$$W(p) = \frac{10,3}{43,75p + 1} e^{-7,85t}.$$

На графіках (рис. 6) присутні шуми, що може негативно вплинути на точність визначення параметрів об'єкта управління. Тому для підвищення точності запропонованого способу необхідно застосовувати фільтри нижніх частот.

Висновки

Проведені дослідження підтвердили доцільність використання швидкості зміни вихідного сигналу досліджуваного об'єкту для визначення сталих часу і запізнення. Запропонований спосіб дозволяє значно підвищити ефективність відомих графоаналітичних методів ідентифікації. У ході досліджень з'ясувалося, що шуми, присутні у сигналах датчиків можуть суттєво вплинути на точність визначення параметрів об'єкта управління. Для зменшення впливу цих шумів необхідно застосовувати фільтри нижніх частот.

Список використаної літератури

1. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування. Вінниця: ВНТУ, 2012. 308 с.
2. Дилигенская А. Н. Идентификация объектов управления. Самара: Самарский государственный технический университет, 2009. 136 с.
3. Ковела І., Вітер О., Яцук Ю. Автоматизована ідентифікація об'єктів регулювання за їх експериментальними імпульсними характеристиками. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка»*. 2013. № 751. С. 59–67.
4. Стрижнев А. Г., Марков А. В., Русакович А. Н. Идентификация объекта управления по переходной характеристике замкнутой системы. *Доклады БГУИР*. 2012. № 5 (67). С. 65–72.
5. Гроп Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.
6. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 1104 с.

References

1. Dubovoi, V. M. (2012). *Identifikatsiia ta modeliuvannia tekhnolohichnykh obiektiv i system keruvannia*. Vinnytsia: VNTU.
2. Diligenskaya, A. N. (2009). *Identifikatsiya ob'ektov upravleniya*. Samara: Samarskiy gosudarstvennyy tekhnicheskii universitet.
3. Kovela, I., Viter, O., & Yatsuk, Yu. (2013). Avtomatyzovana identyfikatsiia obiektiv rehuliuвання za yikh eksperymentalnymy impulsnymy kharakterystykamy. *Visnyk Natsionalnoho universytetu 'Lvivska politekhnika'*. **751**, 59–67.
4. Strizhnev, A. G., Markov, A. V., & Rusakovich, A. N. (2012). Identifikatsiya ob'ekta upravleniya po perehodnoy harakteristike zamknuтой sistemyi. *Dokladyi BGUIR*. **5(67)**, 65–72.
5. Grop, D. (1979). *Metodyi identifikatsii sistem*. M.: Mir.
6. Anufriev, I. E., Smirnov, A. B., & Smirnova, E. N. (2005). *MATLAB 7*. SPb.: BHV-Peterburg.

Єдинович Михайло Борисович – к.т.н., доцент, доцент кафедри автоматики, робототехніки і мехатроніки Херсонського національного технічного університету, e-mail: edenkuz@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6113-1923.

Поливода Оксана Валеріївна – к.т.н., доцент, доцент кафедри автоматики, робототехніки і мехатроніки Херсонського національного технічного університету, e-mail: pov81@ukr.net, ORCID: 0000-0002-6323-3739.

Кузьміна Тетяна Олегівна – д.т.н., професор, професор кафедри товарознавства, стандартизації та сертифікації Херсонського національного технічного університету, e-mail: edenkuz@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6113-1923.

Руденко Ігор Олександрович – магістр кафедри автоматики, робототехніки і мехатроніки Херсонського національного технічного університету, e-mail: 3343020@kntu.net.ua, ORCID: 0000-0003-3577-245X.

Шестаков Віталій Сергійович – магістр кафедри автоматики, робототехніки і мехатроніки Херсонського національного технічного університету, e-mail: shestakov.v.wezom@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1622-057X.

УДК 519.85

В.М. КОМЯК

Національний університет цивільного захисту України

К.Т. КЯЗІМОВ

Академія Міністерства з Надзвичайних ситуацій Азербайджана

О.В. ПАНКРАТОВ

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

КВАЗІ-РНІ-ФУНКЦІЇ ДЛЯ АНАЛІТИЧНОГО ОПИСУ УМОВ НЕПЕРИТИНАННЯ СКЛАДЕНИХ ОБ'ЄКТІВ В ЗАДАЧАХ РОЗМІЩЕННЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ПОТОКІВ ЛЮДЕЙ

Задачі оптимального розміщення об'єктів є предметом дослідження обчислювальної геометрії, а методи їх розв'язання – напрямком теорії дослідження операцій. До задач розміщення відносяться задачі упаковки та розкрою, які мають широкий спектр наукових і практичних застосувань у порошковій металургії, гірничодобувній промисловості для моделювання руху сипучих речовин, аналізі структур рідин та скла, задачах логістики для моделювання оптимальних упаковок вантажів, в задачах моделювання індивідуально-поточного руху людей при їх евакуації з будівель, тощо.

З точки зору методів моделювання, вищенаведені класи прикладних задач належать до класу задач геометричного проектування зі специфічною системою обмежень, яка пов'язана з їх геометричними властивостями. Цей клас задач відноситься до класу NP-складних, для розв'язання яких застосовуються, як правило, евристичні алгоритми. Для розробки ефективних алгоритмів, що засновані на методах локальної та глобальної оптимізації, виникає необхідність в побудові адекватних математичних моделей на базі аналітичного представлення умов неперетинання об'єктів з урахуванням їх неперервних трансляцій та обертань.

Одною із актуальних задач в теперішній час є задача моделювання руху потоку людей, яку, в кожний момент часу, можна розглядати, як розміщення людей за заданими обмеженнями. Результати аналізу показують відсутність моделі індивідуально-поточного руху людей, що адекватна реальному потоку. При русі людей в потоці спостерігаються наступні категорії руху: комфортний, спокійний, активний, підвищеної активності. Коли категорія руху переходить в категорію активного руху з можливими силовими діями, щільність потоку збільшується, що призводить до природних деформацій тіла людини

В роботі запропонована модель тіла людини з урахуванням її природних деформацій, як трикомпонентна модель, яка являє собою об'єднання трьох нежорстко пов'язаних еліпсів, основний із яких обертається неперервно в рамках кута маневреності відносно основного напрямку руху, а допоміжні можуть обертатися в допустимих межах відносно основного. Для аналітичного опису умов неперетинання трикомпонентних об'єктів запропонована модифікація квазі-рні-функцій складених об'єктів, яка є основою алгоритмів моделювання поточного активного руху людей та упаковки розглянутого класу об'єктів.

Ключові слова: розміщення, моделювання, рух, потік людей, трикомпонентна модель проєкції тіла людини, квазі-рні-функція, складені об'єкти

В.М. КОМЯК

Национальный университет гражданской защиты Украины

К.Т. КЯЗИМОВ

Академия Министерства по Чрезвычайным ситуациям Азербайджана

А.В. ПАНКРАТОВ

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

КВАЗИ- ρ -ФУНКЦИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ УСЛОВИЙ НЕПЕРЕСЕЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКОВ ЛЮДЕЙ

Задачи оптимального размещения объектов является предметом исследования вычислительной геометрии, а методы их решения - направлением теории исследования операций. К задачам размещения относятся задачи упаковки и раскроя, которые имеют широкий спектр научных и практических применений в порошковой металлургии, горнодобывающей промышленности для моделирования движения сыпучих веществ, анализе структур жидкостей и стекла, задачах логистики для моделирования оптимальных упаковок грузов, в задачах моделирования индивидуально-поточного движения людей при их эвакуации из зданий и т.д.

С точки зрения методов моделирования, вышеприведенные классы прикладных задач относятся к классу задач геометрического проектирования со специфической системой ограничений, которая связана с их геометрическими свойствами. Этот класс задач относится к классу NP-сложных, для решения которых применяются, как правило, эвристические алгоритмы. Для разработки эффективных алгоритмов, основанных на методах локальной и глобальной оптимизации, возникает необходимость в построении адекватных математических моделей на базе аналитического представления условий непересечения объектов с учетом их непрерывных трансляций и вращений.

Одной из актуальных задач в настоящее время является задача моделирования движения потока людей, которую, в каждый момент времени можно рассматривать как размещение людей по заданным ограничениями. Результаты анализа показывают отсутствие модели индивидуально-поточного движения людей, адекватной реальным потокам. При движении людей в потоке наблюдаются следующие категории движения: комфортный, спокойный, активный, повышенной активности. Когда категория движения переходит в категорию активного движения с возможными силовыми действиями, плотность потока увеличивается, что приводит к естественным деформациям тела человека

В работе предложена модель тела человека с учетом его природных деформаций, как трехкомпонентная модель, которая представляет собой объединение трех нежестко связанных эллипсов, основной из которых вращается в непрерывно рамках угла маневренности относительно основного направления движения, а вспомогательные могут вращаться в допустимых пределах относительно основного. Для аналитического описания условий непересечения трехкомпонентных объектов предложена модификация квази- ρ -функции составных объектов, которая может служить основой алгоритмов моделирования как поточного активного движения людей, так и упаковки рассматриваемого класса объектов.

Ключевые слова: размещение, моделирование, движение, поток людей, трехкомпонентная модель проекции тела человека, квази- ρ -функция, составные объекты

V.M. KOMYAK

National University of Civil Protection of Ukraine

K.T. KYAZIMOV

Academy of the Ministry of Emergency Situations of Azerbaijan

A.V. PANKRATOV

Institute of Mechanical Engineering Problems. A.N. Podgorny NAS of Ukraine

QUASI-PHI-FUNCTIONS FOR ANALYTICAL DESCRIPTION CONDITIONS OF NON-INTERSECTIONS OF COMPOUND OBJECTS IN THE PROBLEMS OF PLACING AND MODELING MOVEMENT OF MOVEMENTS OF PEOPLE

The problems of optimal placement of objects are the subject of study of computational geometry, and methods of their solution are the direction of the theory of operations research. The placement tasks include packing and cutting tasks, which have a wide range of scientific and practical applications in powder metallurgy, in the mining industry for modeling the movement of bulk substances, at the analysis of structures of liquids and glass, in the problems of logistics for modeling of the optimal packing of goods, , in the problems of modeling individual movement people during their evacuation from buildings, etc.

From the point of view of modeling methods, the above classes of application problems belong to the class of geometric design problems with a specific constraint system that is related to their geometric properties. This class of problems belongs to the class of NP-complexes, which are usually solved by heuristic algorithms. In order to develop efficient algorithms based on local and global optimization methods, it is necessary to build adequate mathematical models based on the analytical representation of the conditions of non-intersection of objects, taking into account their continuous translations and rotations.

One of the actual problem nowadays is the task of simulating the movement of the flow of people, which, at any given time, can be considered as placing people for specified constraints. The results of the analysis show that there is no model of individually current movement of people that is adequate to the real flow. When moving people in the stream are the following categories of motion: comfortable, calm, active, of high activity. When the movement category moves into the category of active movement with possible force actions, the density of flow increases, which leads to natural deformations of the human body.

The paper proposes a model of the human body, taking into account its natural deformities, as a three-component model, which is a union of three non-rigidly bound ellipses. The main ellipse rotates continuously within the maneuverability angle relative to the main direction of movement, and the auxiliary ellipses can rotate within acceptable limits relative to the main one. For the analytical description of the conditions of non-intersections of three-component objects, a modification of the quasi-phi-functions of compound objects is proposed, which is the basis of algorithms for modeling the current active movement of people and the packing of the considered class of objects.

Keywords: placement, modeling, motion, human flow, three-component human body projection model, quasi-phi-function, compound objects.

Постановка проблеми

Задачі оптимального розміщення є предметом дослідження обчислювальної геометрії, а методи їх розв'язання – напрямком теорії дослідження операцій. До задач розміщення відносяться задачі упаковки та розкрою, які мають широкий спектр наукових і практичних застосувань у порошковій металургії, гірничодобувній

промисловості для моделювання руху сипучих речовин, аналізі структур рідин та скла, задачах логістики для моделювання оптимальних упаковок вантажів, в задачах моделювання індивідуально-поточного руху людей при їх евакуації з будівель, тощо.

З точки зору методів моделювання, вищенаведені класи прикладних задач належать до класу задач геометричного проектування [1] зі специфічною системою обмежень, яка пов'язана з їх геометричними властивостями. Цей клас задач відноситься до класу *NP*-складних, для розв'язання яких застосовуються, як правило, евристичні алгоритми. Для розробки ефективних алгоритмів, що засновані на методах локальної та глобальної оптимізації, виникає необхідність в побудові адекватних математичних моделей на базі аналітичного представлення умов неперетинання об'єктів з урахуванням їх неперервних трансляцій та обертань.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Одною із актуальних задач в теперішній час є задача моделювання руху потоку людей. Результати аналізу [2] показують відсутність моделі індивідуально-поточного руху людей, що адекватна реальному потоку, з обмеженими мобільними можливостями змішаного складу в досить широкій номенклатурі громадських будівель різних класів функціональної пожежної небезпеки.

В роботі [3] поставлена та розв'язана задача моделювання руху гетерогенних потоків людей (люди представляються еліпсами), яка зводиться до задачі щільного розміщення (переміщення) людей з різною щільністю, тобто розташуванням їх в кожний момент часу з урахуванням різних мінімально допустимих відстаней між ними згідно з рядом додаткових технологічних обмежень, серед яких можна виділити рух з різною швидкістю, урахування їх маневреності, комфортності, тощо.

Згідно [4] при русі людей в потоці спостерігаються наступні категорії руху: комфортний, спокійний, активний, підвищеної активності. Модель [3] може бути використана при комфортному і спокійному русі людей.

Коли категорія руху змінюється і переходить в категорію активного руху з можливими силовими діями, щільність потоку збільшується [2]. Зміни щільності чинять сильний вплив на характер руху людей в потоці, змінюючи його від вільного, при якому людина може вибирати швидкість і напрямок свого руху, до стиснутого руху в результаті подальшого збільшення щільності потоку, при якому він відчуває дедалі більші силові дії оточуючих його людей.

У зв'язку з вище переліченими властивостями, моделювати рух з урахуванням мінімально допустимих відстаней немає сенсу. Тому актуальною проблемою є моделювання руху людей з вирахуванням природних деформацій тіла людини.

Мета дослідження

Створити модель тіла людини з вирахуванням його природних деформацій та розробити аналітичний апарат для аналітичного опису умов неперетинання людей для моделювання їх потокового руху.

Викладення основного матеріалу дослідження

Представимо проекцію тіла людини у вигляді з'єднання трьох еліпсів: E_c з розмірами піввісь A і B , E_l і E_r з розмірами a і b (див. рис. 1). Пари точок G_l , g_l і G_r , g_r , що відмічені на рисунку 1.а, використовуються для «склеювання» компонент моделі в єдиний об'єкт H (див. рис. 1 а). Кожному об'єкту E зіставлені параметри розміщення $v = (x, y, \phi)$, де (x, y) – вектор трансляції об'єкта E відносно нерухомої

системи координат, а ϕ – кут його повороту. Позначимо через $E(v)$ об'єкт $E = E(0)$, який повернений на кут ϕ (далі θ) і трансльований на вектор (x, y) .

Пари точок G_l, g_l і G_r, g_r , відмічені на першому рисунку, використовуються для «склеювання» компонент моделі в єдиний об'єкт H (див. рис. 1 а).

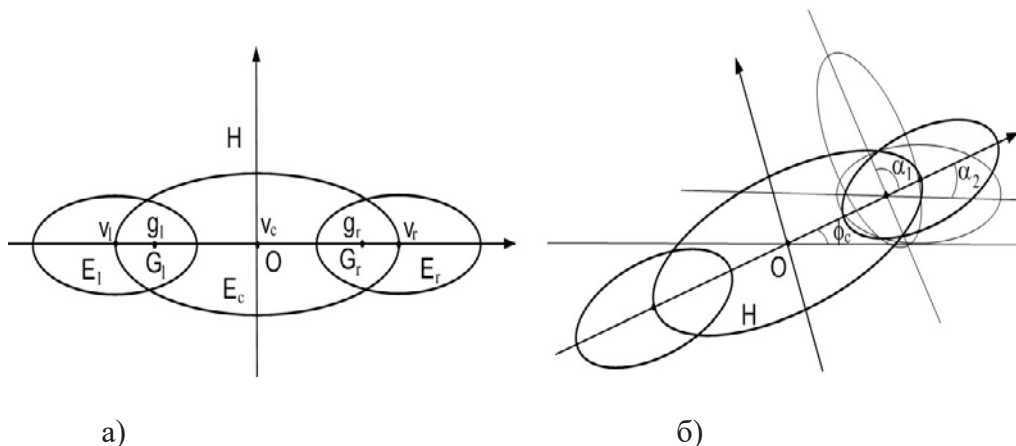


Рис. 1. Трикомпонентна модель людського тіла з обмеженнями, що забезпечують:
(а) умови склейки компонент моделі в єдиний об'єкт,
(б) обмеження на рухливість еліпса, що моделює плече людини.

Крім умов склеювання, на взаємне положення об'єктів накладаються обмеження на співвідношення кутів повороту, що випливають із фізичних обмежень на взаємне положення частин людського тіла (див. рис. 1 б). Так, кут повороту θ_r еліпса E_r не може бути більше, ніж кут $\theta_c + \alpha_1$ і менше, ніж $\theta_c - \alpha_2$, де θ_c – кут повороту об'єкта E_c (див. рис. 1 б). Відповідно, кут повороту θ_l еліпса E_l не може бути більше, ніж кут $\theta_c + \alpha_2$ і менше, ніж $\theta_c - \alpha_1$.

Таким чином, в якості моделі проєкції людського тіла пропонується використовувати об'єкт $H(v_c, v_l, v_r)$ з наступними обмеженнями на параметри розміщення:

$$g_l(v_l) = G_l(v_c), \quad (1)$$

$$g_r(v_r) = G_r(v_c), \quad (2)$$

$$\theta_c - \alpha_2 \leq \theta_r \leq \theta_c + \alpha_1, \quad (3)$$

$$\theta_c - \alpha_1 \leq \theta_l \leq \theta_c + \alpha_2. \quad (4)$$

Слід зазначити, що в умовах високої щільності розміщення людей в число змінних параметрів моделі можуть бути включені величини α_l і α_r з обмеженнями виду

$$\alpha'_0 \leq \alpha_l \leq \alpha'_1, \alpha'_0 \leq \alpha_r \leq \alpha'_1, \quad (5)$$

що дозволяють врахувати в моделі вертикальне обертання плечового суглоба. Значення величин α'_0, α'_1 також визначається фізичними обмеження на взаємне положення частин людського тіла. Слід зазначити, що всі розміри об'єктів і константи при

моделюванні генеруються для кожного об'єкта випадковим чином з розподілом по нормальному закону.

Умови неперетинання двох об'єктів $H_i(v_{ci}, v_{li}, v_{ri})$ та $H_j(v_{cj}, v_{lj}, v_{rj})$ побудуємо на основі модифікації квазі- ϕ -функції [5] для випадку складених нежорстко пов'язаних об'єктів.

Згідно з визначенням, квазі- ϕ -функцією $\Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j, t_{ij})$ для об'єктів $E_i(v_i)$ і $E_j(v_j)$ називається всюди визначена, неперервна по всім змінним функція, для якої функція $\max_{t_{ij} \in U \subset R^m} \Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j, t_{ij})$ є ϕ -функцією об'єктів $E_i(v_i)$ і $E_j(v_j)$ [5]. Тут t_{ij} – вектор допоміжних змінних, які належать деякій підмножині U простору R^m (в даному випадку $m = 1$, а U збігається з R^1 [6]).

Далі ми використовуємо таку важливу характеристику квазі- ϕ -функції: якщо для деякого t_{ij} виконується $\Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j, t_{ij}) \geq 0$, тоді $\text{int } E_i(v_i) \cap \text{int } E_j(v_j) = \emptyset$ [5].

Як відомо [7], для двох складених об'єктів $T_i(v_i) = \bigcup_{k=1}^{n_i} T_{ik}(v_i)$ і $T_j(v_j) = \bigcup_{k=1}^{n_j} T_{jm}(v_j)$ квазі- ϕ -функція $\Phi^{T_i T_j}(v_i, v_j, t_{ij})$ може бути виписана в вигляді:

$$\Phi^{T_i T_j}(v_i, v_j, t_{ij}) = \min \{ \Phi^{T_{ik} T_{jm}}(v_i, v_j, t_{ijkm}), k = 1, \dots, n_i, m = 1, \dots, n_j \}, \quad (6)$$

де t_{ij} – вектор допоміжних змінних $t_{ijkm}, k = 1, \dots, n_i, m = 1, \dots, n_j$.

Запишемо умову неперетинання двох об'єктів $H_i(v_{ci}, v_{li}, v_{ri})$ і $H_j(v_{cj}, v_{lj}, v_{rj})$ у вигляді функції $\Phi^{H_i H_j}(v_{ci}, v_{ri}, v_{li}, v_{cj}, v_{rj}, v_{lj}, t_{ij}) \geq 0$. На основі (6) функція $\Phi^{H_i H_j}(v_{ci}, v_{ri}, v_{li}, v_{cj}, v_{rj}, v_{lj}, t_{ij})$ може бути представлений у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi^{H_i H_j}(v_{ci}, v_{ri}, v_{li}, v_{cj}, v_{rj}, v_{lj}, t_{ij}) = \min \{ & \Phi^{E_{ci} E_{cj}}(v_{ci}, v_{cj}, t_{ij1}), \Phi^{E_{ci} E_{lj}}(v_{ci}, v_{lj}, t_{ij2}), \\ & \Phi^{E_{ci} E_{rj}}(v_{ci}, v_{rj}, t_{ij3}), \Phi^{E_{li} E_{cj}}(v_{li}, v_{cj}, t_{ij4}), \Phi^{E_{li} E_{lj}}(v_{li}, v_{lj}, t_{ij5}), \Phi^{E_{li} E_{rj}}(v_{li}, v_{rj}, t_{ij6}), \\ & \Phi^{E_{ri} E_{cj}}(v_{ri}, v_{cj}, t_{ij7}), \Phi^{E_{ri} E_{lj}}(v_{ri}, v_{lj}, t_{ij8}), \Phi^{E_{ri} E_{rj}}(v_{ri}, v_{rj}, t_{ij9}) \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Умови опису неперетинання побудованих об'єктів базуються на описі умов неперетинання еліпсів.

Як впливає з [6], умови взаємного неперетинання еліпсів описуються нерівністю $\Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j, t_{ij}) \geq 0$, де $\Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j, t_{ij})$ квазі- ϕ -функція, яка може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j, t_{ij}) = (x_i - x_j) \cos t_{ij} + (y_j - y_i) \sin t_{ij} - R_i - \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(j_i - t_{ij})} \\ - \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(j_j - t_{ij})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Слід зазначити, що квазі- ρ -функція (6) нормалізована, тобто $\max_{t_{ij} \in U \subset R^m} \Phi^{E_i E_j}(v_i, v_j, t_{ij})$ є нормалізованою ρ -функцією об'єктів $E_i(v_i)$ і $E_j(v_j)$ і за значеннями збігається з відстанню між об'єктами $E_i(v_i)$ і $E_j(v_j)$.

З урахуванням (8), умови неперетинання $H_i(v_{ci}, v_{li}, v_{ri})$ і $H_j(v_{cj}, v_{lj}, v_{rj})$ приймають вид $\Phi^{H_i H_j}(v_{ci}, v_{ri}, v_{li}, v_{cj}, v_{rj}, v_{lj}, t_{ij}) \geq 0$, де

$$\begin{aligned} \Phi^{H_i H_j}(v_{ci}, v_{ri}, v_{li}, v_{cj}, v_{rj}, v_{lj}, t_{ij}) = & \min\{\Phi^{E_{ci} E_{cj}}(v_{ci}, v_{cj}, t_{ij1}), \Phi^{E_{ci} E_{lj}}(v_{ci}, v_{lj}, t_{ij2}), \\ & \Phi^{E_{ci} E_{rj}}(v_{ci}, v_{rj}, t_{ij3}), \Phi^{E_{li} E_{cj}}(v_{li}, v_{cj}, t_{ij4}), \Phi^{E_{li} E_{lj}}(v_{li}, v_{lj}, t_{ij5}), \Phi^{E_{li} E_{rj}}(v_{li}, v_{rj}, t_{ij6}), \\ & \Phi^{E_{ri} E_{cj}}(v_{ri}, v_{cj}, t_{ij7}), \Phi^{E_{ri} E_{lj}}(v_{ri}, v_{lj}, t_{ij8}), \Phi^{E_{ri} E_{rj}}(v_{ri}, v_{rj}, t_{ij9})\}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Phi^{E_{ci} E_{cj}}(v_{ci}, v_{cj}, t_{ij1}) = & (x_{ci} - x_{cj}) \cos t_{ij1} + (y_{cj} - y_{ci}) \sin t_{ij1} - \sqrt{B_i^2 + (A_i^2 - B_i^2) \cos^2(j_{ci} - t_{ij1})} \\ & - \sqrt{B_j^2 + (A_j^2 - B_j^2) \cos^2(j_{cj} - t_{ij1})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{E_{ci} E_{lj}}(v_{ci}, v_{lj}, t_{ij2}) = & (x_{ci} - x_{lj}) \cos t_{ij2} + (y_{lj} - y_{ci}) \sin t_{ij2} - \sqrt{B_i^2 + (A_i^2 - B_i^2) \cos^2(j_{ci} - t_{ij2})} \\ & - \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(j_{lj} - t_{ij2})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{E_{ci} E_{rj}}(v_{ci}, v_{rj}, t_{ij3}) = & (x_{ci} - x_{rj}) \cos t_{ij3} + (y_{rj} - y_{ci}) \sin t_{ij3} - \sqrt{B_i^2 + (A_i^2 - B_i^2) \cos^2(j_{ci} - t_{ij3})} \\ & - \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(j_{rj} - t_{ij3})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{E_{li} E_{cj}}(v_{li}, v_{cj}, t_{ij4}) = & (x_{li} - x_{cj}) \cos t_{ij4} + (y_{cj} - y_{li}) \sin t_{ij4} - \sqrt{B_i^2 + (A_i^2 - B_i^2) \cos^2(j_{li} - t_{ij4})} \\ & - \sqrt{B_j^2 + (A_j^2 - B_j^2) \cos^2(j_{cj} - t_{ij4})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{E_{li} E_{lj}}(v_{li}, v_{lj}, t_{ij5}) = & (x_{li} - x_{lj}) \cos t_{ij5} + (y_{lj} - y_{li}) \sin t_{ij5} - \sqrt{a_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(j_{li} - t_{ij5})} \\ & - \sqrt{B_j^2 + (A_j^2 - B_j^2) \cos^2(j_{lj} - t_{ij5})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{E_{li} E_{rj}}(v_{li}, v_{rj}, t_{ij6}) = & (x_{li} - x_{rj}) \cos t_{ij6} + (y_{rj} - y_{li}) \sin t_{ij6} - \sqrt{a_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(j_{li} - t_{ij6})} \\ & - \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(j_{rj} - t_{ij6})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{E_{ri} E_{cj}}(v_{ri}, v_{cj}, t_{ij7}) = & (x_{ri} - x_{cj}) \cos t_{ij7} + (y_{cj} - y_{ri}) \sin t_{ij7} - \sqrt{a_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(j_{ri} - t_{ij7})} \\ & - \sqrt{B_j^2 + (A_j^2 - B_j^2) \cos^2(j_{cj} - t_{ij7})}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{E_{ri} E_{lj}}(v_{ri}, v_{lj}, t_{ij8}) = & (x_{ri} - x_{lj}) \cos t_{ij8} + (y_{lj} - y_{ri}) \sin t_{ij8} - \sqrt{a_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(j_{ri} - t_{ij8})} \\ & - \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(j_{lj} - t_{ij8})}; \end{aligned}$$

$$\Phi^{E_{ri}E_{rj}}(v_{ri}, v_{rj}, t_{ij9}) = (x_{ri} - x_{rj}) \cos t_{ij9} + (y_{rj} - y_{ri}) \sin t_{ij9} - \sqrt{a_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(j_{ri} - t_{ij9})} - \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(j_{rj} - t_{ij9})}$$

при виконанні умов

$$\begin{aligned} g_{li}(v_{li}) &= G_{li}(v_{ci}), \quad g_{ri}(v_{ri}) = G_{ri}(v_{ci}), \quad \theta_{ci} - \alpha_2 \leq \theta_{ri} \leq \theta_{ci} + \alpha_1, \\ \theta_{ci} - \alpha_2 &\leq \theta_{ri} \leq \theta_{ci} + \alpha_1, \quad g_{lj}(v_{lj}) = G_{lj}(v_{cj}), \quad g_{rj}(v_{rj}) = G_{rj}(v_{cj}), \\ \theta_{cj} - \alpha_2 &\leq \theta_{rj} \leq \theta_{cj} + \alpha_1, \quad \theta_{cj} - \alpha_1 \leq \theta_{lj} \leq \theta_{cj} + \alpha_2. \end{aligned} \quad (9)$$

В роботі отримано аналітичний опис (7–9) умов для неперетинання трикомпонентних об'єктів, які являють собою об'єднання трьох нежорстко пов'язаних еліпсів, основний із яких може неперервно обертатись а допоміжні можуть обертатися в допустимих межах відносно основного.

Висновки

Таким чином, у якості моделі тіла людини з урахуванням її природних деформацій запропонована трикомпонентна модель, яка являє собою об'єднання трьох нежорстко пов'язаних еліпсів, основний із яких обертається неперервно в рамках кута маневреності відносно основного напрямку руху, а допоміжні можуть обертатися в допустимих межах відносно основного. Для аналітичного опису умов неперетинання трикомпонентних об'єктів запропонована модифікація квазі-phi-функцій складених об'єктів, яка є основою алгоритмів моделювання поточного активного руху людей та упаковки розглянутого класу об'єктів.

Список використаної літератури

1. Стоян Ю. Г. Основная задача геометрического проектирования. Харьков: Ин-т проблем машиностроения АН УССР, 1983. 36 с. (Препринт. АН УССР, Ин-т проблем машиностроения; 181).
2. Холщевников В. В. Сопоставление различных моделей движения людских потоков и результатов программно-вычислительных комплексов. *Пожаровзрывобезопасность*. 2015. Т. 24. № 5. С. 68–74.
3. Komyak Va., Komyak Vl., Danilin A. A Study of Ellipse Packing in the High-Dimensionality Problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. 1/4(85). С. 17–23.
4. Холщевников В. В., Самошин Д. А. Эвакуация и поведение людей на пожарах. М.: Академия ГПС МЧС России, 2009. 210 с.
5. Стоян Ю. Г., Панкратов А. В., Романова Т. Е., Чернов Н. И. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов. *Доповіди НАН України*. 2014. Т 9. С. 49–54.
6. Данилин А. Н., Комяк В. В., Комяк В. М., Панкратов А. В. Упаковка эллипсов в прямоугольник минимальных размеров. *УСiМ*. 2016. № 5. С. 5–9.
7. Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Чернов Н. И., Панкратов А. В. Полный класс Ф-функций для базовых объектов. *Доповіди НАН України*. 2010. № 12. С. 25–30.

References

1. Stoyan, Yu. G. (1983). *Osnovnaya zadacha geometricheskogo proektirovaniya*. Harkov: In-t problem mashinostroeniya AN USSR. (Preprint. AN USSR, In-t problem mashinostroeniya; 181).
2. Holschevnikov, V. V. (2015). *Sopostavlenie razlichnykh modeley dvizheniya lyudskikh potokov i rezultatov programmno-vyichislitelnykh kompleksov. Pozharovzryivobezopasnost.* **24**, 5, 68–74.
3. Komyak, Va., Komyak, Vl., & Danilin, A. (2017). A study of ellipse packing in the high-dimensionality problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* **1/4**(85), 17–23.
4. Holschevnikov, V. V., & Samoshin, D. A. (2009). *Evakuatsiya i povedenie lyudey na pozharah: uchebnoe posobie*. M.: Akademiya GPS MChS Rossii.
5. Stoyan, Yu. G., Pankratov, A. V., Romanova, T. E., & Chernov, N. I. (2014). *Kvazi-phi-funktsii dlya matematicheskogo modelirovaniya otnosheniy geometricheskikh ob'ektov. Dopovidi NAN Ukrainy.* **9**, 49–54.
6. Danilin, A. N., Komyak, V. V., Komyak, V. M., & Pankratov, A. V. (2016). *Upakovka ellipsoidov v pryamougolnik minimalnykh razmerov. USiM.* **5**, 5–9.
7. Stoyan, Yu. G., Romanova, T. E., Chernov, N. I., & Pankratov, A. V. (2010). *Polnyi klass Φ -funktsiy dlya bazovih ob'ektov. Dopovidi NAN Ukrainy.* **12**, 25–30.

Комяк Валентина Михайлівна – д.т.н., професор кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України, e-mail: vkomyak@ukr.net, ORCID: 0000-0002-9840-2635.

Кязімов Кязім Тахір огли – к.т.н., начальник кафедри «Спеціалізованих дисциплін пожежної безпеки» Академії Міністерства з Надзвичайних ситуацій Азербайджана, e-mail: kazim.kazimov@fhn.gov.az, ORCID: 0000-0003-0790-9770.

Панкратов Олександр Вікторович – д.т.н., старший науковий співробітник відділу математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, e-mail: pankratov2001@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-2958-8923.

УДК 514.18

Т.А. КРЕСАН, С.Ф. ПИЛИПАКА, І.Ю. ГРИЩЕНКО, В.М. БАБКА, Я.С. КРЕМЕЦЬ
Національний університет біоресурсів і природокористування України

ТРАЄКТОРІЇ ТОЧОК ПЛОСКОЇ ФІГУРИ, КРИВОЛІНІЙНИЙ КОНТУР ЯКОЇ КОТИТЬСЯ БЕЗ КОВЗАННЯ ПО ПРЯМІЙ ЛІНІЇ

Розглянуто плоско-паралельний рух фігури, обмеженої криволінійним контуром. Фігура котиться без ковзання по прямій лінії. Розроблено аналітичний опис знаходження траєкторії точки, яка жорстко закріплена на фігурі, або ж здійснює в рухомій системі фігури заданий відносний рух. Наведено параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки. Розглянуто конкретні приклади для плоскої фігури, обмеженої параболою. Показано, що траєкторією фокуса параболі, яка котиться по прямій лінії, є ланцюгова лінія. Зроблено перевірку для кола і отримано відому криву – циклоїду, а також її варіанти – подовжену і укорочену циклоїди. Розглянуто випадок, коли криволінійним контуром плоскої фігури є крива, задана натуральним рівнянням. Виведено узагальнені параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки, яка здійснює відносно переміщення в рухомій системі координат, жорстко зв'язаної із плоскою фігурою.

Ключові слова: кочення, плоска фігура, криволінійний контур, плоско-паралельний рух, траєкторія точки, параметричні рівняння.

Т.А. КРЕСАН, С.Ф. ПИЛИПАКА, І.Ю. ГРИЩЕНКО, В.Н. БАБКА, Я.С. КРЕМЕЦЬ
Національний університет біоресурсів і природопользования Украины

ТРАЕКТОРИИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ, КРИВОЛИНЕЙНЫЙ КОНТУР КОТОРОЙ КАТИТСЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ ПО ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Рассмотрено плоско-параллельное движение фигуры, ограниченной криволинейным контуром. Фигура катится без скольжения по прямой линии. Разработано аналитическое описание нахождения траектории точки, которая жестко закреплена на фигуре, или же осуществляет в подвижной системе фигуры заданное относительное движение. Приведены параметрические уравнения абсолютной траектории точки. Рассмотрены конкретные примеры для плоской фигуры, ограниченной параболой. Показано, что траектории фокуса параболы, которая катится по прямой линии, является цепная линия. Сделано проверку для окружности и получено известную кривую – циклоиду, а также ее варианты – удлиненную и укороченную циклоиды. Рассмотрен случай, когда криволинейным контуром плоской фигуры является кривая, заданная натуральным уравнением. Выведены обобщенные параметрические уравнения абсолютной траектории точки, которая осуществляет относительное перемещение в подвижной системе координат, жестко связанной с плоской фигурой.

Ключевые слова: качение, плоская фигура, криволинейный контур, плоско-параллельное движение, траектория точки, параметрические уравнения.

T.A. KRESAN, S.F. PYLYPAKA, I.Yu. GRISCHENKO, V.M. BABKA, Ya.S. KREMETS
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

TRAJECTORIES OF POINTS OF A FLAT FIGURE, A CURVILINE CIRCUIT WHICH ROLLS WITHOUT SLIDING ON A DIRECT LINE

The plane-parallel motion of a figure bounded by a curvilinear contour is considered. The figure rolls without sliding on a straight line. An analytical description of finding the

trajectory of a point, which is rigidly fixed to the figure, or makes a relative motion in the moving system of the figure, is developed. A classic example of this is finding a trajectory of a point on the rim of a wheel that rolls without sliding in a straight line. It is well known that such a trajectory is a cycloid. If the point is located outside the rim, then its trajectory is an elongated cycloid, if inside the rim is a shortened cycloid. This list exhausts the set of possible trajectories of a shape in the form of a wheel. For second-order curves that act as a curvilinear contour of a figure that rolls on a straight line, the set of trajectories of the individual points of the figure increases. If such a point is the focus of the second-order curve, then its trajectory is a known curve which name is assigned to the specific name of the curve. In particular, if such a curve is a parabola, then the trajectory of focus is a known curve, called a chain line. The choice of a point in an arbitrary place of a curvilinear contour, bounded by a parabola, expands the set of trajectories. The paper presents generalized parametric equations for finding them if the curve of a curvilinear contour is given by parametric equations. Specific examples for a flat figure bounded by a parabola are considered. It is shown that the trajectory of the focus of the parabola, which rolls on a straight line, is a chain line. The circle was checked and the known curve - cycloid, and its variants - elongated and shortened cycloid were obtained. A case is considered when a point of a flat figure makes relative movement with respect to the internal coordinates of a moving flat figure. To find the absolute trajectory of a point, the figurative motion of a flat figure, which is rolled in a straight line, and the relative motion in a moving coordinate system rigidly connected to the flat figure, taken into account.

The paper focuses on curves of curvilinear contour, in parametric equations of which the arc length of the curve acts as an independent variable. This is important because this parameter is crucial in the analytical description of the rolling of a flat figure in a straight line. The analytical description is based on the equality of the length of the arc of the contour of the flat figure and the line along which it is rolling. For simplify of the analytical calculations the curves of contour given by the natural equation are considered. Examples are given and the trajectories of points of a flat figure are constructed, outlined with a contour which curve is given by the known natural equation of the chain line

Keywords: rolling, flat figure, curvilinear contour, plane-parallel motion, point trajectory, parametric equations.

Постановка проблеми

Під час робочого процесу технологічний матеріал у вигляді частинок контактує з поверхнями робочих органів. В процесі взаємодії частинка рухається по поверхні, описуючи певною точкою цілком визначену траєкторію. В праці [1] знайдено зовнішній контур плоских частинок і криволінійний профіль, по якому вони перекочуються без ковзання таким чином, що певна точка частинки при перекочуванні описує прямолінійну траєкторію. Загальновідома задача про траєкторію точки обода колеса, яке котиться по прямій лінії. Такою траєкторією є циклоїда. Якщо точка розташована не на ободі, тоді траєкторією буде укорочена або подовжена циклоїди [2]. Якщо ж взяти плоский контур іншої форми, то при його обкочуванні по прямій точки контуру утворять множину різноманітних кривих. Прикладом може служити кочення еліпса, фокуси якого при цьому описують траєкторії, відомі під назвою ундулоїда [3]. В статті пропонується загальний алгоритм побудови траєкторій точок плоского контуру, який котиться без ковзання по прямій лінії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В праці [4] зазначено, що при перекочуванні кривих другого порядку їх фокуси описують криві, які є меридіанами поверхонь обертання сталої середньої кривини. Математик Делоне довів наступне твердження: меридіанами поверхонь обертання сталої середньої кривини є криві, які описують фокуси кривих другого порядку при їх коченні по

прямій лінії. Багато уваги приділено обкочуванню рухомого криволінійного контуру по нерухомому таким чином, щоб точка рухомого контуру описувала коло. Таке обкочування лежить в основі проектування зубчастих зачеплень з некруглими колесами [5–8].

Мета дослідження

Розробити аналітичний опис обкочування плоского криволінійного контуру по прямій лінії та побудови траєкторії точки, яка належить цьому контуруві.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо плоский контур, окреслений кривою лінією, який буде перекочуватися без ковзання по осі Ox . Положення плоскої фігури будемо розглядати по відношенню до двох плоских систем координат: нерухомої Oxy і рухомої $O_p x_p y_p$, жорстко прив'язаної до плоскої фігури. Нехай в початковий момент дві системи збігаються і плоска фігура дотикається до осі Ox в початку координат (рис. 1, а). Крива задана параметричними рівняннями $x=x(t)$ і $y=y(t)$, де t – незалежна змінна. При початковому значенні t (наприклад, при $t=t_0=0$) за рівняннями кривої отримаємо точку на ній, розташовану в початку координат. Надамо параметру t нового значення (наприклад, $t=t_A$). Цьому значенню параметра t на кривій відповідатиме точка A з координатами (x_A, y_A) (рис. 1,а). Через точку A проведемо дотичну до кривої, яка складатиме із віссю Ox кут φ . Його значення при $t=t_A$ знайдемо за відомою формулою: $\varphi = \arctg(y'/x')$. Повернемо криву разом із рухомою системою координат за годинниковою стрілкою навколо початку координат на кут φ , що відповідає його від'ємному значенню, за відомими формулами:

$$x_n = x \cos \varphi + y \sin \varphi; \quad y_n = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad (1)$$

Після підстановки виразу кута φ у формули (1) і спрощення тригонометричних виразів отримаємо параметричні рівняння повернутої кривої:

$$x_n = \frac{yy' + xx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \quad y_n = \frac{yx' - xy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (2)$$

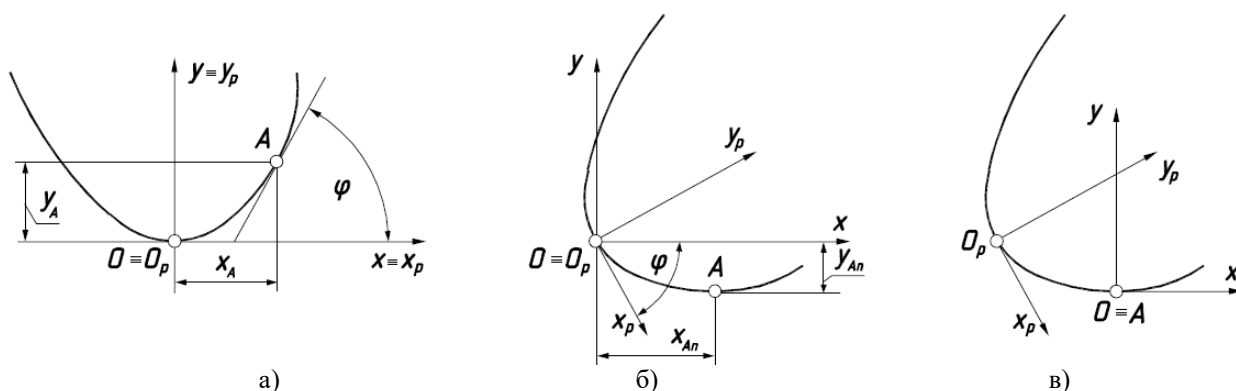


Рис. 1. Послідовні етапи побудови кривої при її коченні без ковзання по горизонтальній прямій:
 а) початкове положення кривої з точкою A на ній і дотичною в цій точці;
 б) здійснено поворот кривої навколо початку координат так, щоб дотична в точці A стала паралельною до осі Ox ;
 в) здійснено паралельний перенос кривої так, щоб точка A збігалася із початком координат.

Положення кривої після повороту показане на рис. 1, б. Дотична в точці A паралельна осі Ox . Наступний крок полягає у виконанні паралельного переносу на відстані x_{An} і y_{An} для того, щоб точка A співпала в початком координат нерухомої системи. Щоб зробити такий перенос, потрібно знайти довжини відрізків x_{An} і y_{An} . Оскільки ми криву

повернули на кут φ , то і точка A з координатами (x_A, y_A) повернулася разом з нею. Після повороту її координати в нерухомій системі за аналогією з формулами (2) запишуться так:

$$x_{An} = \frac{y_A y' + x_A x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \quad y_{An} = \frac{y_A x' - x_A y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (3)$$

Після паралельного переносу рухомої системи отримаємо параметричні рівняння повернутої кривої, в якій точка A збігається із початком координат нерухомої системи:

$$\begin{aligned} x_{Ak} = x_n - x_{An} &= \frac{yy' + xx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{y_A y' + x_A x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{y'(y - y_A) + xx' - x'x_A}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \\ y_{Ak} = y_n - y_{An} &= \frac{yx' - xy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{y_A x' - x_A y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{x'(y - y_A) + y'(x_A - x)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Положення кривої, що відповідає рівнянням (4), показано на рис. 1, в. Останній етап складається зі зміщення повернутої кривої в напрямі осі Ox на величину s_A довжини дуги між точками O_p і A (рис. 1, в). Вона відповідає зміні параметра t від t_0 до t_A . Довжина вказаної дуги знаходиться за відомою формулою:

$$s_A = \int_{t_0}^{t_A} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (5)$$

Остаточно параметричні рівняння кривої, яка перекотилася по прямій Ox і повернулася при цьому на кут $\varphi = \arctg(y'/x')$, величина якого залежить від значення параметра t_A , запишуться:

$$\begin{aligned} x_{Ak} &= \frac{y'(y - y_A) + x'(x - x_A)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \int_{t_0}^{t_A} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt; \\ y_{Ak} &= \frac{x'(y - y_A) - y'(x - x_A)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

В рівняннях (6) $x=x(t)$ і $y=y(t)$ – параметричні рівняння вихідної кривої; x' і y' – конкретні числа, отримані підстановкою t_A у вирази похідних (окрім підінтегрального виразу), x_A і y_A – координати, отримані підстановкою t_A у параметричні рівняння вихідної кривої.

Розглянемо конкретний приклад. За вихідну криву візьмемо параболу, задану параметричними рівняннями:

$$x = t; \quad y = at^2, \quad (7)$$

де a – стала величина.

Похідні функцій (7) дорівнюють:

$$x' = 1; \quad y' = 2at. \quad (8)$$

При $t_0=0$ вершина параболі знаходиться в початку координат. Положення точки A на параболі задане значенням змінної t_A . За формулою (6) знаходимо довжину дуги s_A :

$$s_A = \int_0^{t_A} \sqrt{1+4a^2t^2} dt = \frac{t_A}{2} \sqrt{1+4a^2t_A^2} + \frac{1}{4a} \operatorname{arcsinh}(2at_A). \quad (9)$$

Нехай $a=0,25$, $t_A=2$. Тоді згідно формули (7) $x_A=2$, $y_A=1$, згідно формули (8) $x'=1$, $y'=1$, згідно формули (9) $s_A=2,3$. Підставимо ці значення в систему (6) і отримаємо параметричні рівняння параболи, яка при коченні зайняла положення, що відповідає значенню $t_A=2$:

$$x_k = \frac{at^2 + t - 3}{\sqrt{2}} + 2,3; \quad y_k = \frac{at^2 - t + 1}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

На рис. 2, а за рівняннями (10) побудовано повернуту параболу при зміні параметра t в межах $t=-5\dots5$ для значення $t_A=2$. Поворот і положення параболи залежить від конкретного значення параметра t_A . Параметричні рівняння (10), які ми отримали поетапно, запишемо у більш загальному вигляді згідно формул (6), (7), (8), (9):

$$x_k = \frac{2at_A(at^2 - at_A^2) + t - t_A}{\sqrt{1+4a^2t_A^2}} + \frac{t_A}{2} \sqrt{1+4a^2t_A^2} + \frac{1}{4a} \operatorname{arcsinh}(2at_A);$$

$$y_k = \frac{at^2 - at_A^2 - 2at_A(t - t_A)}{\sqrt{1+4a^2t_A^2}}. \quad (11)$$

На рис. 2, б побудовано послідовні положення частини вітки параболи при зміні параметра $t=0\dots5$, яка котиться по прямій лінії, при різних значеннях сталої t_A , а на рис. 2, в – при зміні параметра $t=-5\dots5$. Можна прослідкувати траєкторію окремих точок параболи, наприклад, розташованих на кінцях частини вітки (рис. 2, б). Звідси випливає, що траєкторію певної точки кривої, яка котиться по прямій, можна отримати в дискретному вигляді, задавши конкретне значення змінної t і надаючи з інтервалом значень для t_A (наприклад, через одиницю, як це зроблено на рис. 2, б).

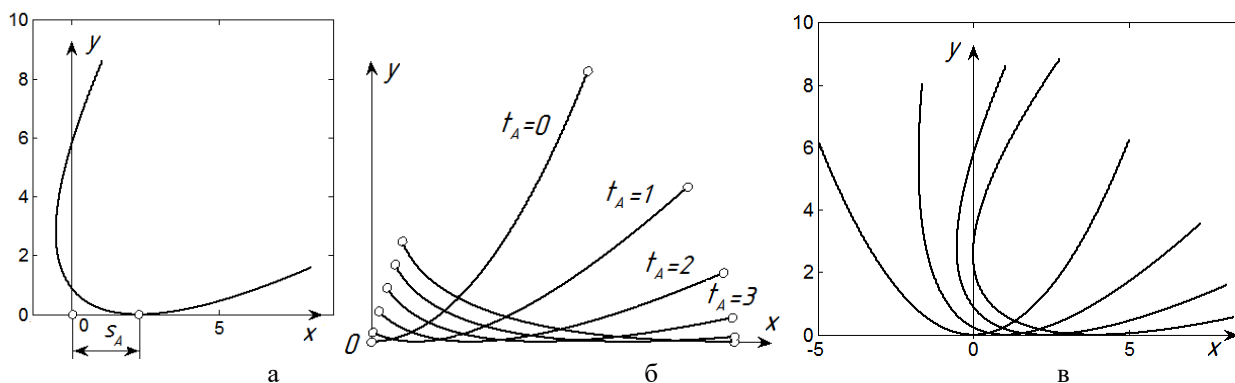


Рис. 2. Графічні ілюстрації до побудови окремих положень кривої при її коченні без ковзання по горизонтальній прямій:

- а) окреме положення параболи, побудоване за рівняннями (11) при $t_A=2$ і зміні незалежного параметра t в межах $t=-5\dots5$;**
- б) окремі вітки кривої для вказаних значень t_A при її перекочуванні, яка відповідає зміні незалежного параметра t в межах $t=0\dots5$;**
- в) ілюстрація окремих положень параболи при її коченні по прямій, побудова якої здійснена для $t=-5\dots5$.**

Отже, якщо в параметричних рівняннях (11) t і t_A поміняти місцями, тобто змінна t стає сталою t_A , яка задає положення точки A на кривій, і t_A стає змінною t , то вони опишуть неперервну траєкторію точки A при коченні параболи. Точку A можна взяти і за межами

кривої, задавши її положення координатами в рухомій системі $O_{px_p y_p}$. При коченні плоского контуру вона рухається разом із ним і будь-яка точка у рухомій системі опише відповідну траєкторію. Щоб отримати параметричні рівняння цієї траєкторії, потрібно у рівняннях (6) сталі величини x_A, y_A (координати точки A на кривій) замінити параметричними рівняннями $x=x(t), y=y(t)$ самої кривої, а значення похідних в цій точці замінити виразами цих похідних. Після цього параметричні рівняння (6) запишуться так:

$$x_{\kappa A} = \frac{y'(y_A - y) + x'(x_A - x)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt; \quad y_{\kappa A} = \frac{x'(y_A - y) - y'(x_A - x)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (12)$$

Підставимо в них рівняння параболи (7), її прохідних (8) і вираз довжини дуги (9) і отримаємо:

$$\begin{aligned} x_{\kappa A} &= \frac{2at(y_A - at^2) + x_A - t}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} + \frac{t}{2}\sqrt{1 + 4a^2t^2} + \frac{1}{4a} \operatorname{Arcsinh}(2at); \\ y_{\kappa A} &= \frac{y_A - at^2 - 2at(x_A - t)}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Перевіримо отримані рівняння (13). Підставимо в них координати вершини параболи $x_A=0, y_A=0$. В цьому випадку ми маємо отримати її траєкторію, яка у вигляді точкового ряду зображена на рис. 2, б. Інша траєкторія у вигляді точкового ряду побудована для верхньої точки вітки кривої, яка має координати $x_A=5, y_A=6,25$. Ці криві побудовано у вигляді суцільних ліній за рівняннями (13) на рис. 3, а.

Відомо, що фокус параболи при її коченні по прямій описує ланцюгову лінію [4]. Фокус параболи знаходиться на осі симетрії на відстані $1/(4a)$ від вершини. Отже, координати фокуса будуть: $x_A=0, y_A=1$. На рис. 3, б за рівняннями (13) побудовано ланцюгову лінію і інші траєкторії для різних значень координати y_A .

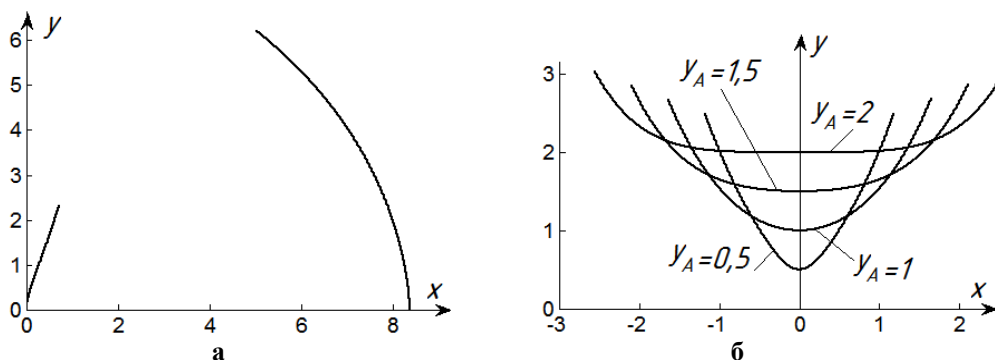


Рис. 3. Траєкторії різних точок плоского контуру, окресленого по параболі, при його коченні по прямій:

- а) траєкторії вершини параболи ($x_A=0, y_A=0$) і точки на параболі ($x_A=5, y_A=6,25$);
- б) траєкторії точок параболи, розташованих на її осі симетрії (в тому числі ланцюгова лінія при $x_A=0, y_A=1$).

Якщо координати фокуса параболи $x_A=0, y_A=1/(4a)$ підставити у отримані рівняння (13), тоді після спрощень одержимо наступні вирази:

$$x_{\kappa A} = \frac{1}{4a} \operatorname{arcsinh}(2at); \quad y_{\kappa A} = \frac{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}{4a}. \quad (14)$$

Рівняння (14) є параметричними рівняннями ланцюгової лінії.

Розглянемо відомий випадок кочення кола. Його параметричні рівняння та похідні мають вигляд:

$$\begin{aligned} x &= R \cos t; & y &= R \sin t; \\ x' &= -R \sin t; & y' &= R \cos t. \end{aligned} \quad (15)$$

Підставимо вирази (15) у рівняння (12) і отримаємо:

$$\begin{aligned} x_{\kappa A} &= Rt - x_A \sin t + y_A \cos t; \\ y_{\kappa A} &= R - x_A \cos t - y_A \sin t. \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо точка A жорстко прикріплена до площини кола, то при його коченні по прямій траєкторіями точки можуть бути лише наступні лінії: пряма (точка в центрі кола), циклоїда (точка на колі) вкорочена циклоїда (точка всередині кола) і подовжена циклоїда (точка за межами кола). Всі перераховані лінії можна побудувати при відповідних значеннях $x_A = \text{const}$ і $y_A = \text{const}$. Однак точка може рухатися в площині кола при його коченні по прямій. Закон такого руху можна задати залежностями $x_A = x_A(t)$ і $y_A = y_A(t)$. Нехай точка рухається по рухомій площині кола в радіальному напрямі, починаючи від його верхньої точки. Такий рух опишеться залежностями: $x_A = 0$, $y_A = \pm R + \omega t$, де ω – стала, від якої залежить швидкість руху. На рис. 4, а побудовано траєкторію точки, яка рухається від центра кола (вгорі) і до його центра (внизу) при $R=5$ і $\omega=0,5$.

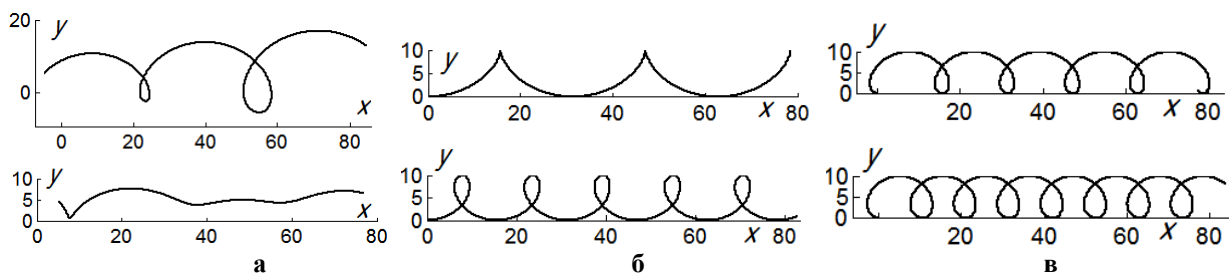


Рис. 4. Абсолютні траєкторії точки, яка здійснює відносне переміщення в площині кола радіуса $R=5$, що котиться по прямій:

- а) точка рухається в радіальному напрямі від центра кола (рис. вгорі) і до його центра (рис. внизу);
- б) точка рухається по колу в напрямі руху точки контакту кола з прямою при $\omega=2$ (вгорі) і $\omega=3$ (внизу);
- в) точка рухається по колу в протилежну сторону руху точки контакту кола з прямою при $\omega=-1$ (вгорі) і $\omega=-2$ (внизу).

Відносний рух точки в площині кола можна також задати залежностями $x_A = x$ і $y_A = y$, тобто залежностями (15). В такому випадку згідно рівнянь (12) абсолютною траєкторією точки A буде пряма лінія, описана рівняннями $x_{\kappa A} = s$, $y_{\kappa A} = 0$. Це означає, що крива котиться по прямій і одночасно з такою ж лінійною швидкістю точка рухається по кривій, тобто вона не відривається від точки контакту кривої із прямою лінією. Однак точка по кривій може рухатися в одну або протилежну сторону із різними швидкостями. В такому випадку закон відносного руху точки по кривій запишеться рівняннями (15) із введенням сталої ω , від знака якої залежить напрям руху точки, а від величини – швидкість:

$$x_A = R \cos \omega t; \quad y_A = R \sin \omega t. \quad (17)$$

Підставимо (17) у (16) і отримаємо рівняння абсолютної траєкторії точки, що рухається по колу, яке одночасно котиться по прямій лінії:

$$\begin{aligned} x_{\kappa A} &= Rt - R \cos \omega t \sin t + R \sin \omega t \cos t = Rt - R \sin[(1 - \omega)t]; \\ y_{\kappa A} &= R - R \cos \omega t \cos t - R \sin \omega t \sin t = R - R \cos[(1 - \omega)t]. \end{aligned} \quad (18)$$

При $\omega=1$ згідно параметричних рівнянь (18) абсолютною траєкторією буде пряма лінія. На рис. 4, б вгорі побудована абсолютна траєкторія при $\omega=2$, а внизу – при $\omega=3$. Отже, при швидкості руху точки по колу, вдвічі більшій за швидкість точки контакту кола із прямою, абсолютною траєкторією буде циклоїда. Якщо ж швидкість точки зростає (як, наприклад, при $\omega=3$), тоді в абсолютній траєкторії з'являється петля, тобто вона стає подібною до подовженої циклоїди, але не є нею (рис. 4, б внизу). На рис. 4, в побудовані абсолютні траєкторії при від'ємних значеннях ω . В цьому випадку точка по кривій рухається в протилежну сторону від напрямку руху точки контакту. При $\omega=0$ точка на колі залишається нерухомою, тому рівняння (18) описують циклоїду, у якій точки звороту розташовані на осі Ox на відміну від циклоїди, зображеної на рис. 4, б вгорі.

Параметричні рівняння (12) застосуємо до кривої плоского контуру, заданої натуральним рівнянням $k=k(s)$, де s – незалежна змінна – довжина дуги кривої. Перехід до параметричних рівнянь кривої здійснюється за наступними виразами:

$$x = \int \cos\left(\int k ds\right) ds; \quad y = \int \sin\left(\int k ds\right) ds. \quad (19)$$

Перші похідні функцій (19) запишуться:

$$x' = \cos\left(\int k ds\right); \quad y' = \sin\left(\int k ds\right), \quad (20)$$

де $\int k ds = \varphi$ – кут повороту кривої при її коченні по прямій.

Після підстановки виразів (19) та їх похідних (20) у рівняння (12) отримаємо:

$$\begin{aligned} x_{\kappa A} &= \left[y_A - \int \sin\left(\int k ds\right) ds \right] \sin\left(\int k ds\right) + \left[x_A - \int \cos\left(\int k ds\right) ds \right] \cos\left(\int k ds\right) + s; \\ y_{\kappa A} &= \left[y_A - \int \sin\left(\int k ds\right) ds \right] \cos\left(\int k ds\right) - \left[x_A - \int \cos\left(\int k ds\right) ds \right] \sin\left(\int k ds\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Розглянемо приклад. За криву плоского контуру візьмемо ланцюгову лінію, натуральне рівняння якої має вигляд:

$$k = \frac{a}{a^2 + s^2}, \quad (22)$$

де a – стала величина.

За формулами (19), (20) знаходимо:

$$x = \int \cos\left(\int k ds\right) ds = a \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{s}{a}; \quad y = \int \sin\left(\int k ds\right) ds = \sqrt{a^2 + s^2}; \quad (23)$$

$$x' = \cos\left(\int k ds\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}}; \quad y' = \sin\left(\int k ds\right) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}. \quad (24)$$

Після підстановки виразів (23), (24) у формули (21) отримаємо параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки A , яка зафіксована або ж здійснює відносний рух у площині ланцюгової лінії, що котиться по прямій:

$$\begin{aligned} x_{KA} &= \left[y_A - \sqrt{a^2 + s^2} \right] \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} + \left[x_A - a \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{s}{a} \right] \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}} + s; \\ y_{KA} &= \left[y_A - \sqrt{a^2 + s^2} \right] \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}} - \left[x_A - a \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{s}{a} \right] \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

На рис. 5 за рівняннями (25) побудовані траєкторії точок, що належать площині ланцюгової лінії, яка перекочується по прямій, причому ці точки розташовані як на самій кривій (рис. 5, а), так і поза її межами (рис. 5, б).

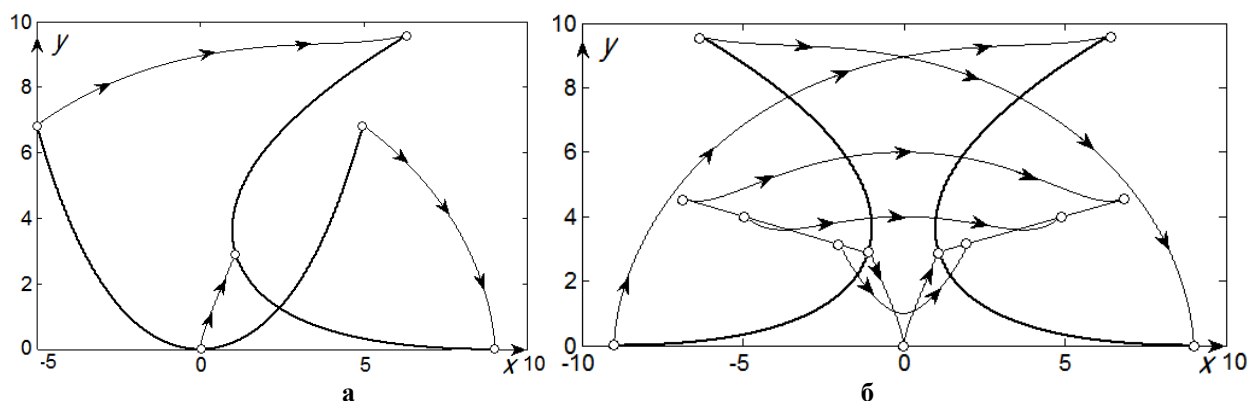


Рис. 5. Траєкторії різних точок плоского контуру, окресленого по ланцюговій лінії, при його коченні по прямій:

- а) траєкторії трьох точок, розташованих в нижній точці ланцюгової лінії та симетрично на кінцях зображених віток;
- б) траєкторії точок ланцюгової лінії, які лежать на кривій, а також розташовані на її осі симетрії.

Форма ланцюгової лінії певним чином подібна до форми параболи. Порівняння рис. 5 і 3 вказує на те, що траєкторії відповідних точок цих кривих є подібними. Напрямок руху окремої точки при перекочуванні контуру на рис. 5 позначено стрілками. Очевидно, що при зміні напрямку перекочування траєкторії точок залишаться ті ж самі, просто потрібно замінити напрям стрілок на протилежний.

Висновки

Здійснено аналітичний опис руху плоского контуру, окресленого кривою лінією, коли він перекочується по прямій без ковзання. Виведено параметричні рівняння траєкторії точки, яка рухається разом із плоским контуром. Точка може бути нерухомою по відношенню до рухомої системи координат, прив'язаної до рухомого контуру, або ж здійснювати в рухомій системі задане переміщення. В першому випадку положення точки задається двома координатами, в другому – двома залежностями. Якщо положення точки в рухомій системі координат задається залежностями у функції незалежної змінної вихідної кривої, то точка здійснює складний рух. Абсолютною траєкторією точки є сума відносного руху по відношенню до рухомої системи координат і переносного руху плоского контуру. Наведено приклади побудови траєкторій для перекочування параболи і ланцюгової лінії, а також здійснено перевірку отриманих рівнянь для відомого випадку перекочування кола.

Список використаної літератури

1. Заика П. М. Избранные задачи земледельческой механики. Киев: УСХА, 1992. 507 с.
2. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Москва: Физматгиз, 1960. 294 с.

3. Руденко С. Ю. Геометричне моделювання траєкторії фокуса еліпса, який котиться по прямій. *Праці ТДАТУ*. Вип. 4. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2011. Т. 49. С. 171–177.
4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. Москва: Наука, 1981. 344 с.
5. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. Москва: Наука, 1968. 584 с.
6. Коврегін В. В., Маловик І. В. Аналітичний опис центроїд не круглих зубчатих коліс. *Праці ТДАТУ*. Вип. 4. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2011. Т. 49. С. 125–129.
7. Легета Я. П., Шоман О. В. Геометричне моделювання центроїд некруглих зубчастих коліс за передавальною функцією. *Геометричне моделювання та інформаційні технології*. 2016. № 2. С. 59–63.
8. Легета Я. П. Опис та побудова спряжених центроїд некруглих зубчастих коліс. *Сучасні проблеми моделювання*. 2014. Вип. 3. С. 87–92.

References

1. Zaika, P. M. (1992). *Izbrannyye zadachi zemledelcheskoy mehaniki*. Kiev: USHA. [In Russian]
2. Savelov, A. A. (1960). *Plane curves. Systematics, Properties, Applications*. Moscow: Fizmatgiz. [In Russian]
3. Rudenko, S. Yu. (2011). Geometric Modeling of the Trajectory of the Focus of the Ellipse, which Rolls in a Straight Line. *Proceedings of the TDAT: Issue 4. Applied geometry and engineering graphics*. **49**, 171–177. [In Ukrainian]
4. Hilbert, D., & Kon-Fossen, S. (1981). *Visual geometry*. Moscow: Science. [In Russian]
5. Litvin, F. L. (1968). *Theory of gears*. Moscow: Science. [In Russian]
6. Kovregin, V. V., & Malovik, I. V. (2011). Analytical Description of Centroid of non-Circular Gears. *Proceedings of the TDAT: Issue 4. Applied geometry and engineering graphics*. **49**, 125–129. [In Ukrainian]
7. Legeta, Ya. P., & Shoman, O. V. (2016). Geometric modeling of centroid of non-circular gears by transfer function. *Geometric Modeling and Information Technology*. **2**, 59–63. [In Ukrainian]
8. Legeta, Ya. P. (2014). Description and Construction of Conjugate Centroids of non-Circular Gears. *Modern Problems of Modeling*. **3**, 87–92. [In Ukrainian]

Кресан Тетяна Анатоліївна – к.т.н., докторант кафедри нарисної геометрії, комп’ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: tanyakresan@i.ua, ORCID: 0000-0002-8280-9502.

Пилипака Сергій Федорович – д.т.н., професор, завідувач кафедри нарисної геометрії, комп’ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: s.pylypaka@nubip.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1496-4615.

Грищенко Ірина Юріївна – к.т.н., доцент, доцент кафедри нарисної геометрії, комп’ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: irgr@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-1000-9805.

Бабка Віталій Миколайович – к.т.н., доцент, доцент кафедри нарисної геометрії, комп’ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: babkavitaliy@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4971-4285.

Кремець Ярослав Сергійович – к.т.н., асистент кафедри нарисної геометрії, комп’ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України, e-mail: psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0003-0675-5757.

УДК 004.738.5

В.П. ЛЯШЕНКО, В.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРСПЕКТИВ ВИКОРИСТАННЯ ТА ПРИНЦИПІВ ПОБУДОВИ МУЛЬТИАГЕНТНОЇ ПОШУКОВОЇ СИСТЕМИ

У роботі досліджено принципи функціонування систем інформаційного пошуку та, зокрема, мультиагентної пошукової системи. Відповідно, проаналізовано ряд наукових досліджень у сфері інформаційного пошуку. В ході дослідження встановлено перспективність використання мультиагентності стосовно вдосконалення пошукових методів та, зокрема, при побудові систем інформаційного пошуку. Були визначені переваги побудови розподіленої мультиагентної пошукової системи в порівнянні з централізованими системами пошуку. Також наголошено, що організація мультиагентного пошуку дозволяє об'єднати в собі різні підходи до вирішення завдання інтелектуалізації та персоналізації пошукової видачі.

Ключові слова: пошукова оптимізація, пошукова система, пошукова видача, інформаційний пошук.

В.П. ЛЯШЕНКО, В.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРСПЕКТИВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ПРИНЦИПОВ ПОСТРОЕНИЯ МУЛЬТИАГЕНТНОЙ ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЫ

В работе исследованы принципы функционирования систем информационного поиска и, в частности, мультиагентной поисковой системы. Соответственно, проанализирован ряд научных исследований в области информационного поиска. В ходе исследования установлено перспективность использования мультиагентности в рамках усовершенствования поисковых методов и, в частности, при построении систем информационного поиска. Были определены преимущества построения распределенной мультиагентной поисковой системы по сравнению с централизованными системами поиска. Также отмечено, что организация мультиагентного поиска позволяет объединить в себе различные подходы к решению задачи интеллектуализации и персонализации поисковой выдачи.

Ключевые слова: поисковая оптимизация, поисковая система, поисковая выдача, информационный поиск.

V.P. LYASHENKO, V.V. TERESHCHENKO

Kremenchuk Mykhaylo Ostrohradskiy National University, Ukraine

INVESTIGATION OF USAGE PROSPECTS AND PRINCIPLES OF MULTI-AGENT SEARCH ENGINE CONSTRUCTION

In conditions of the information society development, there is one of the most important tasks remains - to solve the problem of effective search and collection of the information. This is crucially important due to a growing diversity of information sources focused on developing different areas of human activities. Thus, there is a demand for new methods to ensure the effective information search.

In this paper, the principles of functioning of information search systems and, in particular, of multiagent search engine was analyzed. Accordingly, a number of scientific

works in the field of information search have been analyzed. During the analysis of the principles of the functioning of information search systems and the lot of scientific research in the field of information search, the prospect of using the distributed multiagent system in the framework of the improvement of search methods was established and the feasibility of using it to improve the accuracy of document evaluation was emphasized. The study established the prospect of using multiagency in the improvement of search methods, and in particular, in the construction of information search systems. The advantages of building a distributed multi-agent search engine over centralized search systems were identified. It is also emphasized that multi-agent search can combine different approaches to solve the problem of search engine intellectualization and personalization.

It was summarized that using the methodology of building a distributed multiagent system in the framework of improving search methods and, in particular, in the construction of information search systems, it is possible to ensure that the search engine first finds documents containing the necessary information. In addition, the basic principles of construction for the development of multiagent structure within the organization of information search were highlighted.

The findings and suggestions of this study can be used in research and teaching. In particular, the results obtained from this study can be used to further analyze and refine information search methods.

Keywords: search engine optimization, search engine, search engine results, information search.

Постановка проблеми

Проблема досконалого пошуку і збору інформації, яка може виникати при вирішенні важливих завдань, залишається відкритою впродовж десятиліть. Це зумовлено феноменом стрімкого перенасичення інформаційного простору [1]. В сучасних умовах розвитку інформаційних технологій та пошукових машин виникає потреба у нових методах забезпечення ефективного інформаційного пошуку. Щоб забезпечити підтримку обробки значних об'ємів інформації всі сучасні інформаційно-пошукові системи повинні бути мультиагентними.

Сучасна пошукова машина здатна вдосконалюватися в різних напрямках: з'являються нові чинники ранжування або змінюється їх пріоритет, змінюється формат взаємодії інструментарію пошуку з користувачем, посилюються вимоги до якості побудови сайтів, а також з'являються нові сервіси, що спрощують пошук інформації [1]. Відповідно, вимоги до швидкості пошуку, актуальності інформації з кожним днем зростають, що, в свою чергу, впливає на розробку методів та алгоритмів пошуку і подання даних.

Не дивлячись на те, що на сьогоднішній день існує значна кількість методів та алгоритмів інформаційного пошуку, неперервний розвиток цієї галузі вимагає постійного покращення існуючих методів та розробку якісно нових підходів до нього. Тому проблема вдосконалення інформаційного пошуку є актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Як відомо, під поняттям «інформаційний пошук» розуміють процес відшукування серед деякої множини текстів (документів) таких, які присвячені саме зазначеній в пошуковому запиті темі, або містять потрібні користувачеві факти чи відомості. Пошук може здійснюватися як вручну, так і за допомогою інформаційно-пошукової системи з використанням засобів автоматизації.

Проблемам організації інформаційного пошуку було присвячено багато наукових праць. Зокрема, деякі теоретичні аспекти було розглянуто в публікаціях як

вітчизняних, так і закордонних дослідників: Ашманова І.С. [1], Колісниченка Д.М. [2], Климчука С.О. [3], Крохіна О.І. [4], Маннінга К.Д. [5], Урвачова В.А [7], Шокіна Ю.І. [8].

Так, наприклад, в книзі І.С. Ашманова [1] узагальнено досвід відомих фахівців, SEO-професіоналів; особливої уваги в цій книзі заслуговує аналіз принципів роботи пошукових систем. Хоча автором було висвітлено загальну архітектуру систем інформаційного пошуку та наголошено на важливості семантичної складової у рамках організації інформаційного пошуку, питання організації мультиагентного пошуку не було розглянуто достатньою мірою в даній публікації

Д.М. Колісниченком [2] докладно описані алгоритми роботи і методи використання найбільш популярних сьогодні пошукових машин Інтернету: Google, Яндекс та Рамблер. Незважаючи на те, що автор розповідає про способи розробки власних Google-додатків (особистих пошукових машин, створених на базі інструментальних засобів Google), принципи розподіленого мультиагентного пошуку розглянуті досить поверхнево.

У своїй роботі [3] С.О. Климчуком пояснюються важливі, з точки зору дослідника, принципи організації прецедентної системи (Case-BasedReasoningSystem). Зокрема, проаналізовано переваги методики прецедентів у рамках створення інтелектуальних засобів підтримки прийняття рішень. Публікація заслуговує уваги, з урахуванням можливості застосування відповідної методики для побудови розподіленої мультиагентної системи інформаційного пошуку.

Враховуючи те, що робота О.І. Крохіної [4] орієнтована на SEO-копірайтерів, інтернет-маркетологів, фахівців з пошукової оптимізації, веб-майстрів і власників сайтів, слід зазначити, що у ній розглядаються загальні принципи роботи пошукових алгоритмів і, зокрема, розкрито основні завдання мультиагентного пошуку.

Незважаючи на те що роботу К.Д. Маннінга [5] задумано як вступний курс з інформаційного пошуку; в ній поряд з класичним пошуком розглядаються веб-пошук, принципи роботи пошукових механізмів, а також класифікація та кластеризація текстів. Автором була здійснена спроба охарактеризувати принципи побудови мультиагентної пошукової системи, однак автором було розглянуто дане питання лише з точки зору централізованої (а не розподіленої) структури. Окрім цього, у книзі міститься актуальний (на момент публікації) виклад всіх аспектів проектування та реалізації систем збору, індексування та пошуку документів, методів оцінки таких систем, а також введення в методи машинного навчання.

Варту уваги інформацію, з точки зору дослідника, містить стаття В.А. Урвачової. У роботі [8] вченої наводиться короткий огляд сучасних методів та алгоритмів інформаційного пошуку. В огляд також включені класичні алгоритми, які покладені в основу сучасних пошукових методів. Окремої уваги заслуговують зроблені нею висновки щодо перспективності застосування технологій інтелектуальних агентів для пошуку інформації. Дані висновки варті уваги з огляду дослідження принципів побудови мультиагентної пошукової системи і, відповідно, огляду необхідної агентної структури.

З урахуванням давності викладеної інформації, слід зазначити, що в монографії Ю.І. Шокіна [9] детально розглянуто загальні аспекти розробки та створення інформаційно-пошукових систем. Зокрема, наводиться докладний виклад моделей, структур і алгоритмів, що описують окремі різновиди інформаційно-пошукових систем. Заслуговують уваги розкриті автором перспективи напряму інформаційного моделювання при організації пошуку.

Очевидно, що проблема широко обговорюється науковим співтовариством. Однак, більшість з досліджень або зосереджені на інших аспектах вдосконалення

інформаційного пошуку, або надають лише поверхневі висновки щодо перспектив побудови розподіленої мультиагентної пошукової системи. Як бачимо, попри значну кількість публікацій дослідників, проблема вдосконалення інформаційного пошуку та, зокрема, дослідження перспектив використання мультиагентної структури не розв'язана повністю та залишається актуальною.

Мета дослідження

Метою роботи є вдосконалення сучасних методів інформаційного пошуку, дослідження перспектив використання та принципів побудови мультиагентної пошукової системи та, зокрема, суттєве поліпшення ефективності обробки пошукових запитів за рахунок її застосування.

Викладення основного матеріалу дослідження

Мультиагентність – це технологія, яка формується на перетині штучного інтелекту, загальної теорії систем, інформаційних і телекомунікаційних технологій [4]. Найчастіше моделювання інтелектуальних агентів в проектах обмежується описом моделей учасників взаємодії і пропозиціями, як організувати таку взаємодію. Відзначимо, що взаємодія необхідна для розподілу завдань між агентами.

З точки зору дослідника, перспективними напрямками в розробці мультиагентних систем є розподілений штучний інтелект та штучне життя. Головною проблемою розподіленого штучного інтелекту є розробка інтелектуальних груп, здатних вирішувати завдання шляхом міркувань, пов'язаних з обробкою символів. Кожний вузол повинен бути здатний модифікувати свою поведінку в залежності від обставин, а також планувати свої стратегії комунікації та кооперації з іншими вузлами.

Іншим напрямком розвитку мультиагентних систем є штучне життя. Воно в більшій мірі пов'язане з трактуванням інтелектуальної поведінки в контексті виживання, адаптації та самоорганізації в динамічному, ворожому середовищі. У руслі штучного життя глобальну інтелектуальну поведінку всієї системи розглядають як результат локальних взаємодій великого числа простих і необов'язково інтелектуальних агентів.

Інтелектуальний агент – це програма, яка самостійно виконує завдання, вказане користувачем комп'ютера, протягом заданих проміжків часу [4]. Інтелектуальні агенти використовуються для підтримки користувача або збору інформації. Кожний окремий агент в розподіленому штучному інтелекті може розглядатися без урахування характеристик інших агентів. При цьому проблемним завданням залишатиметься забезпечення кооперації і комунікації агентів. У багатьох випадках потрібен і фізичний розподіл завдання, наприклад, в разі використання групи роботів. Двома найважливішими аспектами розподіленого штучного інтелекту є розподіл завдань між агентами і об'єднання результатів.

Таким чином, враховуючи мету дослідження, можна зробити допущення щодо перспективності використання мультиагентної системи у рамках вдосконалення засобів інформаційного пошуку. Відповідно, між побудованими таким чином інформаційно-пошуковими системами (з метою їх навчання) та користувачами повинен встановлюватися ефективно працюючий зворотний зв'язок, який дозволяє уточнювати потреби абонентів, своєчасно реагувати на зміни цих потреб і оптимізувати роботу системи. Розглянемо основні принципи проектування мультиагентної пошукової системи з метою виокремити найважливіші ознаки.

Як відомо, основна ідея програмних агентів – делегування повноважень. Для того, щоб реалізувати цю ідею, агент повинен мати можливість взаємодії зі своїм власником або користувачем для отримання відповідних запитів і повернення

отриманих результатів, орієнтуватися в середовищі свого виконання і приймати рішення, необхідні для виконання поставлених перед ним завдань.

При динамічному підході до організації мультиагентних систем у рамках інформаційного пошуку заслуговує на увагу використання парадигми мобільних агентів. Мобільні агенти – це програми, які можуть переміщатися по мережі, наприклад, по WWW. Вони залишають клієнтський комп'ютер і переміщуються на віддалений сервер для виконання своїх дій, після чого повертаються назад.

Таким чином створені мультиагентні системи можна також розділити за характером обробки інформації на централізовані, що обробляють дані централізовано на одному вузлі, і розподілені, що обробляють дані на різних вузлах, що має на увазі розподілену топологію системи. Також можна виділити і підходи, що реалізують змішану стратегію, наприклад, первинна обробка відбувається на різних вузлах системи, після чого отримані дані пересилаються на деякий вузол, на якому проходить заключний етап їх обробки.

До недоліків побудови централізованих систем пошуку інформації в Інтернеті можна віднести наступні [4]:

- 1) всі дані для подальшої обробки повинні бути зібрані в повному обсязі на деякому вузлі системи, що пов'язано з пересилкою по мережі великого обсягу даних;
- 2) обробка і зберігання великого обсягу даних на одному вузлі системи пов'язані з додатковими труднощами;
- 3) необхідність в потужних обчислювальних ресурсах;
- 4) проблема узгодження даних;
- 5) при виході з ладу центрального вузла системи порушується працездатність всієї системи в цілому.

До недоліків побудови розподілених систем можна віднести необхідність введення додаткових коштів для забезпечення взаємодії та узгодження роботи окремих вузлів системи.

Відповідно, бачимо що у порівнянні з централізованими системами пошуку, розподілені мають наступні переваги:

- 1) відсутність значного навантаження на мережу й здатність компонентної обробки запиту;
- 2) краща узгодженість та розподілена обробка даних;
- 3) вихід з ладу певного компоненту не впливає загалом на працездатність усієї системи;

З урахуванням наведених вище переваг і недоліків різних видів архітектур мультиагентних систем, у рамках мети дослідження був зроблений вибір на користь розподіленої системи, що складається з певної кількості серверів і клієнтів, що взаємодіють за допомогою передачі повідомлень. Відносно структури агентів вибір був зроблений на користь мобільних агентів, які «переміщуються» по мережі на сервери системи і виконують на них певну роботу. Даний вибір обумовлений такими міркуваннями:

- 1) розподіл обчислювального навантаження по різних вузлах системи, що дозволяє прискорити процес обробки даних;
- 2) відсутність необхідності пересилання великого обсягу даних по мережі, оскільки всі дані обробляються на тому ж сайті, де вони знаходяться, а клієнту по мережі відправляються тільки результати обробки;
- 3) більш висока надійність – при виході з ладу одного або декількох вузлів системи, інші залишаються працездатними і працездатність системи в цілому не порушується.

Таким чином, враховуючи викладане вище, отримуємо спрощену типову розподілену пошукову мультиагентну систему (рис. 1). В ній можна виділити чотири типи агентів: інтерфейсний агент, пошуковий агент, агент перевірки існування сторінок, агент ранжування сторінок.

Інтерфейсні агенти виконують всі операції стосовно взаємодії з користувачем: отримують від нього запит на пошук, передають запит пошуковим агентам, здійснюють виведення результатів пошуку користувачу, виконують адаптацію пошукового процесу до використовуваних пошукових систем.



Рис. 1. Структурна схема мультиагентної інформаційно-пошукової системи.

Інтерфейсний агент є автономним. Користувач вводить завдання на пошук в текстовій формі, запускає пошук. До завершення пошуку ніякої взаємодії між користувачем і інтерфейсним агентом не відбувається. Розглянутий агент взаємодіє з пошуковими агентами, передаючи їм пошукове завдання, і з агентом ранжування сторінок, отримуючи від нього результати пошуку, що виводяться для користувача. Інтерфейсний агент є активним, тому що ставить перед іншим співтовариством агентів конкретні завдання.

Адаптація пошукового процесу до пошукових систем здійснюється за рахунок підвищення рейтингу пошукових систем, які знайшли документи, які найбільшою мірою відповідають запитам користувача. Цей вибір користувач робить, переглянувши результати пошуку. Дана дія є необов'язковою, якщо користувач не бажає адаптувати пошуковий процес до пошукових систем, залишивши системи рівноправними.

Алгоритм роботи інтерфейсного агента запропонуємо сформулювати наступним чином:

- 1) отримання запиту від користувача;
- 2) запуск пошуку (передача завдань пошуковим агентам);
- 3) очікування результату пошуку (від агента ранжування сторінок);
- 4) публікація результатів;
- 5) адаптація пошукового процесу.

Пошукові агенти взаємодіють з конкретною пошуковою системою, передаючи їй запити користувача і повертаючи результати її роботи агенту перевірки існування сторінок. Під результатом роботи пошукової системи маються на увазі посилання на сторінки в мережі і опису цих сторінок.

Пошуковий агент є автономним, оскільки з користувачем не взаємодіє взагалі. Володіє соціальною поведінкою, оскільки взаємодіє з інтерфейсним агентом, отримуючи від нього пошукове завдання, і з агентами перевірки існування сторінок, передаючи їм результати пошуку. Пошукові агенти володіють зобов'язаннями по відношенню до інтерфейсних агентів, зобов'язуючись здійснити пошук в різних пошукових системах. Проведення паралелей з метапошуком та методологією мультиверсійного програмування дозволяє говорити в даному випадку про підвищення якості пошуку за рахунок застосування методології мультиверсійного [5] програмування в пошуку інформації. У загальних рисах, алгоритм пошукового агента виглядає наступним чином:

- 1) отримання завдання (запиту) від інтерфейсного агента;
- 2) передача запиту до пошукової системи;

3) передача результатів пошуку пошукової системи агенту перевірки існування сторінок.

Агент перевірки існування сторінок відсіює з пошукової видачі неіснуючі сторінки та передає результат агенту ранжування сторінок. Він є автономним, так як користувач не приймає ніякої участі в його роботі. Даний агент володіє соціальною поведінкою, взаємодіючи з пошуковим агентом, отримуючи від нього результати роботи пошукової системи, і з агентом ранжування сторінок, передаючи йому на аналіз тільки існуючі сторінки. Таким чином, агент перевірки існування сторінок грає роль пошукового фільтру.

На практиці ж робота агенту перевірки існування сторінок є найбільш вимогливою до тимчасових ресурсів, тому що вимагає відправки запитів на велику кількість серверів і очікування відповідей на ці запити. Агент перевірки існування сторінок діє у відповідності з наступним алгоритмом:

- 1) отримання списку адрес (URL) сторінок від пошукового агента;

2) вибір зі списку неперевіраних сторінок; якщо таких немає, управління передається агенту ранжування сторінок;

- 3) відправка запиту за адресою неперевіреної сторінки;

- 4) очікування відповіді від серверу;

5) у випадку помилки сторінка видаляється зі списку, інакше залишається в списку. Відбувається повернення до другого кроку.

Агент ранжування сторінок будує сукупний рейтинг всіх знайдених існуючих сторінок, впорядковуючи сторінки відповідно до номеру їх обробки пошуковими агентами, відкидаючи повторні посилання. Агент ранжування сторінок є автономним, оскільки виконує свої завдання без залучення користувача. Бере на себе зобов'язання проранжувати сторінки за релевантністю запиту користувача перед агентом перевірки існування сторінок. У функції даного агента входить об'єднання повторюваних посилань. Якщо повторювані посилання були знайдені різними пошуковими системами, тоді сукупний рейтинг сторінки збільшується, якщо повторювані посилання були знайдені однієї пошуковою системою, тоді встановлюється рейтинг, відповідний найбільш високій позиції сторінки в результатах пошуку.

Посилання типу `http://server` і `http://server/index.*`, як і `http://server` і `http://www.server`, вважаються співпадаючими.

Агент ранжування сторінок діє у відповідності з наступним алгоритмом:

- 1) отримання списків сторінок від агентів перевірки існування сторінок;

2) в рамках результатів пошуку кожною пошуковою системою сторінка з мінімальним порядковим номером отримує максимальний рейтинг, сторінки з більш високими порядковими номерами отримують менший рейтинг;

3) об'єднання сторінок з однаковими посиланнями;

4) сортування сторінок за спаданням рейтингу;

5) передача відранжованого списку сторінок інтерфейсному агенту.

Описані базові принципи проектування мультиагентної системи запропоновано використовувати при розробці прототипу інформаційно-пошукової системи для мережі Інтернет в рамках дослідження.

Таким чином, можна підсумувати, що використовуючи методику побудови розподіленої мультиагентної системи [4] у рамках вдосконалення пошукових методів та, зокрема, при побудові систем інформаційного пошуку, можливо забезпечити знаходження пошуковою системою в першу чергу документів, які містять необхідну інформацію. Варто зазначити, що організація мультиагентного пошуку таким чином дозволить об'єднати в собі різні підходи до вирішення завдання інтелектуалізації та персоналізації пошукової видачі.

Висновки

В результаті проведеного дослідження було зазначено, що всі сучасні пошукові системи мають наступні серйозні недоліки:

1) велика кількість пошукових машин з різними призначеними для користувача інтерфейсами породжує проблему когнітивного перевантаження;

2) стандартний механізм пошуку за ключовими словами в сучасних інформаційно-пошукових системах видає результати з великим показником інформаційного шуму;

3) методи індексування баз даних, як правило, не пов'язані з інформаційним змістом;

4) вимоги до швидкості пошуку, актуальності інформації з кожним днем зростають;

5) часто видаються посилання на інформацію, якої в Інтернеті вже давно немає, а також немає можливості в реальному часі враховувати динаміку зміни змісту Інтернет-ресурсів.

Виходячи з проведеного огляду сучасного стану досліджень, встановлено що більшість з досліджень або зосереджені на інших аспектах вдосконалення інформаційного пошуку, або надають лише поверхневі висновки щодо перспектив побудови розподіленої мультиагентної пошукової системи. Окрім того, встановлено, що попри значну кількість публікацій, проблема вдосконалення інформаційного пошуку та, зокрема, дослідження перспектив використання мультиагентної структури не розв'язана повністю та залишається актуальною

Відповідно, перспективним напрямом залишається дослідження і розробка методів та програмних засобів розподіленої обробки завдань в інформаційно-пошукових системах Інтернету.

В результаті досліджень, встановлено що у порівнянні з централізованими системами пошуку, розподілені мають значні переваги, що полягають в наступному:

1) завдяки розподілу обчислювального навантаження по різних вузлах системи, прискорюється процес обробки даних;

2) відсутність необхідності пересилання великого обсягу даних по мережі, так як всі дані обробляються на тому ж сайті, де вони знаходяться, а клієнту по мережі відправляються тільки результати обробки;

3) завдяки здатності компонентної обробки запиту маємо кращу узгодженість у взаємодії з даними;

4) більш висока надійність – при виході з ладу одного або кількох вузлів системи, інші залишаються працездатними і працездатність системи в цілому не порушується

5) розподіленість обробки даних дозволяє опрацьовувати більші об'єми інформації.

Таким чином в ході дослідження встановлено перспективність використання відповідної мультиагентної структури у рамках вдосконалення пошукових методів та, зокрема, при побудові орієнтованих на розподілену обробку інформаційно-пошукових систем. Окрім того, автором виділено основні принципи побудови для розробки мультиагентної структури в рамках організації інформаційного пошуку. Наголошено, що організація мультиагентного пошуку дозволяє об'єднати в собі різні підходи до вирішення завдання інтелектуалізації та персоналізації пошукової видачі знизити навантаження на індекс пошукового інструменту, а також спростити вирішення проблеми, пов'язаної із забезпеченням конфіденційності даних.

Висновки та пропозиції в рамках даного дослідження можуть бути використані в науково-дослідній та викладацькій діяльності. Зокрема, результати, отримані при проведенні даного дослідження можуть бути використанні при подальшому аналізуванні та вдосконаленні методів інформаційного пошуку.

Список використаної літератури

1. Ашманов И. С., Иванов А. А. Продвижение сайта в поисковых системах. М.: Вильямс, 2016. 304 с.
2. Колисниченко Д. Н. Поисковые системы и продвижение сайтов. М.: Диалектика, 2014. 272 с.
3. Климчук С. О. Розроблення прецедентної системи підтримки прийняття рішень. *Вісник Національного університету «Львівська Політехніка»*. 2010. № 689. С. 169–176.
4. Крохина О. И., Полосина М. Н. Первая книга SEO-копирайтера. Как написать текст для поисковых машин и пользователей. М.: Инфра-Инженерия, 2012. 216 с.
5. Маннинг К., Рагхаван П., Шютце Х. Введение в информационный поиск. М.: Вильямс, 2017. 640 с.
6. Терещенко В. В., Терещенко В. Л. Перспективність вдосконалення систем інформаційного пошуку. *IT-Перспектива: матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції*. (м. Кременчук, 14-15 квітня 2017 р.). Кременчук: КрНУ, 2017. С. 26–28.
7. Терещенко В. В. Аналіз сучасних методів інформаційного пошуку. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2018. Вип. 3 (110). С. 26–32.
8. Урвачева В. А. Обзор методов информационного поиска. *Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова*. 2016. №1. С. 457–463
9. Шокин Ю. И. Проблемы поиска информации. Новосибирск: Наука, 2010. 220 с.
10. Еремеев А. П., Варшавский П. Р. Моделирование рассуждений на основе прецедентов в интеллектуальных системах поддержки принятия решений. *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2009. №2. С. 45-47.
11. Alexandros N., Mark M. Detecting Spam Web Pages through Content Analysis. Microsoft Research, 2012. PP. 1–6.
12. Brin S., Page L. The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine. *Computer Networks and ISDN Systems*. 2004. Vol. 30. PP. 107–117.

13. Ferber J. Les Systemes Multi-Agents. Vers une Intelligence Collective. Paris (France): InterEditions, 1995. 522 p.
14. Ganz A., Sieh L., Behavioral factors and SEO. Proceedings of the *24th International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN 2015)*. (Las Vegas, Nevada, USA August 3 – August 6, 2015). Scottsdale, Arizona, USA. PP. 218–223.
15. Mishne G., Carmel D. Blocking Blog Spam with Language Model Disagreement. *Int'l Workshop Adversarial Information Retrieval on the Web (AIRWeb)*. 2005. PP. 955–969.

References

1. Ashmanov, Y. S., & Ivanov, A. A. (2016). Prodvizhenye saitov v poyskovykh systemakh. M.: Viliams.
2. Kolysnychenko, D. N. (2014). Poyskovyye systemy i prodvyzhenye saitov. M.: Dyalektyka.
3. Klymchuk, S. O. (2010). Rozroblennia pretsedentnoi systemy pidtrymky pryiniattia rishen. *Visnyk Natsionalnoho universytetu 'Lvivska Politekhnikha'*. **689**, 169–176.
4. Krokhyna, O. Y., & Polosyna, M. N. (2012). Pervaia knyha SEO-kopyraitera. Kak napysat tekst dlia poyskovykh mashyn y polzovatelei. M.: Ynfra-Ynzheneryia.
5. Mannynh, K., Rahkhavan, P., & Shiuttse, Kh. (2017). Vvedenyie v informatsyonnyi poysk. M.: Viliams.
6. Tereshchenko, V. V., & Tereshchenko, V. L. (2017). Perspektyvnist vdoskonalennia system informatsiinoho poshuku. Proceedings of the *IT-Perspektyva: IV Vseukrainska naukovo-praktychna konferentsiia*. (Kremenchuk, April 14-15, 2017). Kremenchuk: KrNU, pp. 26–28.
7. Tereshchenko, V. V. (2018). Analiz suchasnykh metodiv informatsiinoho poshuku. *Visnyk Kremenchutskoho natsionalnoho universytetu imeni Mykhaila Ostrohradskoho*. **3** (110), 26–32.
8. Urvacheva, V. A. (2016). Obzor metodov informatsyonnoho poyska. *Vestnyk Tahanrozhskoho ynstytuta imeni A.P. Chekhova*. **1**, 457–463.
9. Shokyn, Yu. Y. (2010). Problemy poyska informatsyy. Novosybyrsk: Nauka.
10. Ereemeev, A. P., & Varshavskiy, P. R. (2009). Modelyrovanye rassuzhdeniy na osnove pretsedentov v intellektualnykh systemakh podderzhky pryiniatyia resheniy. *Iskusstvennyi intellekt i pryiniatyie resheniy*. **2**, 45–47.
11. Alexandros, N., & Mark, M. (2012). Detecting Spam Web Pages through Content Analysis. *Microsoft Research*, pp. 1–6.
12. Brin, S., & Page, L. (1998). The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems*. **30**, 107–117.
13. Ferber, J. (1995). Les systemes multi-agents. Vers une intelligence collective. Paris (France): InterEditions.
14. Ganz, A., & Sieh, L., (2015). Behavioral factors and SEO. Proceedings of the *24th International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN 2015)*, (Las Vegas, Nevada, USA August–August 6, 2015) Scottsdale, Arizona, USA, pp. 218–223.
15. Mishne, G., & Carmel, D. (2005). Blocking Blog Spam with Language Model Disagreement. *Int'l Workshop Adversarial Information Retrieval on the Web (AIRWeb)*, pp. 955–969.

Ляшенко Віктор Павлович – д.т.н., професор, завідувач кафедри інформатики та вищої математики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, Україна, e-mail: viklyash2903@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4538-631X

Терещенко Володимир Володимирович – аспірант кафедри інформатики та вищої математики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, Україна, e-mail: darkwolfthehunter@gmail.com.

УДК 621.384.6

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ, Н.Г. РЕШЕТНЯК
Национальный Научный Центр «Харьковский Физико-Технический Институт»

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАССИВА ДАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ МАГНЕТРОННОЙ ПУШКИ И ЗАДАЧА РАДИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Представлены результаты исследования по формированию радиального электронного пучка магнетронной пушкой с вторичноэмиссионным катодом. Целью работы являлось создание математической модели формирования радиального электронного пучка с энергией в десятки кэВ в спадающем магнитном поле соленоида, исследование зависимости характеристик тока пучка от амплитуды и распределения магнитного поля вдоль оси системы, изучение возможности облучения поверхности трубчатых изделий. В работе на основе гамильтонова формализма движения электронов в магнитном поле синтезировано программное средство, позволяющее провести численное моделирование динамики трубчатых электронных потоков в спадающем магнитном поле соленоида. На основе метода наименьших квадратов построен и реализован алгоритм преобразования массива значений магнитного поля вдоль оси транспортировки частиц в аналитическую дифференцируемую функцию. Синтезированная функция и её производная использованы при моделировании движения электронов в магнитном поле магнетронной пушки. Приводятся результаты численного моделирования по движению трубчатого электронного потока. Изучено формирование его распределения при транспортировке в спадающем магнитном поле соленоида. Приводятся также экспериментальные данные по облучению пучком электронов металлических мишеней в камере пушки. Полученные результаты моделирования согласуются с данными эксперимента.

Ключевые слова: магнетронная пушка, вторичноэмиссионный катод, электронный пучок, математическое моделирование, гистограмма, распределение магнитного поля.

О.С. МАЗМАНИШВИЛІ, М.Г. РЕШЕТНЯК
Національний Науковий Центр «Харківський Фізико-Технічний Інститут»

ПЕРЕТВОРЕННЯ МАСИВУ ДАНИХ ЦИЛІНДРИЧНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ МАГНЕТРОННОЇ ГАРМАТИ ТА ЗАДАЧА РАДІАЛЬНОГО РУХУ ЕЛЕКТРОНІВ

Представлені результати досліджень щодо формування радіального электронного пучка в магнетронній гарматі з вторинноемісійним катодом. Ціллю роботи було створення математичної моделі формування радіального электронного пучка з енергією в десятки кеВ у магнітному полі соленоїда, дослідження залежності характеристик струму від амплітуди та розподілу магнітного поля вдовж осі системи, вивчення можливості опромінювання поверхні трубчастих виробів. У роботі на основі гамильтонового формалізму руху електронів у магнітному полі синтезовано програмний засіб, який дозволяє провести чисельне моделювання динаміки трубчастих електронних потоків у спадаючому магнітному полі соленоїда. На основі методу найменших квадратів побудований і реалізований алгоритм перетворення масиву значень магнітного поля вдовж осі транспортування частинок в аналітичну диференційовану функцію. Синтезована функція та її похідна використана

при моделюванні руху електронів у магнітному полі магнетронної гармати. Приведено результати чисельного моделювання руху трубчастого електронного потоку. Вивчено формування розподілу електронів при їх транспортуванні в повздовжньому спадаючому магнітному полі соленоїда. Приводяться також експериментальні дані стосовно опромінювання пучком електронів металічних мішеней в камері гармати. Отримані результати моделювання узгоджуються з даними експериментів.

Ключові слова: магнетронна гармата, вторинноemisійний катод, електронний пучок, математичне моделювання, гістограма, розподіл магнітного поля.

A.S. MAZMANISHVILI, N.G. RESHETNYAK

National Science Center 'Kharkov Institute of Physics & Technology', Kharkov, Ukraine

DATA TRANSFORMATION CYLINDRICAL MAGNETIC FIELD MAGNETRON GUN AND THE PROBLEM OF RADIAL MOTION OF ELECTRONS

The results of the study on the formation of a radial electron beam by a magnetron gun with a secondary emission cathode are presented. The aim of the work was to create the mathematical model of the formation of a radial electron beam with energy of tens of keV in the incident magnetic field of the solenoid, to study the dependence of the characteristics of the beam current on the amplitude and distribution of the magnetic field along the axis of the system, to study the possibility of irradiation of the surface of the tubular products. In the work on the basis of the Hamiltonian formalism of electron motion in a magnetic field, a software tool has been synthesized that allows to perform numerical simulations of the dynamics of tubular electron flows in a falling magnetic field of a solenoid. Based on the least-squares method, an algorithm for converting an array of magnetic field values along an axis of particle transport into an analytic differentiable function is constructed and implemented. The synthesized function and its derivative are used to model the motion of electrons in the magnetic field of a magnetron gun. The results of numerical modeling of the motion of a tubular electron flow are presented. The formation of its distribution during transport in the falling magnetic field of the solenoid is studied. Experimental data on electron beam irradiation of metal targets in the gun chamber are also given. The simulation results are in good agreement with the experimental data.

Keywords: magnetron gun, secondary emission cathode, electron beam, mathematical modeling, histogram, magnetic field distribution.

Постановка проблемы

Данные о магнитных полях в циклических ускорителях представляются в виде массивов измеренных отсчетов амплитуд поля вдоль продольной координаты. Между тем, при решении задач о динамике частиц необходимо решать дифференциальные уравнения, в которых амплитуда поля и её производная рассматриваются как аналитические функции продольной координаты. Эти функции должны обладать свойствами функций Лапласа, описывающих в пространстве магнитные поля от заданных токов. Возникает задача представления функции магнитного поля, полученной опытным путем в цилиндрической системе в виде массива отсчетов вдоль продольной координаты, в её аналитический и дифференцируемый аналог. Эта функция должна представлять магнитное поле на всем интервале наблюдений и отвечающим им моделирующим расчетам.

Анализ последних исследований и публикаций

Магнетронные пушки с холодными вторичноэмиссионными катодами перспективны для использования их при создании мощных СВЧ-приборов, в ускорительной технике в связи с высокой плотностью тока, конструктивной простотой, стабильностью эмиссии катодов и т.д. [1, 2]. На основе магнетронной пушки с вторичноэмиссионным катодом был создан ускоритель электронов, который использует осевой электронный пучок для облучения металлических мишеней [3].

Цель исследования

Объектом данной работы является измерение параметров радиального электронного пучка при его транспортировке в спадающем магнитном поле соленоида и построение математической модели движения электронного потока в области спада поля.

Целью исследований является создание математической модели формирования радиального электронного пучка с энергией в десятки кэВ в спадающем магнитном поле, исследование зависимости характеристик тока пучка от амплитуды и распределения магнитного поля вдоль оси системы.

Изложение основного материала исследования

В экспериментальной установке имеется цилиндрическое магнитное поле, значения которого заданы массивом данных. Этому массиву необходимо поставить в соответствие аналитическую дифференцируемую функцию, значения которой совпадают с опытным массивом поля в заданных узлах. Пусть электрон с энергией E , движущийся параллельно (или под углом) оси на некотором расстоянии r_0 от неё, влетает в магнитное поле. Требуется построить уравнение движения частицы в магнитном поле и на основании решения уравнения движения для выбранных моментов времени t определить координаты электрона.

Для построения математической модели решения воспользуемся аксиальной симметрией задачи. Поэтому будем работать в полярной системе координат (r, z, ϑ) .

Гамильтониан рассматриваемой задачи в ней имеет вид
$$H = \frac{p_r^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\vartheta}{r} - e_0 A \right)^2,$$

где e_0 , m – заряд и масса покоя электрона, p_r , p_z , p_ϑ – канонические импульсы, A – магнитный потенциал. Его с учетом азимутальной симметрии пока запишем в виде $A(r, z) = Brf(z)$, где $f(z)$ – функция продольной координаты, которой распорядимся ниже, B – напряженность магнитного поля в рассматриваемой точке.

В гамильтоновой форме уравнения движения для координат и импульсов имеют общий вид $\dot{r} = \partial H / \partial p_r$, $\dot{z} = \partial H / \partial p_z$, $\dot{\vartheta} = \partial H / \partial p_\vartheta$, $\dot{p}_r = -\partial H / \partial r$, $\dot{p}_z = -\partial H / \partial z$, $\dot{p}_\vartheta = -\partial H / \partial \vartheta$. В результате нахождения частных производных получим систему из 6 уравнений. В ней перейдем, используя скорость света c , от текущего времени t к переменной $s = ct$, производную по ней будем обозначать штрихом.

Для канонических импульсов осуществим замену $p_r = e_0 B q_r$, $p_z = e_0 B q_z$, $p_\vartheta = e_0 B q_\vartheta$. После преобразований приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} r' = \mu q_r, & z' = \mu q_z, & \vartheta' = \mu (q_\vartheta / r^2 - f(z)), \\ q_r' = \mu r (q_\vartheta / r^2 - f(z)) (q_\vartheta / r^2 + f(z)), & q_z' = \mu r^2 (q_\vartheta / r^2 - f(z)) df(z) / dz, & q_\vartheta' = 0, \end{cases} \quad (1)$$

в которой $f(z)$ – полевая функция продольной координаты, $df(z)/dz$ – производная функции $f(z)$.

В уравнениях (1) $\mu = e_0 B / mc$, $Bf(z)$ – функция, описывающая напряженность магнитного поля вдоль оси z . Амплитуду B выбираем так, чтобы можно было пользоваться функцией $Bf(z)$ на всем интервале возможных значений z .

К уравнениям (1) необходимо присоединить начальные условия для r_0, z_0, ϑ_0 , а также для $q_{r0}, q_{z0}, q_{\vartheta0}$.

Устойчивость алгоритма решения связана с шагом Δs решения и параметром μ . Тогда условие $\mu \Delta s \ll 1$ будет выполняться, если $\Delta s \ll 0.0001$ м. Итак, с вычислительной точки зрения задача может быть сформулирована как задача нахождения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Сформулированная задача Коши может быть решена, при условии, что обеспечена возможность на каждом шаге интегрирования уравнений (1) использовать функции $f(z)$ и $df(z)/dz$ как аналитические функции.

Блок-схема установки приведена на рис. 1. При движении электронов существенным является то обстоятельство, что магнитное поле в пушке (рис. 2) обладает цилиндрической симметрией. Это позволяет использовать систему (1) для анализа и численного моделирования.

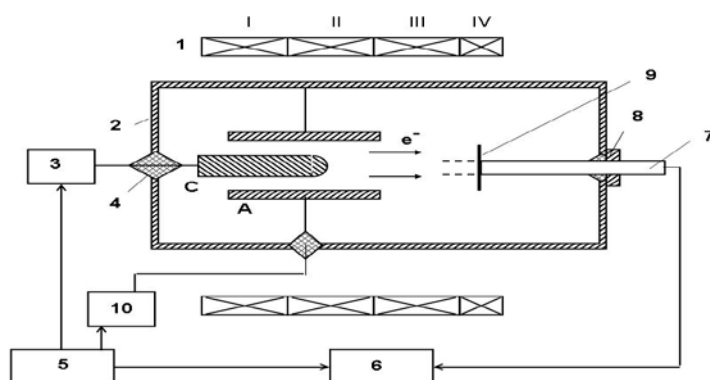


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки. 1 – секции соленоида (I, II, III, IV), 2 – вакуумный объем, 3 – высоковольтный импульсный генератор, 4 – изолятор, 5 – блок синхронизации, 6 – измерительная система, 7 – центрирующий стержень, 8 – уплотнение, 9 – цилиндр Фарадея, 10 – генератор, А – анод, С – катод.

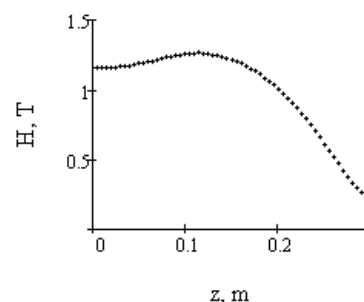


Рис. 2. Типичное продольное распределение магнитного поля.

Пусть вдоль оси z задано продольное распределение магнитного поля. Опытные данные получены в результате измерений, согласно которым построена таблица $\{z_n, H_n\}$ где $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Примем, что это магнитное поле создано последовательной совокупностью из M виртуальных соленоидов с набором известных геометрических характеристик $\{R_m, Z_{1,m}, Z_{2,m}\}$, где $m = 1, 2, \dots, M$, а $R_m, Z_{1,m}$ и $Z_{2,m}$ – соответственно радиус, левая и правая граница m -ого соленоида вдоль оси z . Необходимо восстановить (оценить) значения $\{h_m\}$, $m = 1, 2, \dots, M$ напряженностей в каждом из соленоидов и, опираясь на них, построить функцию $f(z)$ конфигурации магнитного поля.

Задача такого рода, в общем случае, относится к числу некорректных задач. В частности, если количество измерений N превосходит число соленоидов M , то точного решения может не быть. Поэтому ниже мы ограничимся задачей *оценивания* искомым амплитуд $\{h_m\}$. Будем при решении использовать известное (точное) лапласовское выражение для амплитуды $\varphi(z)$ магнитного поля амплитудой h на оси одного соленоида радиусом R , имеющего левую и правую границы Z_1 и Z_2 , соответственно

$$f(z, h, R, Z_1, Z_2) = h\varphi(z) \equiv \frac{1}{4}h \left[\frac{z - Z_2}{\sqrt{(z - Z_2)^2 + R^2}} - \frac{z - Z_1}{\sqrt{(z - Z_1)^2 + R^2}} \right], \quad (2)$$

тогда магнитное поле $f(z)$, образованное совокупностью таких соленоидов, можно описать выражением:

$$f(z) = \sum_{m=1}^M h_m \varphi_m(z) = \sum_{m=1}^M h_m \frac{1}{4} \left[\frac{z - Z_{2,m}}{\sqrt{(z - Z_{2,m})^2 + R_m^2}} - \frac{z - Z_{1,m}}{\sqrt{(z - Z_{1,m})^2 + R_m^2}} \right], \quad (3)$$

где $\varphi_m(z) = \varphi_m(z, R_m, Z_{1,m}, Z_{2,m})$, а $\{h_m, R_m, Z_{1,m}, Z_{2,m}\}$ – амплитуда поля радиус, левая и правая граница m -ого соленоида вдоль оси z .

Из (3) можно получить аналитическое выражение для производной $df(z)/dz$.

Пусть имеются данные регистрации в виде таблицы $\{z_n, H_n\}$, где $n = 0, 1, 2, \dots, N$ (см. рис. 2), и на её основании требуется найти массив амплитуд $\{h_m\}$ поля, где $m = 1, 2, \dots, M$, с помощью которых можно синтезировать поле $f(z)$ со свойствами непрерывности и дифференцируемости.

Сопоставляя используемые группы данных, запишем уравнения для амплитуд магнитного поля $\{h_m\}$ для каждой из точек вдоль оси z : $\sum_{m=1}^M h_m \varphi_m(z_n) = H_n$, $n = 0, 1, \dots, N$. Это выражение является системой из $(N+1)$ линейных неоднородных уравнений относительно M искомым величин $\{h_m\}$. В зависимости от значений $(N+1)$ и M такая система может быть совместной, переполненной или недополненной, поэтому в общем случае её точное решение может отсутствовать. Поэтому в качестве решения будем рассматривать *оценку* значений величин $\{h_m\}$.

Применим известный метод наименьших квадратов (МНК), на основании которого в качестве решения примем то, которое наилучшим образом приближается к точному решению в смысле его наименьшего среднеквадратичного отклонения. В рамках МНК построим функционал $Q(h_1, h_2, \dots, h_M) = \sum_{n=0}^N \left[\sum_{m=1}^M h_m \varphi_m(z_n) - H_n \right]^2$ и потребуем, чтобы в пространстве переменных $\{h_m\}$ функционал Q достигал минимума: $Q(h_1, h_2, \dots, h_M) \xrightarrow{h} \min$. Условие минимума приводит к системе уравнений $\partial Q(h_1, h_2, \dots, h_M) / \partial h_m = 0$, $m = 1, 2, \dots, M$. В этой системе после дифференцирования по каждой из $\{h_m\}$ получим набор линейных уравнений относительно компонент искомого вектора h_v , который запишем в виде $Ah_v = B$. Здесь A – матрица с

элементами $A_{n,m} = \sum_{k=0}^N \varphi_m(z_k) \varphi_n(z_k)$, B – вектор правой части с компонентами $B_n = \sum_{k=0}^N H_k f_n(z_k)$. В результате получаем искомое решение $h_v = A^{-1}B$. Найденное решение полученной системы уравнений и будем принимать за искомый набор амплитуд $\{h_m\}$.

В работе рассматривался массив данных магнитного поля объемом $N=73$ точек. В численных расчетах использовалась совокупность из $M=12$ виртуальных соленоидов. На рис. 3 приведены исходные данные об амплитудах магнитного (квадратики) и результат восстановления распределения магнитного поля $f(z)$. Результат вычисления продольной производной поля $df(z)/dz$ функции $f(z)$ приведен на рис. 4.

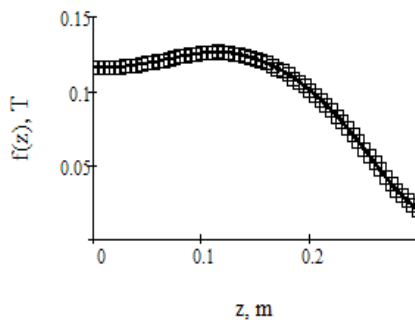


Рис. 3. Данные исходного магнитного поля (квадратики) и построенная функция $f(z)$ (линия) от координаты z .

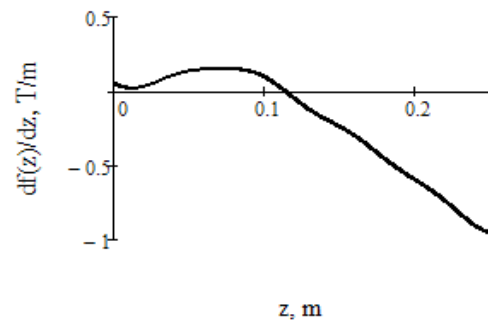


Рис. 4. Зависимость построенной производной $df(z)/dz$ от продольной координаты z .

В эксперименте использовалось магнитное поле с максимальной амплитудой 0,8 Т, вид которого приведен на рис. 5. Продольная зависимость амплитуды поля здесь имеет плавный характер. На том же рисунке приведены расчетные зависимости (двумерные гистограммы) распределения электронного пучка (объем выборки 500 частиц, цена деления 12 мм/дел) и экспериментальные отпечатки пучка в плоскости мишени. Из рисунка можно видеть значительное увеличение размеров пучка при уменьшении амплитуды магнитного поля.

Также в эксперименте использовалось магнитное поле с максимальной амплитудой 2,0 Т, вид которого приведен на рис. 6. В этом случае продольная зависимость амплитуды поля здесь имеет градиентный характер. На том же рисунке приведены расчетные зависимости (двумерные гистограммы) распределения электронного пучка (объем выборки 500 частиц, цена деления 12 мм/дел) и отпечатки пучка в плоскости мишени. Из рисунка можно видеть уменьшение размеров пучка в области максимума амплитуды магнитного поля. Экспериментально показано, что с увеличением максимальной амплитуды и/или градиента поля эффект радиального сжатия пучка еще более выражен.

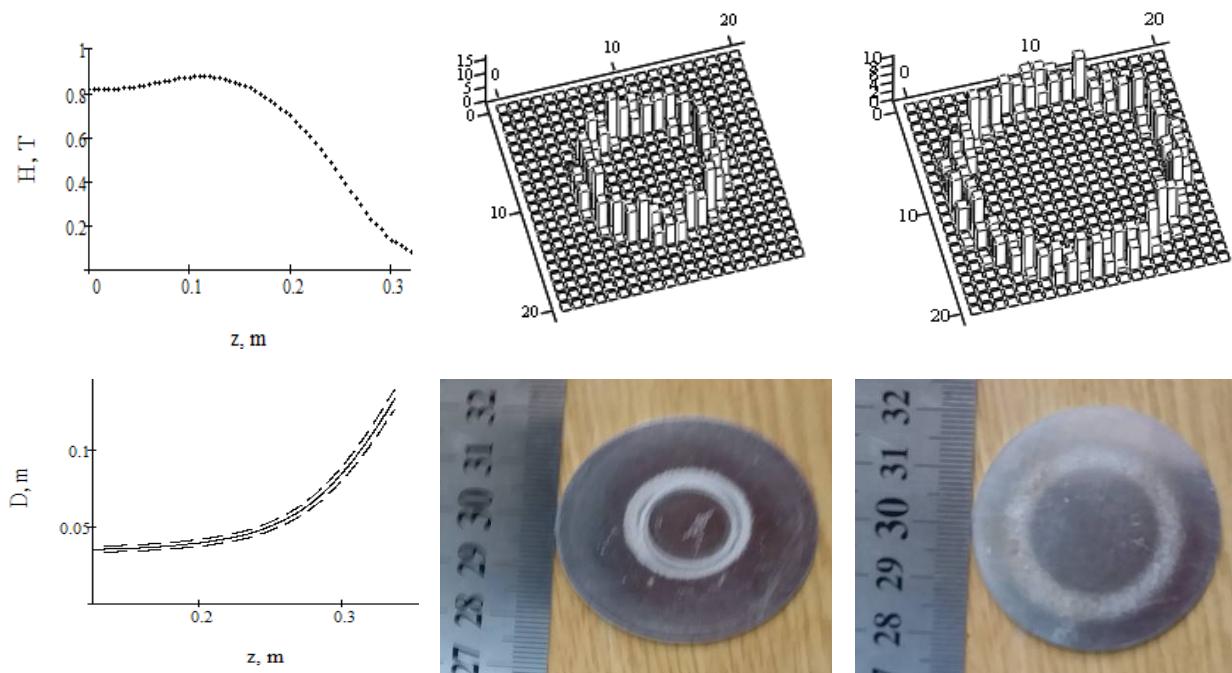


Рис. 5. Результаты моделирования и опытные данные.
Верхний ряд: конфигурация магнитного поля (слева),
гистограмма плотности частиц при $z = 275$ мм (посередине) и $z = 327$ мм (справа).
Нижний ряд: расчетная зависимость диаметра пучка от пролетной базы z (слева),
плотности частиц на мишени при $z = 185$ мм (посередине, цифра 1) и $z = 312$ мм (справа, цифра 2).

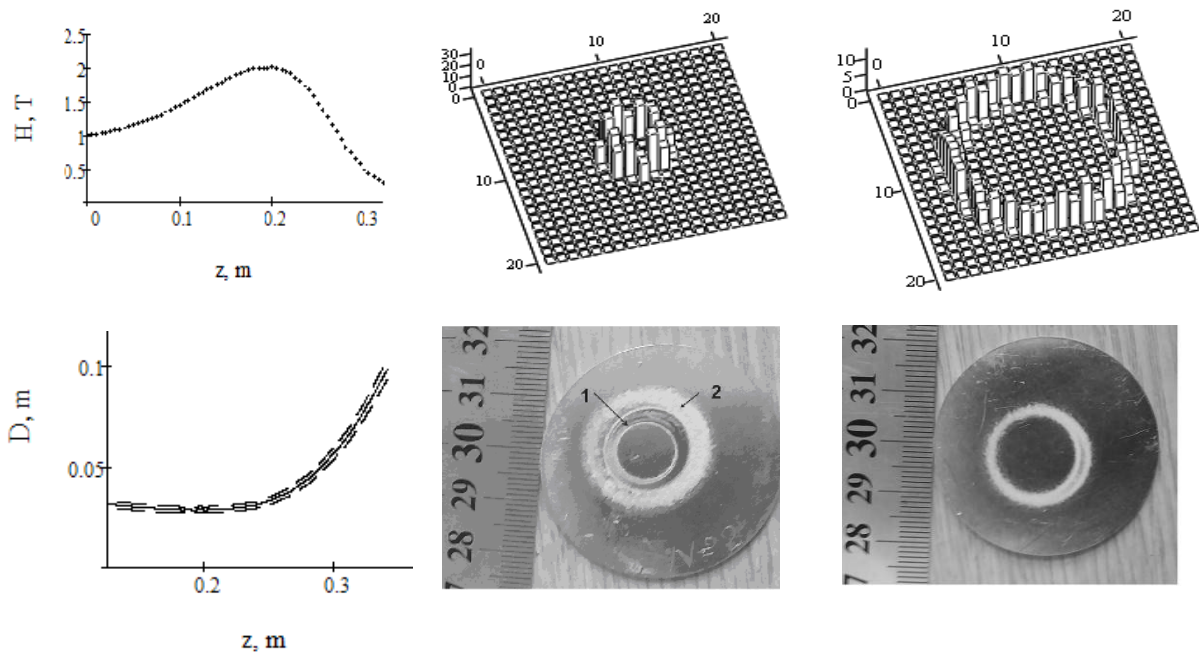


Рис. 6. Результаты моделирования и опытные данные.
Верхний ряд: конфигурация магнитного поля (слева),
гистограмма плотности частиц при $z = 185$ мм (посередине, цифра 1) и $z = 327$ мм (справа, цифра 2).
Нижний ряд: расчетная зависимость диаметра пучка от пролетной базы z (слева),
плотности частиц на мишени при $z = 185$ мм (посередине, цифра 1) и $z = 327$ мм (справа, цифра 2).

Выводы

Применение разработанного программного средства, основанного на аналитической модели распределения магнитного поля вдоль оси идеального соленоида, позволило, опираясь на массив из 73 опытных данных на оси транспортировки электронов, восстановить амплитуду $f(z)$ магнитного поля и её производную $df(z)/dz$ как аналитические функции продольной координаты z .

Получены решения прямой задачи моделирования траекторий электронов для заданных начальных условий и параметров системы. Приведены расчетные зависимости распределения пучка электронов (объем выборки 500) в плоскости мишени.

Из проведенных исследований следует, что возможно устойчивое формирование электронного пучка в радиальном и осевом направлениях при транспортировке в магнитном поле магнетронной пушки.

Получены отпечатки электронного пучка на металлических мишенях, расположенных на различных выбранных расстояниях. Найденные численные зависимости согласуются с экспериментальными результатами.

Список использованной литературы

1. Dovbnya A. N., Lavrinenko S. D., Zakutin V. V. Surface Modification of Zirconium and Zr1%Nb Alloy by the Electron Beam of the Magnetron Gun-Based Accelerator. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Physics of Radiation Effects and Radiation Materials Science*. 2011. № 2(72). P. 39–45.
2. Ayzatsky M. I., Dovbnya A. N., Mazmanishvili A. S., Reshetnyak N. G., Romas'ko V. P., Chertishchev I. A. Studies on Formation of the Radially-Directed Electron Beam Generated by the Magnetron Gun with a Secondary Emission Cathode. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations*. 2016. № 3(103). P. 11–16.
3. Dovbnya A. N., Dovbnya N. A., Mazmanishvili A. S., Reshetnyak N. G., Chertishchev I. A. Transport Simulation of a High-Current Electron Beam Formed by the Magnetron Gun with a Secondary-Emission Cathode in a Decreasing Solenoid Field. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations*. 2015. № 6(100). P. 77–82.

References

1. Dovbnya, A. N., Lavrinenko, S. D., & Zakutin, V. V. (2011). Surface Modification of Zirconium and Zr1%Nb Alloy by the Electron Beam of the Magnetron Gun-Based Accelerator. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Physics of Radiation Effects and Radiation Materials Science*. **2**(72), 39–45.
2. Ayzatsky, M. I., Dovbnya, A. N., Mazmanishvili, A. S., Reshetnyak, N. G., Romas'ko, V. P., & Chertishchev, I. A. (2016). Studies on Formation of the Radially-Directed Electron Beam Generated by the Magnetron Gun with a Secondary Emission Cathode. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations*. **3**(103), 11–16.
3. Dovbnya, A. N., Dovbnya, N. A., Mazmanishvili, A. S., Reshetnyak, N. G., & Chertishchev, I. A. (2015). Transport Simulation of a High-Current Electron Beam Formed by the Magnetron Gun with a Secondary-Emission Cathode in a Decreasing Solenoid Field. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations*. **6**(100), 77–82.

Мазманишвили Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник ННЦ ХФТИ, e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

Решетняк Николай Григорьевич – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ННЦ ХФТИ, e-mail: nreshetnyak@kit.kharkov.ua, ORCID: 0000-0002-2345-6789.

УДК 004.942:519.6

І.В. МЕЛЬНИК

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

А.В. ПОЧИНОК

Університет державної фіскальної служби України,
Навчально-науковий інститут інформаційних технологій, м. Ірпінь, Київська область

ВИБІР МЕТОДУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ГРАНИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ КОРОТКОФОКУСНИХ ЕЛЕКТРОННИХ ПУЧКІВ ЗА УМОВИ ЇХНЬОГО ТРАНСПОРТУВАННЯ В ІОНІЗОВАНОМУ ГАЗІ

У статті проведений порівняльний аналіз методів інтерполяції залежності радіуса короткофокусного електронного пучка від положення площини зрізу за повздожньою координатою по трьом базовим точкам. Інтерполяція проводиться на основі отриманих даних чисельного моделювання. Показано, що головна особливість аналітичних функцій, які описують такі залежності, полягає у тому, що вони мають один глобальний мінімум, а за межами області мінімуму характер цих залежностей є близьким до лінійного. Розглядаються два можливих методи інтерполяції таких залежностей. Перший з цих методів полягає у тому, що в області фокуса пучка використовується параболічна інтерполяція, а за межами цієї області функція має лінійний характер. Для описання таких залежностей використовується апарат математичної логіки та арифметико-логічні вирази. Недолік такого описання граничних траєкторій електронних пучків за умови їх проведення в іонізованому газі полягає у тому, що важко знайти таку базову точку, у якій необхідно здійснювати перехід від лінійної залежності до параболічної. Другий метод інтерполяції базується на використанні класу спеціальних функцій, якими є корені степені n з поліномів тієї ж самої степені. З використанням методів комп'ютерного моделювання показано, що поведінка таких функцій цілком відповідає ярусним залежностям, які описують траєкторії короткофокусних електронних пучків за умови їхнього транспортування в іонізованому газі. Показано, що у разі використання таких функцій інтерполяції розбіжність між результатами чисельного моделювання, які інтерполюються, та значеннями функцій інтерполяції, не перевищує кількох відсотків, а для більшості випадків складає частку відсотка. Тобто, на основі тестових комп'ютерних експериментів обґрунтовано, що використання як функцій інтерполяції коренів степені n з поліномів тієї ж самої степені є ефективним інструментом для описання граничних траєкторій короткофокусних електронних пучків в іонізованому газі. Отримані в статті результати мають важливе практичне значення для визначення фокальних параметрів короткофокусних електронних пучків, які формуються джерелами електронів на основі високовольтного тліючого розряду.

Ключові слова: електронний пучок, інтерполяція, арифметико-логічні вирази, клас алгебраїчних функцій

І.В. МЕЛЬНИК

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

А.В. ПОЧИНОК

Университет государственной фискальной службы Украины,
Учебно-научный институт информационных технологий, г. Ирпень Киевской области

ВЫБОР МЕТОДА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГРАНИЧНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОРОТКОФОКУСНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ ПРИ ИХ ТРАНСПОРТИРОВКЕ В ИОНИЗИРОВАННОМ ГАЗЕ

В статье проведен сравнительный анализ методов интерполяции зависимости радиуса короткофокусного электронного пучка от положения плоскости среза по продольной координате по трём базовым точкам. Интерполяция проводится с использованием полученных данных численного моделирования. Показано, что главная особенность аналитических функций, которые

описывают такие зависимости, состоит в том, что они имеют один глобальный минимум, а за пределами области минимума характер этих зависимостей является близким к линейному. Рассматриваются два возможных метода интерполяции таких зависимостей. Первый из этих методов состоит в том, что в области фокуса пучка используется параболическая интерполяция, а за пределами этой области функция имеет линейный характер. Для описания таких зависимостей используется аппарат математической логики и арифметико-логические выражения. Недостаток такого описания граничных траекторий электронных пучков при их проведении в ионизированном газе состоит в том, что сложно найти такую базовую точку, в которой необходимо осуществлять переход от линейной зависимости к параболической. Другой метод интерполяции базируется на использовании класса специальных функций, которыми являются корни степени n из полиномов той же степени. С использованием методов компьютерного моделирования показано, что поведение таких функций полностью соответствует овражным зависимостям, которые описывают траектории электронных пучков при их транспортировке в ионизированном газе. Показано, что при использовании таких функций интерполяции расхождение между результатами численного моделирования, которые интерполируются, и значениями функции интерполяции, не превышает нескольких процентов, а в ряде случаев составляет доли процента. Таким образом, на основе тестовых компьютерных экспериментов обосновано, что использование в качестве функций интерполяции корней степени n из полиномов той же степени является эффективным инструментом для описания граничных траекторий короткофокусных электронных пучков в ионизированном газе. Полученные в статье результаты имеют важное практическое значение для определения фокальных параметров короткофокусных электронных пучков, формируемых источниками электронов на основе высоковольтного тлеющего разряда.

Ключевые слова: электронный пучок, интерполяция, арифметико-логические выражения, класс алгебраических функций

I.V. MELNYK

National Technical University of Ukraine
'Igor Sikorskiy Kyiv Politechnical Institute'

A.V. POCHYNOK

University of the State Fiscal Service of Ukraine,
Educational and Research Institute of Information Technology

CHOOSING THE METHOD OF INTERPOLATION OF THE BOUNDARY TRAJECTORIES OF SHORT-FOCUS ELECTRON BEAMS AND THEIR GUIDING IN THE IONIZED GAS

Comparative analyze of the methods of interpolation of dependence of electron beam radius on position of cutting plane by the longitudinal coordinate with using three basic point have been provided in the article. It is shown, that main particularity of analytical functions, which are described such dependences, is that they have one global minimum, and outside the minimum region the character of such dependences is similar to linear. Two different approaches to interpolation of such dependences are considered. First method is based on the assumption, that in the region of beam focus the parabolical interpolation is used, and outside the focal region used the linear function. For describing of such dependences, the apparat of mathematical logic and arithmetic-logic expressions have been used. The main disadvantage of such describing of boundary trajectories of electron beams, propagated in the ionized gas, is that it is usually difficult to find the basic point, where the transfer from linear to parabolical dependence have to be realized. Another method of interpolation is based on the use of class of special functions, which are defined as the roots of n power from the polynomials of the same power. It is shown with using the method of computer simulation, that the behavior of such functions is generally corresponded to the ravine dependence, which described the trajectories of electron beams, propagated in the ionized gas. It is shown, that with using of such interpolation functions the difference between the simulation results, which are interpolated, and the values of interpolation function, always isn't grater, than few percent, but in the most cases it consist the part of percent. Therefore, it is proved on the base of

testing computer experiments, that using as the interpolation functions the roots of n power from the polynomial's of the same power is the effective instrument for describing the boundary trajectories of short-focus electron beams in ionized gas. The obtained results are very important for the solution the practical task of defining the focal parameters of electron beams, generated by the electron sources, based on the high voltage glow discharge.

Keywords: electron beam, interpolation, arithmetic-logic expression, class of algebraic functions.

Постановка проблеми

Сьогодні електронно-променеві технології знаходять широке впровадження у різних галузях промисловості, зокрема у машинобудуванні, авіобудуванні, космічній індустрії, а також в приладобудуванні та електронній промисловості. Це пов'язано з такими несумлінними перевагами електронно-променевих технологій, як висока загальна та питома потужність електронного пучка, простота керування його просторовими параметрами з використанням електричних та магнітних полів, простота керування потужністю електронних пучків газодинамічним та електричним способом [1–4].

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Обробка матеріалів з використанням електронних пучків в імпульсному режимі дозволяє отримувати нові речовини з унікальними фізичними властивостями, і цей напрямок наукових та інженерних досліджень є вкрай перспективним для розвитку сучасних нанотехнологій та виробництва наноматеріалів [5]. Сьогодні перспективними напрямками розвитку електронно-променевих технологій є електронно-променеве зварювання та паяння виробів, нанесення металевих та композитних покриттів, електронно-променеве плавлення металів та неметалевих матеріалів, а також прецизійна електронно-променева обробка речовини, зокрема сучасні технології формування складних тривимірних поверхонь [6]. У табл. 1 наведені параметри електронних пучків, які використовуються сьогодні для різних процесів електронно-променевих технологій [1–4].

Таблиця 1
Параметри електронних пучків, які використовуються для різних процесів сучасних електронно-променевих технологій

Технологічний процес	Прискорювальна напруга $U_{пр}$, кВ	Струм електронного пучка $I_{п}$, А	Фокальний діаметр електронного пучка $d_{еп}$, мм	Загальна потужність електронного пучка $P_{еп}$, Вт	Питома потужність електронного пучка $P_{еп}$, Вт/см ²
Плавлення	15 – 40	1 – 40	10 – 50	$10^4 – 10^7$	$10^3 – 10^4$
Зварювання	15 – 175	0,01 – 1	0,1 – 5	$10^2 – 10^5$	$10^5 – 10^7$
Випаровування	10 – 40	0,1 – 10	3 – 30	$5 \cdot 10^2 – 5 \cdot 10^5$	$10^3 – 10^4$
Розмірна обробка	20 – 150	$10^{-3} – 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4} – 0,1$	$10 – 10^3$	$10^5 – 10^9$

Сьогодні інженерна розробка джерел електронів, призначених для застосування в електронно-променевих технологіях, загалом проводиться за двома головними напрямками. Перший з них пов'язаний із подальшим удосконаленням конструкцій традиційних джерел електронів із розжарюваними катодами [1–3], а другий орієнтований на розробку джерел електронів, робота яких основана на новітніх фізичних принципах, зокрема на емісії заряджених частинок з іонізованого газу та плазми [4, 7 – 9]. Серед таких джерел електронів окреме місце займають електронні гармати на основі високовольтного

тліючого розряду (ВТР), в яких здійснюється емісія електронів з розвиненої поверхні холодного катоду як результат її бомбардування іонами залишкового газу [4, 7, 9].

Мета дослідження

Для подальшого розвитку та впровадження у промисловість сучасних перспективних електронно-променевих технологій необхідно розвивати сучасні методи математичного моделювання електронних пучків, зокрема, методи інтерполяції та апроксимації їх геометричних та енергетичних параметрів пучка [10–12]. Тому головною метою даної статті є порівняльний аналіз методів інтерполяції граничних траєкторій короткофокусного електронного пучка за умови його транспортування у низькому вакуумі в середовищі іонізованого газу. Зазвичай саме в таких фізичних умовах працюють джерела електронів на основі ВТР [4, 9].

Викладення основного матеріалу дослідження

Постановка задачі. У загальному вигляді завдання інтерполяції граничної траєкторії короткофокусних електронних пучків було сформульовано в роботі [13]. Постановка цього завдання базується на фундаментальних принципах загальної фізики електронних пучків та потоків заряджених частинок, які були сформульовані в монографіях [10 – 12]. Головний принцип інтерполяційного описання граничної траєкторії електронного пучка полягає в тому, що залежність $r(h)$, де r – радіус пучка на поточній площині зрізу, а h – повздовжня координата, зазвичай мають яружний характер з одним глобальним мінімумом в фокальній площині пучка. Окремий випадок складають електронні пучки з високою густиною потужності та малим діаметром, які, за умови їх проведення в іонізованому газі, мають пульсації радіусу в фокальній області з кількома максимумами та мінімумами. Причиною цих пульсацій є магнітне самофокусування пучка в іонізованому газі, або пінч-ефект [10, 12]. Такі пульсації притаманні довгофокусним електронним пучкам з потужністю більше сотень кВт за умови фокального діаметру порядку 10^{-6} м або менше та кута збіжності пучка, меншого за $0,1^{\circ}$. Електронні пучки з такими параметрами майже не використовуються в умовах масового виробництва та у даній роботі не розглядаються. Для інтерполяції відповідних пульсації радіусу в фокальній області таких пучків слід використовувати інші алгебраїчні функції [10].

Для короткофокусних електронних пучків потужністю десятки – сотні кВт з фокальним діаметром одиниці мм, які формуються електронними гарматами ВТР, притаманним є яружний характер залежності $r(h)$ з одним глобальним мінімумом. Головною характерною особливістю таких функцій є їхня дзеркальна симетрія відносно фокальної площини h_{ϕ} , де радіус електронного пучка приймає мінімальне значення $r_{\phi} = r(h_{\phi})$. У математичній формі описана вище особливість записується у вигляді співвідношення [10 – 15]:

$$\frac{dr(h_{\phi}-\delta h)}{dh} = -\frac{dr(h_{\phi}+\delta h)}{dh}, \quad (1)$$

де δh – нескінченно мала зміна величини h .

У роботі [13] були розглянуті алгоритми лінійної та квадратичної інтерполяції граничної траєкторії електронного пучка за трьома відліковими точками, а також отримані аналітичні співвідношення для оцінки фокальних параметрів електронного пучка за функціями лінійної та квадратичної інтерполяції. Там же був розглянутий метод комбінованої інтерполяції граничної траєкторії електронного пучка за трьома точками, сутність якого полягає у тому, що в фокальній області пучка використовується параболічна інтерполяція, а за межами цієї області – лінійна. Особливості використання

цього методу полягають у тому, що серед трьох обраних базових точок шукається така, в якій радіус пучка має найменше значення, і тоді вона вважається точкою переходу від лінійної до параболічної інтерполяції. Крім цього, важливим є виконання співвідношення (1), а також умови спряження лінійної та параболічної функцій [10–15]:

$$\left(\frac{dr(h)}{dh}\right)_л \Big|_{h=h_c} = \left(\frac{dr(h)}{dh}\right)_п \Big|_{h=h_c}, \quad (2)$$

де h_c – точка спряження.

Зрозуміло, що з урахуванням виконання співвідношення (2), для аналізу функції, яка описує комбіновану інтерполяцію, можна використовувати відомі математичні методи теорії сплайнів [16]. У роботі [13] функція комбінованої інтерполяції була записана з використанням відомого математичного апарату арифметико-логічних виразів [17].

Також у роботі [13] вказується, що саме комбінована інтерполяція у разі оптимального вибору набору трьох базових точок дає найкращі результати щодо оцінки фокальних параметрів короткофокусних електронних пучків. Проте слід відзначити, що суттєвим недоліком цього методу є те, що, за відомим набором числових даних для яружної залежності, знайти точку h_c , в якій слід здійснювати перехід від лінійної до параболічної інтерполяції з урахуванням умови (2), вкрай важко, і єдиного алгоритму щодо пошуку такої точки в обчислювальній математиці не існує. Крім цього, у роботі [13] не було проведено тестування запропонованих методів інтерполяції відносно даних чисельного моделювання граничної траєкторії електронного пучка, які, для завдання інтерполяції, зазвичай можна вважати достовірними [16]. Тому метою даної роботи є порівняння точності різних методів інтерполяції граничної траєкторії електронного пучка, за умови його транспортування в іонізованому газі, відносно даних чисельного моделювання. Як один із можливих методів інтерполяції яружних залежностей, які за межами області мінімуму мають характер, близький до лінійного, запропоновані алгебраїчні функції, що являють собою корінь степені n з поліномів тієї самої степені. Тестування таких алгебраїчних функцій як функцій інтерполяції було проведено для значення $n = 2$, що відповідає трьом базовим точкам. Аналогічне завдання, щодо порівняння різних методів інтерполяції енергетичних параметрів потужних електронних пучків, було поставлено у роботі [17].

Математична модель граничної траєкторії електронного пучка за умови його проведення в іонізованому газі. Чисельне моделювання граничних траєкторій короткофокусних електронних пучків здійснювалось для значень прискорювальної напруги одиниці – десятки кВ та робочого тиску в області проведення пучка від часток до десятків Па. Слід відзначити, що зазвичай саме в таких фізичних умовах здійснюється транспортування короткофокусних електронних пучків, які формуються електронними гарматами ВТР, з розрядної камери гармати до технологічної камери, де розташовані вироби, що обробляються під дією електронного пучка [4, 9].

Для побудови фізико-математичної моделі граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за таких умов необхідно враховувати такі фізичні ефекти, як іонізація залишкового газу електронами пучка, розсіювання електронів на атомах залишкового газу за моделлю Резерфорда, дефокусування пучка під дією власного просторового заряду електронів та його фокусування під дією просторового заряду іонів, магнітне самофокусування пучка в іонізованому газі, або пінч-ефект, а також розкид електронів пучка за швидкостями [10 – 12, 14, 15]. Узагальнена фізико-математична модель граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за таких фізичних умов

розглядалась у роботах [14, 15] та може бути записана у вигляді наступної системи алгебро-диференціальних рівнянь [14, 15]:

$$n_{i0} = \sqrt{\pi} r_{\Pi}^2 B_i p n_e \sqrt{\frac{M \varepsilon_0 n_e}{m_e U_{\text{пр}}}} \exp\left(-\frac{U_{\text{пр}}}{\varepsilon_0 n_e r_{\Pi}^2}\right); \quad f = \frac{n_e}{n_{i0} - n_e}; \quad C = \frac{I_{\Pi}(1-f-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_e} U_{\text{пр}}^{3/2}}};$$

$$\frac{d^2 r_{\Pi}}{dz^2} = \frac{C}{r_{\Pi}}; \quad \theta = \frac{dr_{\Pi}}{dz} + \theta_s; \quad n_e = \frac{I_{\Pi}}{\pi r_{\Pi}^2}; \quad v_e = \sqrt{\frac{2eU_{\text{пр}}}{m_e}}; \quad (3)$$

$$\tan\left(\frac{\theta_{\min}}{2}\right) = \frac{10^{-4} Z_a^{4/3}}{2\gamma\beta^2}; \quad \tan\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) = \frac{Z_a^{3/2}}{2\gamma\beta^2}; \quad \bar{\theta}^2 = \frac{8\pi r_{\Pi}^2 n Z_a^2 dz}{\beta^4 \gamma^2} \ln\left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}\right); \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}},$$

де I_{Π} – струм електронного пучка, r_{Π} – радіус електронного пучка, $U_{\text{пр}}$ – прискорювальна напруга, f – рівень іонізації залишкового газу, n_e – концентрація електронів пучка, n_{i0} – концентрація іонів залишкового газу на осі симетрії пучка, m_e – маса електрона, ε_0 – діелектрична стала, $\beta = v_e/c$ – відношення усередненої швидкості електронів пучка v_e до швидкості світла c , θ_{\min} та θ_{\max} – мінімальний та максимальний кут розсіювання електронів на атомах залишкового газу відповідно, Z_a – заряд ядра атомів залишкового газу, n – концентрація атомів залишкового газу, dz – довжина пробігу електронів у поздовжньому напрямку на поточній ітерації, $\bar{\theta}$ – середній кут розсіювання електронів пучка, γ – релятивістський фактор, p – тиск залишкового газу, B_i – рівень іонізації газу.

У роботах [14, 15] розв’язувалось ускладнене завдання нелінійної електронної оптики, оскільки розглядалось проведення короткофокусного пучка через циліндричний канал з обмеженим перетином за умови забезпечення необхідного перепаду тиску між розрядною та технологічною камерою. Тобто, записана система рівнянь (3) є спрощеною та може бути використана лише для випадку, коли електронний пучок транспортується в іонізованому залишковому газі за умови однакового тиску. Результати моделювання граничної траєкторії електронного пучка з використанням системи рівнянь (3), наведені у графічному вигляді на рис. 1. Для розв’язування системи (3) був використаний ітераційний алгоритм, описаний в роботах [14, 15].

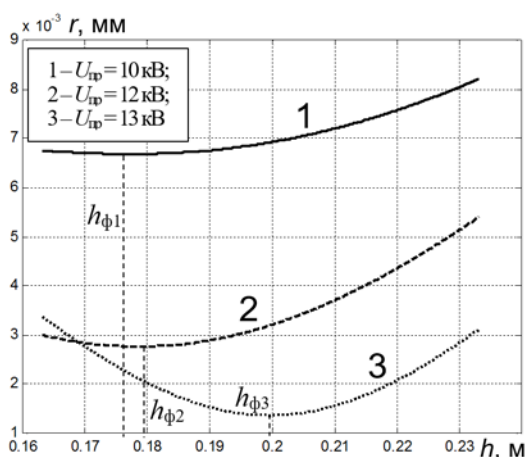


Рис. 1. Отримані результати моделювання граничної траєкторії електронного пучка для різної прискорювальної напруги. Фізичні умови: робочий газ – азот, тиск у технологічній камері – 0,1 Па, струм пучка – 0,5 Па.

З отриманих результатів моделювання, наведених на рис. 1, видно, що залежності $r(h)$ мають яружний характер з глобальним мінімумом на лінії фокусу пучка h_f , а за межами фокальної області ці залежності наближаються до лінійних. Розглянемо різні способи інтерполяції таких залежностей та проведемо оцінки точності інтерполяції.

Комбінована інтерполяція. У роботі [13] був розглянутий метод комбінованої інтерполяції, сутність якого полягає у тому, що за межами фокальної площини використовується лінійна інтерполяція, а в області фокуса пучка яружна залежність описується параболічною функцією. Оскільки передбачається, що залежності $r(h)$ є гладкими, описання цієї функції з використанням методу комбінованої інтерполяції проводилось з урахуванням вище наведеного співвідношення (2). З теоретичної точки зору це означає, що, з урахуванням дзеркальної симетрії функції $r(h)$, похідні інтерполяційної функції $r_{кб}(h)$ в точках $h_{c1} = h_{\phi} - h_{к}$ та $h_{c2} = h_{\phi} + h_{к}$ з правого та з лівого боку мають бути однаковими. Ця умова цілком відповідає положенням відомої теорії сплайнової інтерполяції [16].

З урахуванням умови (2) для трьох точок інтерполяції можна записати повну та зімкнену систему лінійних рівнянь, з яких визначаються коефіцієнти лінійної та параболічної функції [13]. Оскільки на інтервалі $[h_{c1}, h_{c2}]$ використовується параболічна інтерполяція, а за межами цього інтервалу – лінійна інтерполяція функції $r(h)$, аналітичний вираз для функції комбінованої інтерполяції $r_{кб}(h)$ можна записати з використанням відомого з теорії математичної логіки формалізму арифметико-логічних виразів [18]. У роботі [13] для трьох базових точок інтерполяції з координатами $P_1 = (h_1, r_1)$, $P_2 = (h_2, r_2)$ та $P_3 = (h_3, r_3)$ для функції $r_{кб}(h)$ були отримані наступні аналітичні співвідношення:

$$r_{кб}(h) = \left((h > h_{c2}) \vee (h < (2h_{кф} - h_{c2})) \right) \cdot p(h) + \left((h \leq h_{c2}) \vee (h \geq (2h_{кф} - h_{c2})) \right) \cdot r_{л}(h),$$

$$p(h) = C_{к2}h^2 + C_{к1}h + C_{к0}, \quad C_{к2} = \frac{k}{2(h_{c2} - h_{кф})}; \quad C_{к1} = k \cdot \left(1 - \frac{h_{c2}}{2(h_{c2} - h_{кф})} \right); \quad (4)$$

$$C_0 = r_{c1} - C_{к2}h_{c1}^2 - C_{к1}h_{c1}; \quad r_{c1} = \min(r_1, r_2, r_3); \quad r_{л}(h) = |k(h - h_{кф})| + r_{кф};$$

$$k = \frac{r_1 - r_2}{h_1 - h_2}; \quad h_{кф} = \frac{1}{2} \cdot \left(h_3 + h_2 + \frac{r_3 - r_2}{k} \right); \quad r_{кф} = \frac{kh_2 + 3 \cdot (r_3 + k \cdot h_3)}{2} - r_2;$$

де $h_{кф}$ – положення фокусу електронного пучка, $r_{кф}$ – його фокальний радіус, r_{c1} – радіус електронного пучка у точці спряження h_{c1} , тобто $r_{c1} = r(h_{c1})$.

Результати комбінованої інтерполяції, з використанням співвідношень (4), числових даних, отриманих в результаті чисельних розрахунків граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка в іонізованому газі з використанням співвідношень (3) та наведених у графічному вигляді на рис. 1, будуть наведені у наступному розділі статті.

Інтерполяції яружних залежностей з використанням відповідного класу алгебраїчних функцій. Як було відзначалося раніше, головним недоліком описаного у попередньому підрозділі методу комбінованої інтерполяції є складність пошуку положення точок спряження h_{c1} та h_{c2} , яке забезпечує мінімальну похибку інтерполяції. Крім цього, лінійні та параболічні залежності не завжди правильно описують яружні залежності, які відповідають граничним траєкторіям короткофокусних електронних пучків за умови транспортування пучка в іонізованому залишковому газі.

Іншим підходом до інтерполяції граничної траєкторії короткофокусних електронних пучків є використання спеціальних класів алгебраїчних функцій. Головною особливістю таких функцій має бути те, що за межами області мінімуму вони повинні бути близькими до лінійних. З теорії математичних функцій відомо, що саме така властивість притаманна функціям, які описуються як корінь степені n із поліномів відповідної степені [16, 19], тобто:

$$r(h) = \sqrt[n]{C_n h^n + C_{n-1} h^{n-1} + \dots + C_2 h^2 + C_1 h + C_0}, \quad (5)$$

де C_0, \dots, C_n – поліноміальні коефіцієнти, які визначаються як результат розв’язування системи лінійних рівнянь:

$$C_n h_i^n + C_{n-1} h_i^{n-1} + \dots + C_2 h_i^2 + C_1 h_i + C_0 = r_i^n, \quad i \in [0, \dots, n]. \quad (6)$$

Зрозуміло, що кількість рівнянь у системі (6), яка безпосередньо впливає із співвідношення (5), становить $n + 1$, тому значення n можна вважати порядком функції інтерполяції (5). Наприклад, у разі $n = 2$ функція (5) переписується у вигляді [20]:

$$r(h) = \sqrt{C_2 h^2 + C_1 h + C_0}. \quad (7)$$

Тоді кількість базових точок, яка забезпечує зімкнутість та несуперечливість системи рівнянь (8), також складає $n + 1$. Тобто, для випадку $n = 2$ слід брати 3 базові точки, як і для комбінованої інтерполяції. За таких умов система лінійних рівнянь (6) має наступний аналітичний розв’язок [20]:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{r_2^2 - r_1^2}{h_2 - h_1}, & k_2 &= \frac{r_3^2 - r_1^2}{h_3 - h_1}, & k_3 &= \frac{h_2 + h_1}{h_3 - h_2}, & C_2 &= \frac{k_2 - k_1}{h_3 - h_2}, & C_1 &= k_1 - (k_2 - k_1)k_3; \\ C_0 &= r_1^2 - \frac{k_2 - k_1}{h_3 - h_2} h_1^2 - (k_1 - (k_2 - k_1)k_3)h_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Зрозуміло, що, у разі малого значення похибки інтерполяції, положення фокусу короткофокусного електронного пучка відповідає положенню мінімуму функції (7) для значень поліноміальних коефіцієнтів C_0, C_1 та C_2 , обчислених з використанням співвідношень (8). Враховуючи це, можна записати наступні аналітичні вирази для визначення положення фокусу електронного пучка та його фокального радіусу [20]:

$$h_{\phi 2} = -\frac{C_1}{2C_2}, \quad r_{\phi 2} = \sqrt{C_0 - \frac{C_1^2}{4C_2}}. \quad (9)$$

Розглянемо інший випадок. У разі $n = 3$ функція (5) записується наступним чином:

$$r(h) = \sqrt[3]{C_3 h^3 + C_2 h^2 + C_1 h + C_0}, \quad (10)$$

а аналітичні співвідношення для коефіцієнтів C_0, C_1, C_2 та C_3 , отримані як результат розв’язування системи рівнянь (7), записуються у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{r_3^3 - r_1^3}{h_3 - h_1}, & k_2 &= \frac{r_2^3 - r_1^3}{h_2 - h_1}, & k_3 &= \frac{h_2^2 - h_3^2 - h_3 h_1 + h_2 h_1}{h_2 - h_3}, & k_4 &= \frac{h_2^2 - h_4^2 - h_4 h_1 + h_2 h_1}{h_2 - h_4}, \\ k_5 &= \frac{r_2^3 - r_1^3}{h_2 - h_1}, & k_6 &= \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4}, & C_3 &= \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4}, & C_2 &= k_1 - \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4} k_3; \\ C_1 &= k_5 - (h_2^2 + h_2 h_1 + h_1^2)k_6 - (h_2 + h_1)(k_1 - k_6 k_3); \\ C_0 &= r_1^3 - C_3 h_1^3 - C_2 h_1^2 - C_1 h_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Співвідношення для фокальних параметрів короткофокусного електронного пучка, у разі використання функції інтерполяції, заданої співвідношеннями (10, 11), можна записати наступним чином:

$$h_{f3} = -\frac{c_2}{3c_3}, \quad r_{f3} = \sqrt[3]{C_0 + \frac{2C_2^3}{27C_3^2} - \frac{C_1C_2}{3C_3}}. \quad (12)$$

Результати інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка з використанням співвідношень (7, 8) для трьох базових точок, у порівнянні з результатами комбінованої інтерполяції, для числових даних, отриманих в результаті чисельного розв'язування системи рівнянь (3) та наведених у графічному вигляді на рис. 1, будуть розглянуті у наступному розділі статті.

Результати інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за трьома базовими точками. Результати комбінованої та поліноміальної інтерполяції для даних чисельного моделювання, отриманих з використанням співвідношень (3) та наведених у графічному вигляді рис. 1, для різних значень прискорювальної напруги наведені на рис. 2, там же колами відмічені обрані базові точки.

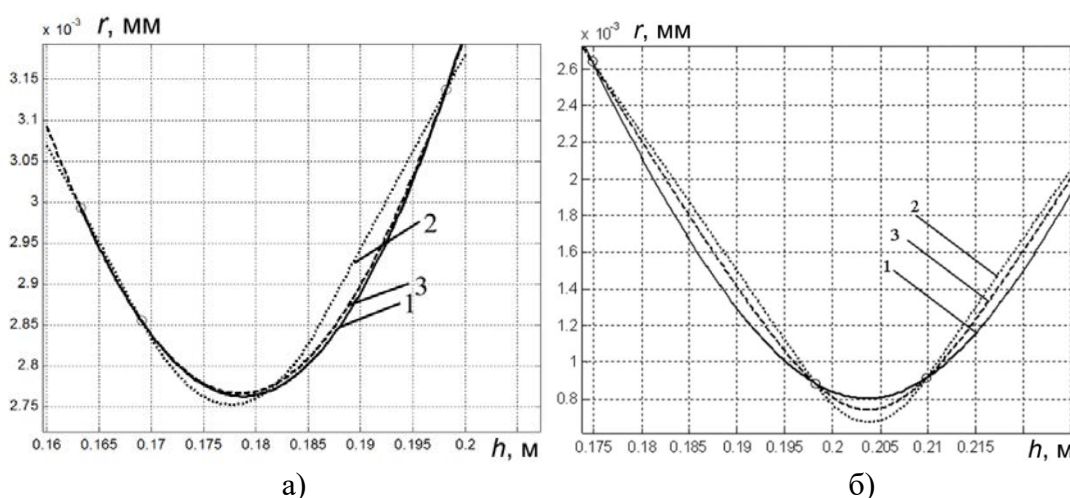


Рис. 2. Результати інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка для числових даних, наведених у графічній формі на рис. 1. 1 – результати чисельного моделювання, 2 – комбінована інтерполяція з використанням співвідношень (4), 3 – функціональна інтерполяція з використанням співвідношень (7, 8): а – $U_{пр} = 12$ кВ, б – $U_{пр} = 14$ кВ.

Із наведених графічних залежностей ясно видно, що інтерполяція з використанням співвідношень (7, 8) дає значно меншу похибку відносно даних чисельного моделювання, ніж комбінована інтерполяція. У табл. 2 наведені оцінки фокальних параметрів електронного пучка, проведені з використанням співвідношень (4) та (9).

Для проведення оцінки точного значення фокальних параметрів електронного пучка, за результатами чисельних розрахунків його граничної траєкторії, проведених з використанням системи алгебро-диференціальних рівнянь (3), використовувалось відоме співвідношення теорії числових алгоритмів та розв'язування екстремальних задач [19]:

$$r_f = \min(r_i), \quad h_f = \operatorname{argmin}(r_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (13)$$

де N – кількість дискретних точок у наборі числових даних, який аналізується.

Відносна похибка інтерполяції розраховувалась наступним чином [16]:

$$\varepsilon(h) = \frac{|p_{чис} - p_{інт}|}{p_{чис}} 100\%, \quad (14)$$

де $p_{\text{чис}}$ – результати чисельних розрахунків даного фокального параметру, які виконані з використанням співвідношення (13) та вважаються достовірними, $p_{\text{інт}}$ – результати інтерполяції, отримані з використанням співвідношень (4) та (9).

Таблиця 2

Результати оцінки фокальних параметрів короткофокусного електронного пучка з використанням різних методів інтерполяції

$U_{\text{пр}}, \text{кВ}$	Точне значення за результатами чисельного моделювання		Комбінована інтерполяція		Інтерполяція з використанням співвідношень (7, 8)	
			Отримане значення	Похибка, %	Отримане значення	Похибка, %
10	Положення фокусу, м	0,1772	0,1785	0,73	1,7680	0,22
	Фокальний радіус, мм	6,6813	6,4025	4,17	6,6492	0,48
12	Положення фокусу, м	0,17882	0,17765	0,65	0,17845	0,2
	Фокальний радіус, мм	2,7636	2,7538	0,35	2,7673	0,13
13	Положення фокусу, м	0,19957	0,19987	0,15	0,19943	0,07
	Фокальний радіус, мм	1,3633	1,2647	7,2	1,302	5
14	Положення фокусу, м	0,2035	0,20382	0,16	0,20372	0,11
	Фокальний радіус, мм	0,80316	0,674886	16	0,741285	7,7

З наведених у табл. 2 оцінок фокальних параметрів короткофокусного електронного пучка видно, що використання співвідношень (7, 8) дозволяє отримати досить точне значення як для положення фокусу, так і для діаметру електронного пучка в фокусі. Похибка таких оцінок, згідно із таблицею 2, не перевищує 7%, а у більшості випадків складає лише частку відсотків. У разі використання комбінованої інтерполяції похибка оцінки фокальних параметрів короткофокусного електронного пучка є значно більшою та для окремих випадків може досягати 16%.

Обговорення отриманих результатів. Проведені дослідження показали, що запропонований у роботі [13] метод комбінованої інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка дає значно більшу похибку, ніж використання алгебраїчних співвідношень (5), в яких поліноміальні коефіцієнти C_0, \dots, C_n визначаються через аналітичне розв'язування системи рівнянь (6). Тестові розрахунки були проведені для функції інтерполяції другого порядку, але отримані також аналітичні співвідношення (10–12) для функції інтерполяції третього порядку. Через розв'язування системи рівнянь (6) можливо також отримати аналітичні розв'язки для функцій інтерполяції (5) більш високих порядків. Проте підвищення порядку функції інтерполяції та, відповідно, кількості відлікових точок, не завжди веде до підвищення точності розв'язування задачі інтерполяції, а складність числових розрахунків за такої умови зазвичай непомірно зростає [16]. Дослідження можливості використання функцій інтерполяції (5) більш

високих порядків для розв'язування поставленого завдання інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за умови його транспортування в іонізованому газі є предметом подальших, окремих теоретичних досліджень та тестових експериментів. Також окремим завданням є порівняння результатів числових оцінок за ітераційними співвідношеннями з експериментальними даними.

Висновки

Результати проведених теоретичних досліджень та тестових експериментів показали, що з двох розглянутих методів інтерполяції граничної траєкторії короткофокусного електронного пучка за умови його проведення в іонізованому газі більш простим з обчислювальної точки зору є використання алгебраїчних функцій, заданих співвідношеннями (5, 6), але цей метод дає й меншу похибку інтерполяції. Тестові експерименти були проведені для трьох базових точок тобто, для значення порядку функції інтерполяції $n = 2$. Проте система лінійних алгебраїчних рівнянь (6) є універсальною та дозволяє отримати поліноміальні коефіцієнти C_0, \dots, C_n для функцій (5) будь-якого порядку. У статті наведені аналітичні співвідношення (10–12), які записані для випадку $n = 3$, та, відповідно, для чотирьох базових точок. Також отримані співвідношення (9, 12), за допомогою яких можна оцінювати фокальні параметри короткофокусного електронного пучка для функцій інтерполяції другого та третього порядків. З використанням співвідношень (13–14) обчислені похибки оцінювання фокальних параметрів електронного пучка відносно даних чисельних розрахунків.

Отримані в статті результати чисельного моделювання граничної траєкторії короткофокусних електронних пучків за умови їх транспортування в низькому вакуумі в іонізованому газі можуть бути ефективно використані для оцінки фокальних параметрів короткофокусних електронних пучків, які формуються електронними гарматами ВТР, на початковому етапі їх проектування гармати. У такому разі для пошуку базових точок інтерполяції використовується математична модель граничної траєкторії електронного пучка, записана у вигляді системи алгебро-диференціальних рівнянь (3).

Результати проведених комп'ютерних експериментів, щодо оцінювання фокальних параметрів короткофокусних електронних пучків, за умови їх проведення в іонізованому газі з компенсацією просторового заряду електронів пучка іонами залишкового газу, є вкрай цікавими для фахівців, які займаються розробкою сучасного електронно-променевого обладнання та його впровадженням у промислове виробництво.

Список використаної літератури

1. Рыкалин Н. Н., Зуев И. В., Углов А. А. Основы электронно-лучевой обработки материалов. Москва: Машиностроение, 1978. 239 с.
2. Шиллер З., Гайзиг У., Панцер З. Электронно-лучевая технология. Москва: Энергия, 1980. 528 с.
3. Электронно-лучевая сварка. Под общей редакцией Патона Б.Е. Киев: Наукова думка, 1987. 256 с.
4. Завьялов М. А., Крейндель Ю. Е., Новиков А. А., Шантурин Л. П. Плазменные процессы в технологических электронных пушках. Москва: Атомиздат, 1989. 256 с.
5. Лозовский В. Н., Константинова Г. С., Лозовский С. В. Нанотехнология в электронике. СПб.: Издательство «Лань», 2008. 336 с.
6. Kovalchuk D., Melnyk V., Melnyk I., Tugai B. Advanced Technical and Technological Solutions for Additive Manufacturing by e-Beam 3D Metal Printing. *Electrotechnics and Electronics*. 2018. Vol. 53. Issue 3-4. P. 60–68.
7. Krasik Y. E., Gleizer J. Z., Krokhal A., Chirko K. et al. High-Current Electron Sources Based on Gaseous Discharges. *Vacuum*. 2003. Vol. 77. № 4. P. 391–398.

8. Gruzdev V. A., Zaleski V. G., Antonovich D. A., Golubev V. P. Universal Plasma Electron Source. *Vacuum*. 2003. Vol. 77. № 4. P. 399–406.
9. Denbnovetskiy S., Melnyk V., Melnyk I., Tugai B., Tuhai S., Wojcik W., Lawicki T., Assambay A., Luganskaya S. Principles of Operation of High Voltage Glow Discharge Electron Guns and Particularities of its Technological Application. Proceedings of the *SPIE: The International Society of Optical Engineering*. (USA, Bellingham, August 7, 2017). Bellingham, pp. 10445–10455.
10. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. Москва: Мир, 1980. 438 с.
11. Молоковский С. И., Сушков Д. И. Интенсивные электронные и ионные пучки. Москва: Энергоатомиздат, 1991. 304 с.
12. Силадьи М. Электронная и ионная оптика. Москва: Мир, 1990. 640 с.
13. Мельник И. В., Починок А. В. Интерполяция граничной траектории электронного пучка в прифокальной области линейными и квадратичными функциями с использованием арифметико-логических выражений. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. Вип. 2 (69). Частина 2. С. 23–30.
14. Денбновецкий С. В., Мельник В. И., Мельник И. В., Тугай Б. А. Моделирование транспортировки короткофокусных электронных пучков из низкого в высокий вакуум с учетом разброса тепловых скоростей электронов. *Прикладная физика*. 2010. №3. С. 84–90.
15. Melnyk I. V. Methodic of Simulation of Guiding of Short-Focus Electron Beam in the Equipotential Transporting Channel of High Voltage Glow Discharge Electron Guns. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Радіофізика та електроніка*. 2015. № 1 (23). С. 57–62.
16. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва: Наука, 1989. 432 с.
17. Починок А. В. Сравнение вычислительных методов определения энергии электронов по результатам дозиметрии. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2010. № 890. С. 187–194.
18. Мельник И. В. Анализ возможностей использования матричных макроопераций системы MatLab при решении прикладных задач. *Электронное моделирование*. 2009. № 3. С. 37–51.
19. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. 552 с.
20. Melnik I., Tugay S., Pochynok A. Interpolation Functions for Describing the Boundary Trajectories of Electron Beams Propagated in Ionised Gas. Proceedings of the *Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET – 2020): 15th International Conference*. (Lviv, February 25-29, 2020). Lviv: Lviv Polytechnic National University, 2020, pp. 79–83. URL: https://www.researchgate.net/publication/341248002_Interpolation_Functions_for_Describing_the_Boundary_Trajectories_of_Electron_Beams_Propagated_in_Ionised_Gas

References

1. Ryikalin, N. N., Zuev, I. V., & Uglov, A. A. (1978). *Osnovy elektronno-luchevoy obrabotki materialov*. Moskva: Mashinostroenie.
2. Shiller, Z., Gayzig, U., & Pantser, Z. (1980). *Elektronno-luchevaya tehnologiya*. Moskva: Energiya.
3. Paton, B. E. (Ed.). (1987). *Elektronno-luchevaya svarka*. Kiev: Naukova dumka.
4. Zavyalov, M. A., Kreyndel, Yu. E., Novikov, A. A., & Shanturin, L. P. (1989). *Plazmennyye protsessyy v tehnologicheskikh elektronnykh pushkakh*. Moskva: Atomizdat.

5. Lozovskiy V. N., Konstantinova G. S., & Lozovskiy S. V. (2008). *Nanotekhnologiya v elektronike*. Saint-Petersburg: Lan.
6. Kovalchuk, D., Melnyk, V., Melnyk, I., Tugai, B. (2018). Advanced Technical and Technological Solutions for Additive Manufacturing by e-Beam 3D Metal Printing. *Electrotechnics and Electronics*. **53**, 3-4, 60–68.
7. Krasik, Y. E., Gleizer, J. Z., Krokhmal, A., & Chirko, K. et al. (2003). High-Current Electron Sources Based on Gaseous Discharges. *Vacuum*. **77**, 4, 391–398.
8. Gruzdev, V. A., Zalesski, V. G., Antonovich, D. A., & Golubev, V. P. (2003). Universal Plasma Electron Source. *Vacuum*. **77**, 4, 399–406.
9. Denbnovetskiy, S., Melnyk, V., Melnyk, I., Tugai, B., Tuhai, S., Wojcik, W., Lawicki, T., Assambay, A., & Luganskaya, S. (2017). Principles of Operation of High Voltage Glow Discharge Electron Guns and Particularities of its Technological Application. Proceedings of the *SPIE: The International Society of Optical Engineering*. (USA, Bellingham, August 7, 2017). Bellingham, pp. 10445–10455.
10. Louson, Dzh. (1980). *Fizika puchkov zaryazhennykh chastits*. Moscow: Mir.
11. Molokovskiy, S. I., & Sushkov, D. I. (1991). *Intensivnyye elektronnyye i ionnyye puchki*. Moskva: Energoatomizdat.
12. Siladi, M. (1990). *Elektronnaya i ionnaya optika*. Moskva: Mir.
13. Melnik, I. V., & Pochinok, A. V. (2019). Interpolyatsiya granichnoy traektorii elektronnoy puchki v prifokalnoy oblasti lineynymi i kvadrachnyimi funktsiyami s ispolzovaniem arifmetiko-logicheskikh vyrazheniy. *Visnik Hersonskogo natsionalnogo tehnichnogo universitetu*. **2** (69), Part 2, 23–30.
14. Denbnovetskiy, S. V., Melnik, V. I., Melnik, I. V., & Tugay, B. A. (2010). Modelirovanie transportirovki korotkofokusnykh elektronnykh puchkov iz nizkogo v vyisokiy vakuum s uchetom razbrosa teplovykh skorostey elektronov. *Prikladnaya fizika*. **3**, 84–90.
15. Melnyk, I. V. (2015). Methodic of Simulation of Guiding of Short-Focus Electron Beam in the Equipotential Transporting Channel of High Voltage Glow Discharge Electron Guns. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seria: Radiofizyka ta elektronika*. **1** (23), 57–62.
16. Samarskiy, A. A., & Gulin, A. V. (1989). *Chislennyye metody*. Moskva, Nauka.
17. Pochynok, A. V. (2010). Sravnenie vyichislitelnykh metodov opredeleniya energii elektronov po rezul'tatam dozimetrii. *Visnyk Harkivskogo natsionalnogo universitetu imeni V. N. Karazina. Seryia «Matematichne modelyuvannya. Informatsiyi tehnologii. Avtomatizovani systemy upravlinnya»*. **890**, 187–194.
18. Melnik, I. V. (2009). Analiz vozmozhnostey ispolzovaniya matrichnykh makrooperatsiy sistemyi MatLab pri reshenii prikladnykh zadach. *Elektronnnoye modelirovanie*. **3**, 37–51.
19. Vasilev, F. P. (1988). *Chislennyye metody resheniya ekstremalnykh zadach*. Moskva: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury.
20. Melnik, I., Tugay, S., & Pochynok, A. (2020). Interpolation Functions for Describing the Boundary Trajectories of Electron Beams Propagated in Ionised Gas. Proceedings of the *Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET – 2020): 15th International Conference*. (Lviv, February 25-29, 2020). Lviv: Lviv Polytechnic National University, pp. 79–83. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/341248002_Interpolation_Functions_for_Describing_the_Boundary_Trajectories_of_Electron_Beams_Propagated_in_Ionised_Gas

Мельник Ігор Віталійович – д. т. н., професор, професор кафедри електронних пристроїв та систем, факультет електроніки Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: imelnik@phbme.kpi.ua, ORCID: 0000-0003-0220-0615

Починок Аліна Володимирівна – к. т. н., доцент, доцент кафедри інформаційних систем та технологій Університет державної фіскальної служби України, Навчально-науковий інститут інформаційних технологій, м. Ірпінь, Київська область, e-mail: alina_pochynok@yahoo.com, ORCID: 0000-0001-9531-7593.

УДК 004.378

О.О. МОСКАЛЕНКО, Т.А. ГРИГОРОВА
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

АЛГОРИТМИ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ ДЛЯ ПОШУКУ ІНФОРМАЦІЇ В СИСТЕМАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Належний пошук відіграє велику роль в умовах інформаційної насиченості. З кожним днем в пошукових системах індексується все більше інформації, а тому і зростає кількість інформаційного сміття. Для пошуку інформації в мережі інтернет все більш актуальним являється використання алгоритмів штучного інтелекту для видачі більш точного результату та відсіювання зайвої інформації для пошукового запиту. В роботі було досліджено методи і алгоритми штучного інтелекту, які використовуються для пошуку інформації. Для пошуку наукової і навчальної інформації в системі дистанційного навчання було обрано алгоритми колоборативної фільтрації, класифікації та задачі пошуку асоціативних правил. Алгоритми було модифіковано і використано для пошуку матеріалу, враховуючи інтереси користувача. Було розширено базу даних дистанційної системи, створено таблиці: історія пошукових запитів, унікальних пошукових запитів (без повторень), ключових слів, зв'язок ключових слів з унікальним пошуковим запитом, зв'язок користувача з ключовими словами. Таблиці дали можливість організувати інтелектуальний пошук за заданим критерієм. В статті наведено алгоритм для зберігання ключових слів та зв'язку ключових слів з пошуковим запитом та з користувачем. Завдяки цьому алгоритму, якщо виконується пошук по заданому критерію, при повторному пошуку з'являється список ключових слів, схожих за змістом на заданий критерій, які були в переглянутих матеріалах. Цей список формується з ключових слів до статті, яка зацікавила користувача, таким чином можна виявити пріоритети, які є у користувача при пошуку наукової і навчальної інформації. При необхідності можна скористатися ключовим словом для пошуку. Користувач може зберігати посилання на той чи інший ресурс, якщо вони були корисними. Ці посилання пропонуються іншому користувачу, який шукає таку саму інформацію. За рахунок використання алгоритму штучного інтелекту при розширенні пошукового модулі, пошукова система значно розширила можливості пошуку. Пошукова система враховує інтереси кожного користувача і є частиною системи дистанційного навчання. Користувачі отримали можливість зручного і швидкого пошуку наукової і навчальної інформації.

Ключові слова: штучний інтелект, машинне навчання, інтелектуальний пошук, класифікація, кластеризація, колаборативна фільтрація.

А.А. МОСКАЛЕНКО, Т.А. ГРИГОРОВА
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского

АЛГОРИТМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ ПОИСКА ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМАХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Надлежащий поиск играет важную роль в условиях информационной насыщенности. С каждым днем в поисковых системах индексируется все больше информации, а потому и растет количество информационного мусора. Для поиска информации в сети интернет все более актуальным является использование алгоритмов искусственного интеллекта для выдачи более точного результата и отсеивания лишней информации для поискового запроса. В работе были исследованы методы и алгоритмы искусственного интеллекта, которые используются для поиска информации. Для поиска научной и учебной информации в системе дистанционного

обучения были выбраны алгоритмы колаборативной фильтрации, классификации и задачи поиска ассоциативных правил. Алгоритмы были модифицированы и использованы для поиска материала, учитывая интересы пользователя. Расширена база данных дистанционной системы, созданы таблицы: история поисковых запросов, уникальных поисковых запросов (без повторений), ключевых слов, связь ключевых слов с уникальным поисковым запросом, связь пользователя с ключевыми словами. Таблицы позволили организовать интеллектуальный поиск по заданному критерию. В статье приведен алгоритм для хранения ключевых слов и связи ключевых слов с поисковым запросом и с пользователем. При помощи этого алгоритма, если выполняется поиск по заданному критерию, при повторном поиске появляется список ключевых слов, похожих по содержанию на заданный критерий, которые были в просмотренных материалах. Этот список формируется из ключевых слов к статье, которая заинтересовала пользователя, таким образом можно выявить приоритеты, которые имеются у пользователя при поиске научной и учебной информации. При необходимости можно воспользоваться ключевым словом для поиска. Пользователь может сохранять ссылки на тот или иной ресурс, если они были полезными. Эти ссылки предлагаются другому пользователю, который ищет такую же информацию. За счет использования алгоритма искусственного интеллекта при расширении поискового модуля, поисковая система значительно расширила возможности поиска. Поисковая система учитывает интересы каждого пользователя и является частью системы дистанционного обучения. Пользователи получили возможность удобного и быстрого поиска научной и учебной информации.

Ключевые слова: Искусственный интеллект, машинное обучение, интеллектуальный поиск, классификация, кластеризация, колаборативная фильтрация.

O.O. MOSKALENKO, T.A. HRYHOROVA

Kremenchuk Mykhailo Ostohradskyi National University, Kremenchuk, Ukraine

ARTIFICIAL INTELLIGENCE ALGORITHMS FOR SEARCHING INFORMATION IN E-LEARNING SYSTEMS

Proper search plays an important role in the context of information saturation. Every day more and more information is indexed in search engines, and therefore the amount of information waste is increasing. To search for information on the Internet, it is increasingly important to use artificial intelligence algorithms to produce more accurate results and filter out unnecessary information for a search query. The methods and algorithms of artificial intelligence that are used to search for information were investigated during work. The co-filtering algorithm, classification algorithm, and associative rule search algorithm were chosen to search for scientific and educational information in the e-learning system. The algorithms have been modified and used to search for material based on user interests. The remote database was expanded, tables were created: search history, unique searches (no repetitions), keywords, unique keyword searches, user relationship with keywords. The tables gave the opportunity to organize intelligent search by a given criterion. The article provides an algorithm for storing keywords and linking keywords to a search query and to a user. Using this algorithm, if a search is performed according to a specified criterion, a list of keywords appears when searching again. These words are similar in content to a given criterion; they were used in the viewed materials. This list is formed of keywords for the article that interested the user. Thus, it is possible to identify the priorities that the user has when searching for scientific and educational information. You can use the search keyword as needed. The user can save links to a particular resource if they were useful. These links are

offered to another user who is looking for the same information. Through the use of artificial intelligence algorithm in the search module, the search engine has greatly expanded the search capabilities. The search system takes into account the interests of each user and is part of a e-learning system. Users have the opportunity to conveniently and quickly search for scientific and educational information.

Keywords: artificial Intelligence, Machine Learning, Intelligent Search, Classification, Clustering, Co-Filtering

Постановка проблеми

В сучасному суспільстві системи дистанційного навчання стають буденністю, майже всі вищі заклади освіти мають свої системи дистанційного навчання. Пошук навчальної і наукової інформації у цих системах має бути зручним і швидким і задовольняти потребам користувача. Це можливо забезпечити засобами штучного інтелекту для пошукових систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Штучним інтелектом можна назвати сукупність технологій, алгоритмів та методів що імітують інтелект людини в деякій моделі реальності. Основними методами штучного інтелекту є наука про дані (Data Science) та машинне навчання (Machine Learning). Зокрема, штучний інтелект використовується для задач, які залежать від багатьох факторів, які потребують складних та важких для розуміння рішень, що складно алгоритмізуються вручну [1].

Машинне навчання – це область штучного інтелекту, в якій застосовуються алгоритми для отримання даних та навчання на їх основі, тобто алгоритм навчається на власному досвіді. Метою машинного навчання є автоматизоване розв’язання різних аналітичних задач. Машинне навчання може бути без вчителя, навчання за допомогою вчителя та комбіноване навчання, в залежності від поставленої задачі.

Можна виділити такі основні типи застосовуваних алгоритмів для машинного навчання: класичне навчання, нейронні мережі та глибоке навчання. Для пошукових систем найчастіше застосовується класичне навчання. Прикладом такого застосування є відображення релевантної реклами в залежності від історії пошукових запитів користувача [2]. До алгоритмів класичного навчання, які використовуються для задач роботи з даними відносяться алгоритм регресії, класифікації, кластеризації, пошуку асоціативних правил.

Задача класифікації в машинному навчанні застосовується тоді, коли є множина об’єктів, які відносяться до деякого класу і необхідно визначити класову належність для невідомих об’єктів.

Задача кластеризації використовується коли є необхідність використовувати машинне навчання без вчителя. В задачі вибірки даних (об’єктів) розбиваються на групи (кластери) в яких дані складаються зі схожих об’єктів. Об’єкти різних кластерів значно відрізняються між собою. В задачі кластеризації необхідно використовувати всі дані та передбачити відповідність об’єктів до кластерів [3].

В задачі пошуку асоціативних правил необхідно знаходити закономірності між подіями, в яких є зацікавленість, у великій базі даних. Це теж відноситься до задач машинного навчання без вчителя. В задачі асоціативних правил сенсом є визначення наборів об’єктів, що часто зустрічаються у великій множині таких наборів [4]. Для розв’язання задач пошуку асоціативних правил використовуються такі основні алгоритми: алгоритм Apriori та алгоритм FP-Growth (Frequent Pattern) [5].

До специфічних задач відноситься задача колоборативної фільтрації (Collaborative Filtering). В ній поєднуються елементи класифікації, кластеризації та

заповнення пропущених даних. Ця задача застосовується для прогнозування переваг користувачів на основі їх попередніх переваг та переваг схожих користувачів.

Мета дослідження

Метою роботи є розробка для системи дистанційного навчання інтелектуального пошуку наукового матеріалу в залежності від інтересів користувача. Алгоритм пошуку повинен враховувати актуальні інтереси користувача та в залежності від них формувати результат пошуку. Пошук наукового матеріалу повинен здійснюватися в наукових журналах.

На кафедрі інформатики та вищої математики Кременчуцького національного університету використовується система дистанційної освіти на базі системи з відкритим кодом E-Front. Для даної системи було розроблено модуль повнотекстового пошуку на базі технології Sphinx, а також підключені API для пошуку в Google, у системі IEEE та Scopus [6]. Цей модуль можливо використовувати і для інших систем дистанційного навчання. В модулі є можливості введення додаткових параметрів, що обмежують або розширюють пошук [7], а також можливості автоматичного перекладу та пошуку на англійській мові. Недоліком такого пошуку є те, що система не враховує інтереси користувачів (пошук за зацікавленістю).

Алгоритм пошуку повинен враховувати належність користувача до кафедри, факультету та формувати групу інтересів в залежності від попередніх запитів пошуку та історії відкритих вкладок. Кожна стаття містить ключові слова, тому група інтересів повинна формуватися з ключових слів статей, які зацікавили користувача. Для перевірки актуальності груп інтересів користувача алгоритм повинен перевіряти поточні пошукові запити на відповідність до минулих груп інтересів, якщо інтереси користувача змінились, необхідно сформувати нову групу інтересів для користувача. Також необхідно формувати свою базу знань (посилання на статтю та короткий опис) в залежності від того, яка інформація з результату пошуку була корисною для користувача, та в подальшому виводити ці результати іншим користувачам по даному пошуковому запиту. Для вирішення цих задач необхідно використовувати алгоритми та методи штучного інтелекту. Всі ці задачі є специфічними, і відносяться відразу до декількох типів задач машинного навчання, вони включають елементи задачі колоборативної фільтрації, класифікації та задачі пошуку асоціативних правил. Для пошукової системи задачею пошуку асоціативних правил є відображення схожих пошукових запитів. Формування груп інтересів користувача відноситься до задачі класифікації. Наприклад, якщо об'єктом є наукова стаття, тоді в задачі класифікації необхідно визначити, до яких наук дана стаття відноситься. Задачею колоборативної фільтрації є формування корисних посилань для подальшої рекомендації цих посилань іншим користувачам.

Для реалізації поставлених задач необхідно розширити існуючу базу даних дистанційної системи. Необхідно створити таблицю, яка буде містити в собі історію пошукових запитів, таблицю для унікальних пошукових запитів (без повторень), таблицю для зберігання ключових слів, таблицю для зв'язку ключових слів з унікальним пошуковим запитом, таблицю для зв'язку користувача з ключовими словами. Також необхідно створити таблицю для зберігання корисних посилань користувача. Таблиця унікальних пошукових запитів повинна мати зв'язок «один до багатьох» з таблицею для зберігання корисних посилань.

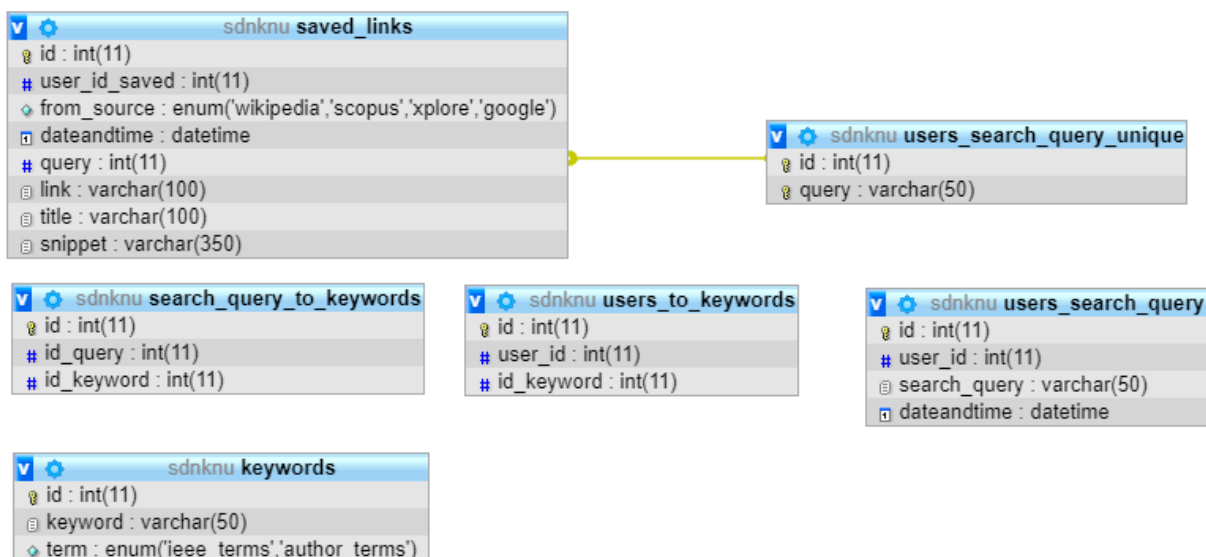


Рис. 1. Модель даних для інтелектуального пошуку.

В системі дистанційного навчання підключені API IEEE та Scopus для пошуку наукового матеріалу.

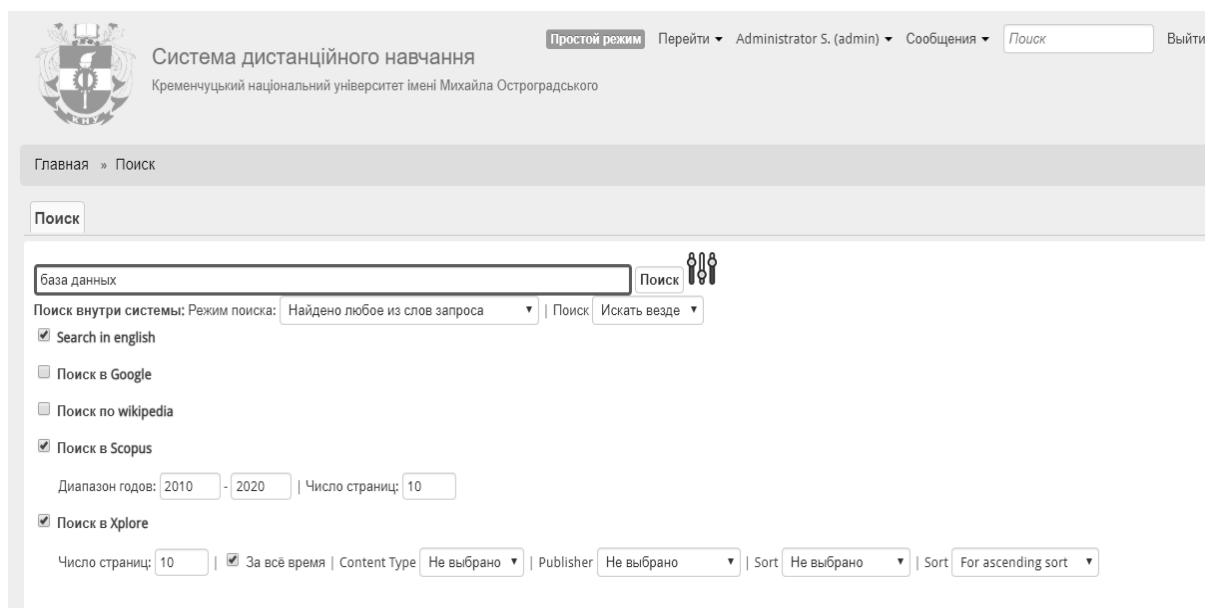


Рис. 2. Пошук в наукових журналах IEEE та Scopus.

Кожна стаття має ключові слова (рис. 3) з яких можна формувати групи інтересів користувача, в залежності від відкритих та збережених сторінок.

Для зберігання ключових слів та зв'язку ключових слів з пошуковим запитом та з користувачем будемо використовувати наступний алгоритм (рис. 4).

Із результатів пошукового запиту в IEEE та Scopus користувач переходить по зацікавленому посиланні. Якщо ми отримали ключові слова статті – створюємо масив ключових слів, зберігаємо ключові слова в таблицю *keywords*, пов'язуємо ключове слово з пошуковим запитом в таблиці *search_query_to_keywords* та пов'язуємо ключове слово з користувачем в таблиці *users_to_keywords*.

Keywords
IEEE Keywords Structured Query Language, Data models, Relational databases, Security, Europe
INSPEC: Controlled Indexing ISO standards, learning (artificial intelligence), legislation, organisational aspects, risk management
INSPEC: Non-Controlled Indexing organisational aspects, learning (artificial intelligence), ISO standards, risk management, legislation, Internet, educational institutions, content management, computer based training, game theory
Author Keywords NoSQL, SQL, MongoDB, MySQL, evaluation, analysis, comparison

Рис. 3. Приклад ключових слів статті в IEEE.

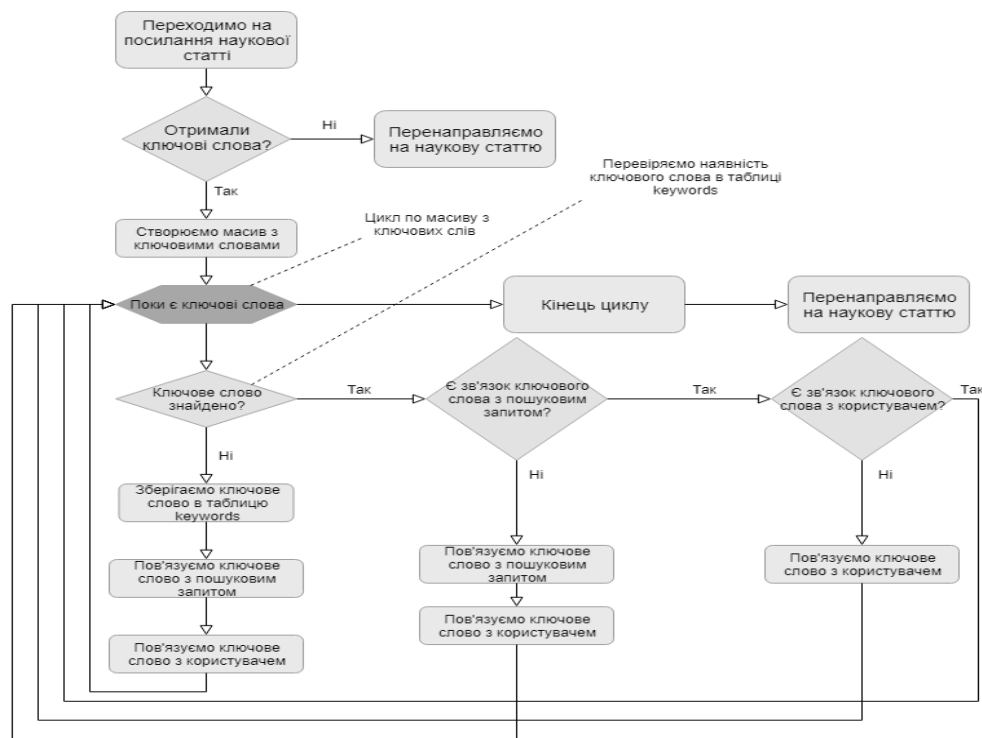


Рис. 4. Алгоритм зберігання та зв'язку ключових слів.

Для отримання ключових слів пошукового запиту для користувача будемо використовувати SQL запит:

```

SELECT keywords.keyword FROM keywords INNER JOIN
users_search_query_unique ON users_search_query_unique.id = $search_query_unique_id
INNER JOIN search_query_to_keywords ON keywords.id =
search_query_to_keywords.id_keyword AND users_search_query_unique.id =
search_query_to_keywords.id_query INNER JOIN users_to_keywords ON
    
```


$users_to_keywords.id_keyword = keywords.id$ AND $users_to_keywords.user_id = \$user_id$
GROUP BY $keywords.keyword$

Де, « $\$search_query_unique_id$ » ід поточного пошукового запиту, а « $\$user_id$ » ід поточного користувача.

Для прикладу, виконаємо пошук по пошуковому запиту «database» в науковому журналі. Після відкриття зацікавлених нас сторінок із результату пошуку виконаємо такий самий пошуковий запит. Після цього, окрім результату пошуку, пошукова система буде пропонувати виконати пошук по ключовим словам для пошукового запиту «database» (рис. 5).



Прикладне програмування в комп'ютерних мережах

- Урок : Особливості роботи програми у локальній та глобальній мережах

Матеріал урока:

- PHP
... з базами даних (Open Database Connectivity Standard — ODBC ...)

- Урок : Різноманітні підходи до мережевого програмування

Матеріал урока:

- Web-додатки з модулями розширення клієнтської частини
Web-додатки з модулями розширення клієнтської частини Для ...
- Дворівневі Web-додатки
Дворівневі Web-додатки При дворівневій архітектурі ...



Сучасні технології програмування

- Урок : Zend Framework

Матеріал урока:

- Фільтрація даних у полях форми відповідають за введення пароля
... , \$password); mysql_select_db(\$ database); ?>

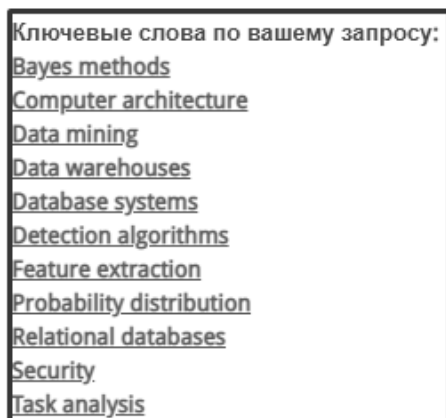


Рис. 5. Відображення ключових слів в результатах пошуку.

Для зберігання корисних посилань, після перегляду посилання пошукова система пропонує зберегти посилання, якщо воно було корисним. Для прикладу виконаємо пошук по запиту «mysql» та збережемо корисні для нас посилання. Після цього зйдемо в систему з іншого акаунту та виконаємо такий самий пошуковий запит (рис. 6).

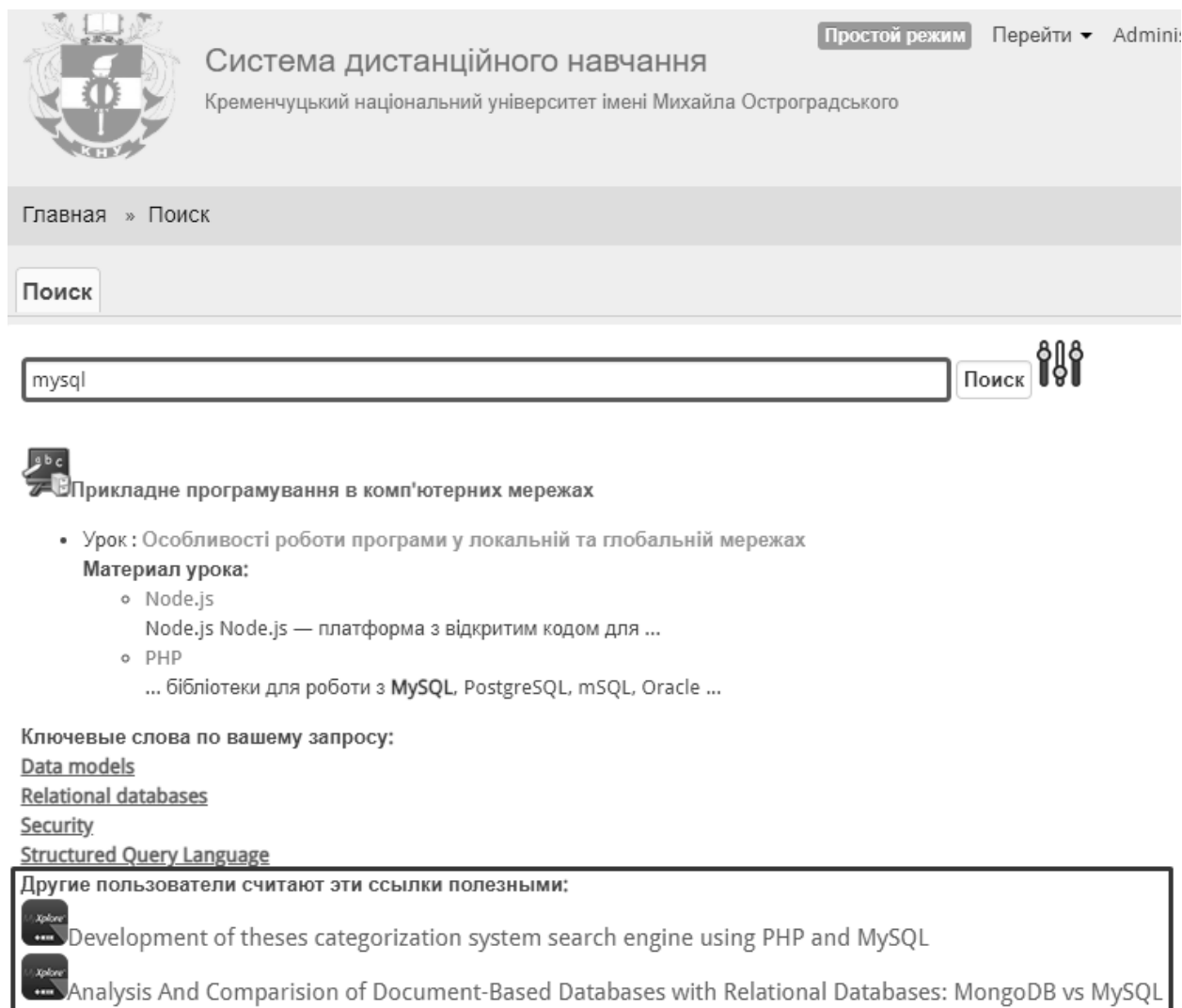


Рис. 6. Відображення корисних посилань в результатах пошуку.

Для відображення схожих пошукових запитів будемо використовувати SQL запит:

```
SELECT users_search_query.search_query FROM users_search_query WHERE
users_search_query.search_query LIKE '%search query%' AND
users_search_query.search_query <> ' search query ' GROUP BY
users_search_query.search_query
```

Перед пошуком будемо перевіряти історію самих повторюваних пошукових запитів користувача:

```
SELECT `search_query` COUNT(*) AS `count` FROM `users_search_query` WHERE
`search_query` IS NOT NULL AND user_id = $user_id GROUP BY `search_query` ORDER
BY `count` DESC LIMIT 2
```

Якщо по даним пошуковим запитама є ключові слова або корисні посилання, тоді будемо відображати їх перед пошуком.

Висновки

В даній роботі було проаналізовано засоби та методи штучного інтелекту, які використовують для пошуку. Були розглянуті алгоритми машинного навчання і їх використання. Для того щоб розширити пошуковий модуль таким чином, щоб пошук враховував актуальні інтереси користувача та в залежності від них формував результат пошуку було модифіковано алгоритми колоборативної фільтрації та класифікації, а також використано алгоритм пошуку асоціативних правил. В результаті пошукова система значно розширила можливості пошуку наукового і навчального матеріалу.

Список використаної літератури

1. Naeem M. Asif, Noreen Asif. A Web Smart Space Framework for Intelligent Search Engines. *International Journal of Emerging Sciences*. 2011. Vol. 1. Issue 1. P. 1–10.
2. Micarelli A., Gaspiretti F., Biancalana C. Intelligent Search on the Internet. In: Stock O., Schaerf M. (eds) *Reasoning, Action and Interaction in AI Theories and Systems. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 4155. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. P. 247–264.
3. Щербakov Д. Как искусственный интеллект повлиял на поисковые системы. URL: <https://www.uplab.ru/blog/artificial-intelligence/>
4. Джуматов Е.К., Вишня А.С., Филиппов С.А. Применение алгоритмов ассоциативных правил для выявления рекомендуемых к продаже товаров строительной отрасли. *Теория. Практика. Инновации*. 2018. № 1. С. 1–15. URL: <http://www.tpinauka.ru/2018/02/Jumatov.pdf>
5. Artificial Intelligence Applications in Search Engines. URL: <https://medium.com/aimarketingassociation/artificial-intelligence-applications-in-search-engines-437c57f8b265>
6. Hryhorova T., Moskalenko O.O. Use of Information Technologies to Improve Access to Information in E-Learning Systems. *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information*. Springer Nature Switzerland AG, 2019. P. 206–215. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_21.
7. Москаленко О.О., Григорова Т.А. Особливості пошуку навчальної та наукової інформації в системах електронного навчання. *Системи та засоби штучного інтелекту: матеріали міжнародної наукової молодіжної школи*, (м. Київ, 18 жовтня 2018). Київ, 2018. С. 80–85.

References

1. Naeem, M. Asif, & Noreen, Asif. (2011). A Web Smart Space Framework for Intelligent Search Engines. *International Journal of Emerging Sciences*. **1**, 1, 1–10.
2. Micarelli, A., Gaspiretti, F., & Biancalana, C. (2006). Intelligent Search on the Internet. In: Stock O., Schaerf M. (eds) *Reasoning, Action and Interaction in AI Theories and Systems. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 4155. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 247–264.
3. Sherbakov, D. Kak iskusstvenny intellekt povliyal na poiskovye sistemy. Retrieved from <https://www.uplab.ru/blog/artificial-intelligence/>
4. Djumatov, E. K., Vishnya, A. S., & Filippov, S. A. (2018). Primenenie algoritmov asociativnyh pravil dlya vyyavleniya rekomenduemyh k prodage tovarov stroitelnoyi otrasli. *Teoriya. Praktika. Inovacii*. **1**, 1–15. Retrieved from <http://www.tpinauka.ru/2018/02/Jumatov.pdf>
5. Artificial Intelligence applications in search engines. Retrieved from <https://medium.com/aimarketingassociation/artificial-intelligence-applications-in-search-engines-437c57f8b265>

6. Hryhorova, T., & Moskalenko, O. O. (2019). Use of Information Technologies to Improve Access to Information in E-Learning Systems. *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information*. Springer Nature Switzerland AG, pp. 206–215. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_21.
7. Moskalenko, O. O., & Hryhorova T. A. Osoblyvosti poshuku navchalnoi ta naukovoї informacii v systemah elektronnoho navchannya. Proceedings of the *Systemy ta zasoby shtuchnogo intelektu*: Materialy mignarodnoi naukovos konferencii molodignoi shkoly. (Ukraine, Kyiv, October 18, 2018). Kyiv, pp. 80 – 85.

Москаленко Олександр Олександрович – аспірант кафедри інформатики і вищої математики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, e-mail: alexsashamosk@gmail.com.

Григорова Тетяна Альбертівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформатики і вищої Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, e-mail: grital0403@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4371-8624.

УДК 514.18

А.Ю. НИЦЫН

Харьковский технический университет «Харьковский политехнический институт»

**ГРУППЫ СИММЕТРИИ ОРНАМЕНТА НА ЭСКИЗЕ М. К. ЭШЕРА
«ЯЩЕРИЦЫ» И ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ
ОБРАЗОВАНИЕ ЕГО ФИГУРНОЙ ПЛИТКИ**

Способы построения фигурных плиток, стилизующих изображения животных и растений и целиком заполняющих плоскость, не являются в настоящее время предметом научных исследований. Это объясняется тем, что авторы многих научных трудов рассматривают гравюры М. К. Эшера как мозаику, составленную из многоугольников с нанесённым на них повторяющимся рисунком. Поэтому они ищут в них фрагменты, которые вписываются в ромбы, квадраты, правильные треугольники или правильные шестиугольники, и с их помощью составляют мозаику. Мы же пошли другим путём – путём открытия законов симметрии, позволяющих построить плоскую фигуру, стилизующую образы растений и животных и заполняющую плоскость без наложений и пропусков.

Таким образом, цель статьи состоит в том, чтобы установить правило построения фигуры, стилизующей изображения животных и растений и заполняющей плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений.

Предложено правило построения фигурных плиток, стилизующих изображения растений и животных и заполняющих плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений, в частности фигурных плиток, обобщающих изображения зооморфных форм на эскизах М. К. Эшера «Ящерицы» и «Бабочки». Предложенное правило было применено для составления орнаментов, стилизующих эскизы М. К. Эшера «Ящерицы» и «Бабочки». Показано, что данные орнаменты имеют множество осей симметрии 3-го порядка, множество осей симметрии 6-го порядка и шесть векторов трансляции. Выявлена связь между движениями плоскости, приводящими к образованию фигурной плитки, и группой симметрии орнамента, полученного на её основе. Установлено, что симметрия орнамента и его повторяющаяся фигура описываются группами вращения 6-го порядка и группами параллельных переносов осей вращения. Следовательно, если какой-либо фигуре соответствует какая-либо группа преобразований плоскости, то такой же группе преобразований плоскости будет соответствовать орнамент, полученный параллельными переносами и вращениями её повторений. Разработан орнамент «Композиция № 1», не описанный в литературе по истории и теории орнамента. Предполагается, что предметом дальнейших исследований будет приложение одной из кристаллографических групп симметрии Е. С. Фёдорова к построению фигурной плитки, стилизующей зооморфную форму на одной из гравюр М. К. Эшера.

Ключевые слова: мозаики, фигурные плитки в форме животных и растений, стилизация гравюр М. К. Эшера.

О.Ю. НИЦИН

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

**ГРУПА СИМЕТРІЇ ОРНАМЕНТУ НА ЕСКІЗИ М. К. ЕШЕРА «ЯЩІРКИ» І РУХИ
ПЛОЩИНІ, ЩО ОПИСУЮТЬ УТВОРЕННЯ ЙОГО ФИГУРНОЇ ПЛИТКИ**

Способи побудови фігурних плиток, що стилізують зображення тварин і рослин і цілком заповнюють площину, не є на даний час предметом наукових досліджень. Це пояснюється тим, що автори багатьох наукових праць розглядають гравюри М. К. Ешера як мозаїку, складену з багатокутників з нанесеним на них малюнком, що повторюється. Тому вони шукають в них фрагменти, які вписуються в ромби, квадрати, правильні трикутники або правильні шестикутники, і за їх допомогою складають мозаїку. Ми ж пішли іншим шляхом – шляхом відкриття законів симетрії, що дозволяють побудувати плоску фігуру, що стилізує образи рослин і тварин і заповнює площину без накладень і пропусків.

Таким чином, мета статті полягає в тому, щоб встановити правило побудови фігури, що стилізує зображення тварин і рослин і заповнює площину без накладень і пропусків при паралельних перенесеннях і обертаннях її повторень.

Запропоновано правило побудови фігурних плиток, що стилізують зображення рослин і тварин і заповнюють площину без накладень і пропусків при паралельних перенесеннях і обертаннях її повторень, зокрема фігурних плиток, що узагальнюють зображення зооморфних форм на ескізах М. К. Ешера «Ящірки» і «Метелики». Запропоноване правило було застосовано для складання орнаментів, що стилізують ескізи М. К. Ешера «Ящірки» і «Метелики». Показано, що дані орнаменти мають множинну осей симетрії 3-го порядку, множинну осей симетрії 6-го порядку і шість векторів трансляції. Виявлено зв'язок між рухами площини, що приводять до утворення фігурної плитки, і групою симетрії орнаменту, отриманого на її основі. Встановлено, що симетрія орнаменту і його фігура, що повторюється, описуються групами обертання 6-го порядку і групами паралельних перенесень осей обертання. Отже, якщо якій-небудь фігурі відповідає будь-яка група перетворень площини, тоді такій же групі перетворень площини відповідатиме орнамент, отриманий паралельними переносами і обертаннями її повторень. Розроблено орнамент «Композиція № 1», не описаний в літературі з історії та теорії орнаменту. Передбачено, що предметом подальших досліджень буде застосування однієї з кристалографічних груп симетрії Є. С. Федорова до побудови фігурної плитки, що стилізує зооморфну форму на одній з гравюр М. К. Ешера.

Ключові слова: замоцнення площини, фігурні плитки у формі тварин і рослин, стилізація гравюр М. К. Ешера.

A.Yu. NITSYN

National Technical University 'Kharkov Polytechnic Institute'

ORGANENT SYMMETRY GROUP ON M. C ESHER'S SKETCH 'REPTILES' AND PLANE MOVEMENTS DESCRIBING THE FORMATION OF ITS FIGURED TILES

Methods for constructing figured tiles stylizing images of animals and plants and completely filling the plane are not currently the subject of scientific research. This is due to the fact that the authors of many scientific papers consider M. C. Escher's prints as a mosaic composed of polygons with a repeating pattern applied to them. Therefore, they look for fragments in them that fit into rhombuses, squares, regular triangles or regular hexagons, and with their help make a mosaic. But we went the other way – by opening the laws of symmetry, which allow us to build a flat figure stylizing the images of plants and animals and filling the plane without overlays and gaps.

Thus, the purpose of the article is to establish a rule for constructing a figure stylizing images of animals and plants and filling the plane without overlays and gaps with translations and rotations of its repetitions.

A rule for constructing figured tiles stylizing images of plants and animals and filling the plane without overlays and gaps with parallel transfers and rotations of its repetitions, in particular, figured tiles in the form of zoomorphic shapes on M. C. Escher's sketches 'Reptiles' and 'Butterflies' is proposed. The proposed rule was applied to composition ornaments stylizing the M. C. Escher's sketches 'Reptiles' and 'Butterflies'. It is shown that these ornaments have set of symmetry axes of the 3rd order, set of symmetry axes of the 6th order and six translation vectors. The connection between the movements of the plane leading to the formation of a figured tile and the symmetry group of the ornament obtained on its basis is revealed. It was established that the symmetry of the ornament and its repetitive figure are described by 6th-order rotation groups and groups of translations of the rotation axes. Therefore, if any group of transformations of the plane corresponds to any figure, then the ornament obtained by translations and rotations of its repetitions will correspond to the same group of transformations of the plane. The ornament 'Composition No. 1' which is not described in the literature on the history and theory of ornament was developed. It is assumed that the subject of further research will be the application of one of the crystallographic symmetry groups of E. S. Fyodorov to the construction of a figured tile stylizing a zoomorphic shape on one of M. C. Escher's sketches.

Key words: tessellation of a plane, figured tiles in the form of animals and plants, stylization of M. C. Escher's prints.

Постановка проблемы

Будем называть фигурной плиткой плоскую фигуру, стилизующую изображения растений, животных и других предметов, созданных как природой, так и человеком, и заполняющую плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах, отражениях или вращениях её повторений. Решение задачи о заполнении плоскости фигурными плитками без наложений и пропусков является математической основой художественного конструирования облицовочной плитки, тканей, тротуарной плитки, обоев и других предметов прикладного искусства. Знание законов, по которым составляются фигурные плитки, не только объясняет построение существующих видов тротуарной плитки, но и способствует появлению неизвестных ранее геометрических форм, заполняющих плоскость без наложений и пропусков. Поэтому открытие закона, которому соответствует фигура, целиком заполняющая плоскость при параллельных переносах и вращениях её повторений, является актуальной задачей художественного конструирования.

Анализ последних исследований и публикаций

Нельзя сказать, что в настоящее время замощением плоскости никто не занимается. Наоборот, сейчас в зарубежной печати выходит довольно много работ, посвящённых паркетам. Чтобы получить представление о том, что замощение плоскости – это бурно развивающийся раздел геометрии, достаточно назвать имена таких широко известных в научном мире учёных, как Гарольд Скотт Кокстер, Роджер Пенроуз, Хайнц Фодерберг, Роберт Бёрджер, Джошуа Соколар, Джон Тейлор, Бранко Грюнбаум и Джеффри Колин Шепард [1–7]. Кроме того, в число прославленных во всём мире геометров следует включить и таких русских учёных, как Е. С. Фёдоров, А. В. Шубников и Н. В. Белов [8].

Однако в их работах рассматривается только один вид замощения плоскости, а именно: замощение плоскости одним или несколькими правильными или неправильными многоугольниками. Они открыли множество видов паркета. Например, правильные паркеты, состоящие из правильных многоугольников одного вида; полуправильные паркеты, составленные из правильных многоугольников двух или

более видов таким образом, чтобы для любых двух вершин паркета существовало преобразование симметрии, совмещающее одну вершину с другой. Полуправильные паркеты подразделяются на однородные паркеты, составленные таким образом, чтобы для любых двух его вершин существовало преобразование симметрии, переводящее одну вершину в другую, и на неоднородные паркеты, у которых последовательности многоугольников вокруг любых двух его вершин должны быть одинаковыми. Среди множества однородных паркетов выделяются квазиправильные паркеты, состоящие из многоугольников двух видов, чередующихся вокруг каждой его вершины таким образом, чтобы каждый многоугольник был окружён многоугольниками другого типа [1, 2]. Кроме того, существует бесконечное множество неоднородных паркетов, имеющих повторяющийся фрагмент, состоящий из нескольких многоугольников. Если фрагменты повторяются через равные расстояния с помощью двух параллельных переносов, то паркет называется периодическим, а если фрагменты повторяются через разные расстояния, то паркет называется непериодическим [1, 2]. К непериодическим паркетам относятся плитки Пенроуза с повторяющимся фрагментом, который первоначально состоял из плиток шести видов: трёх правильных пятиугольников, пятиконечной звезды, плитки в форме «лодочки» и ромба. Позже был открыт повторяющийся фрагмент, состоящий из двух плиток: выпуклого четырёхугольника в форме «воздушного змея» и вогнутого четырёхугольника в форме «наконечника дротика», а ещё позже был обнаружен повторяющийся фрагмент, состоящий из двух ромбов, имеющих равные стороны, но разные углы [1, 2].

Между тем как способы построения фигурных плиток, стилизующих изображения животных и растений и целиком заполняющих плоскость, не являются в настоящее время предметом научных исследований. Замечательный голландский художник Мауриц Корнелис Эшер (1898–1972) был единственным художником XX века, создававшим образы растений и животных, заполняющие плоскость без наложений и пропусков. Правда, несмотря на то, что М. К. Эшер соединял в своём творчестве геометрию и искусство, он был больше художником, чем геометром. Есть достоверные сведения, что М. К. Эшер вылепливал из пластилина фигурки растений и животных и менял их форму, если при перемещении их в плоскости листа бумаги обнаруживалось, что их контуры не совпадают [9]. Мы же пошли другим путём – путём открытия законов симметрии, позволяющих построить плоскую фигуру, стилизующую образы растений и животных и заполняющую плоскость без наложений и пропусков.

Цель исследования

Цель статьи состоит в том, чтобы открыть законы симметрии, позволяющие построить фигурную плитку, стилизующей изображения животных и растений и заполняющей плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений.

Изложение основного материала исследования

Рассмотрим построение фигуры, стилизующей зооморфную форму на эскизе М. К. Эшера «Ящерицы» [10].

Мы нашли удивительно простое правило построения фигуры, стилизующей зооморфную форму на эскизе М. К. Эшера «Ящерицы» (1942). Однако мы не можем дать его описание, потому что согласно «Положению об открытиях, изобретениях и рационализаторских предложениях» решение признаётся новым, если до даты приоритета заявки сущность этого или тождественного решения не была раскрыта в СССР или за границей для неопределённого круга лиц настолько, что стало возможным

его осуществление. Несмотря на то, что «Положение...» было принято 21 августа 1973 года, его действие на территории Украины не прекращено.

Покажем на рис. 1 орнамент, стилизующий эскиз М. К. Эшера «Ящерицы». Орнамент обладает вращательной и трансляционной симметриями. Элементами вращательной симметрии является множество осей симметрии 6-го порядка, проходящих через точки, в которых сходятся 6 зооморфных форм. Кроме того, орнамент обладает вращательной симметрией 3-го порядка. Элементами симметрии является множество осей симметрии 3-го порядка, проходящих через центры правильных треугольников, вершинами которых являются центры групп зооморфных форм. Элементами трансляционной симметрии являются 6 векторов трансляции, проходящими через вершины правильных шестиугольников, в которые вписываются группы зооморфных форм.

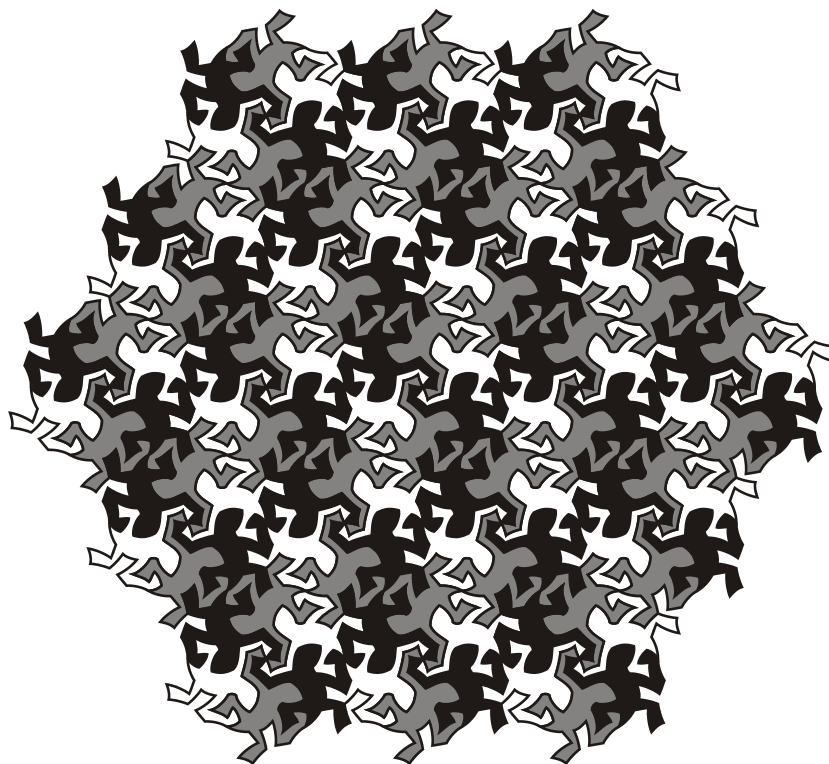


Рис. 1. Орнамент, стилизующий эскиз М. К. Эшера «Ящерицы», и его повторяющаяся фигура.

Предложенное правило было применено при построении фигуры, стилизующей зооморфную форму на гравюре М. К. Эшера «Бабочки» (1950). Полученный на её основе орнамент отличается от предыдущего тем, что центры правильных шестиугольников, в которых соприкасаются зооморфные формы, не располагаются на продолжениях радиусов окружности, описанной вокруг исходного правильного шестиугольника.

Покажем на рис. 2 орнамента, стилизующий гравюру М. К. Эшера «Бабочки». Орнамент обладает вращательными симметриями 6-го и 3-го порядков. Кроме того, орнамент обладает трансляционной симметрией. Элементами симметрии являются 6 векторов трансляции, которые совпадают с прямыми линиями, проходящими через вершины правильных шестиугольников, в которые вписываются группы зооморфных форм.

Применим найденное нами правило для составления орнамента, которому мы дали название «Композиция № 1». Несмотря на то, что предлагаемый нами орнамент имеет признаки мавританского стиля, он не повторяет ни один орнамент из Альгамбры – дворца мусульманских правителей Испании из династии Насридов (1230–1492) [11, 12]. Покажем на рис. 3 орнамент «Композиция № 1».

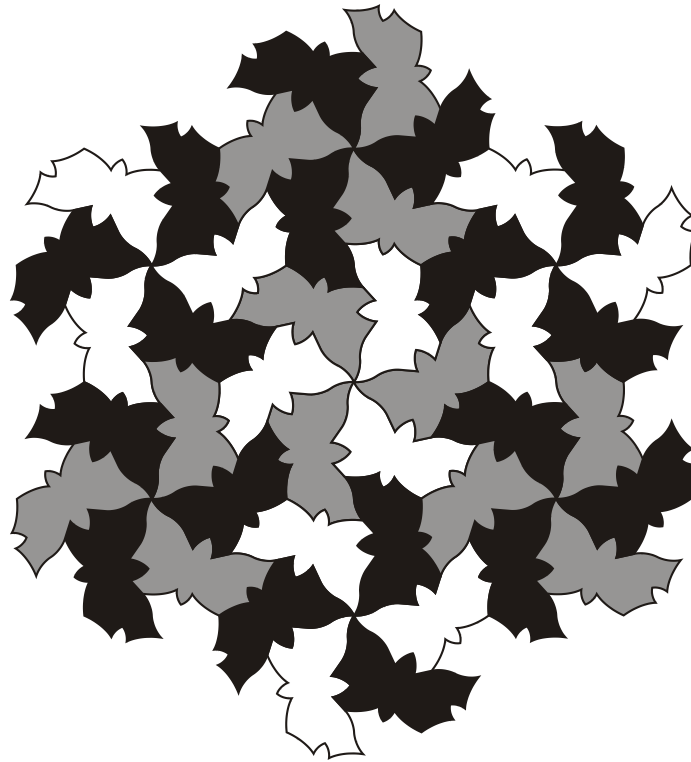


Рис. 2. Орнамент, стилизующий гравюру М. К. Эшера «Бабочки», и его повторяющаяся фигура.

Приведённые выше орнаменты наглядно доказывают, что найденное нами правило построения повторяющейся фигуры можно считать законом, которому подчиняются *все* орнаменты, удовлетворяющие следующим условиям:

- фигуры образуют группу, имеющую ось симметрии 6-го порядка;
- центры вращения группы фигур располагаются в центрах правильных шестиугольников. Причём центры правильных шестиугольников располагаются в вершинах правильных шестиугольников, вписанных в окружности, диаметры которых образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной диаметру исходной окружности;
- группы фигур можно совместить друг с другом, если параллельные переносы осуществляются в направлениях, заданных прямыми линиями, проходящими через вершины правильных шестиугольников, на расстояния, равные диаметру исходной окружности.

Обратим внимание на связь, существующую между орнаментом, стилизующим эскиз М. К. Эшера «Ящерицы», и его повторяющейся фигурой. Связь состоит в том, что и симметрия орнамента, и его повторяющаяся фигура описываются группами вращения 6-го порядка и группами параллельных переносов осей вращения. Отсюда следует, что если какой-либо фигуре соответствует какая-либо группа преобразований плоскости, то такой же группе преобразований плоскости будет соответствовать орнамент, полученный параллельными переносами и вращениями её повторений.

Выводы

Таким образом, в статье предложено правило построения фигурных плиток, стилизующих изображения растений и животных и заполняющих плоскость без наложений и пропусков при параллельных переносах и вращениях её повторений, в частности фигурных плиток, обобщающих изображения зооморфных форм на эскизах М. К. Эшера «Ящерицы» и «Бабочки». Предложенное правило было применено для составления орнаментов, стилизующих эскизы М. К. Эшера «Ящерицы» и «Бабочки». Показано, что данные орнаменты имеют множество осей симметрии 3-го порядка, множество осей симметрии 6-го порядка и шесть векторов трансляции. Выявлена связь между движениями плоскости, приводящими к образованию фигурной плитки, и группой симметрии орнамента, полученного на её основе. Разработан орнамент «Композиция № 1», не описанный в литературе по истории и теории орнамента. Предполагается, что наша следующая работа будет посвящена приложению одной из кристаллографических групп симметрии Е. С. Фёдорова к построению фигурной плитки, стилизующей зооморфную форму на одной из гравюр М. К. Эшера.

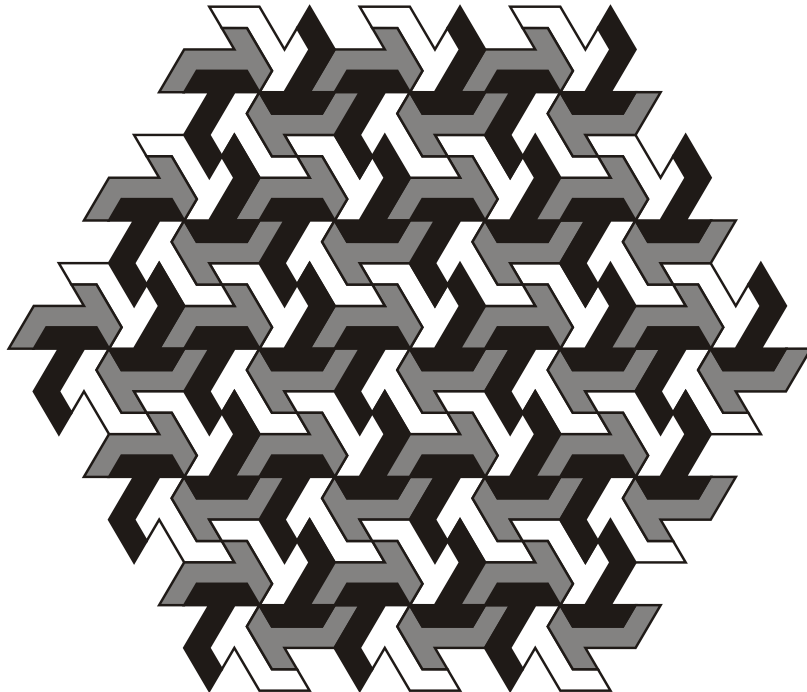


Рис. 3. Орнамент «Композиция № 1», разработанный автором.

Список использованной литературы

1. Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. Tessellations and Honeycombs. New York: Dover Books on Mathematics, 1973. 368 p.
2. Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns. 2nd ed. New York: Dover Books on Mathematics, 2016. 700 p.
3. Raedschelders P. Tilings and Other Unusual Escher-Related Prints. *MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration*. Berlin: Springer, 2005. P. 230–243.
4. Hofstadter Douglas. Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. New York: Basic Books, 1979. 752 p.
5. Gardner M. Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers and the Return of Dr. Matrix. New York: W. H. Freeman, 1989. 311 p.

6. MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration. (Ed. by Schattschneider D. and Emmer M.). Berlin: Springer, 2005. 489 p.
7. Кокстер Гарольд С. М. Введение в геометрию / пер. с англ. А. Б. Катка и С. Б. Катка; под ред. Б. А. Розенфельда и И. М. Яглома. Москва: Наука, 1966. 648 с.
8. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. Москва: Наука, 1972. 339 с.
9. Bool F. H., Kist J. R., Locher J. L., Wierda F. M. C. Escher: His life and complete graphic work. New York: Harry N. Abrams, 1982. 349 p.
10. Escher M. C. The World of M. C. Escher. (Ed. by J. L. Locher). New York: Harry N. Abrams, 1974. 235 p.
11. Орнамент всех времён и стилей : в 2 т. / пер. с франц. Б. П. Павлова / под ред. Т. И. Хлебнова. Москва : Арт-Родник, 2004. Т. 1 : Античное искусство, искусство Азии, Средние века. 270 с.
12. Орнамент всех времён и стилей : в 2 т. / пер. с франц. Б. П. Павлова / под ред. Т. И. Хлебнова. Москва : Арт-Родник, 2004. Т. 2 : Средневековое искусство, Ренессанс, XVII–XIX века. 248 с.

References

1. Coxeter H. S. M. (1973). Regular Polytopes. Tessellations and Honeycombs. New York: Dover Books on Mathematics.
2. Grünbaum B., Shephard G. C. (2016). Tilings and Patterns (2nd ed.). New York: Dover Books on Mathematics.
3. Raedschelders P. Tilings and Other (2005). Unusual Escher-Related Prints. *MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration*. Berlin: Springer, pp. 230–243.
4. Hofstadter Douglas (1979). Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. New York: Basic Books.
5. Gardner M. (1989). Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers and the Return of Dr. Matrix. New York: W. H. Freeman.
6. Schattschneider D., & Emmer M. (Eds). (2005). MC Escher's Legacy: A Centennial Celebration. Berlin: Springer.
7. Kokster Garold S. M. (1966). Vvedenie v geometriyu / per. s angl. A. B. Katka i S. B. Katka; pod red. B. A. Rozenfelda s I. M. Yagloma. Moskva: Nauka.
8. Shubnskov A. V., Koptsik V. A. (1972). Simmetriya v nauke i iskusstve. Moskva: Nauka.
9. Bool F. H., Kist J. R., Locher J. L., Wierda F. (1982). M. C. Escher: His life and complete graphic work. New York: Harry N. Abrams.
10. Escher M. C. (1974). The World of M. C. Escher. (Ed. J. L. Locher), New York: Harry N. Abrams.
11. Hlebnova, T. I. (Ed). (2004). Ornament vseh vremen i stiley : v 2 t. Per. s frants. B. P. Pavlova. Moskva: Art-Rodnik. T. 1.: Antichnoe iskusstvo, iskusstvo Azii, Srednie veka.
12. Hlebnova, T. I. (Ed). (2004). Ornament vseh vremen i stiley : v 2 t. Per. s frants. B. P. Pavlova. Moskva: Art-Rodnik. T. 2: Srednevekovoe iskusstvo, Renessans, XVII–XIX veka.

Ницын Александр Юрьевич – д.т.н., профессор, профессор кафедры геометрического моделирования и компьютерной графики Харьковского технического университета «Харьковский политехнический институт», e-mail: dnitsyn@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7900-2612.

УДК 004.8

Ю.О. ОЛІЙНИК

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

СИСТЕМА АНАЛІЗУ ТЕКСТОВИХ ПОТОКІВ ДАНИХ

Дослідження присвячене розробці системи аналізу текстових потоків даних. В постановці завдання наведено проблему обробки потоків текстової інформації та відзначається відсутність програмних засобів одночасної обробки потоків текстових даних українською та російською мовами.

Проведено аналіз останніх досліджень та встановлено, що для обробки потоків даних необхідно застосовувати спеціалізоване програмне забезпечення обробки потокових даних. Виявлено, що існує вкрай мало засобів для обробки україномовних текстів, а також те, що не існує засобів для одночасної підтримки україномовних та російськомовних текстів.

Метою даного дослідження є розробка архітектури та реалізація програмного забезпечення системи аналізу текстових потоків даних. Наведено опис математичної моделі потоку текстових даних на основі ковзного вікна. Наведено завдання для обробки потоків текстових даних від базових перетворень тексту та попередньої обробки до інтелектуального аналізу текстових потоків даних. Сформульовано математичну постановку завдання визначення емоційного забарвлення потоків текстових даних на основі моделі ковзного вікна.

В процесі дослідження виділено 4 підсистеми: підсистему збору та транспортування повідомлень потоків даних, підсистему аналізу текстових потоків, підсистему зберігання результатів аналізу потоків даних та підсистему візуалізації. Особливістю системи є підтримка обробки україномовних текстів, для чого було спеціально розроблено програмну бібліотеку UANLP. Дана бібліотека дозволяє також оброблювати російськомовні тексти. Обробка потоків текстових даних виконується на основі компоненту Spark Streaming, що підтримує роботу з вікнами. Бібліотека Spark MLlib та ML дозволяють використовувати засоби машинного навчання для аналітичної обробки потоків текстових даних, на основі яких виконується сентимент аналіз, виявлення аномалій, елементів пропаганди, дезінформації тощо.

Обґрунтовано використання програмних компонент – сервісу повідомлень Kafka, технології розподіленої обробки даних Apache Spark, бази даних Elasticsearch та сервісу візуалізації Kibana. Описано процес обробки даних від генерації потоків даних до візуалізації результатів аналізу.

Ключові слова: потоки текстових даних, онлайн обробка, text mining, Apache Spark.

Ю.А. ОЛЕЙНИК

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского»

СИСТЕМА АНАЛИЗА ТЕКСТОВЫХ ПОТОКОВ ДАННЫХ

Исследование посвящено разработке системы анализа текстовых потоков данных. В постановке задачи приведены проблемы обработки потоков текстовой информации и отмечается отсутствие программных средств одновременной обработки потоков текстовых данных на украинском и русском языках.

Проведен анализ последних исследований и установлено, что для обработки потоков данных необходимо применять специализированное программное обеспечение обработки потоковых данных. Выявлено, что существует крайне мало средств для обработки украиноязычных текстов, а также то, что не существует средств для одновременной поддержки обработки украиноязычных и русскоязычных текстов.

Целью данного исследования является разработка архитектуры и реализация программного обеспечения системы анализа текстовых потоков данных. Приведено описание математической модели потока текстовых данных на основе скользящего окна. Приведены задачи для обработки потоков текстовых данных от базовых преобразований текста и предварительной обработки до интеллектуального анализа текстовых потоков данных. Сформулирована математическая постановка задачи определения эмоциональной окраски потоков текстовых данных на основе модели скользящего окна.

В процессе исследования выделено 4 подсистемы: подсистему сбора и транспортировки сообщений потоков данных, подсистему анализа текстовых потоков данных, подсистему хранения результатов анализа потоков данных и подсистему визуализации.

Особенностью системы является поддержка обработки украиноязычных текстов, для чего была специально разработана программная библиотека UANLP. Данная библиотека позволяет также обрабатывать русскоязычные тексты. Обработка потоков текстовых данных выполняется на основе компонента Spark Streaming, поддерживающий работу с окнами. Библиотека Spark MLlib и ML позволяют использовать средства машинного обучения для аналитической обработки потоков текстовых данных, на основе которых выполняется анализ тональности, выявление аномалий, элементов пропаганды, дезинформации и тому подобное.

Обосновано использование таких программных компонент как сервис сообщений Kafka, технологии распределенной обработки данных Apache Spark, базы данных Elasticsearch и сервиса визуализации Kibana. Описан процесс обработки данных от генерации потоков данных до визуализации результатов анализа.

Ключевые слова: потоки текстовых данных, онлайн обработка, text mining, Apache Spark.

Yu.O. OLIINYK

National Technical University of Ukraine
'Igor Sikorskiy Kyiv Polytechnical Institute'

TEXT DATA STREAM ANALYSIS SYSTEM

The study is devoted to text data stream analysis system development. The problem statement deals with the problem of text data stream processing and the lack of software for simultaneous processing of text data streams in Ukrainian and Russian.

The analysis of the last researches is carried out and established that for data flow processing it is necessary to apply the specialized software of data stream processing. It was found that there are only few tools for processing Ukrainian-language texts are exists, as well as the fact that there are no tools for simultaneous support of procession Ukrainian-language and Russian-language texts.

The purpose of this study is to software architecture development and implementation of the data streams analysis software. A description of the mathematical model of text data flow based on a sliding window is given. The tasks for processing text data streams are defined. Tasks from basic text transformations and pre-processing to intellectual analysis of

text data streams are given. The mathematical definition of the problem of determining the emotional color of text data streams on the base of the sliding window model is formulated.

For subsystems are allocated: a collecting and transporting messages of data streams subsystem, an analysis of text streams subsystem, a storage of results of the analysis of data streams subsystem and a visualization subsystem.

A systems features are support of Ukrainian-language texts processing, for this purpose the UANLP library was specially developed. This library also supports Russian-language texts processing. Processing of text data streams is performed on the base of the Spark Streaming component, which supports work with sliding windows. The Spark MLib and ML libraries allow the use machine learning tools for analytical processing of text data streams, such as sentiment analysis, detection of anomalies, elements of propaganda, misinformation are performed.

Main software component – messaging service Kafka, distributed data processing technology Apache Spark, Elasticsearch database and Kibana visualization service. Made data processing description from data streams generation to analysis results visualization.

Keywords: text stream, online data processing, text mining, Apache Spark.

Постановка проблеми

Кожного дня продукуються потоки текстових даних [1] у вигляді новин, повідомлень в соціальних мережах, месенджерах. Інформаційні виклики сьогодення потребують оперативного аналізу та реагування в режимі онлайн на інформацію, що проходить в цих потоках [1–2]. Без сучасних підходів обробки надвеликих масивів інформації Big Data неможливо обробити такі потоки. Крім того, згідно джерел [1, 4] відсутні програмні засоби, що здатні оброблювати потоки текстових даних одночасно українською та російською мовами, що актуально для нашої країни. Тому необхідно виконати проектування та програмну реалізацію системи аналізу потоків текстових даних (надалі Системи). Для цього необхідно вирішити такі завдання:

- 1) виділити завдання обробки та аналізу потоків текстових даних;
- 2) спроектувати архітектуру програмного забезпечення Системи;
- 3) виконати програмну реалізацію Системи;
- 4) забезпечити підтримку обробки україномовних та російськомовних текстів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Згідно книги [3] повний проект обробки потоків даних складається з таких етапів: знайти вихідні дані, завантажити дані, виконати аналіз, зберегти результат, показати результат. В 2008 році з'явився програмних комплекс Hadoop, де було реалізовано парадигму MapReduce. Крім того, реалізовано розподілену файлову систему HDFS. Але на даний час Hadoop є досить застарілою технологією та поступається новітнім засобам, таким як Apache Spark, Storm, Kafka, Flink, Akka та іншим [3].

В роботах [1, 4] описуються проблеми, пов'язані з підтримкою україномовних текстових даних, що обумовлено вкрай малим переліком програмних засобів та моделей. Крім того, практично відсутні засоби для одночасної підтримки україномовних та російськомовних текстів. В роботах [1, 2, 4] описуються окремі елементи системи аналізу текстових потоків даних, але не описується Система в цілому.

Для обробки потоків даних необхідно застосовувати високопродуктивне спеціальне програмне забезпечення, здатне масштабуватись, наприклад, Apache Spark Streaming [6] (рис.1), Apache Storm, Hadoop Streaming, Splunk Stream тощо.

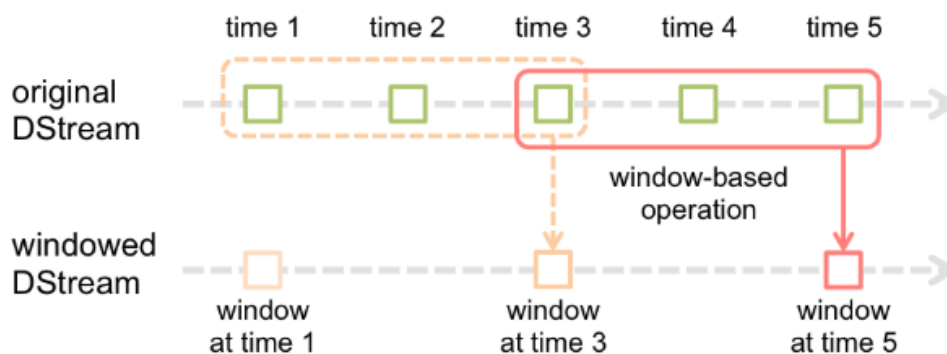


Рис. 1. Вікно обробки потоку текстових даних в Apache Spark Streaming.

Мета дослідження

Метою даного дослідження є розробка архітектури та реалізація програмного забезпечення системи аналізу текстових потоків даних.

Викладення основного матеріалу дослідження

Опис математичної моделі потоку текстових даних на основі ковзного вікна. Під текстовим потоком даних розуміємо нескінченний потік даних, які надходять з одного або декількох джерел, де пара $(d_j; t_j)$ визначає, що текстове повідомлення d_j отримано в точці часу t_j .

На рис. 1 та рис. 2 представлено приклад віконного процесу обробки даних. «Ковзне вікно» (Sliding Window) – часове вікно з певним зсувом. Якщо часовий інтервал між часовими відмітками дорівнює 1 секунді, інтервал вікна складе 3 с., а інтервал зсуву складе 2 с.

Математична модель потоку даних наводиться на рис. 2.

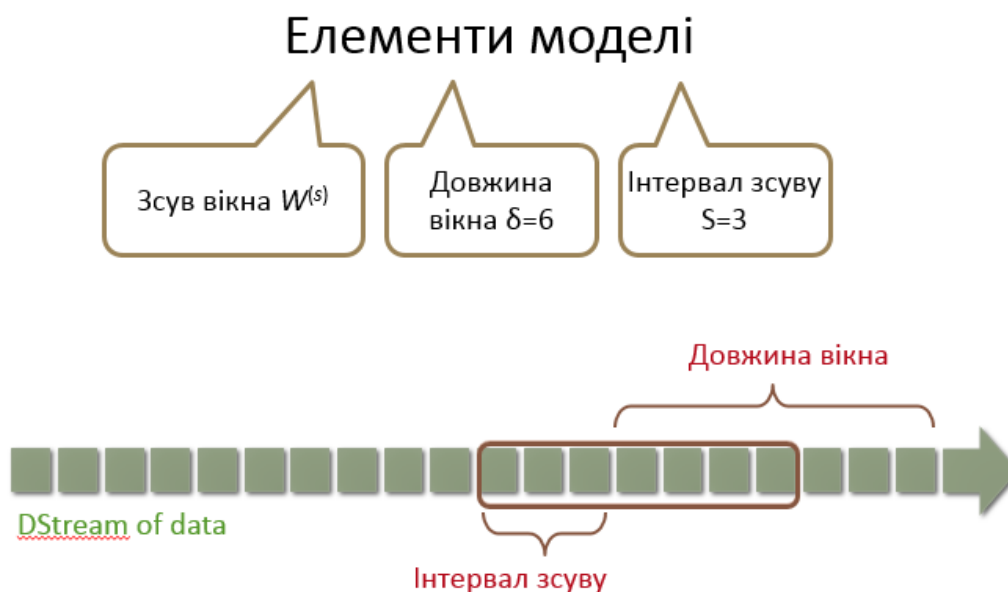


Рис. 2. Візуалізація елементів моделі потоку текстових даних.

Вікно W_i є часовим інтервалом фіксованого розміру δ , що починається в точці i . Вікно W_i містить документи потоку даних за інтервал часу $[i..i+\delta]$.

Позначимо за s інтервал зсуву (ковзання) вікна – інтервал фіксованого розміру. Тоді $W_i^{(s)}$ – вікно фіксованого розміру δ , що починається в точці $i+s$.

Завдання обробки потоків текстових даних. Визначимо завдання, що ставляться перед обробкою текстових потоків даних.

Базові перетворення та попередня обробка кожного текстового елементу потоку даних:

- видалення стоп-слів та видалення нерелевантних символів;
- розбиття на речення;
- розбиття на токени;
- нормалізація – складання списку лем;
- визначення статистичних показників – кількість слів, токенів, речень, довжина тексту тощо;
- визначення мови текстового елементу;
- інші.

Завдання обробки текстового потоку даних в цілому:

- побудова моделі BOW [1];
- виділення ознак текстових елементів (TF-IDF та інших) [1];
- підрахунок косинуса подібності [1].

Інтелектуальний аналіз текстових потоків даних:

- класифікація даних (однозначна та багатокласова). Методами класифікації вирішується величезна кількість різних задач: сентимент аналіз [2], виявлення аномалій [1], виявлення елементів пропаганди, дезінформації та інші.
- кластеризація даних;
- реферування [1];
- перевірка правопису;
- інші.

Базові перетворення, попередня обробка текстів та завдання обробки текстового потоку даних в цілому описуються в статтях [1] та [5], тому на них зупинятись не будемо. Далі розглянемо такі задачі інтелектуального аналізу потоків текстових даних, як сентимент-аналіз та програмну реалізацію.

Визначення емоційного забарвлення потоків текстових даних. Над кожним елементом потоку даних d_j проводиться аналіз визначення емоційного забарвлення за допомогою класифікатора $\Phi(d)$. Де $\Phi(d)=-1$, якщо негативне забарвлення, $+1$, якщо позитивне забарвлення, 0 , якщо нейтральне забарвлення.

Визначимо емоційне забарвлення на рівні вікна $W^{(s)}$:

$$\Phi(W^{(s)}) = \frac{\sum_{k=0}^{n^{(s)}} \Phi(d_k, c)}{n^{(s)}}, \quad (1)$$

де $n^{(s)}$ – кількість елементів в вікні $W^{(s)}$.

Якщо $\Phi(W^{(s)}) > 0$, вікно w зі зсувом s має позитивне забарвлення.

Якщо $\Phi(W^{(s)}) < 0$, вікно зі зсувом s має негативне забарвлення.

Якщо $\Phi(W^{(s)}) = 0$, вікно зі зсувом s має нейтральне забарвлення.

Позначимо $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{|C|}\}$ – множину можливих класів («негативне», «позитивне», «нейтральне» повідомлення).

На рис. 2 наведено приклад формування ковзного вікна при надходженні документів в потік зі швидкістю 1 документ/с. Так вікно W^0 містить документи від $ID=1$ до $ID=11$, а W^2 , відповідно, документи від $ID=3$ до $ID=13$.



Рис. 3. Використання ковзного вікна для аналізу потоку текстових даних.

У якості класифікатора окремих текстових елементів було використано методи Gradient Boosting Tree та Random Forest, що показали найвищу точність у 79,42% та 75,74% відповідно на навчальній вибірці [7].

Виявлення аномалій в потоках текстових даних. Підхід до виявлення аномалій вже був описаний в статті [1]. Підхід будується на виконанні попередньої обробки тексту, реферуванні тексту, побудови BOW та визначення ознак TF-IDF. В той же час в Україні досить часто зустрічається ситуація, коли в межах одного потоку текстових даних (коментарі та повідомлення на сайтах, соціальних мережах, повідомлення в групах месенджерів) зустрічаються повідомлення різними мовами: найчастіше українською та російською. І тому необхідно врахувати дану ситуацію при обробці текстових потоків.

Архітектура програмного забезпечення Системи. В процесі дослідження виділено 4 підсистеми.

1. Підсистема збору та транспортування повідомлень потоків даних. Основний програмний компонент підсистеми – сервіс повідомлень Kafka, що використовується для обробки потоків даних, сервісів в режимі реального часу. Kafka підтримує горизонтальне масштабування, підтримує відмовостійкість.
2. Підсистема аналізу текстових потоків. Основний програмний компонент – Apache Spark, вибір якого було описано в [2].
3. Підсистема зберігання результатів аналізу потоків даних. Основний програмний компонент підсистеми - нереляційна база даних Elasticsearch, що має такі переваги, як гнучкість, масштабованість, високу продуктивність,

інтеграцію з засобами візуалізації. Альтернативно можна використати такі бази даних, як MongoDB, HBase.

4. Підсистема візуалізації. Основний програмний компонент підсистеми – Kibana, це служба візуалізації даних Elasticsearch, що допомагає створювати різні дашборди, налаштовувати форму візуалізації, формувати інтерактивні графіки.

На рис. 4 зображено обробку даних програмними компонентами Системи.

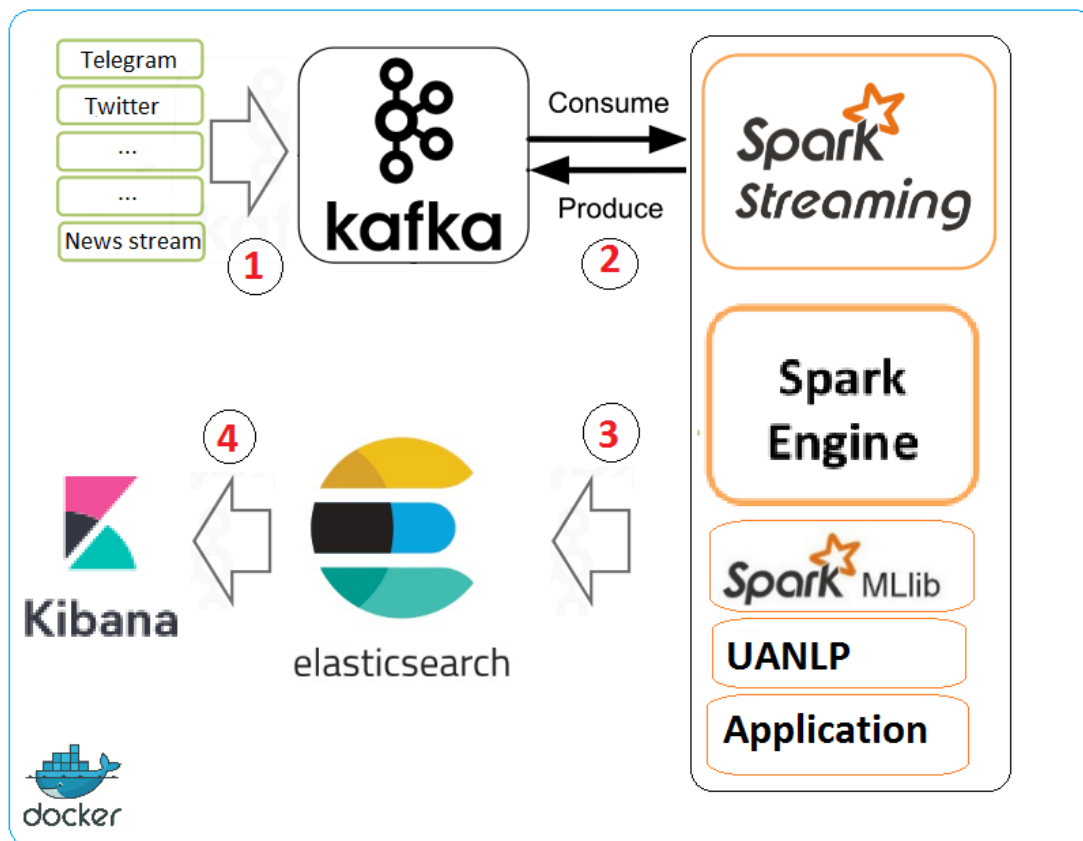


Рис. 4. Програмні компоненти системи аналізу текстових потоків даних.

Вхідні потоки текстових даних (від месенджерів, соціальних мереж, новинних сервісів) надходять на обробку в сервіс збору повідомлень Kafka (етап 1 на рис. 4), де відбувається накопичення даних для відправки на аналітичну обробку (етап 2 рис. 4).

Аналітична обробка виконується за допомогою технології швидкісної розподіленої обробки даних Apache Spark. Оскільки в даній технології відсутня NLP підтримка україномовних текстів, було додатково розроблено програмно бібліотеку UANLP[8] для обробки україномовних та російськомовних текстів на основі морфоаналізатора RuMorphu2 [9]. Бібліотека UANLP виконує всі необхідні базові перетворення та попередню обробку кожного текстового елементу потоку даних, а також побудову моделі BOW, виділення ознак текстових елементів TF-IDF, підрахунок косинуса подібності, автоматичне реферування, визначення мови тексту. Обробка потоків текстових даних виконується на основі компоненту Spark Streaming, що підтримує роботу з вікнами. Бібліотека Spark MLlib та ML дозволяють використовувати засоби машинного навчання для аналітичної обробки потоків текстових даних, на основі яких виконується сентимент аналіз, виявлення аномалій, елементів пропаганди, дезінформації тощо.

Після аналітичної обробки дані завантажуються в БД Elasticsearch (етап 3, рис. 4), після чого автоматично потрапляють у сервіс візуалізації Kibana (етап, 3 рис. 4), де автоматично кожні n -секунд дані відправляються для візуалізації потоку в режимі реального часу [10] (рис. 5).

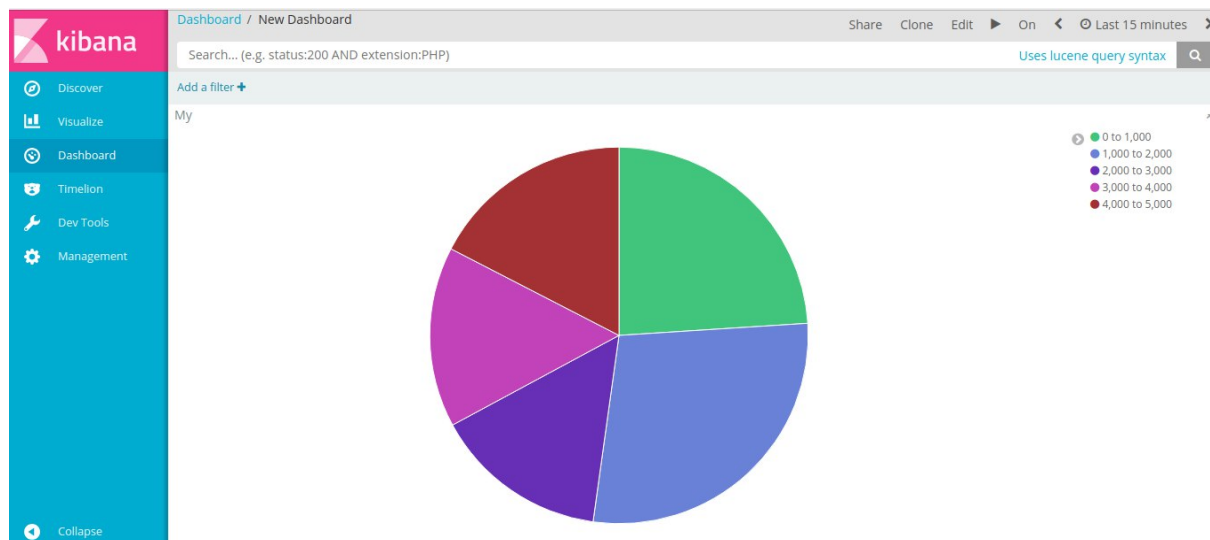


Рис. 5. Приклад візуалізації розподілу повідомлень потоку даних за довжиною текстового повідомлення.

Система використовується в навчальному процесі кафедри АСОІУ в рамках впровадження міжнародного проекту Erasmus+ project 'Establishing Modern Master-level Studies in Information Systems' (MASTIS) [11].

Така програмна архітектура має ряд переваг: гнучкість, підтримка різних джерел потоків даних, масштабованість, високопродуктивні обчислення, аналітичну обробку, візуалізацію обробки потоків даних в режимі онлайн.

Висновки

У дослідженні наведено структуру та компоненти програмного забезпечення системи аналізу текстових потоків даних. Перевагою системи є підтримка обробки україномовних та російськомовних текстів, для чого було спеціально розроблено бібліотеку UANLP. Система дозволяє вирішувати наступні завдання обробки текстових потоків даних: виконувати базові перетворення та попередню обробку кожного текстового елемента потоку даних, побудову моделі BOW, виділення ознак текстових елементів TF-IDF, підрахунок косинуса подібності, автоматичне реферування, визначення мови тексту, інтелектуальний аналіз текстових потоків даних. Система, на відміну від аналогів, підтримує розроблену модель ковзного вікна для таких задач інтелектуального аналізу даних, як визначення емоційного забарвлення та виявлення аномалій. Крім того, система має наступні переваги: масштабованість, відмовостійкість, високопродуктивні обчислення, аналітичну обробку, візуалізацію обробки потоків даних в режимі онлайн.

Список використаної літератури

1. Олійник Ю. О., Афанасьєва О. Є., Аршакян Г. Д. Підхід до виявлення аномалій в потоках текстових даних. *Системні технології*. 2020. № 2(127). С. 126–139. DOI: <https://doi.org/10.34185/1562-9945-2-127-2020-10>

2. Tomashevskii V. M., Oliynik Y. O., Yaskov V. V., Romanchuk V. M. Realtime Text Stream Anomalies Analysis System. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. № 3 (1). P. 361–365.
3. Oram A. Streaming Data. USA, Newton: O'Reilly Media, Inc., 2019. 28 p.
4. Степанюк Є. Ю., Олійник Ю. О. Дослідження методів аналізу тональності тексту. *Інформаційні системи та технології управління – ICTU-2019: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих вчених та студентів*. (м. Київ, 26 листопада 2019 р.), Київ: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2019. С. 32–39.
5. Гавриленко О. В., Олійник Ю. О., Ханько Г. В. Огляд та аналіз алгоритмів TEXT MINING. *Управління проектами, системний аналіз і логістика*. 2017. № 19. С. 15–23
6. Apache Spark Streaming. URL: <http://spark.apache.org/docs/latest/streaming-programming-guide.html>
7. Набір даних URL: <https://github.com/dmytro-verner/sentiment-analysis-ukrainian-tweets>
8. Ukrainian NLP Library for Apache Spark. URL: <https://github.com/oliyura/UANLP/> [Назва з екрана].
9. Морфологічний аналізатор pymorphy2. URL: <https://pymorphy2.readthedocs.io/> [Назва з екрана].
10. Kibana. Your window into the Elastic Stack. URL: <https://www.elastic.co/kibana> [Назва з екрана].
11. Establishing Modern Master-level Studies in Information Systems URL: <https://mastis.pro/> [Назва з екрана]

References

1. Oliinyk, Yu. O., Afanasieva, O. Ye., & Arshakian, H. D. (2020). Pidkhid do vyjavlennia anomalii v potokakh tekstovykh danykh. *Systemni tekhnologii*. **2**(127). С. 126–139. DOI: <https://doi.org/10.34185/1562-9945-2-127-2020-10>
2. Tomashevskii, V. M., Oliynik, Yu. O., Yaskov, V. V., & Romanchuk, V. M. (2018). Realtime Text Stream Anomalies Analysis System. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. **3**, Part 1, 361–365.
3. Oram A. Streaming Data. (2019). USA, Newton: O'Reilly Media, Inc.
4. Stepaniuk Ye. Yu., Oliinyk Yu. O. (2019). Doslidzhennia metodiv analizu tonalnosti tekstu. *Informatsiini systemy ta tekhnologii upravlinnia – ISTU-2019: materialy Vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii molodykh vchenykh ta studentiv*. (Kyiv, November 26, 2019 r), Kyiv: NTUU «KPI im. Ihoria Sikorskoho», pp. 32–39.
5. Havrylenko, O. V., Oliinyk Yu. O., & Khanko, H. V. (2017). Ohliad ta analiz alhorytmiv TEXT MINING. *Upravlinnia proektamy, systemnyi analiz i lohistyka*. **19**, 15–23.
6. Apache Spark Streaming. URL: <http://spark.apache.org/docs/latest/streaming-programming-guide.html>
7. Nabir danykh Retrieved from: <https://github.com/dmytro-verner/sentiment-analysis-ukrainian-tweets>
8. Ukrainian NLP Library for Apache Spark. Retrieved from: <https://github.com/oliyura/UANLP/> [Title from the screen].
9. Morfolohiichniy analizator pymorphy2. Retrieved from: <https://pymorphy2.readthedocs.io/> [Title from the screen].
10. Kibana. Your window into the Elastic Stack. Retrieved from: <https://www.elastic.co/kibana> [Title from the screen].

11. Establishing Modern Master-level Studies in Information Systems Retrieved from: <https://mastis.pro/> [Title from the screen].

Олійник Юрій Олександрович – старший викладач кафедри автоматизованих систем обробки інформації і управління Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», e-mail: oliyura@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7408-4927.

УДК 519.6

Ю.І. ПЕРШІНА
Українська інженерно-педагогічна академія
В.О. ПАСІЧНИК
Харківської державної академії дизайну і мистецтв

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ РОЗРИВНИМИ ІНТЕРЛІНАЦІЙНИМИ СПЛАЙНАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Робота присвячена розробці методу наближення розривних функцій за допомогою оператора інтерлінації функцій двох змінних. Ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на заданій системі ліній. Саме такі експериментальні дані використовуються в дистанційних методах, зокрема в комп'ютерній томографії. Тобто вони надають можливість будувати оператори, інтеграли від яких по вказаних лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Отже, інтерлінація – математичний апарат, природно пов'язаний із задачею відновлення характеристик об'єктів за їх відомими проекціями.

Існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають також і в задачах, які використовують дистанційні методи. На сьогоднішній день не існує загальної теорії описів явищ та процесів, що описуються розривними функціями. В статті будуються та досліджуються оператори розривної інтерлінації для наближення розривних функцій двох змінних за відомими її слідами (проекціями) на системі ліній з використанням довільних трикутних елементів. На основі створених сплайн-інтерлінантів будується метод наближення функцій, які мають розриви першого роду та область визначення яких розбивається на трикутні елементи. Причому побудовані розривні конструкції включають в себе, як окремий випадок, класичні неперервні інтерлінаційні сплани. В якості експериментальних даних виступають односторонні сліди функції на системі заданих ліній, саме такі дані використовуються в томографії. В роботі наведені теореми про інтерлінаційні властивості та похибку побудованих розривних конструкцій. Побудований метод наближення дозволяє наблизити розривну функцію, уникаючи явища Гіббса. Розглянуто приклади, які підтверджують ефективність запропонованого методу. Запропонований метод наближення розривних функцій можна буде використати для математичного моделювання розривних процесів в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Ключові слова: інтерлінація функцій, розрив першого роду, томографія, трикутні елементи.

Ю.И. ПЕРШИНА
Украинская инженерно-педагогическая академия
В.А. Пасечник
Харьковская государственная академия дизайна и искусств

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ РАЗРЫВНЫМИ ИНТЕРЛИНАЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Работа посвящена разработке метода приближения разрывных функций с помощью оператора интерлинации функций двух переменных. Эти операторы восстанавливают функции (возможно, приближенно) по известным их следам на заданной системе линий. Именно такие экспериментальные данные используются в дистанционных методах, в частности, в компьютерной томографии. То есть они предоставляют возможность строить операторы, интегралы от которых по указанным линиям (линейные интегралы) равны интегралам от самой восстанавливаемой функции. Итак, интерлинация – математический аппарат, естественно связанный с задачей восстановления характеристик объектов по их известными проекциям.

Существует много практически важных научных и технических отраслей, в которых объекты исследования математически описываются величинами, терпящими разрыв. Такие объекты часто возникают также и в задачах, использующих дистанционные методы. На сегодняшний день не существует общей теории описаний явлений и процессов, описываемых разрывными функциями. В статье строятся и исследуются операторы разрывной интерлинации для приближения разрывных функций двух переменных по известным ее следам (проекциями) на системе линий с использованием произвольных треугольных элементов. На основе созданных сплайн-интерлинантов строится метод приближения функций, которые имеют разрывы первого рода, и область определения которых разбивается на треугольные элементы. Причем, построенные разрывные конструкции включают в себя, как частный случай, классические непрерывные интерлинационные сплайны. В качестве экспериментальных данных выступают односторонние следы функции на системе заданных линий, именно такие данные используются в томографии. В работе приведены теоремы об интерлинационных свойствах и погрешности построенных разрывных конструкций. Построенный метод приближения позволяет приблизить разрывную функцию, избегая явления Гиббса. Рассмотрены примеры, подтверждающие эффективность предложенного метода. Предложенный метод приближения разрывных функций можно будет использовать для математического моделирования разрывных процессов в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

Ключевые слова: интерлинация функций, разрыв первого рода, томография, треугольные элементы.

I.I. PERSHINA

Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy

V.O. PASICHNYK

Kharkov State Academy of Design and Arts

APPROXIMATION OF THE DISCONTINUOUS FUNCTION OF TWO VARIABLES BY DISCONTINUOUS INTERLINATION SPLINES USING TRIANGULAR ELEMENTS

The work is devoted to the development of a method for approximating discontinuous functions using the operator of interlination of two variables functions. These operators reconstruction functions (possibly approximately) from their known traces on a given line system. It is such experimental data that are used in remote remote methods, in particular, in computed tomography. That is, they provide an opportunity to build operators whose integrals over the indicated lines (linear integrals) will be equal to the integrals of the function being restored. So, interlination is a mathematical apparatus naturally associated with the task of restoring the characteristics of objects from their known projections.

There are many practically important scientific and technical branches in which objects of research are mathematically described by values that have a discontinuity. Such objects often arise also in tasks using remote methods. To date, there is no general theory of descriptions of phenomena and processes described by discontinuous functions. The paper constructs and explores discontinuous interlineation operators for approximating discontinuous functions of two variables according to its known traces (projections) on a system of lines using arbitrary triangular elements. On the basis of the created spline-interlinants, a method is constructed for approximating functions that have discontinuities of the first kind and whose domain of definition is divided into triangular elements. Moreover, the constructed discontinuous structures include, as a special case, the classic continuous interlineation splines. The experimental data are one-sided traces of a function on a system of given lines; precisely such data are used in tomography. The paper presents theorems on interlining properties and errors of constructed discontinuous structures. The constructed approximation method allows us to approximate the discontinuous function, avoiding the Gibbs phenomenon. The examples confirming the effectiveness of the proposed method are considered. The proposed method for approximating discontinuous functions can be used for mathematical modeling of discontinuous processes in medical, geological, space and other studies.

Keywords: interlineation of functions, discontinuity of the first kind, tomography, triangular elements.

Постановка проблеми

Задачі наближення гладких функцій неперервними конструкціями з достатньою повнотою розглянуті в роботах багатьох дослідників. Однак у багатьох прикладних задачах гладкі функції виникають лише як приємний виняток або як результат надмірної ідеалізації. Найчастіше ж об'єкти дослідження математично описуються функціями з розривами, зламами і іншими порушеннями гладкості. До подібних негладких функцій відносяться профілі ударних хвиль, що генеруються потужними акустичними випромінювачами, або форма барханів в пустелі мають характерні загострення.

Об'єкти, що зазнають розрив, також дуже часто виникають в задачах, що використовують дистанційні методи. Так, в дефектоскопії виявлення тріщин в промислових виробках за допомогою неруйнівного контролю є важливим завданням, як і визначення відхилень внутрішньої будови виробу від еталону. У багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування кордонів, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, спрямованих на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. У комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла.

Дана робота відноситься до серії робіт авторів, спрямованих на дослідження та удосконалення математичних моделей в комп'ютерній томографії. До теперішнього часу в томографії розроблено багато обчислювальних методів, алгоритмів і програмних засобів, спрямованих на відновлення внутрішніх властивостей об'єкта. Вони добре себе проявляють при відновленні об'єктів з гладкими властивостями, але дають незадовільні результати для об'єктів з розривними характеристиками. Тому виникає необхідність створення математичних методів наближення розривних функцій і методів виявлення точок і ліній розриву функцій для більш точного уявлення про структуру досліджуваного об'єкта.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Математичні основи томографії були закладені на початку минулого століття в роботах вченого Дж. Радона [1], який розробив теорію перетворення функцій багатьох змінних (перетворення Радона). Відповідно до цих перетворень функцію багатьох змінних можна охарактеризувати не тільки її значеннями в точках багатовимірного простору, але й інтегралами від цієї функції, взятими за нескінченний набір ліній.

Наближення розривної функції тригонометричними сумами Фур'є спричиняє явище Гіббса. Для боротьби з цим явищем було розроблено різні фільтри [2]. Однак згадані фільтри та методи не можуть повністю подолати явище Гіббса. Автори [3] запропонували методи реконструкції розривних ліній за допомогою вейвлетів. Faridani, Finch, Ritman, Smith [4] зробили подальший розвиток цієї методології та інструментів алгоритмічної реконструкції розривів у комп'ютерній томографії. Ramachandran, Lakshminarayanan and Ramm запропонували підходи, що дозволяють відновити не тільки безліч розривів, але і значення стрибків шляхом перетворення Радона [6]. Ці роботи засновані на прямому і оберненому перетворенні Радона.

Ні фільтри, ні згадані методи не дають повного усунення явища Гіббса. У роботах Россіні М. [7] розроблені методи відновлення розривних ліній за допомогою вейвлетів. Ці методи відновлення використовують полігармонічні вейвлети, які мають нескінченний носій. Цей тип конструкції може призвести до згладжування досліджуваного сигналу і вимагає додаткового аналізу отриманих результатів. У роботі А. Л. Агєєвої і Т. В. Антонова [8] запропоновано метод визначення кількості точок розриву та їх позицій на основі використання явища Гіббса. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменші та найбільші значення стрибків наближеної функції. Також передбачається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відокремити близькі точки розриву одну від одної.

Серія праць авторів [9–10] присвячена розв'язанню плоскої задачі радонової комп'ютерної томографії з використанням неоднорідності внутрішньої структури двовимірного тіла. З цією метою доцільно використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють (можливо, наближені) функції за відомими їх слідами в заданій системі рядків. Вони дають можливість побудувати оператори, інтеграли яких з цих ліній (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від найбільш відновлюваної функції. Тобто інтерлінація – це математичний апарат, природно пов'язаний із завданням відновлення характеристик об'єктів за відомими їх прогнозами. Ця стаття є продовженням цього циклу робіт.

В роботі [10] запропоновано метод відновлення розривної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок розриву. У роботах [11–12] представлений алгоритм виявлення ліній розриву, що дозволяє відновити розривні функції двох змінних за допомогою розривного апроксимаційного сплайну та прямокутних елементів. У публікації [10] запропоновано метод розв'язання 2D задачі комп'ютерної томографії з використанням неоднорідності внутрішньої структури. Для її розв'язання в роботі побудовано оператор розривної інтерлінації на основі відомих односторонніх слідів функції вздовж системи заданих взаємно перпендикулярних прямих.

Мета дослідження

У даній роботі побудуємо оператор розривної інтерлінації за відомими слідами функції двох змінних на системі довільних ліній, які не перетинаються в одній точці. В якості експериментальних даних виступають односторонні сліди (проекції) розривної функції на системі відомих довільних ліній, три з яких не перетинаються в одній точці. На основі цього оператора в майбутньому буде побудований метод наближення розривної функції, використовуючи триангуляцію області визначення.

Викладення основного матеріалу дослідження

Побудова оператора розривної інтерлінації функції двох змінних, триангулюючи область визначення довільними трикутниками.

Нехай задано розривну функцію двох змінних $f(x, y)$ в області D . Будемо вважати, що область D розбивається на довільні трикутники. Трикутники не вкладаються один в один, а їх сторони не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими трикутними елементами (не обов'язково між усіма). Побудуємо оператор розривної поліноміальної інтерлінації, який в кожному трикутнику є оператором поліноміальної інтерлінації функції $f(x, y)$.

Розглянемо трикутний елемент $T_i, i = \overline{1, n}$, сторони якого задаються рівняннями

$$\Gamma_k^i : \omega_k^i(x, y) = x \cdot \omega_{k1}^i + y \cdot \omega_{k2}^i - \gamma_k^i, \quad k = 1, 3, i = \overline{1, n}, \quad (\omega_{k1}^i)^2 + (\omega_{k2}^i)^2 = 1,$$

$$\Delta_{123}^i = \begin{vmatrix} \omega_{12}^i & \omega_{11}^i & -\gamma_1^i \\ \omega_{22}^i & \omega_{21}^i & -\gamma_2^i \\ \omega_{32}^i & \omega_{31}^i & -\gamma_3^i \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_{k\ell}^i = \begin{vmatrix} \omega_{k1}^i & \omega_{k2}^i \\ \omega_{\ell 1}^i & \omega_{\ell 2}^i \end{vmatrix} \neq 0, \quad k \neq \ell, \quad \tau_k^i = (\omega_{k2}^i, -\omega_{k1}^i), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Нехай $A_{kl}^i = (x_{kl}^i, y_{kl}^i)$ – розв'язок систем рівнянь: $\omega_k^i(x, y) = 0, \omega_\ell^i(x, y) = 0, k \neq \ell, k, \ell = \overline{1, 3}$, тобто це вершини заданого трикутника.

Вважаємо заданими сліди функції $f(x, y)$ на прямих Γ_k^i (під та над прямою відповідно):

$$\varphi m_k^i(x, y) = f(x, (\gamma_k - x\omega_{k1}^i) / \omega_{k2}^i - 0), \quad \varphi p_k^i(x, y) = f(x, (\gamma_k - x\omega_{k1}^i) / \omega_{k2}^i + 0) \text{ або}$$

$$\psi m_k^i(x, y) = f((\gamma_k - y\omega_{k2}^i) / \omega_{k1}^i - 0, y), \quad \psi p_k^i(x, y) = f((\gamma_k - y\omega_{k2}^i) / \omega_{k1}^i + 0, y).$$

Теорема 1. Нехай $f(x, y) \in C^2(T_i), i = \overline{1, n}$. Якщо сліди функцій $f(x, y)$ задовольняють у точках A_{kl}^i умови Нікольського [12], які можуть бути записані, наприклад, так

$$\varphi p_3^i(x_{13}^i, y) = \varphi m_1^i(x_{13}^i, y), \quad \varphi m_1^i(x_{12}^i, y) = \psi m_2^i(x, y_{12}^i), \quad \psi m_2^i(x, y_{32}^i) = \varphi p_3^i(x, y_{32}^i),$$

тоді оператор

$$\begin{aligned} O^i f(x, y) = & \frac{\omega_1^i(x, y)}{\omega_1^i(A_{23}^i)} \left(\psi m_2^i \left(A_{23}^i - \frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i} \omega_3^i(x, y) \right) + \varphi p_3^i \left(A_{23}^i - \frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i} \omega_2^i(x, y) \right) - \varphi p_3^i(A_{23}^i) \right) + \\ & + \frac{\omega_2^i(x, y)}{\omega_2^i(A_{13}^i)} \left(\varphi m_1^i \left(A_{13}^i - \frac{\tau_1^i}{\Delta_{13}^i} \omega_3^i(x, y) \right) + \varphi p_3^i \left(A_{13}^i - \frac{\tau_3^i}{\Delta_{31}^i} \omega_1^i(x, y) \right) - \varphi m_1^i(A_{13}^i) \right) + \\ & + \frac{\omega_3^i(x, y)}{\omega_3^i(A_{12}^i)} \left(\varphi m_1^i \left(A_{12}^i - \frac{\tau_1^i}{\Delta_{12}^i} \omega_2^i(x, y) \right) + \psi m_2^i \left(A_{12}^i - \frac{\tau_2^i}{\Delta_{21}^i} \omega_1^i(x, y) \right) - \psi m_2^i(A_{12}^i) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

є розривним інтерлінаційним сплайном в T_i і має такі властивості:

$$O^i f(x, y) \Big|_{\Gamma_1: \omega_1^i(x, y-0)=0} = \varphi m_1^i(x) \Big|_{\Gamma_1: \omega_1^i(x, y-0)=0}; \quad O^i f(x, y) \Big|_{\Gamma_2: \omega_2^i(x, y-0)} = \psi m_2^i(x) \Big|_{\Gamma_2: \omega_2^i(x, y-0)=0};$$

$$O^i f(x, y) \Big|_{\Gamma_3: \omega_3^i(x, y+0)=0} = \varphi p_3^i(x) \Big|_{\Gamma_3: \omega_3^i(x, y+0)=0}.$$

Теорема 2. Якщо $f(x, y) \in C^{(2,2)}(\Gamma^i)$, $i = \overline{1, n}$, то для залишку $R^i f(x, y) = (I - O^i)f(x, y)$ виконується рівність

$$R^i f(x, y) = \frac{\omega_1^i(x, y)}{\omega_1^i(A_{23}^i)} \int_0^{\omega_2^i(x, y)} \int_0^{\omega_3^i(x, y)} f^{(1,1)} \left(A_{23}^i - \frac{\tau_2^i}{\Delta_{23}^i} t_3 - \frac{\tau_3^i}{\Delta_{32}^i} t_2 \right) dt_2 dt_3 +$$

$$+ \frac{\omega_2^i(x, y)}{\omega_2^i(A_{13}^i)} \int_0^{\omega_1^i(x, y)} \int_0^{\omega_3^i(x, y)} f^{(1,1)} \left(A_{13}^i - \frac{\tau_1^i}{\Delta_{13}^i} t_3 - \frac{\tau_3^i}{\Delta_{31}^i} t_1 \right) dt_1 dt_3 +$$

$$+ \frac{\omega_3^i(x, y)}{\omega_3^i(A_{12}^i)} \int_0^{\omega_1^i(x, y)} \int_0^{\omega_2^i(x, y)} f^{(1,1)} \left(A_{12}^i - \frac{\tau_1^i}{\Delta_{12}^i} t_2 - \frac{\tau_2^i}{\Delta_{21}^i} t_1 \right) dt_1 dt_2, \quad (x, y) \in \Gamma^i.$$

Зауваження. Якщо односторонні сліди на одній лінії збігаються, то отримаємо неперервний інтерлінаційний сплайн.

Приклад. Нехай областю визначення розривної функції $f(x, y)$ є трикутник T (рис. 1), сторони якого задані рівняннями $\omega_1(x, y) = 0$, $\omega_2(x, y) = 0$, $\omega_3(x, y) = 0$:

$$\omega_1(x, y) = \frac{x}{\sqrt{50}} + 7 \frac{y}{\sqrt{50}} - \frac{3}{\sqrt{50}}, \quad \omega_2(x, y) = -4 \frac{x}{\sqrt{41}} + 5 \frac{y}{\sqrt{41}} - \frac{1,2}{\sqrt{41}},$$

$$\omega_3(x, y) = 5 \frac{x}{\sqrt{29}} + 2 \frac{y}{\sqrt{29}} - \frac{5,1}{\sqrt{29}}.$$

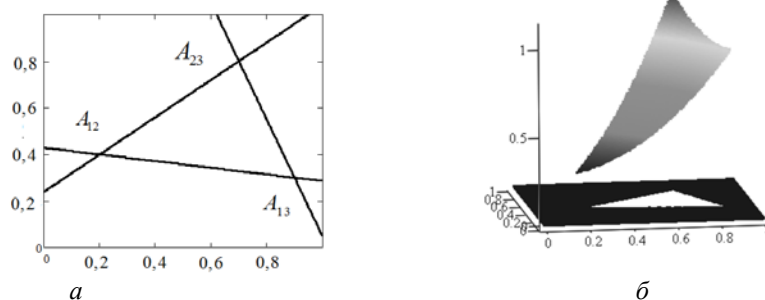


Рис. 1. Функція $f(x, y)$: a – область визначення; b – зображення.

Якщо розв'язати попарні системи вище наведених рівнянь, то отримаємо точки перетину сторін трикутника: $A_{12}(0, 2; 0, 4)$, $A_{23}(0, 7; 0, 8)$, $A_{13} = (0, 9; 0, 3)$. А функцію $f(x, y)$ задамо наступним чином:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \in T, \\ 0, & (x, y) \notin T. \end{cases}$$

Отже, функція має розриви на лініях заданого трикутника і на цих лініях має наступні сліди (під та над лініями відповідно):

$$\begin{aligned} \varphi m_1(x, y) = 0, \quad \varphi p_1(x, y) = 1,02x^2 - 0,22x + 0,184, \\ \psi m_2(x, y) = 0, \quad \varphi p_2(x, y) = 2,56y^2 - 0,75y + 0,09, \\ \varphi m_3(x, y) = 7,25x^2 - 12,75x + 6,5025, \quad \varphi p_3(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Перевіримо виконання умов Нікольського:

$$\begin{aligned} \varphi p_1(x, y)|_{\omega_2(x, y)=0} = \psi m_2(x, y)|_{\omega_1(x, y)=0} = 0,2, \\ \psi m_2(x, y)|_{\omega_3(x, y)=0} = \varphi p_3(x, y)|_{\omega_2(x, y)=0} = 1,13, \\ \varphi p_2(x, y)|_{\omega_3(x, y)=0} = \varphi m_3(x, y)|_{\omega_1(x, y)=0} = 0,9. \end{aligned}$$

Таким чином, умови теореми 1 виконуються, і побудований за формулою (1) розривний інтерлінаційний сплайн наведено на рис. 2, б. На рис. 2, а для порівняння показано розривний інтерполяційний сплайн, що наближує ту саму розривну функцію.

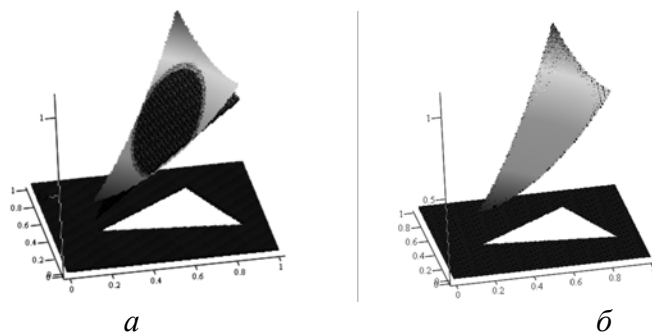


Рис. 2. Зображення заданої розривної функції $f(x, y)$ і розривних сплайнів:
а – інтерполяційного; б – інтерлінаційного

Висновки

У статті представлено метод наближення розривної функції двох змінних за його відомими слідами в системі довільних ліній. Для цього був побудований розривний інтерлінаційний оператор з використанням трикутних елементів. Було показано, що побудований оператор інтерлінації наближає розривну функцію точніше, ніж класичний оператор інтерполяції. На основі цього оператора в майбутньому ми побудуємо метод наближення розривної функції, використовуючи триангуляцію області визначення довільними трикутниками.

Список використаної літератури

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl.* 1917. Vol. 69. P. 262–277.
2. Lombardini R., Acevedo R., Kuczala A, Keys K. P., Goodrich C. P. Higher-Order Wavelet Reconstruction/Differentiation Filters and Gibbs Phenomena. *Journal of Computational Physics*. 2016. № 15. P. 244–262.

3. Suresh V., Koteswarao Rao S., Thiagarajan G., Das R.P. Denoising and Detecting Discontinuities Using Wavelets. *Indian Journal of Science and Technology*. 2016. № 9(19). P. 1–4.
4. Faridani A., Finch D. V., Ritman E. L., Smith K. T. Local Tomography. II. *SIAM J. Appl. Math.* 1997. Vol. 57 (4). P. 1095–1127.
5. Ramachandran G. N., Lakshminarayanan A. V. Three-Dimensional Reconstruction from Radiograph and Electron Micrographs: Application of Convolutions Instead of Fourier Transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. US*. 1971. № 68. P. 2236–2240.
6. Rossini M. Detecting Discontinuities in Two-Dimensional Signals Sampled on a Grid. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics*. 2007. Vol. 1. № 1. P. 1–13.
7. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Дискретный алгоритм локализации линий разрыва функции двух переменных. *Сиб. журн. индустр. матем.* 2017. Т. 20. № 4. С. 3–12.
8. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації. *Теорія та методи обробки сигналів: матеріали другої міжнародної конференції*. (Київ, травень 21-22, 2008). Київ: НАУ, 2008. С. 85–86.
9. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Першина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: К.: Наук. думка, 2017. 314 с.
10. Литвин О. М., Першина Ю. І., Сергієнко І. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы). *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 4. С. 126–134.
11. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерплінантами з використанням трапецевидних елементів. *Таврійський вісник інформатики та математики*. 2011. № 2. С.59–70.

References

1. Radon, J. (1917). Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Manningfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl.* **69**, 262–277.
2. Lombardini, R., Acevedo, R., Kuczala, A., Keys, K. P., & Goodrich, C.P. (2016). Higher-order Wavelet Reconstruction/Differentiation Filters and Gibbs Phenomena. *Journal of Computational Physics*. **15**, 244–262.
3. Suresh, V., Koteswarao, Rao S., Thiagarajan, G., & Das, R. P. (2016). Denoising and Detecting Discontinuities Using Wavelets. *Indian Journal of Science and Technology*. **9**(19), 1–4.
4. Faridani, A., Finch, D. V., Ritman, E. L., & Smith, K. T. (1997). Local tomography. II. *SIAM J. Appl. Math.* **57** (4), 1095–1127.
5. Ramachandran, G. N., & Lakshminarayanan, A. V. (1971). Three-Dimensional Reconstruction from Radiograph and Electron Micrographs: Application of Convolutions Instead of Fourier Transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. US*. **68**, 2236–2240.
6. Rossini, M. (2007). Detecting Discontinuities in Two-Dimensional Signals Sampled on a Grid. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics*. **1**, 1, 1–13.
7. Ageev, A. L., & Antonova, T. V. (2017). Diskretniy algoritm lokalizatsii liniy razryiva funktsii dvuh peremennyih. *Sib. zhurn. industr. matem.* **20**, 4, 3–12.
8. Lytvyn, O.M., Pershyna, Yu.I. (2008) Matematychnе modeliuвання v kompiuternii tomografii z vykorystanniam mishanoi aproksymatsii. Proceedings of the *Teoriia ta metody obrobky syhnaliv: Materialy druhoi mizhnarodnoi konferentsii*. (Kyiv, May 21-22, 2008), Kyiv: NAU, pp. 85–86.

9. Serhiienko, I. V., Zadiraka, V. K., Lytvyn, O. M., & Pershyna, Yu. I. (2017). Teoriia rozryvnykh splainiv ta yii zastosuvannia v kompiuternii tomohrafi: K. : Nauk. Dumka.
10. Litvin, O. M., Pershina, Yu. I., & Sergienko, I. V. (2014). Vosstanovlenie razryivnyih funktsiy dvuh peremennyih, kogda linii razryiva neizvestnyi (pryamougolnyie elementy). *Kibernetika i sistemnyi analiz*. **4**, 126–134.
11. Lytvyn, O. M., Pershyna, Yu. I. (2011). Nablyzhennia rozryvnykh funktsii dvokh zminnykh rozryvnymy splain-interlinantamy z vykorystanniam trapetsevydnykh elementiv. *Tavriiskyi visnyk informatyky ta matematyky*. **2**, 59–70.

Першина Юлія Ігорівна – д.ф.-м.н., доцент, професор кафедри інформаційний комп’ютерних технологій і математики Української інженерно-педагогічної академії, e-mail: yuliapershina78@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4719-8195.

Пасічник Валентина Олексіївна – к.т.н., доцент, завідувач кафедри «Дизайн тканин та одягу» Харківської державної академії дизайну і мистецтв, e-mail: pasechnik.va@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5196-5301.

АНАЛІЗ ЧАСОВИХ ПОСЛІДОВНИХ ПОТОКІВ ДАНИХ МЕРЕЖЕВОГО ТРАФІКУ НА ОСНОВІ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

В даний час для вивчення властивостей в мережеских системах і їх процесів широко застосовується підходи, засновані на аналізі їх вихідних сигналів. Тому аналіз систем і процесів, особливо при експериментальних дослідженнях, часто реалізується за допомогою обробки реєстрованих сигналів. Майже в кожній предметній області існують явища, які необхідно вивчати в їх динаміці, а сукупність реєстрованих сигналів подібного роду за певний період часу і є часові послідовності потоків даних. Для аналізу часових послідовностей, які є стаціонарними або нестаціонарними випадковими процесами, використовують традиційні методи статистичного аналізу випадкових величин і функцій. Найбільш поширеними з них є кореляційний і спектральний аналізи, згладжування і фільтрація даних, моделі авторегресії і прогнозування. Поряд з традиційними методами, в останні роки набувають поширення способи обробки сигналів, засновані на вейвлет-перетворенні. Особливість цієї технології в тому, що вона дозволяє розкрити особливості локальної структури складного сигналу і виявити різні його властивості, невидимі в режимі реального часу. В області вейвлет-перетворення виділяється додаткова інформація за допомогою подання до частотно-часового зображення сигналу, недоступного в початковому вигляді. На сьогоднішній момент часу посилюються вимоги до якіснішого виявлення внутрішніх закономірностей в поведінці часових послідовностей і прогнозом періодів стійкості досліджуваних процесів. Тому виникає необхідність в розробці нових і модифікації існуючих алгоритмів аналізу часових послідовностей в мережеских системах. У даній роботі досліджено застосування вейвлет-перетворення для виявлення вторгнень в комп'ютерні мережі. Пропонується аналіз останніх досліджень по даній задачі, де розглянуті вже існуючі алгоритми та методи виявлення атак за допомогою вейвлет-перетворення. Важливим пунктом у цій роботі є обґрунтування застосування вейвлет-функції та алгоритму вейвлет-перетворення для аналізу часових послідовних потоків даних мережевого трафіку. З використанням вейвлет-функції пропонується усунення шуму з мережевого трафіку та з використанням пакетного вейвлет-перетворення для аналізу мережевого трафіку і отримання інформації про можливі атаки. Використання вейвлет-функції має важливий характер, бо вибір оптимального вейвлет-базису дозволить підняти ймовірність виявлення як на початковому етапі, так і при реконструкції сигналу.

Ключові слова: вейвлет-перетворення, шумозниження, мережевий трафік, мережева атака, вейвлет Хаара, алгоритм Малла.

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПОТОКОВ ДАННЫХ СЕТЕВОГО ТРАФИКА НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В настоящее время для изучения свойств в сетевых системах и их процессов широко применяется подходы, основанные на анализе их выходных сигналов. Поэтому анализ систем и процессов, особенно при экспериментальных исследованиях, часто реализуется с помощью обработки регистрируемых сигналов. Почти в каждой

предметной области существуют явления, которые необходимо изучать в их динамике, а совокупность регистрируемых сигналов подобного рода за определенный период времени и является временные последовательности потоков данных. Для анализа временных последовательностей, которые являются стационарными или нестационарными случайными процессами, используют традиционные методы статистического анализа случайных величин и функций. Наиболее распространенными из них являются корреляционный и спектральный анализы, сглаживание и фильтрация данных, модели авторегрессии и прогнозирования. Наряду с традиционными методами, в последние годы получают распространение способы обработки сигналов, основанные на вейвлет-преобразовании. Особенность этой технологии в том, что она позволяет раскрыть особенности локальной структуры сложного сигнала и выявить различные его свойства, невидимые в режиме реального времени. В области вейвлет-преобразования выделяется дополнительная информация с помощью представления в частотно-временном изображении сигнала, недоступного в первоначальном виде. На сегодняшний момент времени усиливаются требования к качественному выявлению внутренних закономерностей в поведении временных последовательностей и прогнозу периодов устойчивости исследуемых процессов. Поэтому возникает необходимость в разработке новых и модификации существующих алгоритмов анализа временных последовательностей в сетевых системах. В данной работе исследовано применение вейвлет-преобразования для обнаружения вторжений в компьютерные сети. Предлагается анализ последних исследований по данной задаче, где рассмотрены уже существующие алгоритмы и методы обнаружения атак с помощью вейвлет-преобразования. Важным пунктом в этой работе является обоснование применения вейвлет-функции и алгоритма вейвлет-преобразования для анализа временных последовательных потоков данных сетевого трафика. С использованием вейвлет-функции предлагается устранения шума с сетевого трафика и с использованием пакетного вейвлет-преобразования для анализа сетевого трафика и получения информации о возможных атаках. Использование вейвлет-функции имеет важный характер, потому что выбор оптимального вейвлет-базиса позволит поднять вероятность обнаружения как на начальном этапе, так и при реконструкции сигнала.

Ключевые слова: вейвлет-преобразования, шумопонижения, сетевой трафик, сетевая атака, вейвлет Хаара, алгоритм Малла.

B. V. PETRIK, H. V. NELASA, V. I. DUBROVIN
National University 'Zaporizhzhia Polytechnic'

ANALYSIS OF TIME SERIAL FLOWS OF NETWORK TRAFFIC DATA BASED ON A WAVELET TRANSFORM

Currently, approaches based on the analysis of their output signals are widely used to study the properties in network systems and their processes. Therefore, the analysis of systems and processes, especially in experimental studies, is often implemented through the processing of recorded signals. In almost every subject area there are phenomena that need to be studied in their dynamics, and the set of registered signals of this kind for a certain period of time and there are time sequences of data flows. For the analysis of time sequences, which are stationary or non-stationary random processes, traditional methods of statistical analysis of random variables and functions are used. The most common of these are correlation and spectral analysis, data smoothing and filtering, autoregression models and prediction. Along with traditional methods, wavelet transform methods based on wavelet

transform have become widespread in recent years. The peculiarity of this technology is that it allows you to reveal the features of the local structure of a complex signal and detect its various properties, invisible in real time. In the wavelet transform area, additional information is selected by presenting to the frequency-time image a signal that is not available in its original form. At present, the requirements for better detection of internal patterns in the behavior of time sequences and the forecast of periods of stability of the studied processes are increasing. Therefore, there is a need to develop new and modify existing algorithms for analyzing time sequences in network systems. In this work, we investigate the use of wavelet transform to detect intrusions into computer networks. The analysis of the last researches on the given problem where the already existing algorithms and methods of detection of attacks by means of wavelet transform are considered is offered. An important point in this paper is the substantiation of the application of the wavelet function and the wavelet transform algorithm for the analysis of time sequential data flows of network traffic. Using the wavelet function, it is proposed to eliminate noise from network traffic and using packet wavelet conversion to analyze network traffic and obtain information about possible attacks. The use of the wavelet function is important, because the choice of the optimal wavelet basis will increase the probability of detection both at the initial stage and during the reconstruction of the signal.

Keywords: wavelet-transform, de-noise suppressor, network traffic, network attack, wavelet Haar, Mallat algorithm.

Постановка проблеми

Системи виявлення мережевих вторгнень і виявлення ознак комп'ютерних атак на інформаційні системи вже давно застосовуються як один з необхідних рубіжів оборони інформаційних систем і використовуються для виявлення деяких типів шкідливої активності, яка може негативно вплинути на безпеку комп'ютерної системи. Небезпечним процесом в інтернет-мережі є мережева атака [1]. Аналіз даних мережевої безпеки дуже важливий для виявлення мережевих атак. У даний час існує багато методів виявлення мережевих атак, але найефективніші вимагають або відомих параметрів атаки, або більшої обчислювальної потужності. Тобто швидкий і точний пошук по змістовним запитам вкрай важливий, щоб такі численні потоки даних були захищені.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз існуючих методів розв'язання задачі виявлення вторгнень в комп'ютерні мережі показує, що техніка вейвлет-перетворення широко використовується в системах виявлення атак, завдяки властивому їй частотно-часової властивості, яка дозволяє розкласти сигнал на кілька частотних компонентів. Вже досить багато робіт було опубліковано на цю тему, і багато систем впроваджено на практиці, деякі з них будуть розглянуті в цій роботі.

В роботі [2, С. 147–151] автори в якості вихідних даних використовували агреговані за п'ятихвилинні інтервали, середні значення наступних величин: кількість байт в секунду, кількість пакетів в секунду, кількість потоків в секунду, величина середнього розміру TCP-пакета. У кожному разі зібрані дані представляли собою дискретну послідовність частотно-часового сигналу, який згідно із запропонованим алгоритмом вейвлет-перетворення був розкладений у вигляді ієрархії декількох шарів. Для кожного з витягнутих сигналів змінна часу була незалежною. Наявність різких амплітуд в кожному з представлених сигналів відповідає певним групам аномалій.

Після збору і аналізу трафіку, автори виділяють чотири типи аномалій в реальній мережі:

- проблеми обладнання: відмова обладнання або тимчасова невірна настройка обладнання, відключення;
- атаки: DDoS, зазвичай типу flood;
- перевантаження: на мережі, наприклад збільшення величини вихідного трафіку ftp-сервера внаслідок появи на ньому популярного контенту;
- інші аномалії, які не належать ні до проблем на мережі, ні до атак і перевантажень.

Інструментарій вейвлет-перетворення дозволяє виділяти дані аномалії шляхом поділу трафіку на високочастотні, середньочастотні та низькочастотні компоненти (рис. 1). Ключовою ідеєю в роботі є виділення з даного сигналу x (який являє собою середні 5-хвилинні значення) трьох сигналів наступним чином.

Низькочастотна частина вихідного сигналу отримана реконструкцією всіх низькочастотних вейвлет-коефіцієнтів, починаючи з рівня 9 і вище. Ця частина сигналу повинна захоплювати особливості і аномалії дуже високої тривалості (від декількох днів і більше). Середньочастотна частина сигналу отримана реконструкцією вейвлет-коефіцієнтів частотних рівнів 6, 7 і 8. Отриманий тут сигнал має нульове середнє і призначений для захоплення в основному денних коливань сигналу. Число елементів даних тут близько 3% від вихідного сигналу.

Високочастотна частина складається з невеликих короткострокових змін, які вважаються шумом, що ніяк не допомагає в об'єктивному визначенні аномалій.

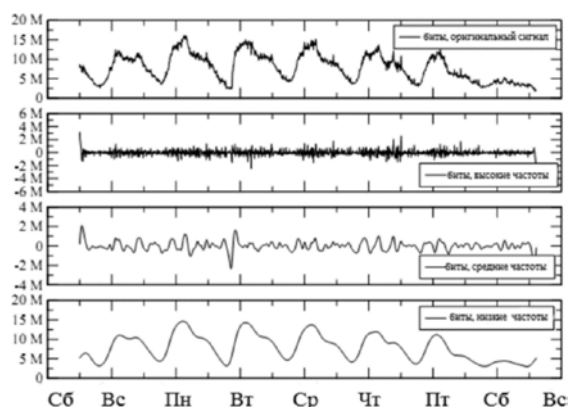


Рис. 1. Вихідний трафік, записаний протягом тижня (вгорі), і його частотні складові.

Після виділення трьох частотних складових сигналу автори обчислюють локальну дисперсію для кожної з цих складових за допомогою ковзного вікна, отримуючи на виході графік зміни дисперсії.

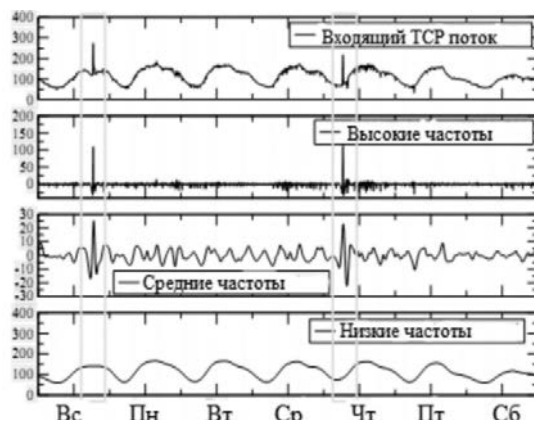


Рис. 2. Вихідний трафік з DOS-атакою(виділена сірими вертикальними смугами) та вейвлет-розкладання за трьома складовими.

Далі, застосовуючи пороговий аналіз до цього графіку, по перевищенню порогів приймається рішення про наявність чи відсутність аномалії. Результатом вейвлет-перетворення за методом Барфорду, з'явився важливий висновок про те, що різні типи аномалій можуть бути виявлені на різних, властивих тільки їм, частотних рівнях вейвлет-розкладання. Наприклад, SYN-flood атака, яка представляє собою короткочасну високочастотну аномалію, може бути виявлена тільки на високочастотних і середньочастотних частинах, в той час як на низькочастотній складовій її не видно, що ілюструється на рис. 2. Загалом дослідження показують, що аномалії мережевого трафіку можна розділити на два великі класи – короткочасні і довготривалі.

В роботі [3] показано, що для моніторингу мережевого трафіку доцільно використовувати вейвлет Хаара, і алгоритм Малла для отримання найкращого результату в порівнянні з Snort і StopAttack з створеної на основі використання вейвлет-перетворення програми.

Оцінка ефективності прототипу автоматичної системи виявлення вторгнень проведена на експериментальній ділянці телекомунікаційної мережі системи електронного документообігу і управління взаємодією. Результати експеримент представлені на рис. 3.

Тип вторгнення	IDS	Ср. время обнаруж., с	Вер. обнаруж., $(1-p_{\text{ма}})$	Оценка точн., $\epsilon_{\text{рпа}}$
Сканер пор-пор-	Snort	4,11	0,86	0,04
	StopAttak	3,86	0,84	0,0376
DOS - атаки	AA	3,8	0,94	0,028
	Snort	2,08	0,72	0,0724
	StopAttak	1,22	0,79	0,0674
Атаки на сервер spam	AA	0,98	0,84	0,05
	Snort	2,78	0,66	0,023
	StopAttak	2,46	0,7	0,046
	AA	2,28	0,84	0,049
	Snort	–	–	–
	StopAttak	3,6	0,8	0,0430
	AA	3,15	0,86	0,0469

Рис. 3. Результати порівняльної характеристики IDS.

У порівнянні з відомими IDS, запропоноване рішення аналізатора аномальність (AA) володіє більш високими характеристиками: по швидкодії на 10–12%, по ймовірності пропуску атаки – на 12–22%, при допустимому рівні ймовірності помилкової тривоги 0,05 і з вірогідністю виявлення 0,78–0,88.

Мета дослідження

Метою даного дослідження є створення методу виявлення мережевих атак з урахуванням особливості методу вейвлет-перетворення. Якість створеного методу, його машинна ефективність залежить від вдало обраних вейвлет-функції та алгоритму використання вейвлет-перетворення.

Викладення основного матеріалу дослідження

Вступ. Вейвлет-перетворення на сьогоднішній день є однією з найбільш перспективних технологій аналізу даних, його інструменти знаходять застосування в самих різних сферах інтелектуальної діяльності. На відміну від перетворення Фур'є, вейвлет-перетворення дозволяє виділяти одночасно як частотну, так і часову компоненти мінливості, тобто дає можливість аналізувати часову мінливість частотного спектра процесу. Оскільки вейвлети мають гарну частотно-часову

адаптацію, вони можуть служити зручним інструментом для дослідження частотних характеристик нестационарного сигналу [4]. Тобто уявлення мережевого трафіку в різних масштабах. Перевага такого підходу – характерні деталі, які можуть залишатися непоміченими при одному масштабі, легко можуть бути виявлені на іншому.

Також вейвлет– перетворення можливо використовувати для аналізу дискретних даних, у випадках, коли потрібна висока швидкість обробки та аналізу інформації, що актуально для вирішення завдання запобігання мережесих атак.

Вибір вейвлет–функції. На сьогоднішній день існує ціле розмаїття сімейств вейвлет–функцій, кожне з яких має свої переваги для вирішення завдань різних типів. У загальному випадку, зі збільшенням числа коефіцієнтів вейвлета, функції стають більш гладкими, що може полегшити виявлення мережевої атаки.

В даному випадку було обрано вейвлет Хаара бо, його функція має: компактний носій і забезпечення реконструкції сигналу і функції, сувору локалізацію у фізичному просторі (у часі), та характеристику з повільно спадаючим спектром частот [5]. Графічне зображення вейвлета Хаара показано на рис. 4 – а.

Точність вимірювання просторових характеристик (1) Δx та частотних характеристик $\Delta \omega$ обмежена відношенням Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta \omega \geq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Розкладання сигналу в системі базисних функцій Хаара має наступну структуру. Перша базова функція – пряма лінія. У разі нормованого базису згортка першої базисної функції з вихідним сигналом буде визначати середнє значення функції. Наступні базисні функції розкладання Хаара є масштабовані за ступенем двійки зсунуті сходишки (рис. 4 б).

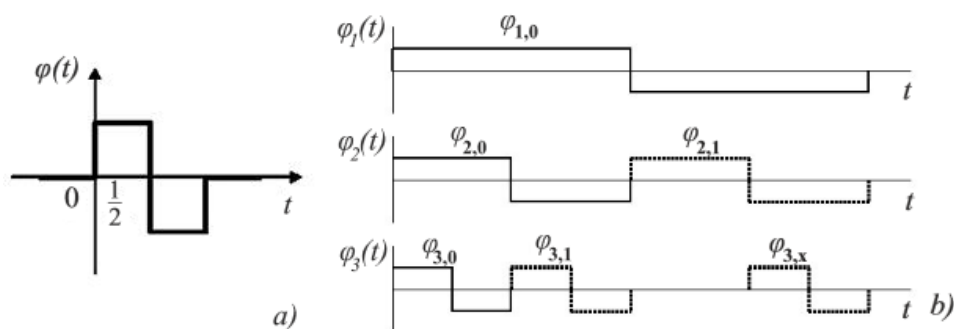


Рис. 4. Зображення вейвлет Хаара (а) та функцій Хаара для різних масштабів згорток (б).

Очищення шуму за допомогою вейвлетів. Шумами прийнято вважати високочастотні компоненти сигналу. Шумозниження є важливим процесом усунення шумів з корисного сигналу з метою підвищення його суб'єктивного якості або для зменшення рівня помилок у каналах передачі і системах зберігання цифрових даних.

Всі пристрої запису, як аналогові, так і цифрові, мають властивості, які роблять їх сприйнятливими до шуму. Часто в лініях зв'язку сигнали піддаються впливу перешкоди «білого шуму», який створює деталізуючі коефіцієнти з високим вмістом шумових компонентів, що мають великі випадкові викиди значень сигналу. При вейвлет–аналізі подібні складові можуть бути видалені з використанням процедури перерахунку коефіцієнтів деталізації, значення яких є меншими в порівнянні зі значенням порога. Процедура усунення шуму [6] має такий алгоритм:

1. Декомпозиція. Вибір вейвлета і рівень розкладання, і обчислюється вейвлет-перетворення вихідного сигналу до обраного рівня.
2. М'яка порогова обробка для кожного рівня деталізують коефіцієнтів.
3. Вейвлет-реконструкція, заснована на початкових апроксимуючих коефіцієнтах і модифікованих деталізуючих коефіцієнтах.

Таким чином, можливо встановити шумовий поріг. Ті значення, які перевищують поріг, будуть розглядатися як корисні коефіцієнти сигналу, а ті значення, які менше порога, будуть розглядатися як сигнали шуму, які можна фільтрувати.

На рис. 5 представлений оригінальний(а) і очищений від шуму (b) сигнал в Matlab:

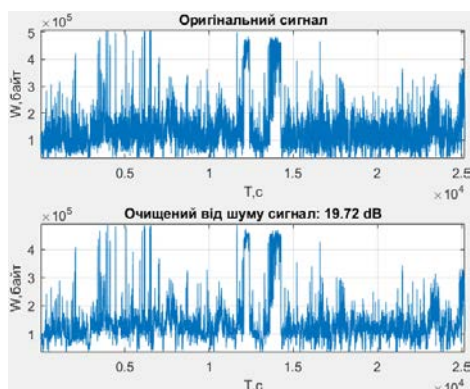


Рис. 5. Зображення оригінального (а) і очищеного від шуму сигналу (b).

Розмір очищеного від шуму сигналу набагато менше, ніж у вихідного сигналу, тому дані будуть займати менше місця і краще підходити для передачі в інтернеті.

Вейвлет-перетворення на основі алгоритму Малла. При безперервній зміні параметрів трафіку для розрахунку вейвлет-спектра необхідні великі обчислювальні витрати. Безліч функцій вейвлетів надлишкові. Необхідна дискретизація цих параметрів при збереженні можливості відновлення сигналу з його перетворення.

Сутність операцій алгоритму Малла полягає в наступному. Подання сигналу у вигляді сукупності послідовних наближень апроксимуючої і деталізують складових до яких використовується набір фільтрів – низькочастотний і високочастотний. Спочатку сигнал пропускається через низькочастотний фільтр, в результаті чого виходять коефіцієнти апроксимації, які характеризують глобальний тренд досліджуваного ряду. Вихідна послідовність також пропускається через високочастотний фільтр, при цьому на виході виходять коефіцієнти деталізації, що характеризують локальні особливості ряду даних. Для збільшення частотного дозволу можливе проведення повторного розкладання для коефіцієнтів апроксимації попереднього рівня.

Дискретне вейвлет-пакетне перетворення. При розгляді дискретного вейвлет – пакетного перетворення за алгоритмом Малла на кожному кроці відбувається «розщеплення» сигналу на високочастотні і низькочастотні складові та «відсікання» високочастотної складової. Причина такого підходу полягає в неявному припущенні, що низькочастотна область містить більше інформації про вихідний сигнал, ніж високочастотна область. В результаті виходить «однобоке» дерево (рис. 6).

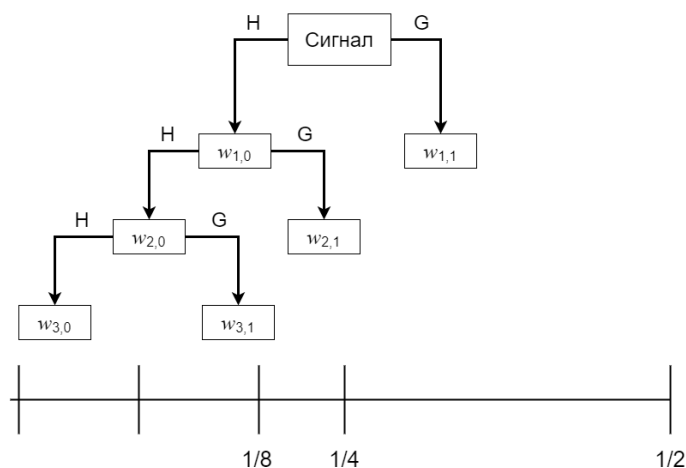


Рис. 6. Логічне уявлення алгоритму Малла.

Таке припущення виправдане для багатьох реальних сигналів, однак для деяких воно не виконується, оскільки вейвлет-аналіз є поведінковим методом [7]. Тобто можна зробити висновок про те, що представлені типи аномальних подій можуть бути ідентифіковані на конкретних, притаманних їм частотах.

Віткам дерева відповідатиме набір підпросторів сигналу з базисами, побудованими, як і для однобокого дерева згідно кратномасштабного аналізу. Функції та фільтри, які породжують ці базиси, називаються вейвлет-пакетами і пакетними фільтрами.

Критерій, за яким проводиться виявлення аномалій, являє собою відношення дисперсії і середнього коефіцієнтів пакетного вейвлет-перетворення. Адаптація вибору рівня розкладання полягає в наступному. Якщо на якомусь рівні пакетного вейвлет-перетворення є перевищення порогу, вноситься рішення про наявність аномалії. Якщо ж на цьому рівні відбувається перевищення нижнього порога, значить, в цьому місці можливо має місце бути аномалія і тоді проводиться подальші вейвлет-перетворення до наступного рівня, на якому знову проводиться аналіз. Так відбувається до того моменту, поки значення відносин або не перевищить поріг, що буде говорити про аномалії, або перестануть перевищувати порога взагалі, що буде говорити про відсутність аномалій.

При проведенні експерименту (рис. 7) маємо вікно з зображення самого трафіку (праворуч — вгорі), оптимальне дерево вейвлет перетворення (зліва–вгорі), також вікна відновленої випадкової складової коефіцієнта деталізації трафіку по вузлу 6.1 (зліва–знизу) і кольоровий спектр – за яким і проводиться аналіз (праворуч-знизу).

Були зроблені наступні висновки – на діапазоні часу $[1; 1.5 \times 10^5 \text{ c.}]$ було виявлено дві протяжні аномалії (помічено світло-фіолетовим кольором на кольоровому спектрі). Тобто на відновленій випадковій складовій трафіку (по вузлу 6.1) піки загострення значень збігаються по часовій осі з аномаліями на вихідному трафіку, тобто аномалія (в даному випадку атака SYN-flood) добре локалізуються за допомогою пакетного аналізу вейвлету при використанні вибіркового вузлів оптимального дерева розкладання

Для проведення експерименту було використано середовище Matlab в меню додатку ToolBox Wavelet – wavemenu з обраною опцією – вейвлет-пакетне перетворення.

Таким чином, запропоновану методику на основі інтеграції вейвлет-пакетної моделі мережевого трафіку можна використовувати для виявлення аномальності трафіку і наявності мережевих атак.

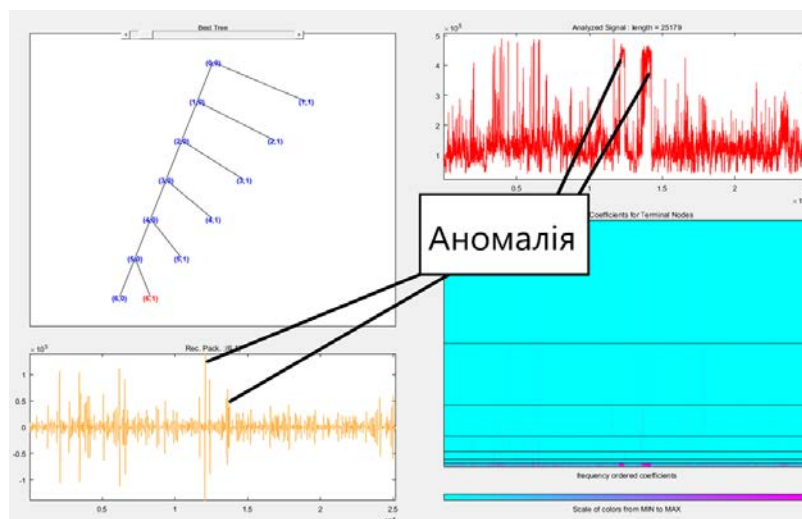


Рис. 7. Результати вейвлет–пакетного перетворення по базисним функціям Хаара і відновлення по деталізуючим вузлам кращого дерева розкладання (6,1).

Висновки

Під час виконання роботи було розроблено власну методику виявлення аномалій і мережевих атак на основі інтеграції вейвлет-пакетної моделі мережевого трафіку в інтерактивному середовищі розробки Matlab, а саме було визначено ряд параметрів, які враховуються при здійсненні вейвлет–перетворення. Тобто вейвлет–функції Хаара використовуються для підвищення характеристики правильного виявлення, а алгоритм Малла дає можливість аналізу частотно–часового подання сигналу по низькочастотних і високочастотних компонентів, що забезпечує можливість локалізації аномалій сигналу різних видів. Також можливе шумозниження сигналу з допомогою вейвлет-перетворення і в результаті зберігання корисних потоків даних мережі для ефективного вилучення аномальних подій.

Список використаної літератури

1. Берковський В. В., Безсонов О. С. Аналіз та класифікація методів виявлення вторгнень в інформаційну систему. *Кібернетична безпека*. 2017. №2. С. 57–62.
2. Шелухин О. И., Сакалема Д. Ж., Филинова А. С. Обнаружение вторжений в компьютерные сети (сетевые аномалии). Москва: Горячая линия – Телеком, 2016. 221 с.
3. Соловьев Н. А. , Тишина Н. А., Дворовой И. Г. Обнаружение вторжений на основе вейвлет–анализа сетевого трафика. *Вестник УГАТУ*. 2010. Т. 14. №5(40). С. 188–194.
4. Tverдохleb J., Dubrovin V., Zakharova M. Wavelet technologies of non–stationary signals analysis. 1–th IEEE International Conference on Data Stream Mining & Processing. (Ukraine, Lviv, 23-27 August, 2016). Lviv: LPNU, 2016. P. 75–79.
5. Твердохліб Ю. В. Методи та інформаційна технологія комплексного оцінювання параметрів вейвлет-перетворення нестационарних сигналів : автореф. дис. ... канд. тех. наук: 05.13.06. Харків. нац. екон. ун–т ім. Семена Кузнеця. Харків, 2018. 20 с.
6. SUN Donghong, SHU Zhibiao, LIU Wu, REN Ping, WU Jian–ping. Analysis of Network Security Data Using Wavelet Transforms. *Journal of Algorithms & Computational Technology*. 2003. Vol. 8. №1. P. 59–79.
7. Браницкий А. А., Котенко И. В. Анализ и классификация методов обнаружения сетевых атак. *Труды СПИИРАН*. 2016. №45. С. 211–213.

References

1. Bierkovskiy, V. V., & Bezsonov, O. S. (2017). Analiz ta klasyfikatsiia metodiv vyivlennia vtorhnen v informatsiinu systemu. *Kibernetychna bezpeka*, **2**, 57–62.
2. Sheluhin, O. I., Sakalema, D. Zh., & Filinova, A. S. (2016). Obnaruzhenie vtorzheniy v kompyuternyye seti (setevyye anomalii). Moskva: Goryachaya liniya – Telekom.
3. Solovev, N. A., Tishina, N. A., & Dvorovoy, I. G. (2010). Obnaruzhenie vtorzheniy na osnove veyvlet–analiza setevogo trafika. *Vestnik UGATU*, **14**, 5(40), 188–194.
4. Tverdohleb, J., Dubrovin, V., & Zakharova, M. Wavelet technologies of non–stationary signals analysis. Proceedings of the 1–th IEEE International Conference on Data Stream Mining & Processing. (Ukraine, Lviv, 23–27 August, 2016). Lviv: LPNU, pp. 75–79.
5. Tverdokhlib, Yu. V. (2018). Metody ta informatsiina tekhnolohiia kompleksnoho otsiniuvannia parametriv veyvlet–peretvorennia nestatsionarnykh syhnaliv: avtoref. dys. ... kand. tekhn. nauk: 05.13.06 (PhD Thesis). Kharkiv: Kharkiv. nats. ekon. un–t im. Semena Kuznetsia.
6. SUN, Donghong, SHU, Zhibiao, LIU, Wu, REN, Ping, & WU, Jian–ping. (2003). Analysis of Network Security Data Using Wavelet Transforms. *Journal of Algorithms & Computational Technology*, **8**, 1, 59–79.
7. Branitskiy, A. A., & Kotenko, I. V. (2016). Analiz i klassifikatsiya metodov obnaruzheniya setevyih atak. *Trudy SPIIRAN*, **45**, 211–213.

Дубровін Валерій Іванович – к.т.н., професор, професор кафедри програмних засобів національного університету «Запорізька Політехніка», e–mail: vdubrovin@gmail.com, ORCID: 0000–0002–0848–8202.

Петрик Богдан Вячеславович – студент кафедри програмних засобів національного університету «Запорізька Політехніка», e–mail: dartbogdan32@gmail.com, ORCID: 0000–0002–9528–4610.

Неласа Ганна Вікторівна – к.т.н., доцент, професор кафедри захисту інформації національного університету «Запорізька Політехніка», e–mail: annanelasa@gmail.com, ORCID: 0000–0002–3708–0089.

ДО ПИТАННЯ РОЗРОБЛЕННЯ МЕТОДИК ТА АЛГОРИТМІВ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ БУДІВЕЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ

Нині у процесах архітектурно-будівельного проектування широко застосовуються комп'ютерні інформаційні технології, що реалізовані за допомогою CAD/CAM/CAE (Computer Aided Design / Computer Aided Manufacturing / Computer Aided Engineering) систем, таких як ArchiCAD, Allplan, Revit, САПФІР, ЛІРА-САПР і т. д. Зазначені засоби отримали узагальнену назву BIM (Building Information Modeling), що означає будівельне інформаційне моделювання. Одну з базових його складових становить комп'ютерна графіка, реалізована на основі параметричного геометричного моделювання, перспективним подальшим розвитком якого є структурно-параметричне формоутворення. Тому вдосконалення відповідних методів, способів, прийомів та алгоритмів вважається важливою науково-технічною проблемою.

BIM-технології суттєвим чином сприяють підвищенню продуктивності праці, якості результатів роботи багатьох будівельних проектних організацій. У публікації виконано аналіз теперішнього стану належних автоматизованих систем із метою врахування наявних вимог користувачів стосовно комп'ютерного формоутворення, визначено деякі актуальні задачі його покращення. Запропоновані нові алгоритми спрямовані на вирішення окреслених питань, поліпшення обчислювальної ефективності програмних засобів, забезпечення проведення оптимізації отримуваних інженерних розв'язків у певних техніко-економічних аспектах. Напрацьований математичний апарат характеризується універсальністю, тобто незалежністю від змісту конкретних виробничих завдань. У дослідженні подано відповідні приклади використання. Відкритість сучасних комп'ютерних інформаційних систем дозволяє користувачам створювати свої власні програмні додатки, які ефективно вирішують спеціалізовані задачі. Це забезпечує гнучку адаптацію існуючих автоматизованих систем архітектурно-будівельного проектування до вимог практики. Тому питання розроблення нових продуктивних алгоритмів комп'ютерного структурно-параметричного моделювання є доволі актуальним. У статті визначено деякі напрямки подальших наукових розвідок розглянутого плану.

Ключові слова: будівельні об'єкти, життєвий цикл, BIM-технології, структурно-параметричне моделювання.

К ВОПРОСУ РАЗРАБОТКИ МЕТОДИК И АЛГОРИТМОВ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Сейчас в процессах архитектурно-строительного проектирования широко применяются компьютерные информационные технологии, реализованные с помощью CAD/CAM/CAE (Computer Aided Design / Computer Aided Manufacturing / Computer Aided Engineering) систем, таких как ArchiCAD, Allplan, Revit, САПФІР, ЛІРА-САПР и т. д. Указанные средства получили обобщенное название BIM (Building Information Modeling), что означает строительное информационное моделирование. Одной из базовых его составляющих является компьютерная графика, реализованная на основе

параметрического геометрического моделирования, перспективным дальнейшим развитием которого есть структурно-параметрическое формообразование. Поэтому совершенствование соответствующих методов, способов, приемов и алгоритмов считается важной научно-технической проблемой.

ВІМ-технологии существенным образом способствуют повышению производительности труда, качества результатов работы многих строительных проектных организаций. В публикации выполнен анализ нынешнего состояния подлежащих автоматизированных систем с целью учета имеющихся требований пользователей относительно компьютерного формообразования, определены некоторые актуальные задачи по его улучшения. Предложенные новые алгоритмы направлены на решение указанных вопросов, улучшение вычислительной эффективности программных средств, обеспечение проведения оптимизации получаемых инженерных решений в определенных технико-экономических аспектах. Нарботанный математический аппарат характеризуется универсальностью, то есть независимостью от содержания конкретных производственных задач. В исследовании представлены соответствующие примеры использования. Открытость современных компьютерных информационных систем дает возможность пользователям создавать свои собственные программные приложения, которые эффективно решают специализированные задачи. Указанная особенность обеспечивает гибкую адаптацию существующих автоматизированных систем архитектурно-строительного проектирования к требованиям практики. Поэтому вопрос разработки новых производительных алгоритмов компьютерного структурно-параметрического моделирования является довольно актуальным. В статье определены некоторые направления дальнейших научных исследований рассматриваемого плана.

Ключевые слова: строительные объекты, жизненный цикл, ВІМ-технологии, структурно-параметрическое моделирование.

O.V. REGIDA

Kyiv National University of Construction and Architecture

TO THE QUESTION OF THE DEVELOPMENT OF TECHNIQUES AND ALGORITHMS OF STRUCTURAL-PARAMETRIC MODELING OF BUILDING OBJECTS

At present, computer information technologies are widely used in architectural and construction design processes, which are implemented using CAD/CAM/CAE (Computer Aided Design / Computer Aided Manufacturing / Computer Aided Engineering) systems, such as ArchiCAD, Allplan, Revit, SAPPHIRE, LIRA-SAPR, etc. These tools received the generalized name BIM (Building Information Modeling), which means building information modeling. One of the main components of these programs is computer graphics, implemented on the basis of parametric geometric modeling. Structural-parametric shaping is its promising further development. Therefore, the improvement of relevant methods, techniques and algorithms is considered an important scientific and technical problem.

BIM-technologies significantly contribute to increasing labour productivity, the quality of the results of the work for many construction design organizations. The publication analyzes the current state of appropriate automated systems in order to take into account the existing requirements of users for computer design, identifies some urgent tasks for its improvement. The proposed new algorithms are aimed at solving the outlined issues, improving the computational efficiency of software, ensuring the optimization of the obtained engineering solutions in certain technical and economic aspects. The accumulated

mathematical apparatus is characterized by universality, i.e. independence from the content of specific production problems. The study presents relevant examples of its use. The openness of modern computer information systems allows users to create their own software applications that effectively solve specialized tasks. This provides a flexible adaptation of existing automated systems of architectural and construction design to the requirements of practice. Therefore, the question of developing new productive algorithms for computer structural-parametric modeling is quite relevant. The article identifies some directions of further scientific research in given area.

Keywords: construction objects, life cycle, BIM-technologies, structural-parametric modeling.

Постановка проблеми

Сучасне широке впровадження BIM-технологій у виробництво, з одного боку, сприяє суттєвому підвищенню продуктивності праці інженерів-проектувальників та якості результатів їх роботи, а з іншого, ставить актуальними задачі щодо ефективності використання самих цих засобів, їх подальшого вдосконалення. Окреслені завдання становлять важливу науково-прикладну проблему.

Успішно її вирішити можна застосуванням комплексного підходу до опрацювання математичного, інформаційного, методичного, програмного, технічного та інших забезпечень відповідних автоматизованих систем. Деяким аспектам перших трьох із наведених питань присвячено дану публікацію.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Провідну роль BIM-технологій протягом життєвого циклу будівельних об'єктів докладно обґрунтовано в монографії [1]. При цьому подано формування комп'ютерних інформаційних моделей будівель з урахуванням процесів їх спорудження, але тільки в аспекті змінювання напружено-деформованого стану конструкцій. Видання [2–6] описують можливості систем САПФР (Система Архітектурного Проектування, Формоутворення і Розрахунків), ЛПА-САПР, ArchiCAD, Allplan та Revit із точки зору реалізації параметричного моделювання будівельних об'єктів. У дослідженнях [7–10] наведено відомості стосовно структурно-параметричного формоутворення машинобудівної продукції. Виконаний аналіз наявних публікацій показав доцільність розповсюдження структурно-параметричного моделювання на будівельну галузь.

Мета дослідження

Завдання статті полягає в розробці методики та деяких алгоритмів структурно-параметричного моделювання технологічних процесів, створенні належних елементів математичного, інформаційного та методичного забезпечення систем автоматизованого архітектурно-будівельного проектування.

Викладення основного матеріалу дослідження

Відповідно до праць [7–10] структурно-параметрична модель деякого довільного об'єкта O визначається множиною:

$$O = (o_i)_1^N, \quad (1)$$

де o_i – його елементи,
 N – їх число.

Зауваження. Оскільки динамічним, тобто змінюваним у часі, об'єктом O можна відтворювати процеси та явища, то, в загальному випадку, під позначенням O маються

на увазі як об'єкти, так і процеси та явища.

Проектні варіанти o_i визначаються кортежем:

$$o_i = (o_{ij})_1^{N_i}, \quad (2)$$

де N_i – їх кількість,
та векторами параметрів:

$$P_{ij} = (p_{ijk})_1^{N_{Pij}}, \quad (3)$$

де N_{Pij} – число параметрів j -го варіанта i -ї складової об'єкта O .

Структурні взаємозв'язки між різновидами n -го та m -го елементів відтворюють матриці суміжності:

$$C_{nm} = \|c_{nr}c_{ms}\|, \quad n \in N, \quad m \in N, \quad n \neq m, \quad r \in \{1, \dots, N_n\}, \quad s \in \{1, \dots, N_m\}, \quad (4)$$

де $c_{nr}c_{ms}=1$ при взаємодії o_{nr} та o_{ms} , $c_{nr}c_{ms}=0$ – у протилежному випадку.

На підставі наведених формул маємо множину структурно-параметричних проектних варіантів об'єкта O :

$$O = (O_k)_1^{N_o}. \quad (5)$$

Графові моделі для виразів (1) ... (5) зображено на рис. 1.

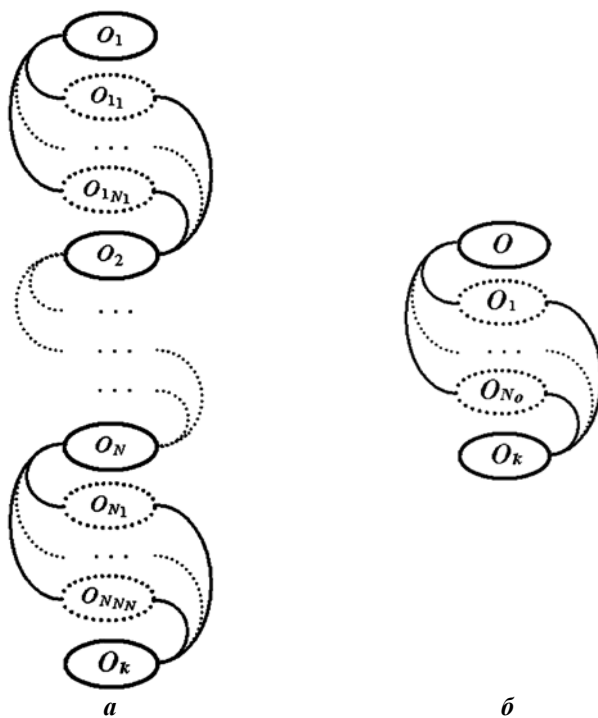


Рис. 1. Структурно-параметрична модель об'єкта O :
а – граф структури; б – граф варіантів.

У дослідженнях [9, 10] описано структурно-параметричне моделювання виробів

машинобудування та належні алгоритми [10, 11], що дозволяють, зокрема, визначати число варіантів No об'єкта O , їх склад, знаходити екстремальні ланцюги в показаному на рис. 1, a графі і т. д.

Розглянемо запропоновану методику використання проаналізованого математичного апарату для будівельних об'єктів. Нехай для кухні та санітарного вузла (ванної кімнати і вбиральні) одноквартирного житлового будинку потрібно опрацювати варіанти опоряджувальних робіт (штукатурення, облицювання та фарбування).

Визначаємо модельовані опоряджувальні роботи:

$$OP = (OP_i)_1^{N_{OP}} = (OP_1, OP_2, OP_3), \quad (6)$$

де $OP_1 = \{\text{Штукатурення}\} = \{\text{ШТК}\}$,
 $OP_2 = \{\text{Облицювання}\} = \{\text{ОБЛ}\}$,
 $OP_3 = \{\text{Фарбування}\} = \{\text{ФРБ}\}$.

Формуємо склад елементів (6) та їх структуру:

$$\text{ШТК} = (\text{ШТК}_i)_1^{N_{\text{ШТК}}} = (\text{ШТК}_1, \text{ШТК}_2), \quad (7, a)$$

де $\text{ШТК}_1 = \{\text{Мокре}\} = \{\text{ШМ}\}$,
 $\text{ШТК}_2 = \{\text{Сухе}\} = \{\text{ШС}\}$,

$$\text{ШМ} = (\text{ШМ}_i)_1^{N_{\text{ШМ}}} = (\text{ШМ}_1, \text{ШМ}_2), \quad (7, б)$$

$\text{ШМ}_1 = \{\text{Одношарове}\} = \{\text{ШМО}\}$,
 $\text{ШМ}_2 = \{\text{Багатошарове}\} = \{\text{ШМБ}\}$,
 $\text{ШМБ} = (\text{ШМБ}_i)_1^{N_{\text{ШМБ}}} = (\text{ШМБ}_1, \text{ШМБ}_2, \text{ШМБ}_3) = (\text{Просте}, \text{Полішене}, \text{Високоякісне})$,

$$\text{ШС} = (\text{ШС}_i)_1^{N_{\text{ШС}}} = (\text{ШС}_1, \text{ШС}_2), \quad (7, в)$$

$\text{ШС}_1 = \{\text{Безкаркасне}\} = \{\text{ШСБ}\}$,
 $\text{ШС}_2 = \{\text{Каркасне}\} = \{\text{ШСК}\}$;

$$\text{ОБЛ} = (\text{ОБЛ}_i)_1^{N_{\text{ОБЛ}}} = (\text{ОБЛ}_1), \quad (8)$$

де $\text{ОБЛ}_1 = \{\text{Керамічною плиткою}\} = \{\text{ОБЛКП}\}$;

$$\text{ФРБ} = (\text{ФРБ}_i)_1^{N_{\text{ФРБ}}} = (\text{ФРБ}_1), \quad (9)$$

де $\text{ФРБ}_1 = \{\text{Водними фарбами}\} = \{\text{ФВД}\}$,
 $\text{ФВД} = (\text{ФВД}_i)_1^{N_{\text{ФВД}}} = (\text{ФВД}_1, \text{ФВД}_2, \text{ФВД}_3) = (\text{Клейовими}, \text{Ванярними}, \text{Емульсійними})$.

Наведені роботи виконуються на завершальному етапі зведення будинку для забезпечення необхідних естетичних і санітарно-гігієнічних вимог. У даному випадку полягають у покритті частини стінових конструкцій кухні мокрою чи сухою штукатуркою (гіпсокартонними листами), облицюванні стін ванної кімнати, вбиральні та решти стін кухні керамічною плиткою, фарбуванні оштукатурених стін кухні.

Згідно з виразами (7, а) ... (7, в) маємо структурні варіанти штукатурення кухні:

$$ШМ_{КУХ} = (ШМ_{КУХ_i})_1^{N_{ШМ_{КУХ}}} = (ШМ_{КУХ_i})_1^4, ШС_{КУХ} = (ШС_{КУХ_i})_1^{N_{ШС_{КУХ}}} = (ШС_{КУХ_i})_1^2. \quad (10)$$

Відповідно до множини (8) облицювання ванної, вбиральні та кухні реалізується кортежами:

$$ОБЛ_{ВАН} = (ОБЛ_{ВАН_i})_1^{N_{ОБЛ_{ВАН}}} = (ОБЛ_{ВАН_i})_1^{10}, ОБЛ_{ВБР} = (ОБЛ_{ВБР_i})_1^{N_{ОБЛ_{ВБР}}} = (ОБЛ_{ВБР_i})_1^{10},$$

$$ОБЛ_{КУХ} = (ОБЛ_{КУХ_i})_1^{N_{ОБЛ_{КУХ}}} = (ОБЛ_{КУХ_i})_1^{10}. \quad (11)$$

Згідно з вектором (9) фарбування кухні:

$$ФРБ_{КУХ} = (ФРБ_{КУХ_i})_1^{N_{ФРБ_{КУХ}}} = (ФРБ_{КУХ_i})_1^{10}. \quad (12)$$

За аналогією з множиною (5) отримуємо:

$$ОР = (ОР_k)_1^{N_{ОР}}. \quad (13)$$

Залежності (6) ... (13) відображають аналіз процесу життєвого циклу будівельного об'єкта в аспекті ВІМ-технологій, формування складу елементів і зв'язків між ними, тобто наведеної на рис. 2 інформаційної моделі.

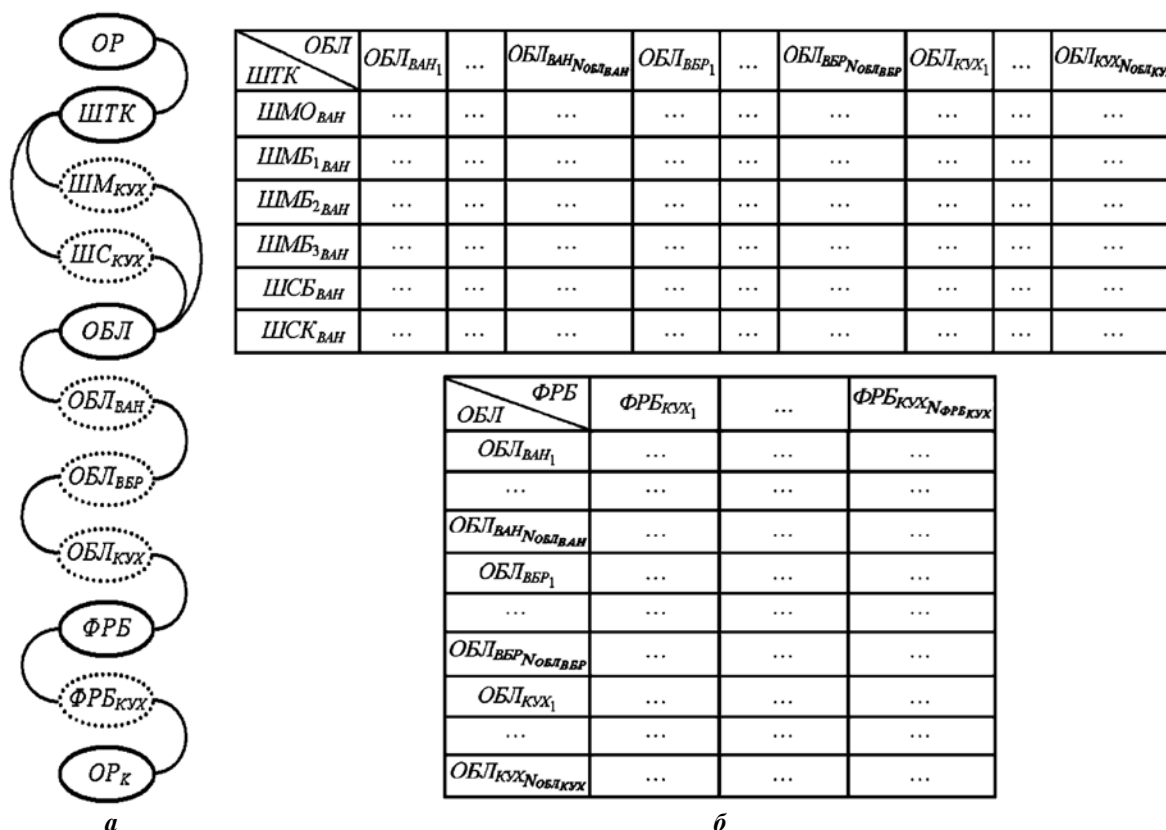


Рис. 2. Структурно-параметрична модель опоряджувальних робіт: а – граф структури; б – матриці суміжності варіантів елементів.

Показана на рис. 2 структурно-параметрична модель визначає порядок виконання розглянутих опоряджувальних робіт, формування їх інтегральних параметрів і характеристик, забезпечення включення в подібному до рис. 1, б вигляді

до складу систем більш високого рівня. Ребра її графа кратні, оскільки можуть одночасно відтворювати кілька проектних параметрів і характеристик, наприклад, вподобання замовників, потребу в матеріалах, трудомісткість, тривалість робіт, їх вартість і т. д., що розраховуються з використанням описів різноманітних інших дисциплін, таких як технологія будівництва, економіка і т. д.

Подамо деякі міркування стосовно дефініції оптимальних варіантів опрацьовуваних робіт. Ця задача для продукції машинобудування [11] розв'язується, зокрема, методом індексації вершин графа структурно-параметричної моделі. Зазначений підхід гарантує визначення екстремальних, тобто мінімальних або максимальних, ланцюгів графа, які сполучають його початкову та кінцеву вершину. Головним недоліком є велике число елементів кортежів індексів у вершинах графа. Наприклад, якщо всі комірки матриць суміжності рис. 2, *б* є одиницями (відповідає найбільшій кількості варіантів), то у вершині *ФРБ* буде 10 компонентів кортежу індексів, в *ОБЛ* – 10 тис., *ШТК* – 60 тис. Звісно, це граничний випадок. Однак, навіть при зменшенні числа досліджуваних різновидів у виразах (10) ... (12) вдвічі, маємо для вершини *ФРБ* – 5 компонентів кортежу індексів, *ОБЛ* – 625, *ШТК* – 1875.

Коли вибір варіантів у вершині графа структурно-параметричної моделі та величини їх характеристик не залежать від попередніх даних, що відповідає проаналізованому випадку опоряджувальних робіт, то пропонується така модифікація методу індексації вершин.

У передостанній вершині графа формується кортеж із векторами-трійками, які містять довжину ребра графа, що відповідає значенню характеристики, яка оптимізується, належні номери варіанта поточної та наступної вершини з матриць суміжності. Кортеж індексів упорядковується за значеннями перших компонентів векторів. За потреби зменшення числа опрацьовуваних варіантів, без втрати оптимальних із них, скорочується частина неперспективних індексів. Далі формується аналогічний кортеж індексів попередньої вершини додаванням до упорядкованих його компонентів нових, що отримані опрацюванням декартового добутку початкового кортежу поточної вершини та кортежу наступної вершини шляхом підсумовування належних величин довжин ребер. Можливе зменшення числа опрацьовуваних варіантів здійснюється описаним вище прийомом. Виконання алгоритму закінчується в першій вершині структурно-параметричної моделі. Викладення конкретних результатів його роботи становить перспективний матеріал для подальшої публікації.

Висновки

У статті запропоновано методику та алгоритми структурно-параметричного моделювання виробничих процесів, що дозволяє підвищувати ефективність математичного, інформаційного і програмного забезпечення систем автоматизованого проектування в будівництві.

Список використаної літератури

1. Барабаш М. С. Компьютерное моделирование процессов жизненного цикла объектов строительства: Монография. Киев: Издательство Сталь, 2014. 301 с.
2. Барабаш М. С. Программные комплексы САПФИР и ЛИРА-САПР – основа отечественных BIM-технологий: Монография. Москва: Издательство Юрайт, 2013. 366 с.
3. Ланцов А. Л. Компьютерное проектирование в архитектуре. ArchiCAD 11. Москва: ДМК-Пресс, 2009. 800 с.
4. Некрасов А. В., Срыбных М. А. Allplan 2014. Первый проект от эскиза до презентации. Екатеринбург: Уралкомплект-наука, 2014. 250 с.

5. Aubin P. F. The Aubin Academy Revit Architecture, covers Version 2016 and beyond. Oak Lawn: G3B Press, 2015. 801 p.
6. Киевская Е. И., Барабаш М. С. Принципы параметрического моделирования строительных объектов. *Современное строительство и архитектура*. 2016. Вып. 1. С. 16–22.
7. Ванін В. В., Вірченко Г. А. Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2009. Вип. 23. С. 42–48.
8. Вірченко С. Г. Застосування структурно-параметричного підходу для динамічного формоутворення технічних об'єктів. *Технічна естетика і дизайн*. 2017. Вип. 13. С. 47–51.
9. Vanin V., Virchenko G., Virchenko S., Nezenko A. Computer variant dynamic forming of technical objects on the example of the aircraft wing. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. № 6/7 (90). P. 67–73.
10. Вірченко Г. А. Узагальнення структурно-параметричного підходу до геометричного моделювання об'єктів машинобудування: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. Київ: Політехніка, 2011. 41 с.
11. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Ванін І. В. Деякі питання розробки обчислювальних алгоритмів структурно-параметричного-моделювання складних геометричних об'єктів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2006. Вип. 76. С. 17–23.

References

1. Barabash, M. S. (2014). *Kompyuternoe modelirovanie protsessov zhiznennogo tsikla ob'ektov stroitelstva*: Monografiya. Kiev: Izdatelstvo Stal.
2. Barabash, M. S. (2013). *Programmnyie kompleksyi SAPFIR i LIRA-SAPR – osnova otechestvennyih BIM-tehnologiy*: Monografiya. Moskva: Izdatelstvo Yurayt.
3. Lantsov, A. L. (2009). *Kompyuternoe proektirovanie v arhitekture*. ArchiCAD 11. Moskva: DMK-Press.
4. Nekrasov, A. V., & Sryibnyih, M. A. (2014). *Allplan 2014. Pervyyi proekt ot eskiza do prezentatsii*. Ekaterinburg: Uralkomplekt-nauka.
5. Aubin, P. F. (2015). *The Aubin Academy Revit Architecture, covers Version 2016 and beyond*. Oak Lawn: G3B Press.
6. Kievskaya, E. I., & Barabash, M. S. (2016). Printsipyi parametricheskogo modelirovaniya stroitelnyih ob'ektov. *Sovremennoe stroitelstvo i arhitektura*. **1**, 16–22.
7. Vanin, V. V., & Virchenko, G. A. (2009). Vyznachennia ta osnovni polozhennia strukturno-parametrychnoho heometrychnoho modeliuвання. *Heometrychne ta kompiuterne modeliuвання*. **23**, 42–48.
8. Virchenko, S. G. (2017). Zastosuvannia strukturno-parametrychnoho pidkhodu dlia dynamichnogo formoutvorennia tekhnichnykh ob'ektiv. *Tekhnichna estetyka i dizain*, **13**, 47–51.
9. Vanin, V., Virchenko, G., Virchenko, S., & Nezenko, A. (2017). Computer variant dynamic forming of technical objects on the example of the aircraft wing. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, **6/7 (90)**, 67–73.
10. Virchenko, G. A. (2011). Uzahalnennia strukturno-parametrychnoho pidkhodu do heometrychnoho modeliuвання ob'ektiv mashynobuduvannia: avtoref. dys. ... d-ra tekhn. nauk: 05.01.01. Kyiv, Politekhnikha.
11. Vanin, V. V., Virchenko, G. A., & Vanin, I. V. (2006). Deiaki pytannia rozrobky obchysluvalnykh alhorytmiv strukturno-parametrychnoho-modeliuвання skladnykh heometrychnykh ob'ektiv. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. **76**, 17–23.

Регіда Олег Віталійович – аспірант кафедри архітектурних конструкцій Київського національного університету будівництва і архітектури,
e-mail: regidatatyana@gmail.com. ORCID: 0000-0003-2193-3240.

УДК656.02

В.П. СЛАВИЧ

Херсонський національний технічний університет

К.Д. ДОБРОВА

Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради

МОДЕЛЬ ТА МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ОПОРНОГО ТА ОПТИМАЛЬНИХ ПЛАНІВ МОДИФІКОВАНОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ГРУПУВАННЯ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ ВАНТАЖУ

В даній роботі запропоновано модель спеціального типу транспортної задачі, на умови якої додається обмеження за вивезенням вантажу із груп постачальників, що закріплені за відповідними постачальниками більш високого порядку, які мають власні обмеження запасів вантажу. Це додаткове обмеження дійсно зустрічається в практиці вантажних перевезень, оскільки постачальники, як правило, в свою чергу отримують вантаж від заводів, місць видобування природних ресурсів, оптових складів та інших. Для зазначеної моделі розроблено модифіковані методи знаходження опорного та оптимального планів вантажних перевезень з метою мінімізації вартості перевезень в заданих обмеженнях.

Ключові слова: транспортна задача, модифікована транспортна задача, споживачі, постачальники, опорний план, оптимальний план, метод потенціалів.

В.П. СЛАВИЧ

Херсонский национальный технический университет

К.Д. ДОБРОВА

Херсонский физико-технический лицей Херсонского городского совета

МОДЕЛЬ И МЕТОД НАХОЖДЕНИЕ ОПОРНОГО И ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ГРУППИРОВАНИЕ ПОСТАВЩИКОВ ГРУЗОВ

В данной работе предложена модель специального типа транспортной задачи, в условия которой добавляются ограничения по вывозам груза из групп поставщиков, которые закреплены за соответствующими поставщиками более высокого уровня, которые имеют собственные ограничения запасов груза. Это дополнительное ограничение действительно встречается в практике грузовых перевозок, поскольку поставщики обычно, в свою очередь, получают груз от заводов, мест добычи природных ресурсов, оптовых складов и другое. Для указанной модели разработаны модифицированные методы нахождения опорного и оптимального планов грузовых перевозок с целью минимизации стоимости перевозок в заданных ограничениях.

Ключевые слова: транспортная задача, модифицированная транспортная задача, потребители, поставщики, опорный план, оптимальный план, метод потенциалов.

V.P. SLAVIC

Kherson National Technical University

K.D. DOBROVA

Kherson Physical and Technical Lyceum of Kherson City Council

MODEL AND METHOD OF TASKING SUPPORT AND OPTIMAL PLAN OF THE MODIFIED TRANSPORT PROBLEM IN ACTIVE GROUPS OF GOODS

Transportation is one of the most important branches of the economy. The efficiency of cargo transportation is described by the transport task. It solves problems of optimization of mathematical programming and is devoted to minimization of expenses for transportation of cargoes from cargo suppliers to consumers. However, in the case of freight transportation, there are cases where suppliers themselves receive goods from top-level suppliers (for example, factories producing transported goods or wholesale warehouses from which goods are transported to small warehouses, etc.), with those high-level suppliers limited by their own inventory (e.g. , if they are factories, they are limited in production capacity). Therefore, an important task is to create methods and algorithms for finding optimal transportation plans for this type of transportation. In this work, we propose a model of a special type of transport task that limits the export of goods from supplier groups that retrieve goods from suppliers in a higher order, which have their limitations. This additional restriction is indeed encountered in the practice of freight transportation, since suppliers usually receive cargo from factories, natural resource extraction sites, wholesale warehouses and more. Therefore, modified methods for finding the basic and optimal plans of freight transportation were developed for this model in order to minimize the cost of transportation within the given restrictions. Applying optimization methods, finding the best solution, developing the optimal transportation plan from a certain number of suppliers to a certain number of consumers. This streamlines and optimizes transportation, which in turn will increase the revenue and efficiency of the enterprise as a whole and the transport department separately.

Keywords: transport problem, modified transport problem, consumers, suppliers, support plan, optimal plan, potential method.

Постановка проблеми

Перевезення є однією з найважливіших гілок економіки. Економічна ефективність перевезення вантажів описується транспортною задачею. Транспортна задача відноситься до оптимізаційних задач математичного програмування і присвячена мінімізації вартості перевезення від постачальників вантажу до споживачів. Але в практиці вантажних перевезень існують випадки, коли постачальники вантажу самі отримують вантаж від постачальників більш високого порядку (наприклад, заводів, що виробляють продукцію, яка перевозиться, або оптових складів, з яких перевозиться вантаж до дрібних складів, та інше), причому зазначені постачальники високого рівня обмежені власними запасами вантажу (наприклад, якщо це заводи, то вони обмежені виробничою потужністю). На відміну від відомої транспортної задачі з проміжними пунктами дана задача відрізняється відсутністю конкретних наперед заданих значень кількості вантажу, що має бути вивезений від постачальників. Тому важливою задачею є створення методів та алгоритмів знаходження оптимальних планів вантажних перевезень зазначеного різновиду транспортної задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз останніх наукових розробок показав, що питаннями оптимізації вантажних перевезень присвячено роботи багатьох вчених, зокрема, Канторовича Л.В.,

Афанасьєва Л.Л., Гаджинського А.М., Левковецького П.Р., Курганова В.М. [1-6]. Проте для зазначеного вище типу транспортної задачі не наводиться моделей та методів її розв'язання.

Мета дослідження

Метою роботи є розробка методу та алгоритмів знаходження опорного та оптимального планів транспортної задачі математичного програмування у випадку, коли постачальники вантажу розподіляються на групи, що обслуговуються постачальниками більш високого порядку, а вони, в свою чергу, мають власні обмеження, які утворюють обмеження за вивезенням вантажу із зазначених груп.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай задано n постачальників деякого однорідного вантажу A_1, A_2, \dots, A_n , у яких цей вантаж знаходиться відповідно у кількостях a_1, a_2, \dots, a_n . Постачальники поділені на групи Z_1, Z_2, \dots, Z_p , вантаж у яких обмежено відповідно значеннями z_1, z_2, \dots, z_p . Узагальнимо дане групування наступним чином:

$$Z_1 : \{A_1, A_2, \dots, A_{i_1}\}; Z_2 : \{A_{i_1+1}, A_{i_1+2}, \dots, A_{i_2}\}; Z_3 : \{A_{i_2+1}, A_{i_2+2}, \dots, A_{i_3}\}; \dots; \\ Z_k : \{A_{i_{k-1}+1}, A_{i_{k-1}+2}, \dots, A_{i_k}\}; \dots; Z_p : \{A_{i_{p-1}+1}, A_{i_{p-1}+2}, \dots, A_{i_p}\}.$$

Даний вантаж необхідно розвести m споживачам B_1, B_2, \dots, B_m , яким він необхідний відповідно у кількостях b_1, b_2, \dots, b_m . Відомі величини вартостей перевезення однієї одиниці вантажу, від будь-якого постачальника до будь-якого споживача, які задані у вигляді коефіцієнтів $C_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.

Необхідно знайти такий план перевезень, який дозволяє вивезти весь вантаж від постачальників, задовольняє потреби споживачів, відповідає вимогам обмежень за вивезенням із груп та який матиме найменшу вартість. У даній роботі розглядається замкнена модель, до якої додається умова:

$$\sum_{l=1}^k z_p \neq \sum_{j=1}^m b_j.$$

Схематично умову групування постачальників вантажу за постачальниками більш високого рівня показано на рис. 1.

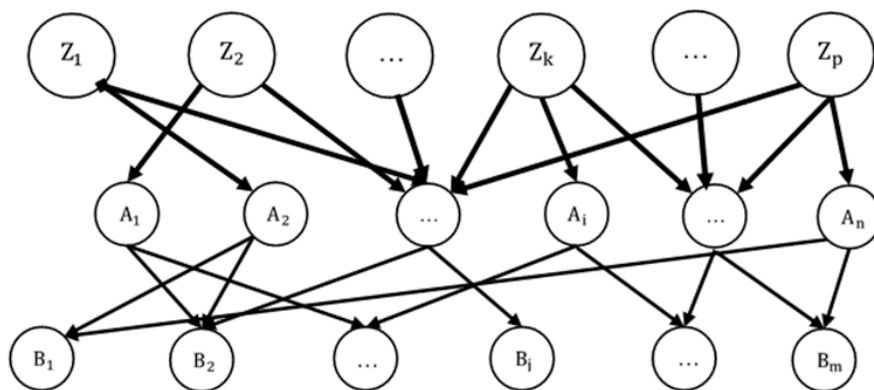


Рис. 1. Групування постачальників вантажу.

Модель зазначеної задачі складається із класичної цільової функції:

$$F = C_{11} \cdot X_{11} + C_{12} \cdot X_{12} + \dots + C_{nm} \cdot X_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} \cdot X_{ij} \rightarrow \min,$$

де X_{ij} – кількість вантажу, який перевозиться від i -го постачальника до j -го споживача,

та системи обмежень:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2m} = a_2 \\ \dots \\ x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} = a_n \\ \hline x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} = b_2 \\ \dots \\ x_{1m} + x_{2m} + \dots + x_{nm} = b_m \\ \hline x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} + x_{21} + \\ + x_{22} + \dots + x_{2m} + \dots + x_{i_1 1} + \\ + x_{i_1 2} + \dots + x_{i_1 m} \leq z_1 \\ \\ x_{(i_1+1)1} + x_{(i_1+1)2} + \dots + x_{(i_1+1)m} + \\ + x_{(i_1+2)1} + x_{(i_1+2)2} + \dots + x_{(i_1+2)m} + \\ + \dots + x_{i_2 1} + x_{i_2 2} + \dots + x_{i_2 m} \leq z_2 \\ \\ x_{(i_{p-1}+1)1} + x_{(i_{p-1}+1)2} + \dots + x_{(i_{p-1}+1)m} + \\ + x_{(i_{p-1}+2)1} + x_{(i_{p-1}+2)2} + \dots + x_{(i_{p-1}+2)m} + \\ + \dots + x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} \leq z_p \end{array} \right.$$

Для знаходження опорного плану пропонується наступний модифікований метод найменшої вартості.

Складаємо таблицю, в яку заносяться вхідні дані та в якій в результаті виконання пунктів алгоритму, буде знайдено опорний та оптимальний плани (табл. 1).

1. Знаходимо клітинку з найменшою вартістю перевезень, позначаємо її через $(i_0; j_0)$, а номер групи постачальників, до якої вона відноситься через k_0 , та порівнюємо відповідні їй значення запасів, потреб та обмежень за вивезенням із групи, знаходимо менше з цих чисел: $\Delta x = \min(a_{i_0}; b_{j_0}; z_{k_0})$.

2. Знайдений мінімум записуємо в клітинку в якості значення перевезення:

$$X_{ij} = \Delta x.$$

3. Далі зменшуємо значення запасів, потреб та обмеження за вивезенням з групи на величину Δx :

$$a'_{i_0} = a_{i_0} - \Delta x; \quad b'_{j_0} = b_{j_0} - \Delta x; \quad z'_{k_0} = z_{k_0} - \Delta x.$$

Таблиця 1

Постановка модифікованої транспортної задачі

Групи			Споживачі							Запаси	Запаси в групах
			B_1		B_2		...	B_m			
	Постач.	$\frac{V_j}{U_i}$	V_1		V_2		...	V_m			
Z_1	A_1	U_1	X_{11}	c_{11}	X_{12}	c_{12}	...	X_{1m}	c_{1m}	a_1	Z_1
	A_2	U_2	X_{21}	c_{21}	X_{22}	c_{22}	...	X_{2m}	c_{2m}	a_2	
	
	A_{i_1}	U_{i_1}	X_{i_11}	c_{i_11}	X_{i_12}	c_{i_12}	...	X_{i_1m}	c_{i_1m}	a_{i_1}	
Z_2	A_{i_1+1}	U_{i_1+1}	$X_{(i_1+1)1}$	$c_{(i_1+1)1}$	$X_{(i_1+1)2}$	$c_{(i_1+1)2}$...	$X_{(i_1+1)m}$	$c_{(i_1+1)m}$	a_{i_1+1}	Z_2
	A_{i_1+2}	U_{i_1+2}	$X_{(i_1+2)1}$	$c_{(i_1+2)1}$	$X_{(i_1+2)2}$	$c_{(i_1+2)2}$...	$X_{(i_1+2)m}$	$c_{(i_1+2)m}$	a_{i_1+2}	
	
	A_{i_2}	U_{i_2}	X_{i_21}	c_{i_21}	X_{i_22}	c_{i_22}	...	X_{i_2m}	c_{i_2m}	a_{i_2}	
Z_3	A_{i_2+1}	U_{i_2+1}	$X_{(i_2+1)1}$	$c_{(i_2+1)1}$	$X_{(i_2+1)2}$	$c_{(i_2+1)2}$...	$X_{(i_2+1)m}$	$c_{(i_2+1)m}$	a_{i_2+1}	Z_3
	A_{i_2+2}	U_{i_2+2}	$X_{(i_2+2)1}$	$c_{(i_2+2)1}$	$X_{(i_2+2)2}$	$c_{(i_2+2)2}$...	$X_{(i_2+2)m}$	$c_{(i_2+2)m}$	a_{i_2+2}	
	
	A_{i_3}	U_{i_3}	X_{i_31}	c_{i_31}	X_{i_32}	c_{i_32}	...	X_{i_3m}	c_{i_3m}	a_{i_3}	
...	
Z_k	$A_{i_{k-1}+1}$	$U_{i_{k-1}+1}$	$X_{(i_{k-1}+1)1}$	$c_{(i_{k-1}+1)1}$	$X_{(i_{k-1}+1)2}$	$c_{(i_{k-1}+1)2}$...	$X_{(i_{k-1}+1)m}$	$c_{(i_{k-1}+1)m}$	$a_{i_{k-1}+1}$	Z_k
	$A_{i_{k-1}+2}$	$U_{i_{k-1}+2}$	$X_{(i_{k-1}+2)1}$	$c_{(i_{k-1}+2)1}$	$X_{(i_{k-1}+2)2}$	$c_{(i_{k-1}+2)2}$...	$X_{(i_{k-1}+2)m}$	$c_{(i_{k-1}+2)m}$	$a_{i_{k-1}+2}$	
	
	A_{i_k}	U_{i_k}	X_{i_k1}	c_{i_k1}	X_{i_k2}	c_{i_k2}	...	X_{i_km}	c_{i_km}	a_{i_k}	
...	
Z_p	$A_{i_{p-1}+1}$	$U_{i_{p-1}+1}$	$X_{(i_{p-1}+1)1}$	$c_{(i_{p-1}+1)1}$	$X_{(i_{p-1}+1)2}$	$c_{(i_{p-1}+1)2}$...	$X_{(i_{p-1}+1)m}$	$c_{(i_{p-1}+1)m}$	$a_{i_{p-1}+1}$	Z_p
	$A_{i_{p-1}+2}$	$U_{i_{p-1}+2}$	$X_{(i_{p-1}+2)1}$	$c_{(i_{p-1}+2)1}$	$X_{(i_{p-1}+2)2}$	$c_{(i_{p-1}+2)2}$...	$X_{(i_{p-1}+2)m}$	$c_{(i_{p-1}+2)m}$	$a_{i_{p-1}+2}$	
	
	A_n	U_n	X_{n1}	c_{n1}	X_{n2}	c_{n2}	...	X_{nm}	c_{nm}	a_{i_n}	
			b_1		b_2			b_m			

4. У вільній частині таблиці знову знаходимо клітку з найменшою вартістю і повторюємо для неї процедури попередніх пунктів алгоритму.

Описаний процес повторюється до повного заповнення таблиці.

Оптимальний план знаходиться за допомогою модифікованого методу потенціалів

1. Знаходимо опорний план за допомогою модифікованого методу найменшої вартості.

2. Визначаємо систему потенціалів. Оскільки число зайнятих клітин дорівнює $n + m - 1$, а число потенціалів $n + m$, тому надаємо потенціалу значення 0, у тому рядку або стовпці, в якому найбільше зайнятих клітин, виходячи з умови оптимального плану перевезень:

$$U_i + V_j = C_{ij}, \text{ якщо } X_{ij} > 0.$$

3. Перевірка умови оптимального плану:

$$U_i + V_j \leq C_{ij}, \text{ якщо } X_{ij} = 0.$$

Якщо ця умова виконується, тодіданий план є оптимальним. Якщо існує клітинка, в якій дана умова порушується, тоді переходимо до пункту 4.

4. У клітинах яких порушується умова оптимальності записуємо величину порушення:

$$U_i + V_j - C_{ij}.$$

5. Знаходимо максимальне значення серед всіх порушень:

$$G_{\text{похибки}} = \{k_{ij}/U_i + V_j - C_{ij} > 0\}.$$

Клітинку, для якої це максимальне порушення виконується, позначимо знаком «+». Вона набуває значення G^+ .

6. Побудова циклу. У даному циклі позначаємо по черзі вершини знаками «+», «-». Ці клітини по черзі набувають значень G^+ та G^- , починаючи з клітини, визначеної попереднім пунктом.

7. Визначаємо величини перерозподілу вантажу. Серед вершин циклу, позначених знаками «-», знаходимо найменше значення: $\Delta x = \min G^-$.

Будуємо нову таблицю, в якій перевезення змінюються за такими правилами:

$$X'_{ij} = X_{ij} + \begin{cases} +\Delta X, & \text{якщо } X \text{ належить } G^+, \\ -\Delta X, & \text{якщо } X \text{ належить } G^-. \end{cases}$$

Клітини, не позначені знаками «+» або «-», переписуються без змін.

В результаті цієї процедури колишня порожня клітка стає зайнятою, а клітина, для якої виконується умова $\Delta x = \min G^-$, стає вільною.

8. Будуємо нову систему потенціалів для отриманого плану, оскільки попередня система потенціалів не підходить.

На цьому етапі алгоритм замкнувся і переходимо до пункту 3.

Висновки

Таким чином, в даній роботі запропоновано модель спеціального типу транспортної задачі, до умов якої додається обмеження за вивезенням вантажу з груп постачальників, що закріплені за відповідними постачальниками більш високого

порядку, які мають власні обмеження запасів вантажу. Це додаткове обмеження дійсно зустрічається в практиці вантажних перевезень, оскільки постачальники як правило в свою чергу отримують вантаж від заводів, місць видобування природних ресурсів, оптових складів та інше. Для зазначеної моделі розроблено модифіковані методи знаходження опорного та оптимального планів вантажних перевезень з метою мінімізації вартості перевезень в заданих обмеженнях.

Список використаної літератури

1. Афанасьев Л. Л. Единая транспортная система и автомобильные перевозки. М.: Транспорт, 1984. 333 с.
2. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування. Київ: КНЕУ, 2001. 250с.
3. Гаджинский А. М. Практикум по логистике. М.: Дашков и К, 2010. 312 с.
4. Канторович Л. В. Математико-экономические работы. Новосибирск: Наука, 2011. 760 с.
5. Курганов В. М. Логистика. Транспорт исклад в цепи поставок товаров. М.: Книжный мир, 2009. 512 с.
6. Левковець П. Р., Сергійчук І. М., Сергійчук А. І. Удосконалення керування рухом автотранспортних засобів. *Вісник Національного транспортного університету*. 2006. № 11. С. 236–239.
7. Славич В. П., Доброва К. Д. Модель задачі про потік вантажу із додатковими подвійними обмеженнями. *Модернізація економіки: сучасні реалії, прогностичні сценарії та перспективи розвитку: Матеріали I Міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 25-26 квітня 2019 р.)*. Херсон: ФОП Вишемирський В.С., 2019. С. 378–380.

References

1. Afanasev, L. L. (1984). *Edinaya transportnaya Sistema i avtomobilnyie perevozki*. М.: Transport.
2. Vitlinskiy, V. V., Nakonechniy, S. I., & Tereschenko, T. O. (2001). *Matematichne programuvannya*. Kyiv: KNEU.
3. Gadzhinskiy, A. M. (2010). *Praktikum po logistike*. М.: Dashkov i K.
4. Kantorovich, L. V. (2011). *Matematiko-ekonomicheskie raboty*. Novosibirsk: Nauka.
5. Kurganov, V. M. (2009). *Logistika. Transportiskladvtsepipostavoktovarov*. М.: Knizhnyiymir.
6. Levkovets, P. R., Serhiichuk, I. M., & Serhiichuk, A. I. (2006). *Udoskonalennia keruvannia rukhom avtotransportnykh zasobiv. Visnyk Natsionalnoho transportnoho universytetu*. **11**, 236–239.
7. Slavych, V. P., & Dobrova, K. D. (2019). *Model zadachi pro potik vantazhu iz dodatkovymu podviinymu obmezheniamy. Proceedings of the Modernizatsiia ekonomiky: suchasni realii, prohnosni stsenarii ta perspektyvy rozvytku: Materialy I Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii (Kherson, 25-26 April, 2019)*. Kherson: FOP Vyshemyrskyi V.S., pp. 378–380.

Славич В'ячеслав Петрович – к.т.н., доцент, доцент кафедри транспортних систем і технічного сервісу Херсонського національного технічного університету, e-mail: vslavich@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7882-4198.

Доброва Катерина Денисівна – учениця Херсонського фізико-технічного ліцею Херсонської міської ради, e-mail: tools1sw@gmail.com.

УДК: 517.912

Р.М. ТАЦІЙ, О.Ю. ЧМИР, О.О. КАРАБИН
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ЗАГАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ

Моделювання коливальних процесів пов'язане з диференціальними рівняннями другого порядку в частинних похідних (загальні крайові задачі). Поздовжні коливання стрижнів є коливальними процесами, для вивчення яких застосовуються дискретно-неперервні математичні моделі, основою яких є загальні крайові задачі. Методи розв'язування нестационарних крайових задач можна поділити на прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод функції Гріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

У багатьох випадках отримання розв'язків таких задач в замкнутому вигляді викликає великі труднощі. Уникнути труднощів можна зведенням вказаних задач до квазидиференціальних рівнянь, аналітичні розв'язки яких порівняно легше можна отримати із застосуванням матричного числення. Обґрунтування існування та побудова точних аналітичних розв'язків квазидиференціальних рівнянь, розробка програм для наближених обчислень власних значень та власних функцій є актуальним завданням.

Запропонована в даній роботі схема побудови розв'язку належить до прямих методів розв'язування крайових задач. В роботі розглянуто загальні крайові задачі для поздовжніх коливань стрижня, який складається з двох частин кусково-сталого перерізу, та з навантаженням, заданим у правій частині диференціального рівняння. Розглянуто п'ять різних випадків крайових умов. Знайдено розв'язки таких задач з використанням концепції квазіпохідних, сучасної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, класичного методу Фур'є та методу редуції. Концепція квазіпохідних дозволяє обходити проблему множення узагальнених функцій, які виникають в правій частині рівняння залежно від виду навантаження.

За допомогою методу редуції розв'язування задачі зводиться до знаходження розв'язків двох задач. Одна задача є стаціонарною неоднорідною крайовою задачею з вихідними крайовими умовами. Друга задача є мішаною задачею з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння. Проміжок інтегрування розбивається на відрізки. Задачі розглядаються на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записується аналітичний вираз розв'язку. Такий підхід дозволяє застосовувати програмні засоби до процесу розв'язання задачі, зокрема для знаходження власних значень та власних функцій.

Ключові слова: квазидиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є, метод власних функцій.

Р.М. ТАЦІЙ, О.Ю. ЧМЫРЬ, О.О. КАРАБЫН
Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Моделирование колебательных процессов связано с дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных (общие краевые задачи). Продольные колебания стержней являются колебательными процессами для изучения которых применяются дискретно-непрерывные математические модели, основой которых являются общие краевые задачи. Методы решения нестационарных краевых

задач можно разделить на прямые, основу которых составляет метод разделения переменных, метод источников (метод функции Грина), метод интегральных преобразований, приближенные и численные методы.

Во многих случаях получение решения таких задач в замкнутом виде вызывает большие трудности. Избежать трудностей можно сведением указанных задач к квазидифференциальным уравнениям, аналитические решения которых сравнительно легче можно получить с применением матричного исчисления. Обоснование существования и построение точных аналитических решений квазидифференциальных уравнений, разработка программ для приближенных вычислений собственных значений и собственных функций является актуальной задачей.

Предложенная в данной работе схема построения решения относится к прямым методам решения краевых задач. В работе рассмотрены общие краевые задачи для продольных колебаний стержня, который состоит из двух частей кусочно-постоянного сечения, и с нагрузкой, заданной в правой части дифференциального уравнения. Рассмотрены пять различных случаев краевых условий. Найдено решение таких задач с использованием концепции квазипроизводных, современной теории систем линейных дифференциальных уравнений, классического метода Фурье и метода редукции. Концепция квазипроизводных позволяет обходить проблему умножения обобщенных функций, возникающих в правой части уравнения в зависимости от вида нагрузки.

С помощью метода редукции решения задачи сводится к нахождению решений двух задач. Одна задача является стационарной неоднородной краевой задачей с исходными краевыми условиями. Вторая задача является смешанной задачей с нулевыми краевыми условиями для определенного неоднородного уравнения. Промежуток интегрирования разбивается на отрезки. Задачи рассматриваются на каждом отрезке разбиения, а затем с помощью матричного исчисления записывается аналитическое выражение решения. Такой подход позволяет применять программные средства в процессе решения задачи, в частности для нахождения собственных значений и собственных функций.

Ключевые слова: квазидифференциальное уравнение, краевая задача, матрица Коши, задача на собственные значения, метод Фурье, метод собственных функций.

R.M. TATSIJ, O.Yu. CHMYR, O.O. KARABYN
Lviv State University of Life Safety

THE TOTAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF ROD

Modeling of oscillatory processes is associated with second-order differential equations in partial derivatives (general boundary value problems). Longitudinal oscillations of rods are oscillatory processes for the study of which discrete-continuous mathematical models are used, the basis of which are general boundary value problems. Methods for solving nonstationary boundary value problems can be divided into direct, which are based on the method of separating variables, the method of sources (Green's function method), the method of integral transformations, approximate and numerical methods.

In many cases, obtaining solutions to such problems in a closed form is very difficult. Difficulties can be avoided by reducing these problems to quasi-differential equations, the analytical solutions of which are relatively easier to obtain using matrix calculus. Substantiation of existence and construction of exact analytical solutions of quasi-differential

equations, development of programs for approximate calculations of eigenvalues and eigenfunctions is an urgent task.

The scheme of solution proposed in this paper belongs to the direct methods of solving boundary value problems. The paper considers general boundary value problems for longitudinal oscillations of a rod, which consists of two pieces of piece-stable cross-section and load in the right part. Five different cases of boundary conditions are considered. Solutions of such problems are found using the concept of quasi-derivatives, modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and the reduction method. The concept of quasi-derivatives allows to bypass the problem of multiplication of generalized functions that occur in the right-hand side of the equation depending on the type of load.

Using the reduction method, the solution of the problem is reduced to finding the solutions of two problems. One problem is a stationary inhomogeneous boundary value problem with initial boundary conditions. The second problem is a mixed problem with zero boundary conditions for a certain inhomogeneous equation. The integration interval is divided into segments. The problems are considered on each segment of the partition, and then the analytical expression of the solution is written with the help of matrix calculus. This approach allows you to apply software to the process of solving the problem, in particular to find eigenvalues and eigenfunctions.

Keywords: quasi-differential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.

Постановка проблеми

Математичне моделювання реальних фізичних процесів та явищ, яке враховує єдність дискретної та неперервної природи, як правило, приводить до необхідності дослідження, так званих, квазидиференціальних рівнянь із узагальненими функціями в коефіцієнтах та правих частинах. Для знаходження розв'язків таких рівнянь широко застосовується математичний апарат теорії узагальнених функцій, а також концепція квазіпохідних.

Узагальнення та обґрунтування методу побудови точних аналітичних та наближених розв'язків таких задач із врахуванням зосереджених факторів та розробка математичних і комп'ютерних моделей коливальних процесів є важливим та актуальним науково-практичним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Методи розв'язування нестационарних крайових задач можна поділити на прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод функції Гріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

Запропонована у цій роботі схема належить до прямих методів розв'язування крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних [1], метод зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, але взаємопов'язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур'є та модифікований метод власних функцій.

У роботі [2] розглянуто загальну схему дослідження поздовжніх коливань стрижнів кусково-сталого перерізу. Отримано явні формули розв'язку та його квазіпохідної такої задачі для будь-якого підінтервалу основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду у функціях – коефіцієнтах задачі.

У роботі [3] розглядається гіперболічне рівняння з кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами з найбільш загальними локальними крайовими умовами. Виділено випадок кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин, коли розв'язки вихідної задачі можуть бути отримані в замкненій формі.

В цій роботі досліджуються поздовжні коливання стрижня, який складається з двох частин кусково-сталого перерізу та має навантаження, яке задається функцією в правій частині рівняння. За допомогою методу редукції дослідження зводиться до знаходження розв'язку двох задач: стаціонарної неоднорідної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння.

Мета дослідження

Метою роботи є отримання власних значень і власних функцій та розв'язок нестационарної крайової задачі поздовжніх коливань стрижня з двох частин кусково-сталого перерізу з навантаженням, яке задається функцією в правій частині рівняння.

Викладення основного матеріалу дослідження

1. Основні позначення, формулювання задачі та допоміжні твердження.

Нехай $[x_0; x_2]$ – відрізок дійсної осі; x_1 – довільна внутрішня точка, що розбиває відрізок на дві частини.

Нехай F_0, F_1, E, ρ – сталі, $g_0(x), g_1(x)$ – додатньо визначені функції на проміжках $[x_0; x_1), [x_1; x_2)$ відповідно. Покладемо $F(x) = F_0 \cdot \theta_0 + F_1 \cdot \theta_1$, $g(x) = g_0(x) \cdot \theta_0 + g_1(x) \cdot \theta_1$, де θ_i – характеристична функція проміжку $[x_i; x_{i+1})$, $i = \overline{0, 1}$. Визначимо квазіпохідну функції $u(x, t)$ як добуток функції $F(x)$ та похідної по змінній x функції $u(x, t)$, тобто $u^{[1]} = F \cdot u_x'$.

Розглянемо рівняння поздовжніх коливань стрижня

$$\frac{\rho}{E} \cdot F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(F(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g(x), \quad x \in (x_0; x_2), \quad t \in (0; +\infty) \quad (1)$$

із загальними крайовими умовами

$$\begin{cases} p_{11}u(x_0, t) + p_{12}u^{[1]}(x_0, t) = \psi_0(t), \\ q_{21}u(x_2, t) + q_{22}u^{[1]}(x_2, t) = \psi_1(t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty) \quad (2)$$

та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x), \end{cases} \quad x \in [x_0; x_2], \quad (3)$$

де $\psi_0(t), \psi_1(t) \in C^2(0; +\infty)$, $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ – функції, кусково-неперервні на $(x_0; x_2)$.

Метод редукції відшукування розв'язку задачі детально описаний, наприклад, в [4–5]. Згідно з цим методом, розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t). \quad (4)$$

Одну з функцій, наприклад $w(x, t)$, побудуємо спеціальним способом, тоді функцію $v(x, t)$ визначимо, використавши функцію $w(x, t)$.

2. Побудова функції $w(x, t)$.

Запишемо крайову задачу для функції $w(x, t)$

$$(F(x) \cdot w_x')_x' = -g(x), \quad (5)$$

$$\begin{cases} p_{11}w(x_0, t) + p_{12}w^{[1]}(x_0, t) = \psi_0(t), \\ q_{21}w(x_2, t) + q_{22}w^{[1]}(x_2, t) = \psi_1(t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty). \quad (6)$$

Зауважимо, що змінна t тут вважається параметром.

В основі методу розв'язування задачі (5), (6) лежить концепція квазіпохідних [6].

Введемо вектор $\bar{W} = \begin{pmatrix} w \\ w^{[1]} \end{pmatrix}$, $\bar{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(x) \end{pmatrix}$. За таких позначень

квазидиференціальне рівняння (5) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\bar{W}_x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & F(x) \end{pmatrix} \bar{W} + \bar{G}. \quad (7)$$

Під розв'язком системи (7) розуміємо абсолютно-неперервну вектор-функцію $\bar{W}(x, t)$, що за змінною x справджує її майже скрізь (див. [6]).

Крайові умови (6) запишемо у векторній формі

$$P \cdot \bar{W}(x_0, t) + Q \cdot \bar{W}(x_2, t) = \bar{\Gamma}(t), \quad (8)$$

де $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, причому $\text{rang}(P|Q) = 2$, $\bar{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix}$.

Нехай $w_i(x, t)$ та $w_i^{[1]}(x, t)$ визначені на проміжку $[x_i; x_{i+1})$, $i = \overline{0, 1}$. Покладемо

$$w(x, t) = w_0(x, t)\theta_0 + w_1(x, t)\theta_1. \quad (9)$$

Система (7) відповідно на проміжках $[x_i; x_{i+1})$, $i = \overline{0, 1}$ набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}_x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & F_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g_i(x) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Розглянемо однорідну систему, що відповідає системі (10)

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{F_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}.$$

Матриці Коші $B_i(x, s)$ $i = \overline{0,1}$ таких систем відповідно матимуть вигляд

$$B_i(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } b_i(x, s) = \int_s^x \frac{1}{F_i} dz = \frac{x-s}{F_i}. \quad (11)$$

Позначимо

$$B(x_1, x_0) \stackrel{def}{=} B_0(x_1, x_0), \quad B(x_2, x_0) \stackrel{def}{=} B_1(x_2, x_1) \cdot B_0(x_1, x_0). \quad (12)$$

Структура (11) матриць $B_i(x, s)$ $i = \overline{0,1}$ дає можливість встановити структуру матриць (12)

$$B(x_1, x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_0}{F_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(x_2, x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_0}{F_0} + \frac{x_2 - x_1}{F_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причому $B(x_i, x_i) \stackrel{def}{=} I$, $i = \overline{0,1}$, де I – одинична матриця.

Розв'язки систем (10) на проміжках $[x_0; x_1]$ та $[x_1; x_2]$ відповідно мають вигляд

$$\overline{W}_i(x, t) = B_i(x, x_i) \cdot \overline{P}_i + \int_{x_i}^x B_i(x, s) \cdot \overline{G}_i(s) ds, \quad (13)$$

де \overline{P}_i , $i = \overline{0,1}$ – поки що невідомі вектори.

В точці $x = x_1$ повинна виконуватись умова спряження, а саме $\overline{W}_1(x_1, t) = \overline{W}_0(x_1, t)$ (див. [6]), в результаті чого одержимо рекурентне співвідношення

$$\overline{P}_1 = B_0(x_1, x_0) \cdot \overline{P}_0 + \int_{x_0}^{x_1} B_0(x_1, s) \cdot \overline{G}_0(s) ds, \quad (14)$$

де \overline{P}_0 – початковий (невідомий) вектор.

Нехай $\overline{W}(x_0, t) \stackrel{def}{=} \overline{P}_0$. Використовуючи (13), (12) та (14), визначаємо

$$\overline{W}(x_2, t) \stackrel{def}{=} \overline{W}_1(x_2, t) = B(x_2, x_0) \overline{P}_0 + B_1(x_2, x_1) \int_{x_0}^{x_1} B_0(x_1, s) \cdot \overline{G}_0(s) ds + \int_{x_1}^{x_2} B_1(x_2, s) \cdot \overline{G}_1(s) ds =$$

$$= B(x_2, x_0)\bar{P}_0 + B_1(x_2, x_1)\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2, \text{ де } \bar{Z}_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k, s) \cdot \bar{G}_{k-1}(s) ds, k = \overline{1, 2}.$$

Підставивши $\bar{W}(x_0, t)$ та $\bar{W}(x_2, t)$ в крайові умови (8), одержуємо

$$\bar{P}_0 = [P + Q \cdot B(x_2, x_0)]^{-1} \cdot (\bar{\Gamma} - Q(B_1(x_2, x_1)\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)). \quad (15)$$

Обчислимо

$$[P + Q \cdot B(x_2, x_0)]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} q_{21}\sigma + q_{22} & -p_{12} \\ -q_{21} & p_{11} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де $\sigma = \sum_{m=0}^1 b_m(x_{m+1}, x_m)$, $\Delta = p_{11}(q_{21}\sigma + q_{22}) - q_{21}p_{12} \neq 0$;

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma} - Q(B_1(x_2, x_1)\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) = \\ & = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1(x_2, x_1) \int_{x_0}^{x_1} B_0(x_1, s) \cdot \bar{G}_0(s) ds + \int_{x_1}^{x_2} B_1(x_2, s) \cdot \bar{G}_1(s) ds \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Запишемо праву частину (17) в матричному вигляді

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k, s) \cdot \bar{G}_{k-1}(s) ds = \begin{pmatrix} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} b_{k-1}(x_k, s) \cdot g_{k-1}(s) ds \\ - \int_{x_{k-1}}^{x_k} g_{k-1}(s) ds \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{pmatrix} = \bar{Z}_k, k = \overline{1, 2},$$

$$B_1(x_2, x_1)\bar{Z}_1 = B_1(x_2, x_1) \int_{x_0}^{x_1} B_0(x_1, s) \cdot \bar{G}_0(s) ds = \begin{pmatrix} I_0(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) \\ I_0^{[1]}(x_1) \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma} - Q(B_1(x_2, x_1)\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) = \\ & = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) - q_{21} \left(I_0(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) + I_1(x_2) \right) - q_{22} \left(I_0^{[1]}(x_1) + I_1^{[1]}(x_2) \right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

Підставивши (16) та (18) у (15) та (14), отримуємо вектори:

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \psi_0(t)(q_{21}\sigma + q_{22}) - p_{12} \left(\psi_1(t) - q_{21} \left(I_0(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) + I_1(x_2) \right) - q_{22} \left(I_0^{[1]}(x_1) + I_1^{[1]}(x_2) \right) \right) \\ -q_{21}\psi_0(t) + p_{11} \left(\psi_1(t) - q_{21} \left(I_0(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) + I_1(x_2) \right) - q_{22} \left(I_0^{[1]}(x_1) + I_1^{[1]}(x_2) \right) \right) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_0}{F_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{P}_0 + \int_{x_0}^{x_1} B_0(x_1, s) \cdot \bar{G}_0(s) ds = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_0}{F_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{P}_0 + \begin{pmatrix} I_0(x_1) \\ I_0^{[1]}(x_1) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

На основі формул (13), (19), (20) після перетворень отримаємо вектор-функції $\bar{W}_0(x, t)$ та $\bar{W}_1(x, t)$ на проміжках $[x_0; x_1]$ та $[x_1; x_2]$, відповідно:

$$\bar{W}_0(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_0}{F_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{P}_0 + \begin{pmatrix} I_0(x) \\ I_0^{[1]}(x) \end{pmatrix},$$

$$\bar{W}_1(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_0}{F_0} + \frac{x - x_1}{F_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{P}_0 + \begin{pmatrix} I_0(x_1) + \frac{x - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) \\ I_0^{[1]}(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1(x) \\ I_1^{[1]}(x) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Перші координати векторів $\bar{W}_0(x, t)$ та $\bar{W}_1(x, t)$ в (21) є шуканими функціями $w_0(x, t)$ та $w_1(x, t)$, відповідно. Підставляючи їх у (9), отримуємо розв'язок на всьому проміжку $[x_0; x_2]$.

3. Побудова функції $v(x, t)$.

Запишемо мішану задачу для функції $v(x, t)$. Для цього підставимо (4) в (1)–(3), врахувавши, що функція $w(x, t)$ задовольняє вимогам (5)–(6) Одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(F(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\rho}{E} \cdot F(x) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\rho}{E} \cdot F(x) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad x \in (x_0; x_2), \quad t \in (0; +\infty). \quad (22)$$

$$\begin{cases} v(x, 0) = \Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \Phi_1(x), \end{cases} \quad x \in [x_0; x_2], \quad (23)$$

$$\begin{cases} p_{11}v(x_0, t) + p_{12}v^{[1]}(x_0, t) = 0, \\ q_{21}v(x_2, t) + q_{22}v^{[1]}(x_2, t) = 0, \end{cases} \quad t \in [0; +\infty). \quad (24)$$

де $\overset{def}{\Phi_0(x)} = \varphi_0(x) - w(x, 0)$, $\overset{def}{\Phi_1(x)} = \varphi_1(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0)$.

Отже, за умови, що розв'язок $w(x, t)$ задачі (5), (6) є відомим, функція $v(x, t)$ є розв'язком мішаної задачі (22)–(24).

4. Метод Фур'є та задача на власні значення.

Для рівняння (22) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\frac{\rho}{E} \cdot F(x) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(F(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (25)$$

з крайовими умовами (24).

Його нетривіальні розв'язки шукаємо у вигляді

$$v(x, t) = \sin(\omega t + \varepsilon) \cdot X(x), \quad (26)$$

де ω – параметр, ε – константа, $X(x)$ – невідома функція.

Підставимо (26) у (24)–(25). Одержимо задачу

$$(F(x)X'(x))' + \alpha^2 F(x)X(x) = 0, \quad (27)$$

$$\begin{cases} p_{11}X(x_0) + p_{12}X^{[1]}(x_0) = 0, \\ q_{21}X(x_2) + q_{22}X^{[1]}(x_2) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

де $\alpha^2 = \frac{\rho}{E} \cdot \omega^2$.

Ввівши квазіпохідну $X^{[1]} \stackrel{def}{=} FX'$, вектор $\bar{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^{[1]} \end{pmatrix}$ та матрицю

$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{F} \\ -\alpha^2 F & 0 \end{pmatrix}$, запишемо задачу (27)–(28) у матричному вигляді

$$\bar{X}' = A \cdot \bar{X}, \quad (29)$$

$$P\bar{X}(x_0) + Q\bar{X}(x_2) = \bar{0}. \quad (30)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриці Коші $\tilde{B}_0(x, s, \omega)$ та $\tilde{B}_1(x, s, \omega)$ системи (29) відповідно на проміжках $[x_0; x_1]$ та $[x_1; x_2]$ мають вигляд

$$\tilde{B}_i(x, s, \omega) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(x-s) & \frac{\sin \alpha(x-s)}{F_i \alpha} \\ -F_i \alpha \sin \alpha(x-s) & \cos \alpha(x-s) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, 1}. \quad \text{Фундаментальна матриця (аналог}$$

матриці Коші на всьому проміжку) системи (29) має структуру

$$\tilde{B}(x, x_0, \omega) \stackrel{def}{=} \tilde{B}_0(x, x_0, \omega) \cdot \tilde{B}(x_0, x_0, \omega) \cdot \theta_0 + \tilde{B}_1(x, x_1, \omega) \cdot \tilde{B}(x_1, x_0, \omega) \cdot \theta_1, \quad (31)$$

де, аналогічно, як і в формулі (12), $\tilde{B}(x_1, x_0, \omega) \stackrel{def}{=} \tilde{B}_1(x_2, x_1, \omega) \cdot \tilde{B}_0(x_1, x_0, \omega)$.

Позначимо також

$$\tilde{B}(x, x_0, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Нетривіальний розв'язок $\bar{X}(x, \omega)$ системи (29) шукаємо у вигляді $\bar{X}(x, \omega) = \tilde{B}(x, x_0, \omega) \cdot \bar{C}$, де $\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – деякий ненульовий вектор.

Вектор-функція $\bar{X}(x, \omega)$ має задовольняти крайові умови (30), тобто $[P \cdot \tilde{B}(x_0, x_0, \omega) + Q \cdot \tilde{B}(x_2, x_0, \omega)] \cdot \bar{C} = \bar{0}$, врахувавши, що $\tilde{B}(x_0, x_0, \omega) = I$, прийдемо до рівності

$$[P + Q \cdot \tilde{B}(x_2, x_0, \omega)] \cdot \bar{C} = \bar{0}. \quad (33)$$

Для існування ненульового вектора \bar{C} в (33) необхідно і досить виконання умови

$$\det[P + Q \cdot \tilde{B}(x_2, x_0, \omega)] = 0. \quad (34)$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (34), врахувавши вигляд матриць P, Q та (32)

$$\det[P + Q \cdot \tilde{B}(x_2, x_0, \omega)] = p_{11} \cdot (q_{21}b_{12}(\omega) + q_{22}b_{22}(\omega)) - p_{12} \cdot (q_{21}b_{11}(\omega) + q_{22}b_{21}(\omega)).$$

Характеристичне рівняння задачі на власні значення (27)–(28) має вигляд

$$p_{11} \cdot (q_{21}b_{12}(\omega) + q_{22}b_{22}(\omega)) - p_{12} \cdot (q_{21}b_{11}(\omega) + q_{22}b_{21}(\omega)) = 0. \quad (35)$$

Як відомо (див. [7]), корені ω_k характеристичного рівняння (35), які є власними значеннями задачі (27), (28), є додатними та різними. Для знаходження ненульового вектора \bar{C} підставимо в рівність (33) ω_k замість ω . Тоді прийдемо до системи рівнянь

$$\begin{cases} p_{11}C_1 + p_{12}C_2 = 0, \\ (q_{21}b_{11}(\omega_k) + q_{22}b_{21}(\omega_k)) \cdot C_1 + (q_{21}b_{12}(\omega_k) + q_{22}b_{22}(\omega_k)) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Оскільки виконується (35), тому система (36) зводиться до рівняння $p_{11}C_1 + p_{12}C_2 = 0$, з якого знаходимо координати вектора \bar{C} за певних припущень на коефіцієнти матриць P та Q :

1. $p_{11} = q_{21} = 1, p_{12} = q_{22} = 0$, тоді $C_1 = 0$, а $C_2 \in R \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (лівий та правий кінці закріплені);

2. $p_{11} = q_{22} = 1$, $p_{12} = q_{21} = 0$, тоді $C_1 = 0$, а $C_2 \in R \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (лівий кінець закріплений, правий – вільний);
3. $p_{11} = 1$, $p_{12} = 0$, $q_{21} = c$, $q_{22} = EF$, тоді $C_1 = 0$, а $C_2 \in R \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (лівий кінець закріплений, пружне закріплення правого кінця);
4. $p_{11} = -c$, $p_{12} = EF$, $q_{21} = c$, $q_{22} = EF$, поклавши $C_2 = 1$, маємо $C_1 = \frac{EF}{c}$, тобто $\bar{C} = \begin{pmatrix} \frac{EF}{c} \\ 1 \end{pmatrix}$; (пружне закріплення лівого та правого кінців);
5. $p_{11} = 1$, $p_{12} = 0$, $q_{21} = -M\omega^2$, $q_{22} = EF$, тоді $C_1 = 0$, а $C_2 \in R \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (лівий кінець закріплений, на правому кінці закріплена маса).

Нехай $\bar{X}_k(x, \omega_k)$ – нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k . Справедливим є твердження.

Власні вектори системи диференціальних рівнянь (29) з крайовими умовами (30) мають структуру $\bar{X}_k(x, \omega_k) = \tilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \bar{C}$, $k \in N$. Власні функції $X_k(x, \omega_k)$, як перші координати власних векторів $\bar{X}_k(x, \omega_k)$, можна записати у вигляді

$$X_k(x, \omega_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \bar{C}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (37)$$

Зокрема, оскільки

$$X_k(x, \omega_k) = X_{k0}(x, \omega_k) \cdot \theta_0 + X_{k1}(x, \omega_k) \cdot \theta_1, \quad (38)$$

тому з (31) та (37) випливає, що

$$\begin{aligned} X_{k0}(x, \omega_k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{B}_0(x, x_0, \omega_k) \cdot \bar{C}, \\ X_{k1}(x, \omega_k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{B}_1(x, x_1, \omega_k) \cdot \tilde{B}(x_1, x_0, \omega_k) \cdot \bar{C}. \end{aligned} \quad (39)$$

5. Побудова розв'язку $v(x, t)$ мішаної задачі (22)–(24).

У роботі [8] застосовуючи метод власних функцій, отримано розв'язок мішаної задачі (22)–(24). Враховуючи формулу (38) та те, що $v(x, t) = v_0(x, t) \cdot \theta_0 + v_1(x, t) \cdot \theta_1$, де $v_0(x, t)$ та $v_1(x, t)$ визначені відповідно на проміжках $[x_0; x_1]$ та $[x_1; x_2]$, одержуємо

$$v_0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Phi_{0k} \cos \omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k} \sin \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t-s) \cdot w_k(s) ds \right] \cdot X_{k0}(x, \omega_k),$$

$$v_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Phi_{0k} \cos \omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k} \sin \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k (t-s) \cdot w_k(s) ds \right] \cdot X_{k1}(x, \omega_k), \quad (40)$$

де функції $X_{k0}(x, \omega_k)$, $X_{k1}(x, \omega_k)$ обчислюються за формулою (39), Φ_{0k} , Φ_{1k} – відповідні коефіцієнти Фур'є розкладу функцій $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$ в ряди Фур'є за власними функціями $X_k(x, \omega_k)$.

Врахувавши перші координати векторів $\bar{W}_0(x, t)$, $\bar{W}_1(x, t)$ в (21) та (40), отримаємо розв'язок задачі (1)–(3)

$$u(x, t) = (w_0(x, t) + v_0(x, t)) \cdot \theta_0 + (w_1(x, t) + v_1(x, t)) \cdot \theta_1.$$

Висновки

Отримано розв'язок та його квазіпохідна рівняння поздовжніх коливань стрижня, який складається з двох частин кусково-сталого перерізу, та з навантаженням, яке задане в правій частині цього рівняння.

Перевагою використаного методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розв'язку. Такий підхід дає змогу застосовувати програмні засоби до процесу розв'язання задачі. Отримані результати мають безпосереднє практичне застосування в теорії коливань стрижнів з кусково-змінним розподілом параметрів.

Список використаної літератури

1. Тацій Р. М., Власій О. О., Стасюк М. Ф. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами. *Вісник НУ «Львівська політехніка»: Серія «Фіз.-мат. науки»*. 2014. № 804. С. 64–69.
2. Тацій Р. М., Карабин О. О., Чмир О. Ю. Загальна схема дослідження поздовжніх коливань стрижнів кусково-сталого перерізу. *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання: матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (Івано-Франківськ, 14-19 травня 2018 р.)*. Івано-Франківськ, 2018. С. 386–391.
3. Тацій Р. М., Чмир О. Ю., Карабин О. О. Загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними коефіцієнтами та правими частинами. *Дослідження в математиці і механіці*. 2017. Т. 22, Вип. 2(30). С. 55–70.
4. Арсенин В. Я. Методы математической физики. М.: Наука, 1974. 432 с.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
6. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В., Власій О. О. Узагальнені квазидиференціальні рівняння. Дрогобич: Коло, 2011. 297 с.
7. Тацій Р. М., Мазуренко В. В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазидиференціальних рівнянь парного порядку. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2001. Т.44. №1. С. 43–53.
8. Тацій Р. М., Чмир О. Ю., Карабин О. О. Схема дослідження поздовжніх коливань стрижня кусково-сталого перерізу. *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*. 2018. № 18. С. 61–70.

References

1. Tatsij, R. M., Vlasij, O. O., & Stasjuk, M. F. (2014). Zagalna persha krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovodnosti z kuskovo-zminnymy koefitsiyentamy. *Buletyn Universytetu 'Lvivska Politehnika'. Seriya 'Fizyka i matematyka'*. **804**, 64–69.
2. Tatsij, R. M., Chmyr, O. Yu., & Karabyn, O. O. (2018). Zagalna schema doslidzhennya pozdovzhnikh kolyvan stryzhniv kuskovo-stalogo pererizu. Proceedings of the *Informatsiyini tekhnologiyi ta kompyuterne modelyuvannya: materialy Mizhnarodnoi naukovoï konferentsii*. (Ukraine, Ivano-Frankivsk, May 14-19, 2018), Ivano-Frankivsk, pp. 386–391.
3. Tatsij, R. M., Chmyr, O. Yu., & Karabyn, O. O. (2017). Zagalni krayovi zadachi dlya hiperbolichnogo rivnyannya iz kuskovo-neperervnymy koefitsiyentamy ta pravymy chastynamy. *Doslidzhennya v matematytsi i mekhanitsi*. **22**, 2(30), 55–70.
4. Arsenin, V. Ya. (1974). *Metody matematicheskoy fiziki*. Moscow: Nauka.
5. Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. (1977). *Uraveniya matematicheskoy fiziki*. Moscow: Nauka.
6. Tatsij, R. M., Stasjuk, M. F., Mazurenko, V. V., & Vlasij, O. O. (2011). Uzagalneni kvazidyferentsialni rivnyannya. Drogobych: Kolo.
7. Tatsij, R. M., & Mazurenko, V. V. (2001). Dyskretno-neperervni krayovi zadachi dlya kvazi-dyferentsialnykh rivnyan dovilnogo poryadku. *Reports of the Mathematical Methods and Physico-Mechanical Fields*. **44**, 1, 43–53.
8. Tatsij, R. M., Chmyr, O. Yu., & Karabyn, O. O. (2018). Schema doslidzhennya pozdovzhnikh kolyvan stryzhniv kuskovo-stalogo pererizu. *Visnyk Lvivskogo derzhavnogo universytetu bezpeky zhyttyediyalnosti*. **18**, 61–70.

Тацій Роман Мар'янович – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри прикладної математики і механіки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності, e-mail: ldubzh.lviv@dsns.gov.ua, ORCID: 0000-0001-8805-6305

Чмир Оксана Юріївна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності, e-mail: o_chmyr@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-6340-9888.

Карабин Оксана Олександрівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності, e-mail: karabynoks@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9287-376X.

УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА
Міжнародний науково-навчальний центр
інформаційних технологій та систем НАН та МОН України

ПРАВИЛА РОЗГОРТАННЯ ЗНАКОВИХ КОМБІНАТОРНИХ ПРОСТОРІВ

Знакові комбінаторні простори існують в двох станах: спокої (згорнутому), який задається знаком, та динаміці (розгорнутому), який розгортається зі згорнутого. Точками цих просторів є комбінаторні конфігурації різних типів. В основі їхньої побудови лежать правила утворення та впорядкування цих об'єктів. Останні формуються з елементів заданої базової множини трьома рекурентними комбінаторними операторами, а упорядковуються за правилами, в яких використано властивість періодичності. Знаковий згорнутий комбінаторний простір задається інформаційним знаком, який містить базову множину, його тип і правила утворення з елементів базової множини точок розгорнутого простору.

У природі існує скінченне число множин комбінаторних конфігурацій одного і того ж типу, кожна з яких може бути впорядкована різними способами як строго, так і хаотично. Як показав аналіз цих множин, багато з них упорядковуються одними і тими самими строгими процедурами, тобто існують закономірності їхнього генерування. Однією з них є властивість періодичності, яка впливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій. На основі цієї властивості розроблено рекурентно-періодичний метод, орієнтований для генерування комбінаторних конфігурацій різних типів. За допомогою цього методу упорядкування структурованих комбінаторних множин проводиться за одними і тими самими правилами, а деякі з них генеруються різними модифікаціями одного і того самого алгоритму.

В статті описуються правила утворення та впорядкування структурованих комбінаторних множин, відповідно і знакових комбінаторних просторів. Уведено три рекурентні комбінаторні оператори, за допомогою яких формуються комбінаторні конфігурації. Це – транспозиція, вибирання та арифметичний оператор. Сформульовано три правила, за якими упорядковуються комбінаторні множини. Ці правила формуються на основі аналізу їхньої структури. Генерування комбінаторних множин проводиться з елементів заданої базової множини за допомогою наведених правил. Тобто, для їхнього впорядкування достатньо задати тип комбінаторної конфігурації, базову множину та правила їхнього утворення та впорядкування. Аналогічно описується і знаковий комбінаторний простір.

Ключові слова: знаковий комбінаторний простір, комбінаторна конфігурація, властивість періодичності, рекурентні комбінаторні оператори, інформаційний знак.

Н.К. ТИМОФЕЕВА
Международный научно-учебный центр
информационных технологий и систем НАН и МОН Украины

ПРАВИЛА РАЗВЕРТЫВАНИЯ ЗНАКОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Знаковые комбинаторные пространства существуют в двух состояниях: покое (свернутом), который задается знаком, и динамике (развернутом), который разворачивается из свернутого. Точками этих пространств являются комбинаторные конфигурации разных типов. В основе их построения лежат правила образования и

упорядочения этих объектов. Последние формируются из элементов заданного базового множества тремя рекуррентными комбинаторными операторами, а упорядочиваются по правилам, в которых используется свойство периодичности. Знаковое свернутое комбинаторное пространство задается информационным знаком, содержащий базовое множество, его тип и правила образования из элементов базового множества точек развернутого пространства.

В природе существует конечное число множеств комбинаторных конфигураций одного и того же типа, каждое из которых может быть упорядочено различными способами как строго, так и хаотично. Как показал анализ этих множеств, многие из них упорядочиваются одними и теми же строгими процедурами, то есть существуют закономерности их генерирования. Одной из них является свойство периодичности, которое следует из рекуррентного способа образования и упорядочения комбинаторных конфигураций. На основе этого свойства разработан рекуррентно-периодический метод, ориентированный для генерирования комбинаторных конфигураций различных типов. С помощью этого метода упорядочение структурированных комбинаторных множеств проводится по одним и тем же правилам, а некоторые из них генерируются различными модификациями одного и того же алгоритма.

В статье описываются правила создания и упорядочения структурированных комбинаторных множеств, соответственно и знаковых комбинаторных пространств. Введены три рекуррентные комбинаторные операторы, с помощью которых формируются комбинаторные конфигурации. Это – транспозиция, выборание и арифметический оператор. Сформулированы три правила, по которым упорядочиваются комбинаторные множества. Эти правила формируются на основе анализа их структуры. Генерирование комбинаторных множеств проводится из элементов заданного базового множества с помощью приведенных правил. То есть, для их упорядочения достаточно задать тип комбинаторной конфигурации, базовое множество и правила их образования и упорядочения. Аналогично описывается и знаковое комбинаторное пространство.

Ключевые слова: знаковое комбинаторное пространство, комбинаторная конфигурация, свойство периодичности, рекуррентные комбинаторные операторы, информационный знак.

N.K. TIMOFEEVA

International Scientific Training Centre
for Information Technologies and Systems

RULES FOR DEVELOPING SIGNIFICANT COMBINATORY SPACES

Significant combinatorial spaces exist in two states: tranquility (convolute), which is given by the sign, and dynamics (deployed), which deployed from convolute. The points of these spaces are combinatorial configurations of different types. Their construction is based on the rules of formation and ordering of these objects. The latter are formed from the elements of a given basic set by three recurrent combinatorial operators, and are ordered according to the rules in which the periodicity property is used. The significant convolute combinatorial space is given by an information sign, which contains the base set, its type and rules of formation from the elements of the base set of points of the deployed space.

In nature, there are a finite number of sets of combinatorial configurations of the same type, each of which can be ordered in different ways, both strictly and chaotically. As the analysis of these sets has shown, many of them are ordered by the same strict procedures, ie there are patterns of their generation. One of them is the property of periodicity, which

follows from the recurrent method of formation and ordering of combinatorial configurations. Based on this property, a recurrent-periodic method was developed, focused on generating combinatorial configurations of different types. Using this method, the ordering of structured combinatorial sets is performed according to the same rules, and some of them are generated by different modifications of the same algorithm.

The article describes the rules of formation and ordering of structured combinatorial sets and, respectively, sign combinatorial spaces. Three recurrent combinatorial operators are introduced, according to which combinatorial configurations are formed. It is a transposition, a selection, and an arithmetic operator. Three rules are formulated according to which combinatorial sets are ordered. These rules are formed on the basis of the analysis of their structure. The generation of combinatorial sets is performed from the elements of a given base set using the above rules. That is, for their generation it is enough to specify the type of combinatorial configuration, the base set and the rules of their formation and ordering. The significant combinatorial space is similarly described.

Keywords: sign combinatorial space, combinatorial configuration, periodicity property, recurrent combinatorial operators, information sign.

Постановка проблеми

Знакові комбінаторні простори існують в двох станах: спокої (згорнутому), який задається знаком, та динаміці (розгорнутому), який розгортається зі згорнутого [1]. Точками цих просторів є комбінаторні конфігурації різних типів. В основі їх побудови лежать правила утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій. Для встановлення правил розгортання оговорених просторів необхідно провести аналіз структури комбінаторних множин та визначити закономірності їхнього генерування та утворення комбінаторних конфігурацій. Вони формуються з елементів заданої базової множини трьома рекурентними комбінаторними операторами, а упорядковуються за правилами, в яких використано властивість періодичності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дослідженню комбінаторних конфігурацій і способам їхнього генерування в літературі присвячено багато робіт, наприклад [2–7]. Генерування комбінаторних конфігурацій, як правило, проводиться алгоритмами, які їх породжують, за строгою схемою або як рівномірно розподілені випадкові об'єкти. В таких алгоритмах закладаються процедури, які підвищують ефективність їхньої роботи за швидкодією. Деякі алгоритми орієнтовані на розв'язання прикладних задач комбінаторної оптимізації, тому за їх допомогою генерується не вся комбінаторна множина, а її певна підмножина. Оскільки в природі існує багато впорядкувань комбінаторних конфігурацій, тому ефективність та швидкодія алгоритмів залежать від того, яка множина з існуючих вибрана для генерування, тобто правила, за якими вона упорядковується, формують алгоритм.

Як показав аналіз цих множин, вони можуть упорядковуватися одними і тими самими процедурами, тобто існують закономірності їхнього генерування. Одна з таких властивостей описана у роботі [8], в основі якої лежить характерна для багатьох типів комбінаторних конфігурацій *властивість періодичності*, яка впливає з рекурентного способу їхнього утворення. Виявлення закономірностей упорядкування певної множини дозволяє розробляти нескладні процедури її генерування для довільного значення n і строго доводити, що ця множина містить усі нетотожні комбінаторні конфігурації. Якщо провести аналіз деяких, відомих у літературі алгоритмів генерування комбінаторних об'єктів, тоді можна помітити, що в них на інтуїтивному рівні закладені правила їхнього упорядкування, описані у [8].

Мета дослідження

Для розв'язання поставленої задачі необхідно провести аналіз структури комбінаторних множин. На основі результатів аналізу показати, що утворення комбінаторних конфігурацій проводиться за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів, а їхнє строге впорядкування виконується також за трьома правилами. Генерування комбінаторних множин проводиться з елементів заданої базової множини за допомогою наведених правил. Тобто, для впорядкування комбінаторних множин достатньо задати тип комбінаторної конфігурації, базову множину та правила їхнього утворення та впорядкування. Аналогічно задається знаковий комбінаторний простір, для якого вводиться інформаційний знак.

Викладення основного матеріалу дослідження

Базові множини та комбінаторні конфігурації. Оскільки елементами комбінаторних множин є комбінаторні конфігурації певного типу, розглянемо, як вони утворюються та за якими правилами впорядковуються.

Комбінаторною конфігурацією назвемо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ [8]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, \dots, w_n^k)$. Під символом $w_j^k \in A$ розуміємо як окремі елементи, так і підмножини (блоки), $\eta \in \{1, \dots, n\}$ – кількість елементів у w^k , $W = \{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1, \dots, q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W , q – кількість w^k у W .

Комбінаторні конфігурації будь-якого типу формуються з елементів заданої множини характерною для кожного з них операцією. Одні з цих операцій змінюють порядок розміщення в них елементів, інші змінюють їхній склад.

Означення 1. Множину $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, з елементів якої утворюються комбінаторні конфігурації, назвемо базовою.

Означення 2. Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A (або з попередньої w^{k-1}) утворюється комбінаторна конфігурація w^k .

Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний.

Означення оговорених операторів подано у [8].

Ураховуючи вищевикладене, узагальнимо способи утворення комбінаторних конфігурацій.

Комбінаторні конфігурації w^k з елементів базової множини A утворюються рекурентним комбінаторним оператором вибирання. Комбінаторна конфігурація w^k у множині W утворюється з $w^i \in W$ рекурентним комбінаторним оператором транспозиції або арифметичним, $k < i$. Перша w^1 утворюється з елементів множини A оператором вибирання.

Оскільки базова множина A містить усі елементи, необхідні для формування $w^k \in W$, тоді перша $w^1 \in W$ для усіх типів комбінаторних конфігурацій утворюється з A оператором вибирання. Тип комбінаторної конфігурації $w^k \in W$ визначається рекурентним комбінаторним оператором.

Як показує аналіз комбінаторних множин, вони можуть упорядковуватися одними і тими самими процедурами, тобто існують закономірності їхнього

генерування. Одна з таких закономірностей, що характерна для багатьох типів комбінаторних конфігурацій, є властивість періодичності, яка впливає з рекурентного способу їхнього утворення.

Властивість періодичності упорядкування комбінаторних множин впливає з рекурентного способу утворення комбінаторних конфігурацій і полягає в тому, що ці множини упорядковані інтервалами, в кожному з яких комбінаторні конфігурації утворюються за одними і тими самими правилами.

На основі властивості періодичності розроблено рекурентно-періодичний метод генерування комбінаторних конфігурацій.

Якщо провести аналіз деяких, відомих у літературі алгоритмів генерування комбінаторних конфігурацій, тоді можна помітити, що в них на інтуїтивному рівні закладені правила упорядкування, що ґрунтуються на цій властивості.

Упорядкуємо множину W комбінаторних конфігурацій $w^k \in W$, $k \in \{1, \dots, q\}$, так, що наступна w^{k+1} формується з попередньої w^k або з базової множини A характерним для певного типу рекурентним комбінаторним оператором (транспозицією, вибиранням чи арифметичним оператором). Оскільки в упорядкованій множині W комбінаторні конфігурації $w^k \in W$ розміщені в певному порядку, тоді при розробленні процедур їхнього генерування множину A , з елементів якої оператором вибирання вони утворюються, розглянемо як упорядковану і позначимо її $A = (a_1, \dots, a_n)$. Вважаємо $w^k \in W$ також упорядкованою і позначимо її $w^k = (w_1^k, \dots, w_n^k)$.

У будь-якій упорядкованій комбінаторній множині W назвемо інтервалом $L_{b,c}$ ($b < c$) підмножину послідовних комбінаторних конфігурацій w^k з початковим номером b і кінцевим c . Його довжиною назвемо кількість елементів w^k , які містяться в цьому інтервалі, включаючи b і c .

Розглянемо роботу рекурентно-періодичного методу на прикладі заданого упорядкування перестановок для $n = 4$. В інтервал $L_{1,6}$ входять перестановки, в яких наступна $w^k \in W$ формується з попередньої однією транспозицією двох сусідніх (першого і другого, або другого і третього) елементів. Назвемо його інтервалом нульового рангу (інтервали $L_{1,6}$, $L_{7,12}$, $L_{13,18}$, $L_{19,24}$). В кожному інтервалі нульового рангу перестановки утворюються за одними і тими ж правилами. Перша перестановка нульового рангу утворюється за іншими правилами. Назвемо її обмежувальною. Різні правила утворення обмежувальної комбінаторної конфігурації задають різні способи упорядкування комбінаторних множин.

Інтервал першого рангу перестановок ($L_{1,24}$) складається з чотирьох інтервалів нульового рангу, другого рангу – з п'яти інтервалів першого рангу, а інтервал σ -го рангу – з інтервалів $(\sigma - 1)$ -го рангу. Інтервали $(\sigma - 1)$ -го рангу в інтервалі σ -го рангу утворюються за одними і тими ж правилами. Аналогічно упорядковуються комбінаторні конфігурації інших типів.

Отже, для генерування комбінаторних множин з використанням властивості періодичності необхідно сформулювати три правила, за якими утворюються: а) інтервал нульового рангу; б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу); в) інтервал σ -го рангу.

Означення 3. Алгоритм генерування довільної множини комбінаторних конфігурацій W назвемо коректним, якщо в результаті його роботи отримана множина \tilde{W} взаємно однозначно відображає W .

Уведемо правила утворення інтервалу нульового рангу, обмежувальної комбінаторної конфігурації та інтервалу σ -го рангу для сполучення без повторень, перестановок та розбиття натурального числа.

Правило 1. Сполучення інтервалу нульового рангу у їхній множині утворюється рекурентним комбінаторним оператором вибирання одного елемента з базової множини A таким чином, що w^k по відношенню до w^{k-1} відрізняється останнім елементом $w_\eta^k = a_j$, $a_j \in A$, $j = \overline{\delta, n}$, $k = \overline{b+1, c}$.

Величину δ назвемо коефіцієнтом інтервалу нульового рангу. Він змінюється при формуванні чергового інтервалу нульового рангу і набуває значення $\delta \in \{\eta, \dots, n\}$. Інтервал нульового рангу, утворений за цим правилом, містить усі можливі w^k .

Правило 2. Обмежувальне сполучення утворюється рекурентним комбінаторним оператором вибирання таким чином, що елементи $w_j^k = a_l$, $j = \overline{\sigma', \eta}$, $l = \overline{\delta', \delta}$, де $\sigma' = (\eta - \sigma)$ – номер позиції у множині w^k , яку займає елемент $a_\delta \in A$, $\delta' \in \{1, \dots, \delta - 1\}$, $\sigma \in \{1, \dots, \eta - 1\}$. При цьому w^k відрізняється від w^{k-1} одним або кількома елементами $w_\sigma^k, \dots, w_\eta^k$, а елементи $w_1^k = w_1^{k-1}, \dots, w_{\sigma'-1}^k = w_{\sigma'-1}^{k-1}$. Елементи першого сполучення w^i підмножини ізоморфних сполучень набувають значення $w_1^i = a_1, \dots, w_\eta^i = a_\eta$.

Правило 3. Будь-яке сполучення інтервалу σ -го рангу утворюється таким чином, що елементи $w_j^k = w_l^i = a_l$, $k \neq i$, $j \in \{1, \dots, \sigma' - 1\}$, $w^k, w^i \in W_\sigma$, $l \in \{1, \dots, \delta' - 1\}$, а з елементів a_δ, \dots, a_η множини A , які оператором вибирання розміщуються у позиціях σ', \dots, η сполучення $w^k = (w_1^k, \dots, w_\sigma^k, \dots, w_\eta^k)$, утворюється множина всіляких сполучень.

Змінні σ' і δ' назвемо коефіцієнтами інтервалу σ -го рангу. Вони визначають номери позицій тих елементів $a_\delta \in A$, з яких починається формування цього інтервалу.

Розглянемо розбиття натурального числа. Елементи множини w^k – числа натурального ряду.

Правило 4. Нетотожні розбиття числа n в інтервалі нульового рангу утворюються арифметичним рекурентним комбінаторним оператором таким чином, що будь-яке w^k , $k = \overline{b+1, c}$, формується з попереднього w^{k-1} , $k-1 = \overline{b, c-1}$, відніманням одиниці від першого числа w_1^{k-1} і додаванням одиниці до другого числа w_2^{k-1} , тобто $w^k = (w_1^{k-1} - 1, w_2^{k-1} + 1, \dots, w_\eta^{k-1})$ при виконанні умов: $w_1^{k-1} - 1 \geq w_2^{k-1} + 1$. Кількість таких розбиттів числа в сусідніх інтервалах $t-1, t, t+1$ – різна.

Правило 5. Обмежувальне розбиття w^k інтервалу нульового рангу утворюється арифметичним рекурентним комбінаторним оператором так, що $w_j^k = w_r^{k-1} + 1$, $j = \overline{2, r}$,

$r \in \{3, \dots, \eta\}$, $w_s^k = w_s^{k-1}$, $s = \overline{r+1, \eta}$ для $r < \eta$, і $w_1^k = n - \sum_{j=2}^{\eta} w_j^k$. Початкове обмежувальне

розбиття підмножини W_η дорівнює $w^k = (n - (\eta - 1), 1, \dots, 1, 1)$.

Правило 6. Інтервал σ -го рангу упорядкованої множини W утворюється за правилами 4–5 таким чином, що він містить усі розбиття числа $\sum_{j=1}^{\sigma+2} w_j^k$, а w_j^k належить множині $w^k = (w_1^k, \dots, w_{\sigma+2}^k, \dots, w_\eta^k)$, $\sigma \in \{0, \dots, \eta - 2\}$.

Упорядкуємо перестановки з використанням властивості періодичності так, що наступна перестановка утворюється з попередньої однією операцією транспозиції двох елементів w_j^k, w_l^k .

Правило 7. Перестановки w^{k+1} в інтервалах нульового рангу довжиною $3!$ утворюються з попередньої w^k однією транспозицією двох сусідніх (першого, другого або третього) елементів $w_1^k, w_2^k, w_3^k, w^k = (w_1^k, w_2^k, w_3^k, \dots, w_n^k)$.

Запишемо рекурентний вираз утворення наступної перестановки w^{k+1} інтервалу нульового рангу з попередньої w^k , у якому використовується арифметичний оператор:

$$\begin{aligned} \omega^{k+1}(r^k, w^k) = & ((w_1^k(1-r_1^k) + (w_2^k, r_1^k, r_2^k)), \\ & (w_1^k r_2^k r_1^k + w_2^k(1-r_2^k) + w_3^k r_3^k r_2^k), \\ & (w_2^k r_2^k r_3^k + w_3^k(1-r_3^k))). \end{aligned}$$

Бінарна послідовність r^k набуває значення:

$$r_j^k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } w_j^k = w_j^{k-1}, \\ 1, & \text{якщо } w_j^k \neq w_j^{k-1}, j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Вважатимемо, що перша перестановка задана і задано початкове значення бінарної послідовності $r^1 = (1, 1, 0)$. Тоді вираз для рекурентного утворення r^{k+1} набуде вигляду:

$$r^{k+1}(r^k) = ((1-r_1^k), r_2^k, (1-r_1^k)).$$

Правило 8. Обмежувальна перестановка або задається, або утворюється однією транспозицією двох елементів $\alpha(w_{\sigma-1}^k, w_{\sigma}^k)$, якщо σ – непарне, і $\alpha(w_j^k, w_{\sigma}^k)$, якщо σ – парне, де $j = \sigma - 1$ для другого і третього інтервалів σ -го рангу і $j \in \{(n-2)-1, \dots, (n-2)-(n-3)\}$ для t -го інтервалу σ -го рангу, $\sigma \in \{4, \dots, n\}$, $t \in \{4, \dots, n\}$. Перехід до наступного елемента $w_{\sigma+1}^k$ проводиться тоді, коли елементи $w_1^k, \dots, w_{\sigma}^k$ утворять усі перестановки, $w^k = (w_1^k, \dots, w_{\sigma}^k, \dots, w_n^k)$, $\sigma \in \{4, \dots, n\}$.

Правило 9. Інтервал σ -го рангу упорядкованої множини W утворюється з елементів $w_1^k, \dots, w_{\sigma}^k$ за правилами 7–8 так, що його довжина дорівнює $\sigma!$.

Ці правила справедливі для багатьох упорядкувань комбінаторних множин, які мають упорядковану структуру. В їх основі лежить властивість періодичності.

Висновки

Отже, для впорядкування комбінаторних конфігурацій достатньо задати базову множину, правила утворення та правила генерування комбінаторних множин і їхній тип. Ці правила формуються, виходячи з результатів аналізу структури певної множини. Тобто, комбінаторна множина існує в двох станах і задається інформаційним знаком. Відповідно інформаційним знаком задається і знаковий комбінаторний простір, який існує в двох станах: згорнутому (спокої) та розгорнутому (динаміці).

Список використаної літератури

1. Тимофієва Н.К. Знакові комбінаторні простори та штучний інтелект. *Штучний інтелект*. 2015. № 1-2(67-68). С.180–189.
2. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 476 с.
3. Липский В. Комбинаторика для программистов / Пер. с польск. М.: Мир, 1988. 213 с.
4. Тимофієва Н.К. Теорія комбінаторної оптимізації та задачі штучного інтелекту. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. № 2. С. 161–172. <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2018-2-161-172>
5. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Основные алгоритмы / Пер. с англ. В 3 т. М.: Мир, 1976. Т. 1. 735 с.
6. Литвиненко О. С. Методи генерації комбінаторних конфігурацій та їх застосування в математичному і комп'ютерному моделюванні задач перевезення та обробки вантажів: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02., Х.: Ін-т проблем машинобуд. ім. А.М. Підгорного, 2018. 21 с.
7. Стефлюк С. Д. Многочлени розбиттів та їх застосування: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06. Івано-Франківськ: Прикарпатський нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2016. 18 с.
8. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 01.05.02. К.: ІК ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007. 32 с.

References

1. Tymofijeva, N. K. (2015). Znakovi kombinatorni prostory ta shtuchy'j intelekt Shtuchny'j intelekt, **67-68** (1-2), 180–189.
2. Reinhold, E., Nyverhelt, Yu., & Deo, N. (1980). Kombinatornyje alhoritmy. Teorija i praktika / Per. s anhl. M.: Mir.
3. Lypskiy, V. (1982). Kombinatorika dlja prohrammistov / Per. s polsk. M.: Mir.
4. Tymofiieva, N. K. (2018). Teoriia kombinatornoj optymizatsii ta zadachi shtuchoho intelektu. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*. **2**, 161–172.
5. Knut, D. (1976). Iskusstvo prohrammirovaniya dlja EVM. Osnovnye alhoritmy. Per. s anhl. V 3 t. M.: Myr. T. 1.
6. Lytvynenko, O. S. (2018). Metody heneratsii kombinatorykh konfihuratsiy'j ta ikh zastosuvannja v matematychnomu i kompiuternomu modeliuванні zadach perevezennja ta obrobky vantazhiv: avtoref. dys. ... kand. tekhn. nauk : 01.05.02. Kharkiv: In-t problem machynobud. im. A.M. Pidhornoho.
7. Stefliuk, S. D. (2016). Mnohochleny rozbyttiv ta yikh zastosuvannia: avtoref. dys. ... kand. fiz.-mat. nauk, spets.: 01.01.06. Ivano-Frankivsk: Prykarpatskyu'j nath. un-t im. V. Stefanyka.
8. Tymofiieva, N. K. (2007). Teoretyko-chyslovi metody rozviazannia zadach kombinatornoj optymizatsii: avtoref. dys. ... dokt. tekhn. nauk: 01.05.02. Kyiv: IK im. V.M. Gluchkova NAN Ukrainy.

Тимофієва Надія Костянтинівна – д.т.н., старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України (м. Київ), e-mail: Tymnad@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0312-1153.

УДК [519.711+519.876] (075)

А.В. УСОВ, Ю.Є. СІКІРАШ

Одеський національний політехнічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ

Стаття узагальнює аргументи та контраргументи з питання ідентифікації просторового стану виробничої системи для оцінки ефективності її функціонування та оптимізації цільових функцій при вирішенні завдань управління розвитком. Основною метою проведеного дослідження є розробка підходу до моделювання системи управління розвитком виробничого підприємства. Проблема управління розвитком виробничих підприємств засвідчила, що кожному рівню аналізу стану підприємства і оцінці динаміки його розвитку та проблемної ситуації відповідає агрегований набір оцінок, які враховують як окремі показники, так і їх різні групи. Актуальність вирішення даної наукової проблеми полягає в тому, що процес управління розвитком підприємства стає все більш слабко структурованим і випадковим, у зв'язку з чим виникає необхідність в управлінні даним процесом.

Дослідження питання управління розвитком підприємств при цілеспрямованій зміні параметрів, структури і властивостей системи та збуренні зовнішнього і внутрішнього середовища вимагають використання нових моделей управління, при цьому кожна нова модель повинна бути кращою, ніж та, що замінюється. Запропонований підхід до моделювання системи управління розвитком виробничого підприємства та його практична реалізація дають можливість визначати домінуючі параметри розвитку виробничих підприємств і своєчасно відстежувати імпульси і простір станів виробничої системи в якості параметрів для її розвитку. Аналіз стану виробничої системи і оцінка динаміки її розвитку показують необхідність формування системи узагальнених векторно-скалярних, ситуаційно орієнтованих показників. Представлені показники виробничої системи у вигляді вектору стану вхідного та вихідного векторів можуть бути базовими для ідентифікації стану підприємства, а також можуть бути використані для оцінки ефективності його функціонування і для оптимізаційних цільових функцій при розв'язанні задач управління розвитком підприємства.

Ключові слова: розвиток, виробниче підприємство, моделювання стану виробничої системи, управління, оптимізація, простір станів.

А.В. УСОВ, Ю.Е. СИКИРАШ

Одесский национальный политехнический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Статья обобщает аргументы и контраргументы по вопросу идентификации пространственного состояния производственной системы для оценки эффективности её функционирования и оптимизации целевых функций при решении задач управления развитием. Основной целью проведённого исследования является разработка подхода к моделированию системы управления развитием производственного предприятия. Проблема управления развитием производственных систем показала, что каждому уровню анализа состояния предприятия и оценке динамики его развития и проблемной ситуации соответствует агрегированный набор оценок, которые учитывают как отдельные показатели, так и их разные группы. Актуальность решения данной научной проблемы состоит в том, что процесс управления развитием предприятия

становится всё более слабо структурированным и случайным, в связи с чем возникает необходимость в управлении данным процессом. Исследования вопроса управления развитием предприятий при целенаправленном изменении параметров, структуры и свойств системы и возмущении внешней и внутренней среды требуют использования новых моделей управления, при этом каждая новая модель должна быть лучше заменяемой. Предложенный подход к моделированию системы управления развитием производственного предприятия и его практическая реализация дают возможность определять доминирующие параметры развития производственных предприятий и своевременно отслеживать импульсы и пространство состояний производственной системы в качестве параметров для её развития. Анализ состояния производственной системы и оценка динамики её развития показывают необходимость формирования системы обобщённых векторно-скалярных, ситуационно ориентированных показателей. Представленные показатели производственной системы в виде вектора состояния входящего и выходящего векторов могут быть базовыми для идентификации состояния предприятия, а также могут быть использованы для оценки эффективности его функционирования и для оптимизационных целевых функций при решении задач управления развитием предприятия.

Ключевые слова: развитие, производственное предприятие, моделирование состояния производственной системы, управление, оптимизация, пространство состояний.

A.V. USOV, Yu.Ye. SIKIRASH
Odessa National Polytechnic University

MODELLING OF OPTIMAL DEVELOPMENT OF PRODUCTION SYSTEMS

The article summarizes the arguments and counterarguments on the identification of the spatial state of the production system to assess the effectiveness of its functioning and optimization of target functions in solving development management problems. The main goal of the study is to develop an approach to modeling the development management system of a manufacturing enterprise. The problem of managing the development of production systems has shown that each level of analysis of the state of the enterprise and assessment of the dynamics of its development and the problem situation corresponds to an aggregated set of estimates that take into account both individual indicators and their different groups. The relevance of solving this scientific problem lies in the fact that the process of managing the development of an enterprise is becoming more and more weakly structured and random, and therefore there is a need to manage this process.

Studies of the issue of managing the development of enterprises with a deliberate change in the parameters, structure and properties of the system and perturbation of the external and internal environment require the use of new management models, with each new model should be better replaceable. The proposed approach to modeling the development management system of a manufacturing enterprise and its practical implementation makes it possible to determine the dominant development parameters of manufacturing enterprises and to track in a timely manner the impulses and state space of the production system as parameters for its development. Analysis of the state of the production system and assessment of the dynamics of its development show the need for the formation of a system of generalized vector-scalar, situationally oriented indicators. The presented indicators of production system in the form of a state vector of the incoming and outgoing vectors can be basic for identifying the state of the enterprise, and can also be used to assess the effectiveness of its functioning and for optimizing target functions in solving problems of managing the development of the enterprise.

Keywords: development, manufacturing enterprise, modeling of the state of the production system, management, optimization, state space.

Постановка проблеми

Сучасні виробничі системи характеризуються високою параметричною та структурною динамічністю, суттєвими нелінійностями та високою невизначеністю зовнішнього оточення. Характерні риси виробничих систем (ВС) – використання ефективних високих технологій, інформаційних систем. Задачі оптимального розвитку ВС є складними багатовимірними варіаційними задачами, аналітичний розв’язок яких існує тільки для спрощених моделей. Сучасні ВС фактично не мають довгих періодів функціонування з незмінними технологіями, номенклатурою та потребами. Дослідження та побудова моделей функціонування та розвитку показали, що цілісної системи моделей та методів ВС для використання їх у системах оперативного і стратегічного управління не створено [1–5]. Тому розробка ефективних моделей та методів оптимального управління розвитком виробництва є актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Базовий аналог задач оптимального розвитку виробничих систем у класі розподілу ресурсів між розвитком ВС та накопиченням поставлений та досліджений Р. Беллманом [6] у «задачі розподілу». Мета оптимізації в прямій задачі – максимізація інтегрального критерію «накопичення», у спряженій – мінімізація витрат за заданою програмою розвитку.

Для розв’язання задачі розвитку ВС вибрано управління в просторі станів [7–8] і метод принципу максимуму Понтрягіна [9].

Для реалізації управління простором стану ВС необхідно визначити вхідний вектор $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, який характеризує зовнішню дію на вхід системи протягом часу t , ґрунтуючись на просторовому стані системи і ретроспективному аналізі її діяльності:

$$V(t) = V_\phi(t) + V_p(t),$$

де $V_\phi(t)$ – ресурси функціонування системи; $V_p(t)$ – ресурси управління системою.

З урахуванням сказаного вище, завдання формування управління $V(t)$ системою полягає у визначенні упорядкованого у часі стану системи, який оцінюється вектором $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t))$ та його зміною – $\frac{dX}{dt}$ при виконанні функціональних властивостей.

Мета дослідження

Метою дослідження є розробка математичної моделі процесу розвитку виробничої системи (ВС), змін як її елементів, так і структури всіх її властивостей, включаючи і інтегративні властивості. На основі моделі розв’язати задачі управління ефективністю станом ВС, які слід розглядати як вид завдань оптимального управління, що пропонують оптимальне використання на кожному етапі функціонування всіх ресурсів, якими володіє виробнича система для досягнення головної на даному етапі мети при дотриманні деяких обмежень. У процесі розвитку ВС відбувається зміна її елементів, структура всіх її властивостей, тобто вектор $Y(t)$, що визначає вихідні характеристики. В якості узагальненої математичної моделі управління динамічним станом ВС можна використовувати модель наступного вигляду:

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X, V, Y), \quad (1)$$

де $X(t)$ – n -вимірний фазовий вектор; $V(t)$ – вектор управління ВС; $Y(t)$ – вектор вихідних показників функціонуючої системи.

Завдання умовної оптимізації управління ВС можна записати у вигляді [2–4]:

$$X^0 = \arg \text{extr} P(x), \quad (2)$$

де $P(x)$ – функція корисності.

Допустимі розв'язки $X(t)$ задаються на основі змістовного аналізу ВС з обмеженнями у вигляді нерівностей:

$$h_i(X, q_i) \leq 0; \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

та рівності

$$g_j(X, q_j) = 0; \quad j = \overline{1, r}; \quad (4)$$

де $X(t)$ – керована змінна простору станів ВС; h_i, g_j – оператори, що визначають структуру математичної моделі відповідного обмеження; q_i, q_j – кортежі кількісних параметрів відповідних обмежень.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розв'язування завдання оптимізації функціонування виробничої системи пов'язано з визначенням метрики, в якій проводиться порівняння якості розв'язків з функцією корисності. Розглянемо ідентифікацію стану ВС на основі комплексної оцінки простору станів системи. Процес розвитку виробничої системи вважається ефективним, якщо він забезпечує розвиток системи в напрямку досягнення стратегічних цілей. Це означає, що в результаті впливу кількісні або якісні характеристики інтегративної властивості системи змінюються в напрямку поліпшення. При цьому слід ввести відповідні показники ефективності як критерії оптимізації управління розвитком у вигляді максимуму функціонала [2]:

$$J(y) = \int_0^T F(x, y) dt, \quad (5)$$

де $x(t), y(t)$ – керована і вихідна змінні стану виробничої системи.

На функцію $y(t)$ накладене обмеження:

$$0 \leq y \leq x. \quad (6)$$

Розв'язання задач управління розвитком ВС вимагає інформаційної підтримки, яку забезпечують АСУ. Однак вони орієнтовані на підтримку функціонування системи, а не на управління процесами її розвитку. Це стало передумовою для створення у складі АСУ ВС підсистеми управління розвитком – системи стратегування розвитку.

Формування управління по кожній групі процесів складається в послідовній реалізації етапів: контролю, діагностики, прогнозування станів, формування управляючих впливів. Аналіз існуючих систем управління ВС [2, 7] показує, що їм властивий ряд недоліків:

- не виділяється функціональна підсистема розвитку;
- не повністю враховується взаємодія із зовнішнім середовищем.

Структурну модель ВС, що розвивається, можна представити у наступному вигляді (рис.1).

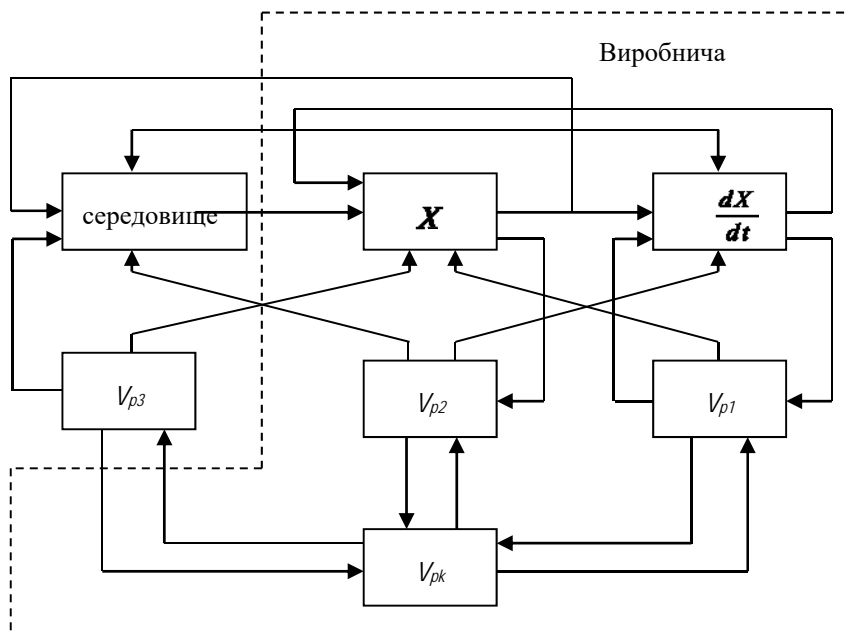


Рис. 1. Структурна схема моделі ВС у просторовому стані.

Тут X – вектор-функція стану ВС; $\frac{dX}{dt}$ – функціонування ВС; V_{p2} – система управління виробництвом; V_{p1} – система управління розвитком; V_{p3} – система управління взаємодією з зовнішнім середовищем; V_{pk} – вихід системи узгодження, яка забезпечує взаємодію – $X(t)$, $\frac{dX}{dt}$.

Діяльність ВС визначається перетворенням ресурсів в кінцевий продукт. Діяльність ВС включає в себе різнопланові види процесів, направлених на отримання кінцевого продукту або результату, і охоплює всі виробничі функції: планування, розробку, проектування, матеріально-технічне забезпечення, технологію виготовлення продукту, його верифікацію і забезпечення якості, реалізацію. При цьому використовуються технології базового процесу діяльності і відповідні їм технологічні процеси. Окрім базових процесів діяльності ВС, реалізуються і процеси управління, комунікації, організація виробництва, забезпечення взаємодії з зовнішнім середовищем. Виробничі системи в своїй діяльності використовують:

- базові процеси – $\{П_{1i}\}$;
- технології зміни якості і кількісних характеристик персоналу – $\{П_{2i}\}$;
- організаційні технології (технології управління, комунікацій, прийняття та реалізації рішень – $\{П_{3i}\}$;
- взаємодію із зовнішнім середовищем – $\{П_{4i}\}$;
- інформаційні технології – $\{П_{5i}\}$.

Розвиток ВС з метою підвищення ефективності і конкурентоспроможності можливий за рахунок інновацій, продуктів та технологій.

Передбачається, що випадкові впливи на ВС достатньо малі і ними можна знехтувати. Тоді між часом та швидкістю змін просторового стану ВС існує зв'язок у вигляді системи:

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = qf_{ij}(x_i, y), \quad (7)$$

де $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ – вихідні змінні ВС; q – швидкість встановлення мікроекономічних змінних.

З цією метою розглянемо ВС зі змінними, що характеризують її функціональну діяльність. Всі змінні, що діють на ВС або мають до неї якесь відношення доцільно розподілити на три множини [10]:

- 1) вхідні змінні v_1, v_2, \dots, v_m , що характеризують зовнішні впливи на входи системи;
- 2) змінні стану x_1, x_2, \dots, x_n – внутрішні змінні, сукупність яких повністю характеризує властивості системи;
- 3) вихідні змінні y_1, y_2, \dots, y_r , що представляють ті реакції на зовнішні впливи та ті стани системи, які відносяться до показників ефективності системи.

Розглянемо сукупність входів як один узагальнений вхід, на який впливає вектор $V(v_1, v_2, \dots, v_m)$, а сукупність виходів як узагальнений вихід, який характеризується вихідним вектором $Y(y_1, y_2, \dots, y_r)$. Змінні стану пов'язані з внутрішніми властивостями системи вектором $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та їх змінами $\frac{dX}{dt}$ в процесі виробництва.

ВС, її входи та виходи – це три взаємопов'язаних об'єкта, які в кожній конкретній ситуації визначаються відповідно з описом системи (структура й властивості компонент або математична модель ВС), а також заданням множин вхідних та вихідних змінних. В умовах розвитку виробнича система є адитивною, тому рівняння (7) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)v(t), \\ Y(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t); \end{aligned} \quad (8)$$

де $A(t)$ – матриця системи (квадратна n -го порядку); $B(t)$ – матриця управління розміру $(n \times m)$; $C(t)$ – матриця виходу розміру $(r \times n)$; $D(t)$ – матриця входу розміру $(r \times m)$.

Для виробничих стаціонарних систем елементи матриць A, B, C, D виражаються постійними числами, які є параметрами компонент виробничої системи. A – основна матриця системи, яка визначає характер виробництва; B – матриця зв'язку; структура цієї матриці визначає характер зв'язку входу в ВС з різними змінними виробничої системи; C – матриця зв'язку змінних ВС з вихідними змінними вектор-функції $Y(t)$; D – матриця зв'язку, що безпосередньо пов'язує вектор входу $v(t)$ ВС з вектором виходу $Y(t)$. Структура цієї матриці визначає, яким чином параметри на вході впливають на різні виходи $Y(t)$.

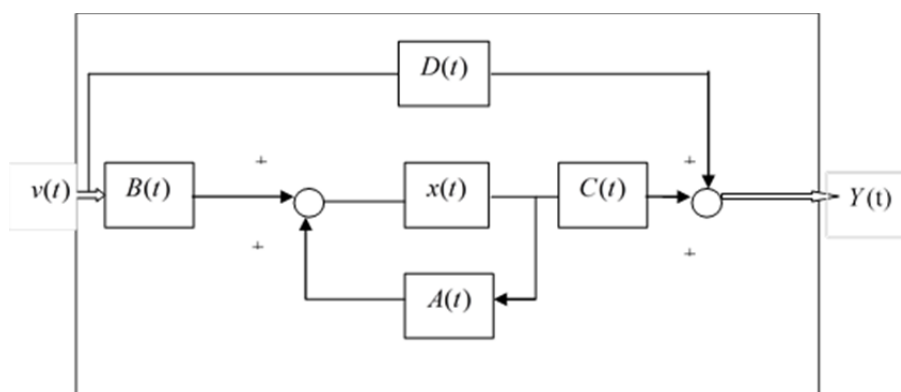


Рис. 2. Функціональна схема виробничої системи.

Найбільш складну структуру мають ВС з нелінійними залежностями між змінними на їх входах та виходах. Рівняння стану таких ВС можна представити у вигляді (9):

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bv(t) + Fz(t), \\ f[x(t), z(t), v(t)] &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

де A, B, F – постійні матриці; $f(x, z, v) = 0$ – нелінійне алгебраїчне рівняння, розв’язок якого відносно вектора $z(t)$ дозволяє виключити цей вектор із диференціального рівняння.

Нехай ВС описується рівнянням стану $\dot{x}(t) = Ax + Bv$, яке уявляє собою матричний запис системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами в нормальній формі. Його розв’язок, який задовольняє початковим умовам $x_0 = x(0)$, для вектора стану $x(t)$ і вихідного вектора $Y(t)$ має вигляд:

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bv(\tau)d\tau, \quad (10)$$

$$Y(t) = C\phi(t)x(0) + \int_0^t C\phi(t-\tau)Bv(\tau)d\tau + Dv(t). \quad (11)$$

Перший доданок в (10) відповідає реакції ВС, що залежить від початкових умов (виробництво функціонує в штатному режимі), а інші доданки – реакції на вхідні впливи (наприклад, впровадження інвестицій в основний капітал, кількість передових технологій, що використовується та ін.). Фундаментальна матриця $\phi(t) = e^{At} = \exp(At)$ називається перехідною матрицею стану ВС. Вона відображає початковий стан підприємства $x(0)$ в деякий стан для моменту часу t (при нульових входах), тобто $x(t) = \phi(t)x(0)$.

При запуску ВС, тобто при $x(0) = 0$, та відсутності зв’язку вектора входу $v(t)$ з вектором виходу $Y(t)$ ($D = 0$), зв’язок між реакцією на виходах і входах описується відношенням:

$$Y(t) = \int_0^t C\phi(t-\tau)Bv(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)v(\tau)d\tau. \quad (12)$$

Матриця $g(t) = C\phi(t)B$ являє собою узагальнену характеристику ВС відносно її вхідних та вихідних змінних. Реакцію на i -му виході підприємства можна записати у вигляді:

$$y_i(t) = \int_0^t [g_{i1}(t-\tau)v_1(\tau) + g_{i2}(t-\tau)v_2(\tau) + \dots + g_{im}(t-\tau)v_m(\tau)]d\tau, \quad (13)$$

де $g_{ij}(t)$ – ij -елементи матриці $g(t)$, що описує вплив відповідного вхідного параметра і дорівнює реакції $y_{ij}(t)$ на i -му виході відносно j -го входу, за умови, що всі інші входи нульові, тобто

$$y_{ij}(t) = \int_0^t g_{ij}(t-\tau)v_j(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1, r}; j = \overline{1, m}. \quad (14)$$

Права частина рівності (14) є згорткою функцій $g(t) \cdot v(t)$ [8]. Враховуючи властивості згортки функцій [3], вираз для $y_{ij}(t)$ можна записати чотирьома різними способами з урахуванням спрощення позначення скалярних функцій $y_{ij}(t) - y(t)$ та $v_j(t) - v(t)$:

$$y(t) = g(t) * v(t) = \int_0^t g(t-\tau)v(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)v(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(t-\tau)v'(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)v'(t-\tau)d\tau. \quad (15)$$

Скалярні функції $g(t)$ та $h(t)$ називаються відповідно імпульсною та перехідною характеристиками ВС. Економічну інтерпретацію цим функціям можна дати наступну: $g(t)$ – короткочасна інноваційна складова; $h(t)$ – реакція стану ВС та її вихідної характеристики від короткочасного використання інноваційної складової.

Нехай на вхід ВС надійшла складова $v_p(t)$ ресурсу розвитку в момент часу τ . Тоді за властивістю середнього значення реакцію на виході представимо у вигляді:

$$Y(t) = \int_0^t g(t-\tau)v_p(\tau)d\tau = g(t-\theta) \int_0^t v_p(\tau)d\tau = g(t-\theta) * Su, \quad (16)$$

де $0 < \theta < t$; Su – величина складової $v_p(t)$ ресурсу розвитку.

Отже, $g(t-\tau)$ можна розглядати як реакцію ВС на складову $v_p(t) = \delta(t-\tau)$ функцію, прикладену на вході в момент τ . Якщо D – матриця зв'язку вектора входу $v(t)$ ВС з вектором виходу $Y(t)$ не дорівнює нулю, тобто $D \neq 0$, то характеристика $g(t-\tau) \in v_p(t)$ визначається виразом:

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t); \quad h(t) = C(e^{At} - E)A^{-1}B + D;$$

де $\delta(t)$ – функція короткочасного надходження на вхід ВС складової $v_p(t)$ ресурсу управління розвитком підприємства; $h(t)$ – реакція на прикладену в початковий момент часу $t = 0$ функцію $\delta(t)$.

Розглянемо простір станів ВС на сегменті $[0,1]$, який описується рівнянням відносно n -вектор-функції $x(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - A(t)x(t) + B(t)v(t) &= f(t) \\ x(0) &= \alpha, \quad x(1) = \beta; \end{aligned} \quad (17)$$

в якому $B - n \times r$ матриця управління і $r \leq n$; $v(t) = col[v_1(t), v_2(t), \dots, v_r(t)]$ – довільна кусково-неперервна вектор-функція управління, тобто $v \in \tilde{C}_r[0,1]$.

Виробнича система (17) буде керованою, якщо задача (17) розв'язувана для будь-яких кусково-неперервних n -вектор-функцій f та будь-яких сталих n -векторів α і β . Задача про управління при заданій правій частині інтерпретується так: потрібно знайти управління $v(t)$, для якого відповідний розвиток $x(t)$ ВС починався б у момент часу $t=0$ у стані α (параметри ВС) та закінчувався в момент часу $t=1$ станом β (найбільш ефективні параметри ВС). Сам процес переходу ВС $x(t)$ знаходити не обов'язково, достатньо знати, що при знайденому управлінні ВС із стану α перейде у стан β . Розглядаючи стан ВС $x(t)$, що моделюється напіводнорідною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - A(t)x(t) + B(t)v(t) &= f(t) \\ x(0) &= \alpha, \quad x(1) = \beta; \end{aligned} \quad (18)$$

управління нею вважається таким, що має реалізацію, коли ця задача має розв'язок для будь-яких кусково-неперервних вектор-функцій $f(t)$ [9, 11].

З усіх управлінь $v(t)$ ВС слід вибрати те, котре має найменшу норму:

$$\min \|v(t)\| = \sqrt{\int_0^1 v(t) \cdot v^*(t) dt}. \quad (19)$$

Управління буде оптимальним за нормою простору або в середньому.

Таким чином, згідно умові максимуму Понтрягіна [9], управління $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, вибирається для фіксованих n -векторів β стану ВС, якщо це управління є кусково-неперервною r -вектор-функцією. $x(t)$ – відповідний розв'язок задачі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - A(t)x(t) &= f(t) - B(t)v(t) \\ x(\tau) &= \beta \end{aligned}$$

Тоді управління $v = v(t)$ та простір станів $x(t)$ ВС при $t=0$, $x(0) = \alpha$ і $\beta = x(\tau)$ є оптимальними у сенсі досягнення системою свого ефективного стану за найкоротший час τ .

Висновки

Запропонована модель дає можливість оцінити імпульси на вході системи на розвиток ВС з одночасною оцінкою результативності діяльності ВС. В залежності від цілей розвитку ВС можуть використовуватися компромісні критерії, наприклад, на початкових етапах розвитку системи потрібне досягнення заданих показників в кожен період розвитку, а потім забезпечення найбільш високих вихідних показників. Методично показано, як забезпечити оптимальне управління ВС у просторі станів у сенсі досягнення системою свого найбільш ефективного стану за найкоротший час.

Список використаної літератури

1. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336 с.
2. Петров Э. Г., Подмогильный Н. В, Соколова Н. А., Ходаков В. Е. Управление устойчивым развитием предприятий : монография. Херсон: Олди-плюс, 2009. 558 с.
3. Оборский Г. А., Усов А. В., Дмитришин Д. В. Моделирование систем : монография. Одесса: Астропринт, 2013. 664 с.
4. Гончаренко Е. Н. Устойчивое развитие предприятия: методология, механизмы, модели : монография. Одесса: Атлант, 2014. 382 с.

5. Боровська Т. М. Математичні моделі функціонування і розвитку виробничих систем на базі методології оптимального агрегування : монографія. Вінниця: ВНТУ, 2018. 308 с.
6. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969. 119 с.
7. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996. 125 с.
8. Теория автоматического управления : в 2 ч. / Под редакцией А.А. Воронова. М.: Высшая школа, 1986. Ч.1. 367 с.
9. Понтрягин Л. С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Едиториал УРСС, 2004. 64 с.
10. Koba E. V., Dyshlik O. N. Estimating the overlapping probability for complex demands in queuing systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46. №3. P. 506–511. DOI: 10.1007/s10559-010-9226-x.
11. Lobel I., Ozdaglar A. Distributed Subgradient Methods for Convex Optimization Over Random Networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2011. Vol. 56. №6. P. 1291–1306. DOI:10.1109/TAC.2010.2091295.

References

1. Voronov, A. A. (1979). *Ustoychivost, upravlyaemost, nablyudaemost*. М.: Nauka.
2. Petrov, E. G., Podmogilnyiy, N. V, Sokolova, N. A., & Hodakov, V. E. (2009). *Upravlenie ustoychivym razvitiem predpriyatiy : monografiya*. Herson.
3. Oborskiy, G. A., Usov, A. V., & Dmitrishin, D. V. (2013). *Modelirovanie system : monografiya*. Odessa: Astroprint.
4. Goncharenko, E. N. (2014). *Ustoychivoє razvitie predpriyatiya: metodologiya, mehanizmyi, modeli : monografiya*. Odessa: Atlant.
5. Borovska, T. M. (2018). *Matematychni modeli funktsionuvannya i rozvytku vyrobnychykh system na bazi metodolohii optymalnoho ahrehuvannya: monohrafiya*. Vinnytsia : VNTU.
6. Bellman, R., & Kalaba, R. (1969). *Dinamicheskoe programmirovaniє i sovremennaya teoriya upravleniya*. М.: Nauka.
7. Burkov, V. N., & Novikov, D. A. (1996) *Vvedeniє v teoriyu aktivnyih sistem*. М.: IPU RAN.
8. Voronov, A. A. (Ed). (1986). *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. (Part 1). М.: Vysshaya shkola.
9. Pontryagin, L. S. (2004). *Printsip maksimuma v optimalnom upravlenii*. М.: Editorial URSS.
10. Koba, E. V., & Dyshlik, O. N. (2010). Estimating the overlapping probability for complex demands in queuing systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. **46**, 10, 506–511. DOI: 10.1007/s10559-010-9226-x.
11. Lobel, I., & Ozdaglar, A. (2011). Distributed Subgradient Methods for Convex Optimization Over Random Networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **56**, 6, 1291–1306. DOI:10.1109/TAC.2010.2091295.

Усов Анатолій Васильович – д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету, e-mail: usov_a_v@onu.ua, ORCID: 0000-0002-3965-7611.

Сікіраш Юлія Євгенівна – асистент кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету, e-mail: u.e.sikirash@onu.ua, ORCID: 0000-0003-0853-582X.

УДК 519.711+536:621.9

А.В. УСОВ, М.В. КУНИЦІН
Одеський національний політехнічний університет

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТОПОГРАФІЇ РОБОЧОЇ ПОВЕРХНІ ВИРОБІВ НА ФІНІШНИХ ОПЕРАЦІЯХ

В роботі пропонується удосконалити модель динаміки шліфування, в рамках якої кожне абразивне зерно розглядається як окрема різуча кромка з випадковими характеристиками форми та розташування на поверхні шліфувального круга. Точність форми поверхні, одержуваної при шліфуванні, залежить від жорсткості кріплення інструменту й деталі, а також режимів обробки, через те, що у динамічній системі при різанні неминуче виникають вібрації, що вимагає додаткового дослідження. Для цього розроблено удосконалену стохастичну модель, яка дозволяє досліджувати динаміку процесу шліфування та формування топографії оброблюваної поверхні виробів. У моделі процес обробки зображується як мікрорізання абразивними зернами, що випадковим чином розподілені по поверхні шліфувального круга. Геометричні параметри зерен також мають випадковий характер. У результаті моделювання отримані текстури поверхні після обробки, розподіл сил різання, динамічних відхилень інструменту. Побудовано їх спектральні характеристики, що дозволили оцінити вплив режимів обробки й параметрів технологічної системи на характер вібрацій. Показано, що в системі збуджуються вібрації як на частотах зовнішнього збудження (частота проходження зерен), так і на частотах власних коливань пружної динамічної системи, характерних для регенеративного джерела збудження. Встановлено, що при малій жорсткості технологічної системи збуджуються автоколивання типу «chatter» з великою амплітудою за рахунок механізму регенеративного збудження від зерна до зерна на частотах кратних власним частотам коливань, що призводять до втрати якості обробки і посилення зносу інструменту. Перевірка адекватності побудованої моделі проводилась порівнянням результатів моделювання з результатами експериментів. Для цього розглядалася обробка плоскої поверхні матеріалу деталі зі зносостійким покриттям шліфувальним кругом. Вигляд поверхні після проходження інструменту, одержаний за допомогою удосконаленої моделі, а також остаточний мікрорельєф поверхні після шліфування свідчать про ефективність побудованої моделі та її здатність для забезпечення необхідної топографії оброблених поверхонь виробів.

Ключові слова: стохастична модель, шліфування, топографія поверхні, динамічна система.

А.В. УСОВ, М.В. КУНИЦІН
Одесский национальный политехнический университет

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОГРАФИИ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ИЗДЕЛИЙ НА ФИНИШНЫХ ОПЕРАЦИЯХ

В работе предлагается усовершенствовать модель динамики шлифовки, в рамках которой каждое абразивное зерно рассматривается как отдельная режущая кромка со случайными характеристиками формы и расположения на поверхности шлифовального круга. Точность формы поверхности, получаемой при шлифовке, зависит от жесткости крепления инструмента и детали, а также режимов обработки, из-за того, что в динамической системе при резке неизбежно возникают вибрации, что требует дополнительного исследования. Для этого разработана

10.32782/2618-0340/2020.1-3.23

усовершенствованная стохастической модель, позволяющая исследовать динамику процесса шлифования и формирования топографии обрабатываемой поверхности изделий. В модели процесс обработки изображается как микрорезания абразивными зернами, которые случайным образом распределены по поверхности шлифовального круга. Геометрические параметры зерен также имеют случайный характер. В результате моделирования получены текстуры поверхности после обработки, распределение сил резания, динамических отклонений инструмента. Построены их спектральные характеристики, позволившие оценить влияние режимов обработки и параметров технологической системы на характер вибраций. Показано, что в системе возбуждаются вибрации как на частотах внешнего возбуждения (частота следования зерен), так и на частотах собственных колебаний упругой динамической системы, характерных для регенеративного источника возбуждения. Установлено, что при малой жесткости технологической системы возбуждаются автоколебания типа «chatter» с большой амплитудой за счет механизма регенеративного возбуждения от зерна к зерну на частотах кратных собственным частотам колебаний, приводящих к потере качества обработки и усилению износа инструмента. Проверка адекватности построенной модели проводилась сравнением результатов моделирования с результатами экспериментов. Для этого рассматривалась обработка плоской поверхности материала детали с износостойким покрытием шлифовальным кругом. Вид поверхности после прохождения инструмента, полученный с помощью усовершенствованной модели, а также окончательный микрорельеф поверхности после шлифовки свидетельствуют об эффективности построенной модели и ее способность для обеспечения необходимой топографии обрабатываемых поверхностей изделий.

Ключевые слова: стохастическая модель, шлифование, топография поверхности, динамическая система.

A.V. USOV, M.V. KUNITSYN
Odessa National Polytechnic University

STOCHASTIC MODELING OF THE TOPOGRAPHY OF THE WORKING SURFACE OF PRODUCTS AT FINISHING OPERATIONS

It is proposed to improve the grinding dynamics model, in which each abrasive grain is considered a distinct cutting edge with random characteristics of shape and location on the grinding wheel's surface. Because vibrations inevitably occur in the dynamic system during cutting, which requires additional research. In the model, the machining process is depicted as micro-cutting with abrasive grains that are randomly distributed on the grinding wheel's surface. The geometric parameters of the grains are also random. Because of modeling surface textures after processing, distribution of cutting forces, dynamic deviations of the tool are received. Their spectral characteristics are constructed, which allows the estimation of the influence of processing modes and parameters of the technological system on vibrations. It is shown that vibrations are excited in the system both at the frequencies of external excitation (grain frequency) and at the natural frequencies of the elastic dynamic system characteristic of a regenerative excitation source. It is established that at low rigidity of technological system self-oscillations of chatter type with big amplitude are broken because of the mechanism of regenerative excitation from grain to grain at frequencies multiple of natural frequencies of oscillations leading to loss of quality of processing of working surfaces of products and strengthening of tool wear. The adequacy of the constructed model was checked by comparing the simulation results with the experimental results. For this purpose, the treatment of the flat surface of the material of the part with a wear-resistant coating with

10.32782/2618-0340/2020.1-3.23

a grinding wheel was considered. The appearance of the surface after passing the tool was obtained using an improved model. The final microrelief of the surface after grinding shows the effectiveness of the constructed model and its ability to provide the topography of the treated surfaces of products.

Keywords: stochastic model, grinding, surface topography, dynamic system.

Постановка проблеми

У сучасних технологічних процесах механічної обробки, шліфування широко використовується як фінішна операція, що забезпечує високу точність і якість обробленої поверхні деталі. Особливістю процесу шліфування є видалення матеріалу великим числом зерен при високому тиску і температурі [1]. На відміну від точіння і фрезерування, ріжучі кромки зерен шліфувального круга мають стохастичну геометрію і випадковим чином розподілені по поверхневому шару інструменту [2]. Ця особливість створює труднощі аналізу процесу шліфування, і може бути перешкодою для прогнозування необхідної топографії оброблюваної поверхні [3].

Точність форми поверхні, одержуваної при шліфуванні, залежить від жорсткості кріплення інструменту й деталі, а також режимів обробки, через те, що у динамічній системі при різанні неминуче виникають вібрації, що вимагає додаткового дослідження [4]. На даний час відсутні повномасштабні дослідження з моделювання процесу шліфування функціонально-градієнтних матеріалів, робочі поверхні виробів з яких визначають експлуатаційні характеристики вузлів механізмів [5].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Стохастичні геометричні характеристики зерен та їх випадковий характер розподілу у поверхневому шарі інструменту створюють труднощі аналізу процесу шліфування для забезпечення необхідної шорсткості робочої поверхні деталей зі зносостійкими покриттями [4]. Огляд літературних джерел [5–8] показує, що більшість робіт присвячена дослідженню процесу обробки шліфуванням поверхонь з простої геометричної форми на основі моделі з одним ступенем свободи. В роботі пропонується удосконалити модель динаміки шліфування, в рамках якої кожне абразивне зерно розглядається як окрема ріжуча кромка з випадковими характеристиками форми та розташування на поверхні шліфувального круга.

Мета дослідження

Розробка стохастичної моделі динаміки процесу шліфування інструментом з абразивними зернами випадковим чином розподіленими по поверхні шліфувального круга для прогнозування топографії оброблюваних робочих поверхонь виробів.

Викладення основного матеріалу дослідження

Для моделювання процесу шліфування з урахуванням податливості деталі, та податливості інструменту припускаємо, що шліфувальний круг рухається в площині як тверде тіло на пружних опорах із заданою жорсткістю й демпфуванням, як показано на рис. 1.

Абразивні зерна рівномірно розподіляються по доріжках на ріжучій поверхні інструмента, таким чином, що центральний кут між осями сусідніх зерен є однаковим. Такий характер розподілу дає можливість при моделюванні описувати їх рух системою диференціальних рівнянь із постійним запізненням по куту повороту $\Delta\varphi$ за час T/N (час проходження одного зерна), при цьому для координат поверхні інструмента час запізнення є змінним.

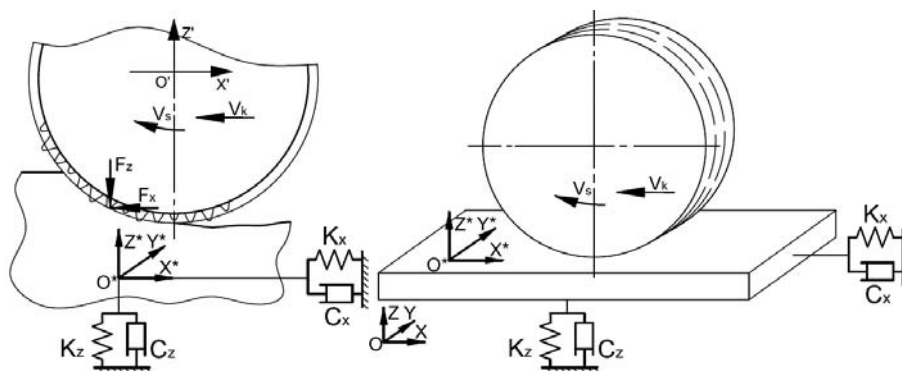


Рис. 1. Динамічна схема моделювання обробки поверхні при шліфуванні з урахуванням податливості деталі.

Усі зерна мають випадкові геометричні характеристики (висота зерен h_0 , конусний кут зерен θ , кут у вершині зерен α , щодо радіального напрямку в площині перпендикулярній доріжці). Вершини зерен округлені радіусом 10 мкм. Для шліфувального інструменту зазвичай задаються номінальні геометричні параметри щільності розподілу й розмірів зерен, які можуть бути використані при моделюванні. Розподіл обсягів зерен, зазвичай [7–9], має випадковий характер і може бути заданий за нормальним законом, який використовується при стохастичних підходах у процесі моделювання сил різання [5].

Функцію розподілу можна записати через інтеграл Лапласа наступним чином [10]:

$$\Phi(h_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(h_0 - \acute{h}_0)^2}{2\sigma^2}\right) dx, \quad (1)$$

де h_0 – математичне очікування висоти зерна, $\sigma = (h_{0,max} - h_{0,min})/6$ – середньоквадратичне відхилення розподілу.

Конусний кут зерна θ по суті є переднім кутом ріжучого клина γ з протилежним знаком. Будемо вважати, що передній кут має сильно асиметричний розподіл із максимальною ймовірністю близькою до кута -30° , який добре описується за допомогою розподілу Релея [11]. Деякі дослідники для цих випадків також використовують розподіл Стьюдента [12] або Вейбулла [13]. Будемо використовувати для конусного кута ріжучої кромки зерен розподіл Релея, для якого функція розподілу має вигляд:

$$\Phi(\theta) = 1 - \exp\left(\frac{-\theta^2}{2\sigma^2}\right) (\theta \geq 0). \quad (2)$$

При $\theta = \sigma$, щільність ймовірності має максимальне значення.

Припускаємо, що кут вершини зерна α розподіляється по закону, що описується функцією нормального випадкового розподілу і має вигляд:

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma^2}\right) dx, \quad (3)$$

де $\alpha = 0$ – математичне очікування кута ризику, $\sigma = (\alpha_{max} - \alpha_{min})/6$ – середньоквадратичне відхилення розподілу.

Функція розподілу має вигляд:

$$\Phi(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta < -\frac{\pi}{N}; \\ \frac{\delta + \pi/N}{2\pi/N}, & -\frac{\pi}{N} \leq \delta \leq \frac{\pi}{N}; \\ 1, & \delta > \frac{\pi}{N}; \end{cases} \quad (4)$$

де $\delta_{max} = \pi/N$ – максимальне кутове зміщення доріжки; $\delta_{min} = -\pi/N$ – мінімальне кутовий зсув доріжки; $\sigma^2 = (2\pi/N)^2/12$ – дисперсія.

Систему рівнянь (5), що описують формування нових поверхонь запишемо у вигляді [11, 14]:

$$D_j(t) = \begin{cases} \left[L_j |_{t-T/N} + V_w \cdot \frac{T}{N} \cdot \sin(\varphi_j(t)) - \Delta x \cdot \sin(\varphi_j(t)) - \right. \\ \left. - \Delta z \cdot \cos(\varphi_j(t)) - (h_{0,j-1} - h_{0,j}) \right] \cdot g(\varphi_j(t)) \\ h_{cu,j}(t) = \max(0, D_j(t)) \\ \Pi(t) = \text{Trend}[\Pi_j |_{t-T/n} - h_{cu,j}(t)] \\ L_j |_0 = 0 \\ g(\varphi_j(t)) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq \varphi_j(t) \leq \varphi_{ex} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

де T/N — період проходження зерна; $L_j |_{t-T/N}$ – полярне відхилення від поверхні заготовки в момент часу $t - T/N$ для j -ого зерна тільки внаслідок повороту; $\Pi(t)$ – координати поверхні, записані в інформаційному банку даних в ПЗ «Matlab»; $\Delta x, \Delta z$ – проекції динамічного зсуву на осі X, Z ; $D_j(t)$ – відстань від j -ої різальної крайки до необробленої поверхні, яка складається зі статичної частини $L_j |_{t-T/N} + V_w \cdot \frac{T}{N} \cdot \sin(\varphi_j(t))$ і динамічної частини $\Delta x \cdot \sin\varphi_j + \Delta z \cdot \cos\varphi_j$, і величини радіальної різниці висоти суміжних зерен $h_{0,j-1} - h_{0,j}$; $h_{0,j}$ – висота j -ого зерна, $h_{0,j-1}$ – висота $(j-1)$ -ого зерна; $h_{cu,j}(t)$ – товщина шару, що зрізається j -им зерном в момент часу t , $\max(0, D_j(t))$ – функція, яка дорівнює максимальному з 0 і $D_j(t)$, тобто товщина різання не може бути від’ємною; $\Pi_j |_{t-T/n}$ – положення точки перетину між віссю j -ого зерна в момент часу t і поверхнею заготовки в момент часу $t - T/N$ в полярній системі координат; Trend – функція, що інтерполює значення по точкам, заданим в масиві; $g(\varphi_j(t))$ – функція, яка визначає, чи знаходиться j -е зерно в зоні контакту; φ_{ex} – кут виходу зерна з занурення в матеріал.

Для моделювання процесу шліфування з урахуванням піддатливості деталі, щоб аналізувати геометрію зрізаного шару форму обробленої поверхні, розглянемо схему врізання сусідніх зерен у матеріал заготовки (рис. 2), а показані положення поточного

зерна в даний момент часу t і в попередній момент $(t - T/N)$ до його зміщення за рахунок руху подачі й повороту на одне зерно.

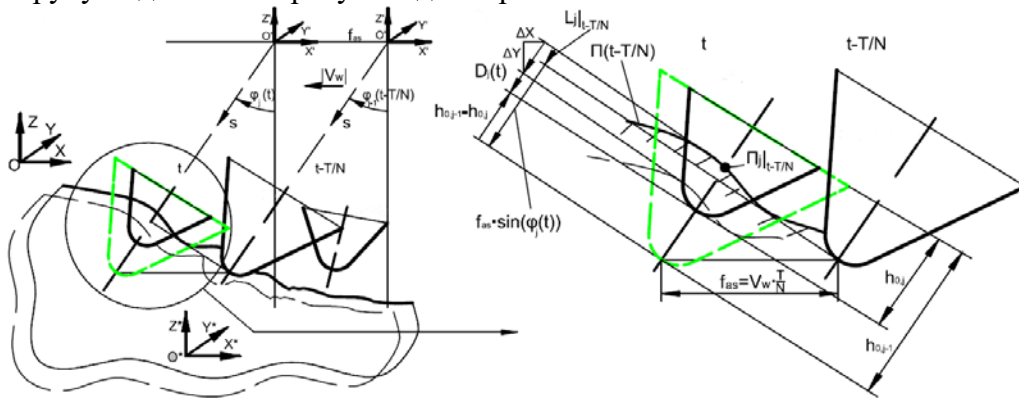


Рис. 2. (а) Система координат і положення $(j-1)$ -ого і j -ого зерен при різанні; (б) геометричний аналіз товщини зрізаного шару j -ого зерна.

Припускаємо, що, при $t = 0$, перше зерно знаходиться в зоні контакту, його номер $j = 1$. Будемо нумерувати всі зерна, пересуваючись проти годинникової стрілки. Тобто в момент часу $t = k \cdot T/N$ нумерація зерен буде відповідати тому, як показано на рис. 3.

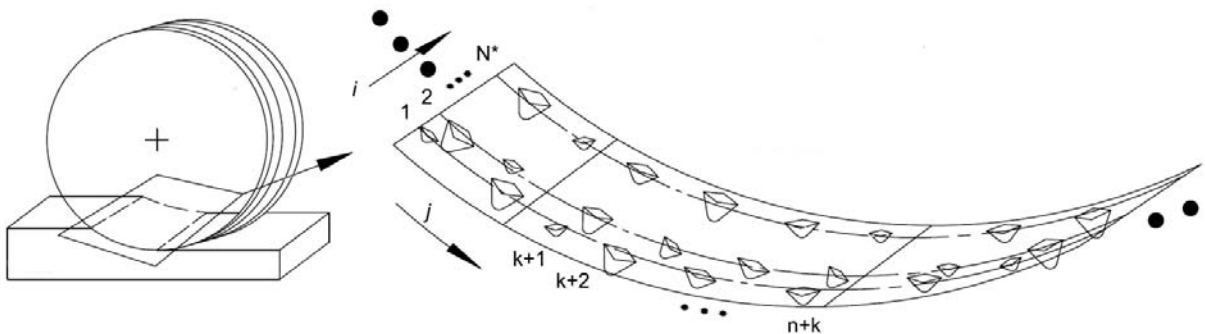


Рис. 3. Схема нумерації зерен на крузі в момент часу $t = k \cdot T/N$.

Регенерація поверхні зони обробки. Після визначення координат профілю $\Pi_i(t)$ по всіх доріжках від 1-ої до N'' -ої, інтерполюємо N'' криві з відхиленням доріжки в просторі, після цього формується поверхня заготовки (рис. 4).

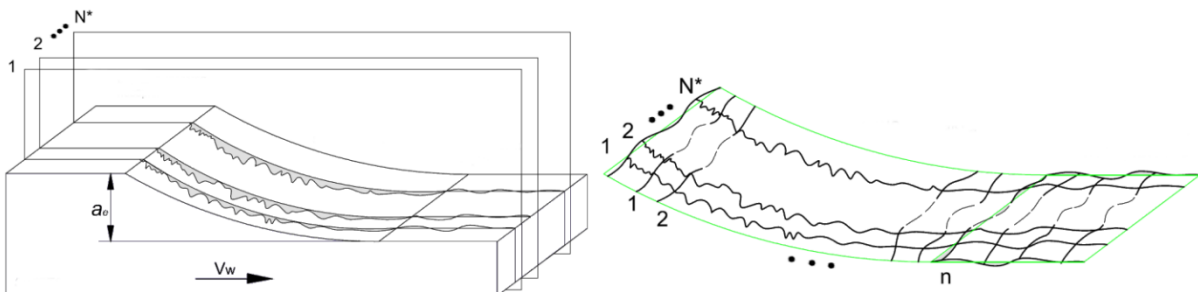


Рис. 4. Схема формування поверхні при шліфуванні множинних доріжок.

Перетворимо складові сил різання для окремого зерна $F_{t,ij}, F_{n,ij}$, що діють на i -ій доріжці, до системи координат $OXYZ$, до сил $F_{x,ij}$ і $F_{z,ij}$ (проекції сил різання на осі X, Z), використовуючи наступні співвідношення:

$$\begin{cases} F_{x,ij} = F_{t,ij} \cdot \cos\varphi_{ij} + F_{n,ij} \cdot \sin\varphi_{ij} \\ F_{z,ij} = -F_{t,ij} \cdot \sin\varphi_{ij} + F_{n,ij} \cdot \cos\varphi_{ij} \end{cases}, \quad (6)$$

Підсумовуючи сили різання, що діють на зерна в зоні контакту круга й заготовки, отримуємо сили, що діють на шліфувальний круг:

$$\begin{cases} F_x = \sum_{i=1}^{N''} \sum_{j=1}^n F_{x,ij} \\ F_z = \sum_{i=1}^{N''} \sum_{j=1}^n F_{z,ij} \end{cases}, \quad (7)$$

де n – кількість зерен у зоні контакту на одній доріжці ($n = 49$), N'' – кількість доріжок ($N'' = 50$).

Диференціальні рівняння, що описують рух системи при обробці, для випадку коли піддатливість системи в основному визначається внаслідок піддатливості інструменту, а деталь вважається абсолютно жорсткою, мають вигляд (8):

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} + C_x \cdot \dot{x} + K_x \cdot x = F_x \\ m \cdot \ddot{z} + C_z \cdot \dot{z} + K_z \cdot z = F_z \end{cases}, \quad (8)$$

і, навпаки, коли піддатливість системи в основному визначається внаслідок піддатливості деталі, а інструмент вважається абсолютно жорстким, мають вигляд (9) [9]:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} + C_x \cdot \dot{x} + K_x \cdot x = -F_x \\ m \cdot \ddot{z} + C_z \cdot \dot{z} + K_z \cdot z = -F_z \end{cases}, \quad (9)$$

де m – маса інструменту – деталі, C_x, C_z – коефіцієнти демпфування кріплення інструменту – деталі в напрямку осей X, Z . K_x, K_z – наведені жорсткості кріплення інструменту – деталі в напрямку осей X, Z .

На Рис. 5 представлені текстури поверхні заготовки при моделюванні з урахуванням вібрації. Текстури обробленої поверхні заготовки будемо порівнювати з результатами без урахування вібрації.

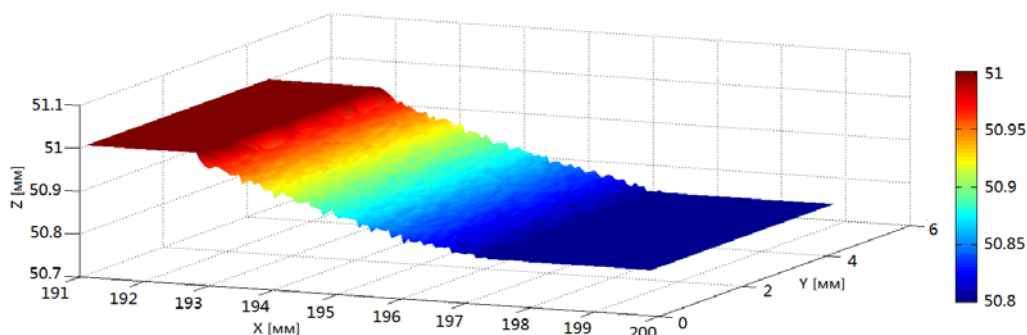


Рис. 5. Тривимірні текстури поверхні заготовки при моделюванні з урахуванням вібрації в момент часу $t = 100 \cdot T/N$.

Характеристики інструменту ПП 210x32x76 25А 40П СТ1 5 К5 Б. $V_{кр} = 35$ м/с, $t_{шл} = 0,01$ мм, Матеріал заготовки ст. 40Х, зносостійке покриття Ni/Ni-TiO₂. Розміри зразка 70x40x4. Коефіцієнти K_x, K_z, C_x, C_z вибиралися із [7–8].

Сили шліфування істотно змінюються внаслідок впливу динаміки з урахуванням вібрації. Зміна сил різання відбувається через переривчастість врізання окремих зерен, що рухаються по нерівній поверхні контакту інструменту й заготовки, а також додаткових зсувів внаслідок вібрацій інструменту (рис 6).

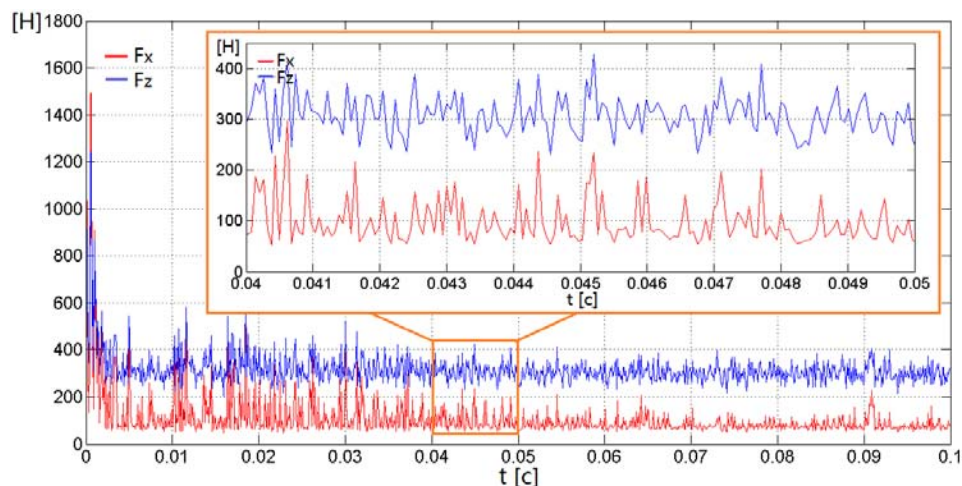


Рис. 6. Залежність сил шліфування F_x, F_z від часу t з урахуванням вібрації.

Порівнюючи зображення зони обробленої поверхні, показаної на рис. 7, можна виділити текстуру обробленої поверхні заготовки при моделюванні без і з урахуванням вібрації в момент часу $t = 100 \cdot T/N$ для різних варіантів випадковим чином обраних параметрів розташування зерен. Це дає можливість встановити, що середнє значення координати (Z) обробленої поверхні з урахуванням вібрації вище, ніж без урахування. Це пояснюється впливом пружного віджимання інструменту при пружному закріпленні з урахуванням вібрацій.

За результатами моделювання топографічної картини поверхні, видно, що присутні піки і впадини різної величини. На підставі обробки поверхні, що моделюється у даній роботі, наведені такі параметри для оцінки хвилястості поверхні:

- Mean — середнє значення координати (Z) поверхні, яке визначає середню лінію профілю.
- Max, Min — максимальне й мінімальне значення координати (Z) поверхні.
- R_a — середнє арифметичне відхилення профілю, яке визначається як середнє арифметичне абсолютних значень відхилень профілю z в межах базової довжини l :

$$R_a = \frac{1}{l} \int_0^l |z(x)| dx, \quad (10)$$

де z_i — відхилення профілю, що являє собою відстань між будь-якою точкою профілю й середньою лінією, що виміряна по нормалі, яка проведена до середньої лінії через цю точку.

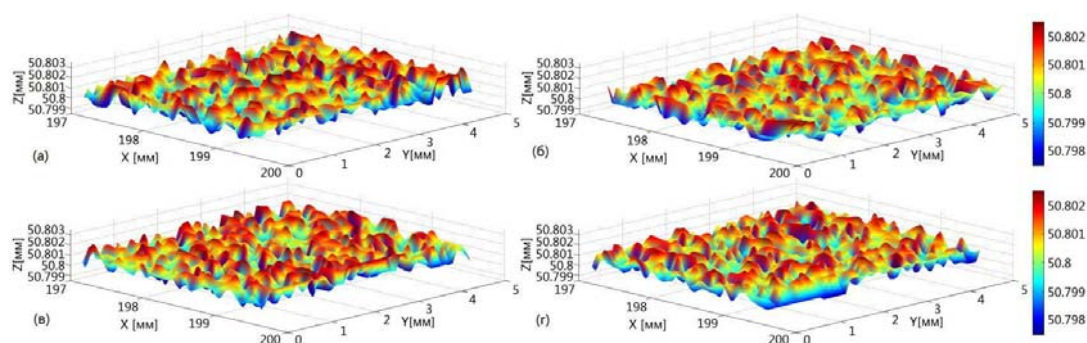


Рис. 7. Текстури обробленої поверхні заготовки при моделюванні з урахуванням вібрації в момент часу $t = 100 \cdot T/N$.

Параметр R_a характеризує висоту нерівностей профілю. Не менш важливою характеристикою нерівностей профілю є їх крок. S – середній крок нерівностей профілю по вершинах (між вершинами характерних нерівностей) у межах базової довжини.

Методика і приклади оцінки хвилястості поверхні після обробки різанням представлена в [15–16].

З наведених результатів видно, що для випадку K_x з великими значеннями жорсткості ($K_x > 45 \text{ кН/мм}$) коливання системи загасають, поведінка стабільна. А для випадків K_x з меншими значеннями спостерігаються коливання з великою амплітудою, величина яких перевищує розмір зерен, що говорить про непрацездатність таких режимів. Між ними існують такі режими, для яких на початковій ділянці відбувається зростання амплітуд коливань, але система стійка й після короткого перехідного процесу вона виходить на усталений режим, такий режим можна вважати задовільним.

Порівнюючи власні частоти з піками спектрів, можна спостерігати, що в перехідних режимах, присутня тенденція появи окремих піків, які збігаються чи мають кратні значення власних частот. А в нестійких режимах є яскраво виражені піки на значеннях частот, що кратні власним частотам системи. Аналізуючи тимчасові характеристики розв'язку за допомогою методу детектування «chatter», описаного в роботах [17–20], можна зафіксувати появу «chatter» при моделюванні. Такий характер поведінки особливо характерний для випадку при $K_x/K_z = 4$, $K_x = 30 \text{ кН/мм}$ (у цьому випадку $f_{nx} = 2 \cdot f_{nz}$), для якого частота найвищого піку кратна 3 до власної частоти f_{nx} . У цьому випадку частота «chatter» стає домінуючою, система стає нестійкою при домінуючій частоті «chatter» [15, 21].

При невеликих амплітудах зміщення шліфування можна розглядати як процес фрезерування з ріжучими крайками у великій кількості. А для випадків, коли амплітуда безрозмірних переміщень більша за одиницю, модель шліфування необхідно розглядати з урахуванням геометричного обмеження висоти зерен і контакту сполучного з матеріалом заготовки.

Для порівняння результатів моделювання з результатами експериментів розглядалася обробка плоскої поверхні матеріалу деталі зі зносостійким покриттям Ni/Ni-TiO₂ шліфувальним кругом ПП 210x32x76 25А 40П СТ1 5 К5 Б. На рис.8 представлений вигляд поверхні після проходження інструменту, одержаний за допомогою удосконаленої моделі (а), а також остаточний мікрорельєф поверхні (б) після шліфування.

Висновки

Розроблено удосконалену стохастичну модель, яка дозволяє досліджувати динаміку процесу шліфування та формування топографії оброблюваної поверхні виробів. У моделі процес обробки зображується як мікрорізання абразивними зернами, що випадковим чином розподілені по поверхні шліфувального круга. Геометричні параметри зерен також мають випадковий характер.

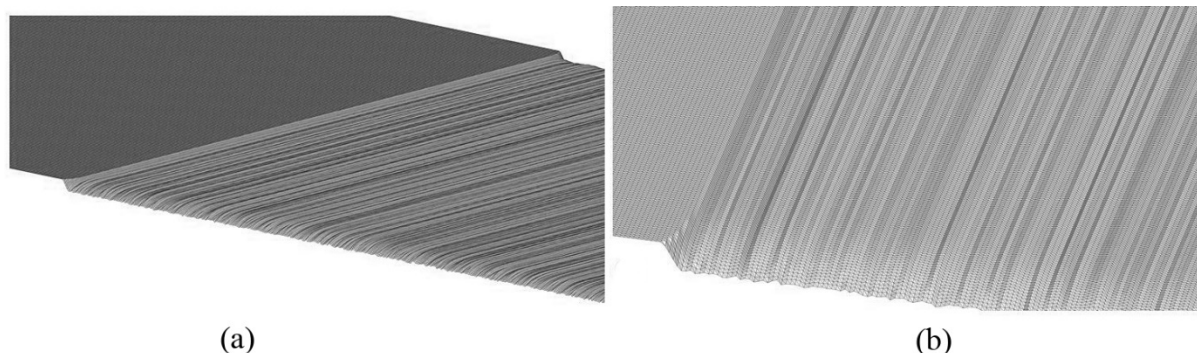


Рис. 8. Вигляд поверхні після проходження інструменту, одержаний за допомогою удосконаленої моделі (а), а також остаточний мікрорельєф поверхні (б) після шліфування.

У результаті моделювання отримані текстури поверхні після обробки, розподіл сил різання, динамічних відхилень інструменту. Побудовано їх спектральні характеристики, які дозволяють оцінити вплив режимів обробки й параметрів технологічної системи на характер вібрацій. Показано, що в системі збуджуються вібрації як на частотах зовнішнього збудження (частота проходження зерен), так і на частотах власних коливань пружної динамічної системи, характерних для регенеративного джерела збудження. Встановлено, що при малій жорсткості технологічної системи збуджуються автоколивання типу « chatter » з великою амплітудою за рахунок механізму регенеративного збудження від зерна до зерна на частотах кратних власним частотам коливань, що призводять до втрати якості обробки і посилення зносу інструменту.

Список використаної літератури

1. Воронов С. А., Ма Вэйдун. Влияние геометрии абразивного зерна на силы резания при шлифовании. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение»*. 2017. № 5. С. 52–63.
2. Komanduri R. Machining and Grinding: A Historical Review of the Classical Papers. *Applied Mechanics Reviews*. 1993. Vol. 46. № 3. P. 80–132. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3121404>
3. Malkin S., Guo C. Grinding Technology: Theory and Applications of Machining with Abrasives. New York: Industrial Press Publ, 2008. 372 p.
4. Zhen B. H., Ranga K. On the Mechanics of the Grinding Process – Part I. Stochastic Nature of the Grinding Process. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*. 2003. Vol. 43. P. 1579–1593.
5. Маслов Е. Н. Теория шлифования материалов. М. : Машиностроение, 1974. 318 с.
6. Кашеев В. Н. Абразивное разрушение твердых тел. М.: Наука, 1970. 245 с.
7. Грабченко А. И., Доброскок В. Л., Федорович В. А. 3D моделирование алмазно-абразивных инструментов и процессов шлифования. Харьков : НТУ «ХПИ», 2006. 362 с.

8. Грабченко А. И., Федорович В. А. 3D процессы алмазно-абразивной обработки. Харьков : НТУ «ХПИ», 2008. 349 с.
9. Оборский Г. А., Дашенко А. Ф., Усов А. В., Дмитришин Д. В. Моделирование систем : монография. Одесса : Астропринт, 2013. 664 с.
10. Stephen H. C., William D. M. Random Vibration in Mechanical Systems. New York: Academic Press, 2014. 176 p.
11. Hecker R., Liang S. Y. Predictive Modeling of Surface Roughness in Grinding. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*. 2003. Vol. 43. P. 755–761.
12. Stepien P. A Probabilistic Model of the Grinding Process. *Applied Mathematical Modelling*. 2009. Vol. 33. № 10. P. 3863–3884.
13. Holtermann R., Schumann S., Menzel A. Modelling Simulation and Experimental Investigation of Chip Formation in Internal Traverse Grinding. *Production Engineering Research and Development*. 2013. Vol. 7. P. 251–263.
14. Ioan D. M., Brian R. W., Dimitrov B. Tribology of Abrasive Machining Processes. Norwich, NY : William Andrew Inc, 2012. 600 p.
15. Hao Nan Li, Tian Biao Yu, Li Da Zhu. Analytical Modeling of ground Surface Topography in Monocrystalline Silicon Considering the Ductile-Regime Effect. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2017. Vol. 17, № 4. P. 880–893.
16. Young P. L., Brackbill T. P., Kandlikar S. G. Estimating Roughness Parameters Resulting From Various Machining Techniques for Fluid Flow Applications. Proceedings of the *Nanochannels, Microchannels and Minichannels: Fifth International Conference* (Mexico, Puebla, June 18-20, 2007), Puebla: ASME, 2007, pp. 827–836.
17. Altintas Y. Manufacturing Automation: Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations, and CNC Design. Cambridge : Cambridge University Press, 2000. 286 p.
18. Altintas Y., Stepan G., Merdol D., Dombovari Z. Chatter Stability of Milling in Frequency and Discrete Time Domain. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*. 2008. Vol. 1, P. 35–44.
19. Rivière E., Stalon V., Van den Abeele O., Filippi E., Dehombreux P. Chatter Detection Techniques Using Microphone. Proceedings of the *Theoretical and Applied Mechanics: 56-th National Congress on* (Tokio, March, 7-9, 2007). Tokio, 2006. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.612.4595&rep=rep1&type=pdf>
20. Brecher C., Esser M., Witt S. Interaction of Manufacturing Process and Machine Tool. *CIRP Annals – Manufacturing Technology*. 2009. Vol. 58. P. 588–607.
21. Zhenyu Han, Hongyu Jin, Maoyue Li, Hongya Fu. An Open Modular Architecture Controller Based Online Chatter Suppression System for CNC Milling. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Vol. 2015. 13 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2015/985837>.

References

1. Voronov, S. A., & Ma, Veydun. (2017). Vliyaniye geometrii abrazivnogo zerna na sily rezaniya pri shlifovanii. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya «Mashinostroyeniye»*. 5, 52–63.
2. Komanduri, R. (1993). Machining and Grinding: A Historical Review of the Classical Papers. *Applied Mechanics Reviews*. 46, 3, 80–132. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3121404>
3. Malkin, S., & Guo, C. (2008). Grinding Technology: Theory and Applications of Machining with Abrasives. New York : Industrial Press Publ.

4. Zhen, B. H., & Ranga, K. (2003). On the mechanics of the grinding process – Part I. Stochastic nature of the grinding process. *International journal of machine tools & manufacture*. **43**, 1579–1593.
5. Maslov, Ye. N. (1974). *Teoriya shlifovaniya materialov*. M. : Mashinostroyeniye.
6. Kashcheyev, V. N. (1970). *Abrazivnoye razrusheniye tverdykh tel*. M. : Nauka.
7. Grabchenko, A. I., Dobroskok, V. L., & Fedorovich, V. A. (2006). 3D modelirovaniye almazno-abrazivnykh instrumentov i protsessov shlifovaniya. Khar'kov : NTU «KHPI».
8. Grabchenko, A. I., & Fedorovich, V. A. (2008). 3D protsessy almazno-abrazivnoy obrabotki. Khar'kov : NTU «KHPI».
9. Oborskiy, G. A., Dashchenko, A. F., Usov, A. V., & Dmitrishin, D. V. (2013). *Modelirovaniye sistem : monografiya*. Odessa : Astroprint.
10. Stephen, H. C., & William, D. M. (2014). *Random Vibration in Mechanical Systems*. New York : Academic Press.
11. Hecker, R., & Liang, S. Y. (2003). Predictive modeling of surface roughness in grinding. *International journal of machine tools & manufacture*. **43**, 755–761.
12. Stepien, P. A. (2009). Probabilistic model of the grinding process. *Applied Mathematical Modelling*. **33**, 10, 3863–3884.
13. Holtermann, R., Schumann, S., & Menzel, A. (2013). Modelling simulation and experimental investigation of chip formation in internal traverse grinding. *Production Engineering Research and Development*. **7**, 251–263.
14. Ioan, D. M., Brian, R. W., & Dimitrov, B. (2012). *Tribology of abrasive machining processes*. Norwich, NY : William Andrew Inc.
15. Hao Nan, Li, Tian Biao, Yu, & Li Da, Zhu. (2017). Analytical modeling of ground surface topography in monocrystalline silicon considering the ductile-regime effect. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. **17**, 4, 880–893.
16. Young P. L., Brackbill T. P., & Kandlikar S. G. (2007). Estimating Roughness Parameters Resulting From Various Machining Techniques for Fluid Flow Applications. *Proceedings of the Nanochannels, Microchannels and Minichannels: Fifth International Conference* (Mexico, Puebla, June 18-20, 2007), Puebla: ASME, pp. 827–836.
17. Altintas Y. (2000). *Manufacturing Automation: Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations, and CNC Design*. Cambridge : Cambridge University Press.
18. Altintas Y., Stepan G., Merdol D., & Dombovari Z. (2008). Chatter Stability of Milling in Frequency and Discrete Time Domain. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*. **1**, 35–44.
19. Rivière E., Stalon V., Van den Abeele O., Filippi E., & Dehombreux P. (2006). Chatter Detection Techniques Using Microphone. *Proceedings of the Theoretical and Applied Mechanics: 56-th National Congress on* (Tokio, March, 7-9, 2007). Tokio. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.612.4595&rep=rep1&type=pdf>
20. Brecher C., Esser M., & Witt S. (2009). Interaction of Manufacturing Process and Machine Tool. *CIRP Annals – Manufacturing Technology*. **58**, 588–607.
21. Zhenyu Han, Hongyu Jin, Maoyue Li, & Hongya Fu. (2015). An Open Modular Architecture Controller Based Online Chatter Suppression System for CNC Milling. *Mathematical Problems in Engineering*. **2015**, 13 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2015/985837>.

Усов Анатолій Васильович – д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету, e-mail: usov_a_v@opu.ua, ORCID: 0000-0002-3965-7611.

Куніцин Максим Володимирович – старший викладач кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету, e-mail: m.v.kunitsyn@opu.ua ORCID: 0000-0003-1764-8922

УДК [519.711+519.876] (075)

А.В. УСОВ

Одесский национальный политехнический университет

Н.В. СЛОБОДЯНЮК

Национальный университет «Одесская морская академия»

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИЛОВЫМИ АГРЕГАТАМИ СУДОВОГО КОМПЛЕКСА НА НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ

Исследования основных динамических характеристик энергетических комплексов судовых систем в установившемся режиме при действии возмущающей силы являются актуальными. Особенно это подтверждается созданием управляющих систем для судовых силовых установок.

В статье авторами разработана математическая модель динамики судового комплекса с учетом переходных процессов и найден контроль, обеспечивающий его движение с максимальной средней скоростью и минимальным расходом топлива на единицу пути. Рассмотрены дифференциальные уравнения движения комплекса корабля в безразмерном виде в нестационарных условиях. Для оптимального управления этим объектом был разработан критерий оптимальности, который связан функциональными связями с характеристиками судового комплекса и с которым достигается оптимум. Задачи оптимального управления были поставлены и решены, чтобы найти управление, обеспечивающее движение судового комплекса с максимальной средней скоростью с дифференциальными связями и граничными условиями, и управление, обеспечивающее минимальный средний расход топлива на единицу пути судового комплекса. при заданной средней скорости его движения. Установлено, что значения основных характеристик силовых установок судового комплекса существенно зависят от всех параметров системы, поэтому для моделирования вводятся аппроксимирующие функции этих характеристик. Поскольку полученный закон управления действителен для любых возмущающих функций, система автоматического управления с характеристикой регулятора скорости в ведущем звене поддерживает режим, близкий к оптимальному, под действием произвольных возмущающих сил, в том числе неперiodических.

Исследования, проведенные для судовых комплексов, показали, что величина прироста скорости судна в нестационарных условиях изменения параметров достигает 8%. Степень контроля зависит от всех параметров, характеризующих корабельный комплекс и состояние моря. Полученные соотношения при моделировании и оптимальном управлении энергоблоками судовых комплексов позволили проанализировать расход топлива на единицу пути с оптимальным управлением методом динамического программирования по сравнению с соответствующим постоянным управлением.

Ключевые слова: математическая модель, оптимальное управление, метод усреднения, переходной процесс, судовой комплекс.

А.В. УСОВ

Одеський національний політехнічний університет

М.В. СЛОБОДЯНЮК

Національний університет «Одеська морська академія»

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ СИЛОВИМИ АГРЕГАТАМИ СУДОВОГО КОМПЛЕКСУ НА НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМАХ

10.32782/2618-0340/2020.1-3.24

Дослідження основних динамічних характеристик енергетичних комплексів суднових систем в усталеному режимі при дії вимушених коливань є актуальними. Особливо це підтверджується створенням керуючих систем для суднових силових установок.

У статті авторами розроблена математична модель динаміки суднового комплексу з урахуванням перехідних процесів і знайдений контроль, що забезпечує його рух з максимальною середньою швидкістю і мінімальною витратою палива на одиницю шляху. Розглянуто диференціальні рівняння руху комплексу корабля в безрозмірному вигляді в нестационарних умовах. Для оптимального управління цим об'єктом був розроблений критерій оптимальності, який пов'язаний функціональними зв'язками зі характеристиками суднового комплексу і з яким досягається оптимум. Завдання оптимального управління були поставлені і вирішені, щоб знайти управління, яке забезпечує рух судового комплексу з максимальною середньою швидкістю зі диференціальними зв'язками і граничними умовами, і управління, що забезпечує мінімальний середній витрата палива на одиницю шляху суднового комплексу, при заданій середній швидкості його руху. Встановлено, що значення основних характеристик силових установок суднового комплексу істотно залежать від усіх параметрів системи, тому для моделювання вводяться функції характеристики яких апроксимуються. Оскільки отриманий закон управління дійсний для будь-яких функцій, які мають обурююче походження, система автоматичного управління з характеристикою регулятора швидкості в провідному ланці підтримує режим, близький до оптимального, під дією довільних сил, що обурюють, в тому числі неперіодичних.

Дослідження, проведені для суднових комплексів, показали, що величина приросту швидкості судна в нестационарних умовах зміни параметрів досягає 8%. Ступінь контролю залежить від всіх параметрів, що характеризують корабельний комплекс і стан моря. Отримані співвідношення при моделюванні і оптимальне управління енергоблоками суднових комплексів дозволили проаналізувати витрату палива на одиницю шляху з оптимальним керуванням методом динамічного програмування в порівнянні з відповідним постійним управлінням.

Ключові слова: математична модель, оптимальне управління, метод усереднення, перехідний процес, судновий комплекс.

A.V. USOV

Odesa national polytechnic university

N.V. SLOBODIANIUK

National University 'Odessa Maritime Academy'

DESIGN AND OPTIMAL MANAGEMENT POWER AGGREGATES OF SHIP COMPLEX ON NON-STATIONARY MODES

Studies of the main dynamic characteristics of the energy systems of ship systems in the steady state under the action of a disturbing force are relevant. This is especially confirmed by the creation of control systems for ship power plants.

In the article, the authors developed a mathematical model of the dynamics of the ship complex taking into account transients and found control that ensures its movement with a maximum average speed and minimum fuel consumption per unit of track. The differential equations of motion of the ship complex in a dimensionless form under unsteady conditions are considered. For optimal control of this facility, an optimality criterion was developed, which is connected by functional relationships with the characteristics of the ship complex

and with which an optimum is achieved. The tasks of optimal control were set and solved in order to find a control that ensures the movement of the ship complex with a maximum average speed with differential connections and boundary conditions, and a control that provides the minimum average fuel consumption per unit of the way of the ship complex. at a given average speed of its movement. It is established that the values of the main characteristics of the power plants of the ship complex significantly depend on all parameters of the system, therefore, approximating functions of these characteristics are introduced for modeling. Since the obtained control law is valid for any disturbing functions, an automatic control system with the characteristic of a speed controller in the driving link maintains a near optimal regime under the action of arbitrary disturbing forces, including non-periodic ones.

Studies conducted for ship complexes showed that the magnitude of the increase in ship speed under unsteady conditions of change in parameters reaches 8%. The degree of control depends on all parameters characterizing the ship complex and the state of the sea. The obtained ratios during modeling and optimal control of power units of ship complexes made it possible to analyze fuel consumption per unit of track with optimal control using the dynamic programming method in comparison with the corresponding constant control.

Keywords: mathematical model, optimal control, averaging method, transient, ship complex.

Постановка проблемы

Исследования основных динамических характеристик энергетических комплексов судовых систем в установившемся режиме при действии возмущающей силы являются актуальными. Особенно это подтверждается созданием управляющих систем для судовых силовых установок.

Для оптимального управления судовыми силовыми системами необходимо разработать математическую модель для данного класса объектов и идентифицировать ее к выбранному объекту. Полученные результаты моделирования использовать для управления данным объектом.

Оптимальное управление данным объектом предусматривает разработку критерия оптимальности, связанного функциональными соотношениями с характеристиками данной системы и с помощью которых и достигается оптимум [1].

Критерий оптимальности – важнейший компонент задачи оптимизации. Роль моделирования и оптимизации в системах управления (СУ) следует рассматривать в контексте жизненного цикла СУ [1–3]. Некоторые этапы жизненного цикла представлены на рис. 1.

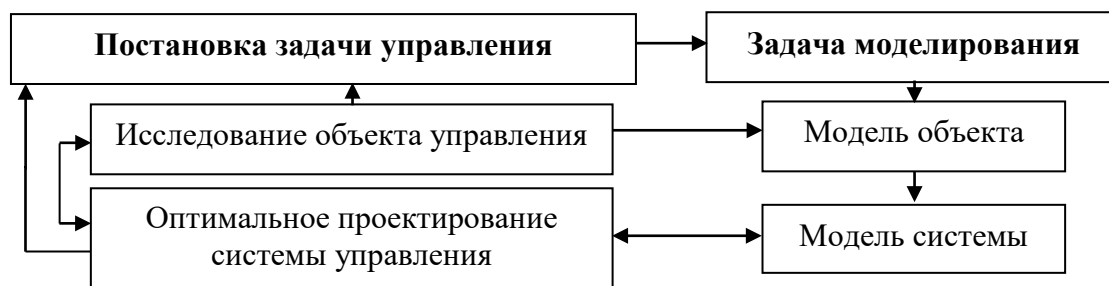


Рис. 1. Фрагменты жизненного цикла системы управления.

Важнейшим компонентом процесса эксплуатации объекта является оптимальное управление его системой, которая обеспечивает высокие технико-экономические показатели.

Анализ последних исследований и публикаций

В работах [4–6] анализируются способы модернизации систем топливоподачи непосредственного действия. При этом основное внимание уделяется не только повышению давления впрыскивания топлива, но и возможностям адаптационного регулирования процессов подачи топлива для получения требуемых значений цикловой подачи, угла опережения впрыскивания и закона подачи в условиях меняющейся нагрузки и переходных процессов. Для оптимального выбора параметров процесса топливоподачи эффективны методы моделирования.

Однако в ряде методов моделирования не рассматриваются вопросы оценки взаимовлияния изменяющихся параметров математических моделей.

Поэтому разработка математической модели оптимального управления топливной системой судового комплекса на переходных режимах является актуальной

Цель исследования

Целью исследования является получение математической модели динамики судового комплекса с учетом переходных процессов и нахождение управления, обеспечивающее его движение с максимальной средней скоростью и минимальным расходом топлива на единицу пути.

Для решения поставленной цели необходимо рассмотреть задачи:

– в качестве математической модели использовать дифференциальные уравнения движения судового комплекса в безразмерном виде в нестационарных условиях;

– построение оптимального управления по методу усреднения.

Изложение основного материала исследования

Дифференциальные уравнения движения судового комплекса в безразмерном виде в нестационарных условиях имеют вид [7]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B}{A} \left[\overline{M}_g^o(\omega) - \overline{M}_c^o(\omega, \nu, \varphi, t) \right], \quad (1)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{A} \left[\overline{P}^o(\omega, \nu, \varphi, t) - R^o(\nu) \right]$$

$$\text{при } \omega(0) = 1; \quad \nu(0) = 1, \quad (2)$$

где ω , ν – относительная угловая скорость ведущего звена и относительная поступательная скорость ведомого звена (судового комплекса);

A , B , t – безразмерные динамические параметры и относительное время;

P , R , M_g , M_c – относительные величины;

$$P(\omega, \nu, \varphi, t) = \left[\frac{\varphi}{\varphi_{\max}} \left(\omega^2 - 0,6 \frac{\lambda_o}{\lambda_{1\max}} \omega \nu + 1,2 \frac{\lambda_o^2}{\lambda_{1\max}^2} \nu^2 \right) - 1,6 \frac{\lambda_o^2}{\lambda_{1\max}^2} \nu^2 \right] C_1(t) - \text{сила тяги винта};$$

$$R(\nu) = \chi P(1, 1, \varphi_0, 0) \nu^2 - \text{сила сопротивления воды движению судна};$$

ω – угловая скорость винта;

$$M_g(\omega, u) = M_o(1, 1, \varphi_0, 0) \overline{M}_c(\omega) u(t) - \text{движущий момент};$$

$$M_c(\omega, \nu, \varphi, t) = \left[\begin{array}{l} \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} \left(\omega^2 - 0,65 \frac{\lambda_o}{\lambda_{2\max}} \omega \nu + 1,45 \frac{\lambda_o^2}{\lambda_{2\max}^2} \nu^2 \right) \\ -1,8 \frac{\lambda_o^2}{\lambda_{2\max}^2} \nu^2 \end{array} \right] \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} C_2(t) - \quad \text{МОМЕНТ}$$

сопротивления винта;

$\lambda_o / \lambda_{2\max}, A, B, \varphi / \varphi_{\max}$ – безразмерные коэффициенты;

$\varphi(t)$ – шаговое отношение винта (ВРШ);

$\nu(t)$ – относительная подача топлива;

$C_1(t), C_2(t)$ – функции, характеризующие нестационарность водной среды;

$$M_g(\omega) = \frac{1 - \operatorname{sign}\left(\frac{\omega_o}{\omega_p} - 1\right)}{2 - (C - 1) \left[1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_o} - 1\right) \psi \right]} \mu(\omega) + \frac{1 + \operatorname{sign}\left(\frac{\omega_o}{\omega_p} - 1\right)}{2 \left(C - \frac{\omega_p}{\omega_o} \right)} \mu(\omega); \quad (3)$$

$$\mu(\omega) = \left[\begin{array}{l} \frac{1 - \operatorname{sign}\left(\omega - \frac{\omega_p}{\omega_o}\right)}{2} + \frac{\omega_o}{\omega_p} \frac{1 + \operatorname{sign}\left(\omega - \frac{\omega_p}{\omega_o}\right)}{2} \end{array} \right] \left(\omega - \frac{\omega_p}{\omega_o} \right).$$

Здесь $\xi, C, \omega_o / \omega_p, \psi$ – характеристики двигателя.

Важной характеристикой, оценивающей экономичность работы энергетической системы, является относительный расход некоторого ресурса в качестве, которого для судового комплекса являются топливо, электроэнергия на единицу пути:

$$C^o = \frac{M_g(\omega) \omega M_c(\omega)}{\nu}. \quad (4)$$

При постановке задач оптимального управления можно [8–9]:

1) Находить управление $0 \leq u(\tau) \leq 1$, обеспечивающее движение судового комплекса с максимальной средней скоростью, т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(\tau) d\tau \rightarrow \max \nu_{cp} \quad (5)$$

при дифференциальных связях (1) и граничных условиях: $\omega(0) = \omega(2\pi), \nu(0) = \nu(2\pi)$;

2) Находить управление $0 \leq u(\tau) \leq 1$, обеспечивающее минимальный средний расход топлива на единицу пути судового комплекса при заданной средней скорости его движения $u_1 < u_{\max}$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_g(\omega) \omega M_c \omega}{\nu} d\tau \rightarrow \min \quad (6)$$

при дифференциальных связях (1), граничных условиях и интегральной связи

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\tau) d\tau = v_1.$$

Особенно большое практическое значение они имеют в решении одной из основных проблем судовой механики – автоматизации силовых установок судов различных классов и типов с винтами регулируемого шага (ВРШ) при плавании судов в наиболее тяжелых морских условиях.

Рассмотрим влияние управляющего параметра $u(t)$ на основные динамические характеристики судовой системы.

Рассмотрение задач 1) и 2) необходимо для сравнения соответствующих функционалов, при оптимальном управлении $u(t)$ и на выгоднейшем постоянном значении u ($u = u_{\max}$ – задача 1, $u = u_{\min}$ – задача 2, т.е. для оценки эффективности от введения управления по u).

Обычно, параметр $1/A \ll 1$. Поэтому, используя метод усреднения [8], можно записать:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [P^o(\omega, v, u, t) - R^o(v)] dt &= 0; \\ \omega &= \frac{B}{A} [M_g(\omega) - M_c^o(\omega, v, u, t)]; \\ C^o &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_g(\omega) \omega g_e^o(M_g(\omega))}{v} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Исследование влияния параметра B/A показано, что при увеличении значения экстремальные величины всех характеристик судовой системы асимптотически приближаются к некоторым предельным значениям. При $B/A > 5$, величины ω и v , а следовательно, M_g^o , M_c^o и P^o практически не отличаются от своих предельных значений.

При $\Delta C_2 > 0,5$, где $\Delta C_2 = \max C_2(t) - \min C_2(t)$ значения $v(u)$, u_{\max} , u_{\min} практически не зависят от B/A . Поэтому, для произвольного B/A можно задавать u_{\max} и u_{\min} полученные в предположении $B/A \ll 1$.

При $\Delta C_2 > 0,5$, т.е. для больших возмущений среды (при больших амплитудах морской поверхности) на промежутке $(0,1; 1,0)$ значения u_{\max} и u_{\min} достигают некоторых максимальных величин, а затем монотонно уменьшаются. Если задавать значение скорости v при $B/A \gg 1$ и $u = u_0$, то значение u_{\min} практически не зависит от B/A при произвольном реальном значении ΔC_2 .

Проведенное исследование также показало возможность получения решения в предположении $B/A \ll 1$ и $B/A \gg 1$. В тоже время, при этих предположениях использование метода малого параметра [9–10] дает возможность практически довести исследование задач 1 и 2 до численных расчетов.

Значение основных характеристик силовых установок судового комплекса v , ω_{\max} , ω_{\min} , C^o зависят существенно от всех параметров системы, поэтому для моделирования введем в рассмотрение аппроксимирующие функции указанных характеристик в виде:

Значение основных характеристик силовых установок судового комплекса v , ω_{\max} , ω_{\min} , C^o зависят существенно от всех параметров системы, поэтому для моделирования введем в рассмотрение аппроксимирующие функции указанных характеристик в виде:

$$f = \psi_{2\xi} + a_o (\psi_{1\xi} - \psi_{2\xi}) e^{-\frac{B}{A} Hf},$$

где ξ – одна из перечисленных выше характеристик;

$$H_\xi = a_1 + a_2 \frac{\lambda_o}{\lambda_{\max}} + a_3 u_o + a_4 \chi + a_5 \zeta + a_6 \frac{h_o}{R} + a_7 \frac{\psi_o}{R} + a_8 \left(\frac{\ell u_o}{R} \right)^2 + a_9 u_{\min};$$

$\psi_{i\xi}$ – аппроксимирующие функции для ξ при $B/A \ll 1, i = 1$ и $B/A \ll 1, i = 2$;

a_i – постоянные коэффициенты, которые определяются методом наименьших квадратов.

Аппроксимирующие функции получены при $\Delta C_2 \leq 0,5$ для произвольного отношения B/A , а при $\Delta C_2 > 0,5$ для $B/A \geq 1$.

Рассмотрим построение управления системой, содержащей малый параметр. Для этого введем управление $u(t)$, минимизирующее функционал [10–11]:

$$I[u] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) dt; \quad (8)$$

$$x'(t) = \varepsilon \sum_{j=1}^B X^j(x) \psi_j(u, t) \quad (9)$$

при граничных условиях:

$$x(0) = x(2\pi). \quad (10)$$

Задача (8)–(10) сводится к задачам оптимального управления, соответствующим последовательным приближением метода усреднения.

Задача оптимального управления, соответствующая первому приближению формируется следующим образом: найти управление, минимизирующее функционал:

$$I_1[u] = F(\xi); \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n X^j(\xi) \overline{\psi_j(u, t)} = 0, \quad (12)$$

$$\psi_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_j(u, \tau) d\tau.$$

Согласно сделанным предположениям система (12) имеет единственное решение [11]:

$$\xi = \xi(\overline{\psi(u, t)}).$$

Окончательно, получаем задачу с минимизируемым функционалом:

$$I[u] = W[Z(2\pi)]; \quad (13)$$

$$Z' = \frac{1}{2\pi} \psi(u, t), \quad Z'(0) = 0, \quad W[Z(2\pi)] = F\left[\xi(\overline{\psi(u, t)})\right]. \quad (14)$$

На основании принципа максимума и теории управления Л.С. Понтрягина [11] $u(t)$ определяется из условия:

$$\sum_{i=1}^n P_i \psi_c(u, t) \rightarrow \max, u \in \nu,$$

где $u = u(t, p)$, где $P = \text{const}$.

Оптимальное управление для задач 1) и 2) в случае $m/A \ll 1$, соответствующее первому приближению имеет вид:

$$u(t) = \frac{P_1 C_1(t) + P_3 C_2(t)}{P_2 C_1(t) + P_4 C_2(t)}. \quad (15)$$

Для судовых комплексов:

$$u(t) = a + b \frac{C_1(t)}{C_2(t)}, \quad (16)$$

где $a = P_1 / P_2$, $b = P_3 / P_4$.

Таким образом, задачи оптимального управления 1) и 2) в первом приближении можно свести к задачам экстремального регулирования по параметрам P_i .

В случае $n/A \gg 1$ получено аналитическое выражение для оптимального управления соответствующего первому приближению. Так, решение задачи 1) синтеза оптимального управления представляется в виде:

$$u(\omega) = 1 + \gamma \frac{1 - \sin g \left(\omega - \frac{\omega_p}{\omega_0} \right)}{2} - \left(\omega - \frac{\omega_p}{\omega_0} \right), \quad (17)$$

где $\gamma \gg 1$.

Управление (17) даст тем лучшее приближение к оптимальному, чем больше значение γ . Так как закон управления (17) справедлив для любых возмущающих функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$, то система автоматического управления с характеристикой регулятора скорости ведущего звена (17) поддерживает режим, близкий к оптимальному при действии произвольных возмущающих сил, в том числе и не периодических.

Проведенные исследования для судовых комплексов показали, что достаточно ограничиваться значением $\gamma=50$. При этом величина выигрыша скорости судна в нестационарных условиях изменения параметров достигает 8%, а при наилучшем управлении $u = u_{\max} - 4\%$. Величина u_{\max} зависит от всех параметров, характеризующих судовой комплекс и состояние моря. Закон регулирования (17) является одинаковым для всех случаев и поэтому не требует проведения дополнительных расчётов.

Для задачи 2) при $n/A \gg 1$ оптимальное управление $u(t)$ имеет вид (16), т.е. совпадает с законом управления для $n/A \ll 1$. Использование закона управления (16) для задачи 1) $n/A \gg 1$ позволяет получить скорость судна $v \rightarrow v_{\text{opt}}$, близкую к оптимальной.

Необходимое условие оптимальности имеет вид [11]:

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] = 0.$$

Если движение управляемой системы задается системой дифференциальных уравнений $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}$, $H = \sum_{i=1}^n \xi_i P_i$, $P_i = \frac{\partial H}{\partial \chi_i}$, где $i = 1, 2, \dots, n$, управление $u(t)$ входит в функцию H , то при рассмотрении в качестве управления функции $W = du / dt$ получаем особые участки, которые удовлетворяют необходимым условием оптимальности. При полученных оптимальных управлениях для задачи управление ВРШ, обеспечивающее минимальный расход топлива на милю пути судна при заданной средней скорости его движения $v_1 < v_{\max}$, величина экономии в относительном расходе топлива может достигать 5%.

Рассмотрение управления вида

$$u(t) = a + bC_2(t) \quad (18)$$

показало, что экономия в расходе топлива при управлении по закону (16) мало отличается от экономии в расходе топлива при управлении по закону (18) и тоже достигает до 5%. Однако закон управления вида (18) более прост для реализации.

Полученные соотношения при моделировании и оптимальном управлении силовыми агрегатами судовых комплексов в отличие от результатов, изложенных в работах [12–13], позволили методом динамического программирования [8–9] провести анализ расхода топлива на единицу пути при оптимальном управлении по сравнению с соответствующим постоянным управлением.

Решение показало зависимость состояния судового комплекса от возмущений водной среды при оптимальном и постоянном управлении.

Выводы

Получены математическая модель динамики судового комплекса с учетом переходных процессов и найдено управление, обеспечивающее его движение с максимальной средней скоростью и минимальным расходом топлива на единицу пути.

Полученные соотношения при моделировании и оптимальном управлении силовыми агрегатами судовых комплексов позволили методом динамического программирования провести анализ расхода топлива на единицу пути при оптимальном управлении по сравнению с соответствующим постоянным управлением.

Решение показало зависимость состояния судового комплекса от возмущений водной среды при оптимальном и постоянном управлении.

Список использованной литературы

1. Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. І., Усов А. В. Моделювання та оптимізація систем. Вінниця: ПП «ГД» Едельвейс, 2017. 804 с.
2. Усов А. В., Дубров А. Н., Дмитришин Д. В. Моделирование систем с распределенными параметрами: монография. Одесса: Астропринт, 2002. 664 с.
3. Оборский Г. А., Дашенко А. Ф., Усов А. В., Дмитришин Д. В. Моделирование систем: монография. Одесса: Астропринт, 2013. 670 с.
4. Салькин Е. А. и др. Опыт модернизации дизельных систем топливоподачи непосредственного действия. *Известия ВолгГТУ*. 2011. № 8(81). С. 38–40.
5. Блинов П. Н., Блинов А. П. Применение математической модели процесса топливоподачи топливной аппаратурой тепловозных дизелей для

- многовариантных расчетов. *Известия Транссиба*. 2014. №3(19). С. 2–7.
6. Троицкий А. В. Компьютерное моделирование топливоподачи в судовом среднеоборотном четырехтактном дизеле. *Вестник АГТУ. Серия: Морская техника и технология*. 2009. № 2. С. 188–191.
 7. Небеснов В. И., Плотников В. А. К динамике энергетической системы с двумя степенями свободы. *Машиноведение*. 1968. №1. С.45–54.
 8. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. Москва: Наука, 1969. 119 с.
 9. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 382 с.
 10. Мойсеев Н. Н. Численные методы динамического программирования. М.: Наука, 1965. 268 с.
 11. Понтрягин Л. С. Принцип максимума в оптимальном управлении. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 64 с.
 12. Обозов А. А., Субботенко Д. И., Тараканов В. В. Оптимизация процессов в топливной аппаратуре дизеля с целью улучшения его экономических и экологических характеристик. *Вестник Брянского государственного технического университета*. 2014. № 2(42) С. 34–43 с.
 13. Дьяконов М. Ю., Зайцев В. В., Бахрачева Ю. С. Оптимизация режимов работы тепловозных дизель-генераторов. *Современные проблемы транспортного комплекса России*. 2013. Т. 3. № 2. С. 193–196.

References

1. Dubovoi, V. M., Quarter, R. N., & Mikhalov, O. I., Usov, A. V. (2017). Modeling and Systems Optimization. Vinnitsa: PP 'TD' Edelweiss.
2. Usov, A. V., Dubrov, A. N., & Dmitrishin, D. V. (2002). Modeling of Systems with Distributed Parameters. Odessa: Astroprint.
3. Oborsky, G. A., Dashchenko, A. F., Usov, A. V., & Dmitrishin, D. V. (2013). Modeling of Systems. Odessa: Astroprint.
4. Salykin, E. A. (2011). The Experience of Modernization of Direct-Acting Diesel Fuel supply Systems. *Bulletin of the Volgograd State Technical University Interuniversity*. **8** (81), 38–40.
5. Blinov, P. N. (2014). The use of a mathematical model of the fuel supply process of diesel equipment for multivariate calculations with fuel equipment. *Proceedings of Trans-Siberian Railway*. **3** (19), 2–7.
6. Troitsky, A. V. (2009). Computer simulation of fuel supply in a marine medium-speed four-stroke diesel engine. *Bulletin of the ASTU. Series: Marine engineering and technology*. **2**, 188–191.
7. Nebesnov, V. I. (1968). To the dynamics of an energy system with two degrees of freedom. *Engineering*. **1**, 45–54.
8. Bellman, R., & Kalaba, R. (1969). Dynamic programming and modern control theory. Moscow: Nauka.
9. Bellman, R., & Dreyfus, S. (1965). Applied problems of dynamic programming. Moscow: Science.
10. Moiseev, N.N. (1965) Numerical methods of dynamic programming. Moscow: Science.
11. Pontryagin, L. S. (2004). The maximum principle in optimal control. Moscow: URSS Editorial.
12. Obozov, A. A. (2014). Optimization of processes in the fuel equipment of a diesel engine in order to improve its economic and environmental characteristics. *Bulletin of the Bryansk State Technical University*. **2** (42), 34–43.
13. Dyakonov, M. Yu. (2019). Optimization of the operating modes of diesel-generators, *Modern problems of the Russian transport complex*. **3**, 2, 193–196.

Усов Анатолій Васильович – д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету, e-mail: usov_a_v@onu.ua, ORCID: 0000-0002-3965-7611.

Слободянюк Микола Васильович – старший викладач кафедри корабельної енергетики та електроенергетичних систем Інституту Військово-Морських Сил Національного університету «Одеська морська академія», e-mail: Nikgavr1234@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2248-0255.

УДК519.65

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТІОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ СУБСТИТУТ-БАЗИСИ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА Q_8

У роботі наведено приклади нових моделей тригонометричних базисів, які поставлено на заміну (substitute) поліноміальним базисам (стандартному та альтернативним) популярного елемента Q_8 .

На перших етапах розвитку метода скінченних елементів (МСЕ) вважалося, що головна перевага методу – поліноміальна інтерполяція. Поліноми Лагранжа у ролі базисів та алгебраїчний трикутник Паскаля забезпечили стрімке поширення МСЕ і зростання його популярності. Розвиток комп'ютерних технологій систематично і впевнено змінює ставлення зацікавлених фахівців до задач конструювання базисних функцій. Сьогодні розробники пакетів прикладних програм все частіше звертають увагу на раціональні функції і навіть функції більш загальних класів. Оригінальні базиси скінченних елементів на основі тригонометричних функцій ілюструють «м'яке» математичне моделювання (за терміном В. Арнольда). У конструктивній теорії серендипових апроксимацій тригонометричні функції ще не використовували.

Скінченний елемент Q_8 широко розповсюджений в МСЕ і успішно працює в ансамблі з трикутним елементом T_6 і квадратом Q_9 . Специфіка тригонометричних функцій змушує відмовитись від традиційного методу оберненої матриці. Для «проміжних» локальних функцій Q_8 ми використовуємо коноїди Каталана, а «кутові» функції конструюємо нематричним методом Р. Тейлора. Відсутність прикладів тригонометричного моделювання базисних функцій гальмує розвиток цього напрямку досліджень. Добре відома лише одна функція базису Q_9 – «дуга» мода О. Зенкевича (1971 р.), яку він сконструював із фрагментів функції косинус. У роботі запропоновані «рецепти» усунення фізичної неадекватності спектра вузлових навантажень («парадокс» Зенкевича).

Отримані результати і конкретні приклади підтверджують думку, що фінитні інтерполяційні функції можуть бути неполіноміальними. Застосування тригонометричних функцій відкриває нові можливості для усунення від'ємних вузлових навантажень.

Ключові слова: скінченний елемент Q_8 , поліноміальний базис, тригонометричний базис, локальні та інтегральні характеристики базису, спектр вузлових навантажень, фізична неадекватність спектра.

А. Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могилы

Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУБСТИТУТ-БАЗИСЫ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА Q_8

В работе приведены примеры новых моделей тригонометрических базисов, которые представлены на замену (substitute) полиномиальным базисам (стандартному и альтернативным) популярного элемента Q_8 .

На первых этапах развития метода конечных элементов (МКЭ) считалось, что главное преимущество метода – полиномиальная интерполяция. Полиномы Лагранжа в роли базисов и алгебраический треугольник Паскаля обеспечили стремительное распространение МКЭ и рост его популярности. Развитие компьютерных технологий систематически и уверенно меняет отношение заинтересованных специалистов к задачам конструирования базисных функций. Сегодня разработчики пакетов прикладных программ все чаще обращают внимание на рациональные функции и даже функции более общих классов. Оригинальные базисы конечных элементов на основе тригонометрических функций иллюстрируют «мягкое» математическое моделирование (согласно термину В. Арнольда). В конструктивной теории серендиповых аппроксимаций тригонометрические функции еще не применялись.

Конечный элемент Q8 широко распространен в МКЭ и успешно работает в ансамбле с треугольным элементом T6 и квадратом Q9. Специфика тригонометрических функций заставляет отказаться от традиционного метода обратной матрицы. Для «промежуточных» локальных функций Q8 мы используем коноиды Каталана, а «угловые» функции конструируем нематричным методом Р. Тейлора. Отсутствие примеров тригонометрического моделирования базисных функций тормозит развитие этого направления исследований. Хорошо известна лишь одна функция базиса Q9 – «дугая» мода О. Зенкевича (1971 г.), которую он сконструировал из фрагментов функции косинус. В работе предложены «рецепты» устранения физической неадекватности спектра узловых нагрузок («парадокс» Зенкевича).

Полученные результаты и конкретные примеры подтверждают мысль, что финитные интерполяционные функции могут быть неполиномиальными. Применение тригонометрических функций открывает новые возможности для устранения отрицательных узловых нагрузок.

Ключевые слова: конечный элемент Q8, полиномиальный базис, тригонометрический базис, локальные и интегральные характеристики базиса, спектр узловых нагрузок, физическая неадекватность спектра.

A.N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
O.I. LYTVYNENKO, I.O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

TRIGONOMETRIC SUBSTITUTE-BASES OF THE FINITE ELEMENT Q8

The paper gives examples of new models of trigonometric bases, which substitute polynomial bases (standard and alternative) of the popular element Q8.

In the early stages of development of the finite element method (FEM) it was considered that the main advantage of the method is polynomial interpolation. Lagrange polynomials as bases and Pascal's algebraic triangle ensured the rapid spread of FEM and growth of its popularity. The development of computer technologies systematically and confidently changes the attitude of interested professionals to the tasks of designing bases functions. Today the developers of applications packages more often pay attention to rational functions and even functions of more general classes. The original bases of finite elements based on trigonometric functions illustrate "soft" mathematical modeling (according to V. Arnold). Trigonometric functions have not yet been used in the constructive theory of serendipity approximations.

The finite element Q8 is widespread in FEM and works successfully in an ensemble with a triangular element T6 and a square Q9. The specificity of trigonometric functions

forces to abandon the traditional method of inverse matrix. For "intermediate" local functions Q_8 we use Catalan conoids and we construct "angle" functions by the non-matrix method of R. Taylor. The lack of examples of trigonometric modeling of basis functions inhibits the development of this area of research. Only one function of the Q_9 basis is well known - the "blown" mode of O. Zenkevich (1971), which he constructed out of fragments of the Cos function. The paper proposes "recipes" for eliminating the physical inadequacy of the spectrum of nodal loads (Zenkevich "paradox").

The obtained results and specific examples confirm the opinion that finite interpolation functions can be non-polynomial. The use of trigonometric functions opens up new possibilities for elimination of negative nodal loads.

Key words: finite element Q_8 , polynomial basis, trigonometric basis, local and integral characteristics of the basis, spectrum of nodal loads, physical inadequacy of the spectrum.

Постановка проблеми

На перших етапах розвитку МСЕ вважалося, що головна перевага методу – поліноміальна інтерполяція. Поліноми Лагранжа у ролі базисів та алгебраїчний трикутник Паскаля забезпечили стрімке поширення МСЕ і зростання його популярності. Розвиток комп'ютерних технологій систематично і впевнено змінює ставлення зацікавлених фахівців до задач конструювання базисних функцій. Сьогодні розробники пакетів прикладних програм все частіше звертають увагу на раціональні функції і, навіть, функції більш загальних класів. Оригінальні базиси СЕ на основі тригонометричних функцій ілюструють «м'яке» математичне моделювання (за терміном В. Арнольда). У конструктивній теорії серендипових апроксимацій тригонометричні функції ще не використовували.

У роботі наведені перші приклади конструювання тригонометричних субститут-базисів для СЕ Q_8 .

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На початку 70-х років минулого століття вже було відомо [1–2], що локальні інтерполяційні функції не обов'язково мають бути поліномами, а в тих випадках, коли інтерполяційні функції – поліноми, вони не обов'язково мають бути повними. Підтвердження цього факту можна знайти і в інших джерелах, наприклад, в [3–4]. Конкретні приклади субститут-базисів на скінченному елементі з біквадратичною інтерполяцією можна знайти в [5–6]. У роботі [1] О. Зенкевич показав, як виглядає лише «дута» мода елемента Q_9 , якщо квадратичну параболу замінити фрагментом косинусоїди. Що робити з рештою функцій стандартного базису Q_9 , невідомо. Цікавим є питання побудови згладжених апроксимацій на скінченних елементах у просторі.

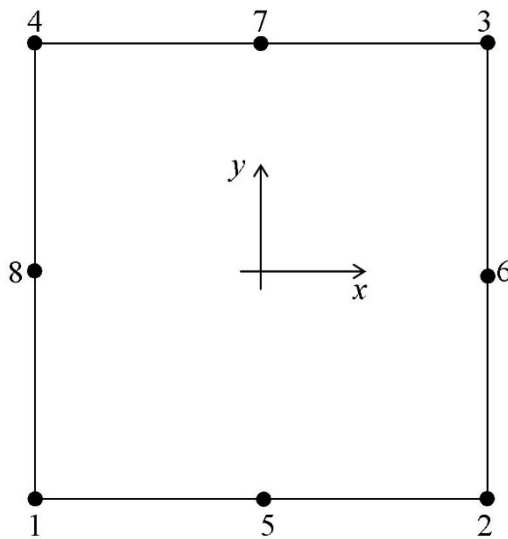
Варто згадати про тригонометричні базиси центрованого (сім вузлів) і нецентрованого (шість вузлів) октаєдрів для тривимірних задач [7].

Мета дослідження

Мета дослідження – поповнити модельний ряд скінченних елементів Q_8 новими моделями із тригонометричними базисами. Зробити порівняння із стандартним СЕ (Ергатудіс, Айронс, Зенкевич, 1968). Визначити основні локальні та інтегральні характеристики нових моделей. Показати нові «рецепти» усунення фізичної неадекватності стандартної моделі Q_8 .

Викладення основного матеріалу дослідження

На рис. 1 зображений найбільш розповсюджений в МСЕ елемент Q8. Поліноміальний базис (standard) цього елемента має вигляд [8]:



Координати вузлів:
 1(-1; -1); 2(1; -1);
 3(1; 1); 4(-1; 1);
 5(0; -1); 6(1; 0);
 7(0; 1); 8(-1; 0);

Рис. 1. Скінченний елемент Q8.

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x)(1 - y)(-1 - x - y), \text{ аналогічно для вузлів 2, 3, 4,} \quad (1)$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2}(1 - x^2)(1 - y), \text{ аналогічно для вузлів 6, 7, 8.}$$

Як відомо, цей базис винахідливо підібрали Ергатудіс, Айронс, Зенкевич у 1968 р. [1]. В деяких джерелах [1, 3, 4] Q8 називають серендиповим елементом. Характерною ознакою стандартних серендипових базисів є поверхні Каталана (коноїди), які асоціюються з «проміжними» вузлами 5, 6, 7, 8. Для формоутворення коноїда потрібно мати напрямну (в стандартних моделях це парабола) і твірну (це пряма лінія, яка рухається паралельно фіксованій площині і перетинає вісь коноїда). Згідно з ідеями В.І. Арнольда щодо «м'якого» математичного моделювання, ми пропонуємо замість напрямної параболу напрямну косинусоїду. Зрозуміло, що будемо діяти в рамках інтерполяційної гіпотези Лагранжа. Після підбору придатних «проміжних» поверхонь, ми сконструюємо «кутові» поверхні методом Р. Тейлора [9]. Наприклад, щоб сконструювати «кутову» поверхню $N_1(x, y)$, потрібно мати рівняння поверхонь $N_5(x, y)$ і $N_8(x, y)$. Тепер ці коноїди виглядають так:

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{2} (1 - y), \quad N_8(x, y) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi y}{2} (1 - x).$$

Лінійна комбінація гіперболічного параболоїда і пари коноїдів дає кутову поверхню:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - x - y + xy - \cos \frac{\pi x}{2} (1 - y) - \cos \frac{\pi y}{2} (1 - x) \right). \quad (2)$$

Аналогічно отримуємо решту «кутових» поверхонь. Нагадаємо умови інтерполяційної гіпотези Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) = 1. \quad (3)$$

Рівняння поверхні, що спирається на вісім аплікати f_i (інтерполянт) має вигляд:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) \cdot f_i.$$

Цікаво порівняти деякі локальні та інтегральні характеристики поліноміального та тригонометричного базисів Q8. Аналіз показує, що рельєф відповідних базисних поверхонь майже не відрізняється. Аплікати в барицентрі квадрата співпадають:

$$N_1(0; 0) = -\frac{1}{4}; \quad N_5(0; 0) = \frac{1}{2}.$$

Вузлові навантаження від одиничної масової сили визначаються шляхом інтегрального усереднення:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \int_D N_i(x, y) dS, \quad (4)$$

де S – площа квадрата.

Для поліноміальної моделі (1) маємо:

$$\gamma_i = -\frac{1}{12}, i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{3}, i = 5, 6, 7, 8,$$

для тригонометричної моделі (2):

$$\gamma_i = \frac{\pi - 4}{4\pi}; i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{\pi}; i = 5, 6, 7, 8.$$

Як бачимо, фізична неадекватність нового спектру залишається на стандартному рівні, а при $\pi \approx 3$ спектри просто співпадають.

Щоб звільнитися від «гравітаційного відштовхування» в кутових вузлах існує декілька рецептів. Але усі вони орієнтовані на поліноміальні базиси. Для тригонометричної моделі Q8 ми знайшли новий рецепт, який дозволяє зменшити об'єм тіла між «проміжною» поверхнею і носієм Q8. Нагадаємо, що з геометричної точки зору формула (4) визначає середню аплікату поверхні $N_i(x, y)$. Спочатку ми спробуємо стиснути коноїд шляхом деформування прямої косинусоїди. Тепер «проміжні» функції мають вигляд:

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} (1 - y), \quad N_8(x, y) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi y}{2} (1 - x),$$

а «кутова»:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - x - y + xy - \cos^2 \frac{\pi x}{2} (1 - y) - \cos^2 \frac{\pi y}{2} (1 - x) \right).$$

Локальні характеристики цієї моделі не відрізняються від стандартних:

$$N_1(0; 0) = -\frac{1}{4}, i = 1, 2, 3, 4; \quad N_5(0; 0) = \frac{1}{2}, i = 5, 6, 7, 8,$$

але від'ємні «навантаження» у кутах носія зникають. Тепер ми отримали математично обґрунтований і фізично адекватний спектр:

$$\gamma_i = 0; i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{4}; i = 5, 6, 7, 8.$$

Якщо читача не влаштовує той факт, що не всі вузли завантажені, пропонуємо «притиснути» не тільки напрямку, але й твірну. Замість прямолінійної твірної можна взяти фрагмент квадратичної параболи. Зрозуміло, що головний атрибут серендипових моделей – коноїд – перетворюється на трансляційну поверхню від'ємної гауссової кривини. Тепер важливо знати міру, щоб від'ємні навантаження не з'явилися у «проміжних» вузлах.

Покажемо модель Q8, яка нам здається бездоганною. «Проміжні» функції мають вигляд:

$$N_5(x, y) = \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\pi x}{2} (1 - y)^2, \quad N_8(x, y) = \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\pi y}{2} (1 - x)^2,$$

«кутова»:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{8} \left(2 - 2x - 2y + 2xy - \cos^2 \frac{\pi x}{2} (1 - y)^2 - \cos^2 \frac{\pi y}{2} (1 - x)^2 \right).$$

Для цієї моделі локальні характеристики:

$$N_i(0; 0) = 0, i = 1, 2, 3, 4; \quad N_i(0; 0) = \frac{1}{4}, i = 5, 6, 7, 8,$$

інтегральні характеристики:

$$\gamma_i = \frac{1}{12}; i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{6}; i = 5, 6, 7, 8.$$

Висновки

Отримані результати і конкретні приклади підтверджують думку, що фінітні інтерполяційні функції можуть бути неполіноміальними. Застосування тригонометричних функцій відкриває нові можливості для усунення від'ємних вузлових навантажень. До цих пір вважалося, що для отримання фізично адекватного спектру вузлових навантажень треба відмовитись від коноїдів у якості «проміжних» поверхонь. Саме так з'явилися альтернативні поліноміальні базиси Q8. Тепер доведено, що коноїд можна залишити, деформуючи лише напрямку косинусоїду. Нові моделі скінченного елемента Q8 – яскравий приклад «м'якого» математичного моделювання (за В. І. Арнольдом).

Список використаної літератури

1. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
2. Oden J. T. Finite Elements of Nonlinear Continua. N.Y.: McGraw-Hill, 1972. 431 p.
3. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.

4. Norri D. H., de Vries G. The Finite Element Method. Fundamentals and Applications. New York, London: Academic Press, 1973. 324 p.
5. Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Хомченко Б. А. Сглаженные аппроксимации на сирендиповых элементах. *Прикладная математика и математическое моделирование*. Материалы VII Международного симпозиума по методу дискретных особенностей в задачах математической физики (Феодосия, 9-14 июня 1997). Феодосия: ХГТУ. 1997. С. 62-64.
6. Хомченко А.Н., Литвиненко О.И., Астїоненко І.О. Згладжені апроксимації біквдратичного скінченного елемента. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Мелітополь: ТДАТУ, 2011. Вип. 4, Т.5. С. 65 – 71.
7. Мотайло А. П., Хомченко А. Н. Об октаэдре с тригонометрическим базисом. *Образование и наука без границ: Материалы VIII междунар. конференции*. (Пшемьсль, 7–15 декабря 2011). Пшемьсль: Sp. z o.o. «Nauka I studia», 2011. Т. 27. Математика. Современные информационные технологии. С. 25–29.
8. Segerlind L. J. Applied Finite Element Analysis. London: John Wiley, 1975. 428 p.
9. Gallagher R. J. Finite element analysis: Fundamentals. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1975. 416 p.

References

1. Zienkiewicz, O. C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill.
2. Oden, J. T. (1972). Finite Elements of Nonlinear Continua. N.Y.: McGraw-Hill.
3. Strang, G., & Fix, G. J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
4. Norri, D. H., & de Vries, G. (1973). The Finite Element Method. Fundamentals and Applications. New York, London: Academic Press.
5. Guchek P.I., Litvinenko E.I., Homchenko B. A. Sglazhennyie approksimatsii na sirendipovyih elementah. *Prikladnaya matematika i matematicheskoe modelirovanie*. Materialyi VII Mezhdunarodnogo simpoziuma po metodu diskretnyih osobennostey v zadachah matematicheskoy fiziki (Feodosiya, 9-14 iyunya 1997). Feodosiya: HG TU. 1997. S. 62-64.
6. Khomchenko A.N., Lytvynenko O.I., Astionenko I.O. Zghladzheni aproksymatsii bikvadratychnoho skinchennoho elementa. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Melitopol: T DATU, 2011. Vyp. 4, T.5. S. 65 – 71.
7. Motaylo, A. P., Homchenko A. N. Ob oktaedre s trigonometrichestkim bazisom. *Proceedings of the Obrazovanie i nauka bez granits: Materialyi VIII mezhdunar. konferentsii*. (Pshemisl, , December 7–15, 2011). Pshemisl: Sp. z o.o. «Nauka I studia», 2011. Vol. 27. Matematika. Sovremennyye informatsionnyie tehnologii, pp. 25–29.
8. Segerlind, L. J. (1975). Applied Finite Element Analysis. London: John Wiley.
9. Gallagher, R. J. (1975). Finite element analysis: Fundamentals. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили, e-mail: khan@chmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Астїоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.

**ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ
до наукового журналу
«Прикладні питання математичного моделювання»**

Параметри файлу:

Рукопис повинен бути підготовлений за допомогою Microsoft Word-2003/2016; **формат сторінки** – А4, **орієнтація сторінки** – "книжкова"; **границі**: ліва – 2,5 см; права – 2,5 см; верхня – 2,5 см; нижня – 2,5 см; **інтервал між рядками** – 1,0; **інтервал між абзацами** "до", "після" – 0 пт.; **відступи** "ліворуч", "праворуч" – 0 пт.; **відступ першого рядка** – 1,25 см.

Обов'язкові елементи статті:

УВАГА! Блок «Відомості про авторів», «Назва статті», «Анотація» та «Перелік ключових слів» подається ТРЬОМА мовами (українською, англійською, російською) послідовно з однаковим форматуванням.
Перша анотація подається мовою статті.
Текст анотацій всіма трьома мовами має бути ідентичний.
Розмір анотацій – не менше 1800 знаків без пробілів.

- **індекс УДК** у верхньому лівому куті сторінки (Times New Roman, 12 пт.), **вказується один раз**;
- **ініціали і прізвище автора (авторів)** великими літерами (Times New Roman, 12 пт., вирівнювання – по правому краю) (на англійську ПІБ авторів перекладається з української мови);
- **повна назва організації**, де працює автор (Times New Roman, 10 пт., по правому краю);
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.);
- **назва статті** великими літерами, по центру (Times New Roman, 12 пт., жирний);
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.);
- **анотація** (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- **перелік ключових слів**, який починається зі слів: "Ключові слова:" (або "Ключевые слова:", "Keywords:") (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- *пустий рядок* (Times New Roman, 12 пт.).

Викладення основного матеріалу дослідження

Основний текст статті (Times New Roman, 12 пт.), який, у відповідності до вимог МОН України, обов'язково повинен містити такі виділені елементи:

- Постановка проблеми;
- Аналіз останніх досліджень і публікацій;
- Мета дослідження;
- Викладення основного матеріалу дослідження;
- Висновки;
- Список використаної літератури;
- References.
- **інформацію про авторів (див. Зразок оформлення статті).**

Додаткові вимоги до елементів статті:

- **Рисунки**: підписи під рисунками – Times New Roman, 10 пт., жирний;
- **Формули**: для набору використовувати редактор формул Microsoft Equation 3.0 або MathType; формули по центру; нумерація формул – по правому краю;
Розміри формул за замовчуванням: звичайний символ – 12 пт; великий індекс – 7 пт; маленький індекс – 5 пт; великий символ – 18 пт; маленький символ – 12 пт.
- **Програми**: для набору фрагментів використовувати шрифти Courier New (Courier);
- **Список літератури**: оформлюється у відповідності до вимог ДСТУ 8302:2015 "Інформація та документація. Бібліографічне посилання. Загальні вимоги та правила складання"; (<http://lib.pu.if.ua/files/dstu-8302-2015.pdf>);
- **References**: оформлюються за правилами транслітерації англійською мовою з української/російської мов.

Для транслітерації пропонуємо скористатися наступними ресурсами:

- транслітерація з російської мови: <http://translate.meta.ua/ru/translit/>
- транслітерація з української мови: <http://ukrlit.org/transliteratsiia>

ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ

(Зразок складено з уривків окремих публікацій, автори є вигаданими особами)

УДК XXX.XX

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО
Херсонський національний технічний університет
О.І. КОВАЛЕНКО
Херсонський державний університет

ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ

Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень...

Ключові слова: процедура побудови розкладу; картковий метод...

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО
Херсонский национальный технический университет
А.И. КОВАЛЕНКО
Херсонский государственный университет

СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ

Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний. В общей постановке она является процессом упорядочивания некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений ...

Ключевые слова: процедура построения расписания; карточный метод...

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO
Kherson National Technical University
O.I. KOVALENKO
Kherson State University

THE PROPERTIES OF SCHEDULE CONSTRUCTION PROCEDURE

The properties of the schedule construction procedure, which formalizes the card method for manual scheduling, are considered. In the general formulation it is a process of ordering a certain finite set of events in time under resource and other constraints ...

Keywords: the schedule construction procedure; card method...

Постановка проблеми

Задача складання розкладу є однією з найбільш розповсюджених задач, які вирішує кожна людина практично кожний день. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз існуючих методів розв'язання задачі складання розкладу занять показує, що розв'язання задач теорії розкладів має відому складність. За змістом ці задачі відносяться до класу комбінаторних, для яких суттєве значення має розмірність...

Мета дослідження

Метою даного дослідження є автоматизація складання розкладу занять для системи дистанційного навчання з врахуванням завантаженості викладацького складу. Якість навчання, його економічна ефективність, зручність навчання студентів і роботи професорсько-викладацького складу залежить від вдало складеного розкладу.

...

Висновки

Під час виконання роботи було розроблено власний математичний метод для складання розкладу, а саме було визначено ряд обмежень, які враховуються при складанні розкладу, створено цільову функцію для оцінки придатності ...

Список використаної літератури

1. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
2. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 5. С. 95–106.
3. Тимофієва Н. К. Один спосіб моделювання інтелекту людини з використанням комбінаторного аналізу. *Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту. (ISDMCI'2014): матеріали X Міжнародної наукової конференції (Залізний Порт, 1923 травня 2014 р.)*. Херсон, 2014. С. 180-182.
4. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... д-ра. техн. наук. Київ, 2007. 32 с.

References

1. Mokin, B. I., Mokin, V. B., & Mokin, O. B. (2010). Matematychni metody identyfikatsii dynamichnykh system. Vinnytsia: VNTU.
2. Kvasnytsia, H., & Shynkarenko, H. (2002). Adaptivni aproksymatsii metodu skinchennykh elementiv dlia zadach elastostatyky. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Seria: Prykladna matematyka ta informatyka*, 5, 95–106.
3. Tymofiieva, N. K. (2014) Odyn sposib modeliuвання intelektu liudyny z vykorystanniam kombinatornoho analiz. Proceedings of the *Intelektualni systemy pryiniattia rishen ta problemy obchysliuvalnoho intelektu. (ISDMCI'2014) : materialy X Mizhnarodnoi naukovoї konferentsii*. (Ukraine, Zaliznyi Port, May 28-31, 2014), Kherson, pp. 180–182.
4. Tymofiieva, N. K. (2007). Teoretyko-chyslovi metody rozv'iazannia zadach kombinatornoi optymizatsii. (Extended abstract of Doctor's thesis), Kyiv: In-t kibernetiky im. V.M. Hlushkova NAN Ukrainy.

Кравченко Віктор Вікторович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: kravchenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Онопенко Сергій Васильович – аспірант кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету, e-mail: onopenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5196-5301.

Коваленко Олександр Іванович – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформатики Херсонського державного університету, e-mail: kovalenko@i.ua, ORCID: 0000-0002-6196-540.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ
для научного журнала
«Прикладные вопросы математического моделирования»

Параметры файла:

Рукопись должна быть подготовлена за помощью Microsoft Word-2003/2016; **формат страницы** – А4, **ориентация страницы** – "книжная"; **границы**: левая – 2,5 см; правая – 2,5 см; верхняя – 2,5 см; нижняя – 2,5 см; **интервал между строками** – 1,0; **интервал между абзацами** "до", "после" – 0 пт.; **отступы** "слева", "справа" – 0 пт.; **отступ первой строки** – 1,25 см.

Обязательные элементы статьи:

Внимание! Блок «Сведения об авторах», «Название статьи», «Аннотация» и «Список ключевых слов» представляется на ТРЕХ языках (украинском, английском, русском) последовательно с одинаковым форматированием. Первая аннотация дается на языке статьи. Текст аннотаций на всех трех языках должен быть идентичным. Размер аннотаций – не меньше 1800 знаков без пробелов.

- **индекс УДК** в верхнем левом углу страницы (Times New Roman, 12 пт.), **указывается один раз**;
- **инициалы и фамилия автора (авторов)** большими буквами на языке статьи (Times New Roman, 12 пт., выравнивание – по правому краю) (на английский язык ФИО авторов переводится с украинского языка);
- **полное название организации**, где работает автор (Times New Roman, 10 пт., по правому краю);
- *пустая строка* (Times New Roman, 12 пт.);
- **название статьи** большими буквами, по центру (Times New Roman, 12 пт., жирный);
- *пустая строка* (Times New Roman, 12 пт.);
- **аннотация** (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- **список ключевых слов**, который начинается со слов: "Ключевые слова:" (или "Ключові слова:") (Times New Roman, 12 пт., курсив);
- *пустая строка* (Times New Roman, 12 пт.);

Изложение основного материала исследования

Основной текст статьи (Times New Roman, 12 пт.), который, согласно требований МОН Украины, **обязательно** должен содержать такие выделенные элементы:

- Постановка проблемы;
- Анализ последних исследований и публикаций;
- Цель исследования;
- Изложение основного материала исследования;
- Выводы;
- Список использованной литературы;
- References.
- **информацию об авторах (см. Образец оформления статьи).**

Дополнительные требования к элементам статьи:

- **Рисунки**: подписи под рисунками – Times New Roman, 10 пт., жирный;
- **Формулы**: для набора использовать редактор формул Microsoft Equation 3.0 или MathType; формулы по центру; нумерация формул – по правому краю;
Размеры по умолчанию: обычный символ – 12 пт; большой индекс – 7 пт; маленький индекс – 5 пт; большой символ – 18 пт; маленький символ – 12 пт.
- **Программы**: для набора фрагментов использовать шрифты Courier New (Courier);
- **Список литературы**: оформляется согласно требований ДСТУ 8302:2015 "Информация и документация. Библиографические ссылки. Общие требования и правила составления"; (<http://lib.pu.if.ua/files/dstu-8302-2015.pdf>)
- **References**: оформляются по правилам транслитерации с украинского/русского языка на английский язык.
 - Для транслитерации предлагаем воспользоваться такими ресурсами:
 - транслитерация с русского языка: <http://translate.meta.ua/ru/translit/>
 - транслитерация с украинского языка: <http://ukrlit.org/transliteratsiia>

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

(Образец составлен из отрывков разных публикаций, авторы являются вымышленными личностями)

УДК XXX.XX

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО
Херсонский национальный технический университет
А.И. КОВАЛЕНКО
Херсонский государственный университет

СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ

Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний. В общей постановке она является процессом упорядочивания некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений ...

Ключевые слова: процедура построения расписания; карточный метод...

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО
Херсонський національний технічний університет
О.І. КОВАЛЕНКО
Херсонський державний університет

ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ

Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень...

Ключові слова: процедура побудови розкладу; картковий метод...

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO
Kherson National Technical University
O.I. KOVALENKO
Kherson State University

THE PROPERTIES OF SCHEDULE CONSTRUCTION PROCEDURE

The properties of the schedule construction procedure, which formalizes the card method for manual scheduling, are considered. In the general formulation it is a process of ordering a certain finite set of events in time under resource and other constraints ...

Keywords: the schedule construction procedure; card method...

Постановка проблемы

Задача составления расписания является одной из наиболее распространенных задач, которые решает каждый человек практически каждый день. В общей постановке она является процессом упорядочения некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений.

Анализ последних исследований и публикаций

Анализ существующих методов решения задачи составления расписания занятий показывает, что решение задач теории расписаний имеет известную сложность. По содержанию эти задачи относятся к классу комбинаторных, для которых существенное значение имеет размерность ...

Цель исследования

Целью данного исследования является автоматизация составления расписания занятий для системы дистанционного обучения с учетом загруженности преподавательского состава. Качество обучения, его экономическая эффективность, удобство обучения студентов и работы профессорско-преподавательского состава зависит от удачно составленного расписания.

...

Выводы

Во время выполнения работы был разработан собственный математический метод для составления расписания, а именно был определен ряд ограничений, которые учитываются при составлении расписания, создана целевая функция для оценки пригодности ...

Список использованной литературы

1. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
2. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 5. С. 95–106.
3. Тимофієва Н. К. Один спосіб моделювання інтелекту людини з використанням комбінаторного аналізу. *Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту. (ISDMCF'2014)*: матеріали X Міжнародної наукової конференції (Залізний Порт, 1923 травня 2014 р.). Херсон, 2014. С. 180-182.
4. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... д-ра. техн. наук. Київ, 2007. 32 с.

References

1. Mokin, B. I., Mokin, V. B., & Mokin, O. B. (2010). *Matematychni metody identyfikatsii dynamichnykh system*. Vinnytsia: VNTU.
2. Kvasnytsia, H., & Shynkarenko, H. (2002). *Adaptyvni aproksymatsii metodu skinchennykh elementiv dlia zadach elastostatyky. Visnyk Lvivskoho universytetu. Seria: Prykladna matematyka ta informatyka*. 5, 95–106.
3. Tymofiiieva, N. K. (2014) *Odyn sposib modeliuвання intelektu liudyny z vykorystanniam kombinatornoho analiz. Proceedings of the Intelektualni systemy pryiniattia rishen ta problemy obchysliuvalnoho intelektu. (ISDMCF'2014) : materialy X Mizhnarodnoi naukovoї konferentsii. (Ukraine, Zaliznyi Port, May 28-31, 2014), Kherson, pp. 180–182.*
4. Tymofiiieva, N. K. (2007). *Teoretyko-chyslovi metody rozv'язання zadach kombinatornoї optyimizatsii. (Extended abstract of Doctor's thesis)*, Kyiv: In-t kibernetiky im. V.M. Hlushkova NAN Ukrainy.

Кравченко Виктор Викторович – д.ф.-м.н., профессор. профессор кафедры математического моделирования Херсонского национального технического университета, e-mail: kravchenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Онопенко Сергей Васильевич – аспирант кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета, e-mail: onopenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5196-5301.

Коваленко Александр Иванович – к.т.н., доцент, доцент кафедры информатики Херсонского государственного университета, e-mail: kovalenko@i.ua, ORCID: 0000-0002-6196-540.

ARTICLE SUBMISSION GUIDELINES
for scientific journal
'Applied Questions of Mathematical Modelling'

File parameters:

The manuscript must be prepared with help of Microsoft Word-2003/2016; **page format** – A4, **page orientation** – "book"; **boundaries:** left – 2,5 cm; right – 2,5 cm; top – 2,5 cm; bottom – 2,5 cm; **line spacing** – 1,0; **interval between paragraphs** "before", "after" – 0 pt.; **ident** "left", "right" – 0 pt.; **ident of first line** – 1,25 cm.

Required elements of the article:

Attention! Unit 'Authors Details', 'Article Title', 'Abstract', and 'Keyword Lis't are presented in THREE languages (Ukrainian, English, Russian) in the same format.
The first abstract is given in the language of the article.
The text of the annotations in all three languages should be identical.
Annotation size is at least 1800 characters without spaces.

- **index UDK** in the top left corner of the page (Times New Roman, 12 pt.), **is specified once**;
- **the initials and surname of author (authors)** in capital letters by article language (Times New Roman, 12 pt., alignment – right-aligned) (The authors' full name is translated from Ukrainian into English);
- **full name of the organization**, in which author works (Times New Roman, 10 pt., right-aligned);
- *empty line* (Times New Roman, 12 pt.);
- **the title of the article** in capital letters, centered (Times New Roman, 12 pt., bold);
- *empty line* (Times New Roman, 12 pt.);
- **abstract** in article language no less than 500 symbols (Times New Roman, 12 pt., italic);
- **a list of key words** that begins with the words: "*Keywords:*" (Times New Roman, 12 pt., italic);
- *empty line* (Times New Roman, 12 pt.);

Description of Main Material of Research

The main text (Times New Roman, 12 pt.), which, in accordance with the requirements of MES of Ukraine, must contain the following selected items:

- Problem Statement;
- Analysis of Recent Researches and Publications;
- Purpose of the Study;
- Description of Main Material of Research;
- Conclusions;
- References.
- **information about the authors (see A Sample of the Article).**

Додаткові вимоги до елементів статті:

- **Pictures:** the captions under the pictures – Times New Roman, 10 pt., bold;
- **Formulas:** for typing formulas use only equation editor Microsoft Equation 3.0 or MathType; formula is on the line center; the numbering of formulas is on the right edge.
Sizes by default: Full – 12 pt; Subscript/Superscript – 7 pt; Sub-Subscript/Superscript – 5 pt; Symbol – 18 pt; Sub-symbol – 12 pt.
- **Programs:** for a set of fragments of the programs one should use the fonts Courier New (Courier);
- **References:** references for article in English is made in accordance with APA Style.

We suggest you use the following resources for transliteration:

- transliteration from Ukrainian: <http://ukrlit.org/transliteratsiia>
- transliteration from Russian: <http://translate.meta.ua/ru/translit/>

A SAMPLE OF THE ARTICLE

(The sample is composed of excerpts from various publications, the authors are fictitious personalities)

UDC XXX.XX

V.V. KRAVCHENKO, S.V. ONOPENKO
Kherson National Technical University
O.I. KOVALENKO
Kherson State University

THE PROPERTIES OF SCHEDULE CONSTRUCTION PROCEDURE

The properties of the schedule construction procedure, which formalizes the card method for manual scheduling, are considered. In the general formulation it is a process of ordering a certain finite set of events in time under resource and other constraints ...

Keywords: the schedule construction procedure; card method...

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО
Херсонський національний технічний університет
О.І. КОВАЛЕНКО
Херсонський державний університет

ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ

Розглянуті властивості процедури побудови розкладу, яка формалізує картковий метод ручної побудови розкладу. У загальній постановці вона є процесом упорядкування деякої скінченної множини подій в часі за умов ресурсних та інших обмежень...

Ключові слова: процедура побудови розкладу; картковий метод...

В.В. КРАВЧЕНКО, С.В. ОНОПЕНКО
Херсонський національний технічний університет
А.І. КОВАЛЕНКО
Херсонський державний університет

СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ

Рассмотрены свойства процедуры построения расписания, которая формализует карточный метод ручного составления расписаний. В общей постановке она является процессом упорядочивания некоторого конечного множества событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений ...

Ключевые слова: процедура построения расписания; карточный метод...

Problem Statement

The task of scheduling is one of the most common tasks that every person solves almost every day. In a general setting, it is a process of ordering a finite set of events over time under resource and other constraints.

Analysis of Recent Researches and Publications

An analysis of existing methods for solving the problem of classes scheduling shows that the solution of tasks from the theory of schedules has a known complexity. In content, these tasks belong to the class of combinatorial ones, for which dimension is essential ...

Purpose of the Study

The purpose of this study is an automation of classes scheduling for the distance learning system, taking into account the workload of the teaching staff. The quality of training, its economic efficiency, the convenience of students teaching and the work of the faculty members depends on a well-established schedule.

...

Conclusions

During the execution of the research, our own mathematical method was developed for scheduling, namely, a number of restrictions were determined that are taken into account when scheduling, the objective function was created to assess suitability ...

References

1. Ibrahim, R. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press.
2. Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenko, V. P. (2015). Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*, **90**, 12–22. DOI: 10.1142/S0219455415500765
3. Gultom, J. H., Harsono, M., Khameswara, T. D., & Santoso, H. (2017). Smart IoT Water Sprinkle and Monitoring System for Chili Plant. Proceedings of the *International Conference on Electrical Engineering and Computer Science (ICECOS)*. (Indonesia, Palembang, August 22-23, 2017). Palembang: Book Publishing, pp. 212–216. DOI: 10.1109/ICECOS.2017.8167136
4. Tymofiiieva, N. K. (2007). *Theoretical and Numerical Methods for Solving Combinatorial Optimization Problems*. (Extended abstract of Doctor's thesis), Kyiv: V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine.

...

Kravchenko Victor Viktorovich – Doctor of Engineering Science, professor, professor at the Department of Mathematical Modelling of Kherson National Technical University, kravchenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4107-8141.

Onopenko Serhii Vasylovych – postgraduate student at the Department of Technical Cybernetics of Kherson National Technical University, onopenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5196-5301.

Kovalenko Oleksandr Ivanovych – PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Department of the Informatics of Kherson State University, kovalenko@yandex.ua, ORCID: 0000-0002-6196-540.

ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Відповідальний за випуск	Хомченко Анатолій Никифорович, д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України
Технічний редактор	Литвиненко Олена Іванівна к.т.н., доцент
Макетування	Омельчук Антон Анатолійович

Свідоцтво про державну реєстрацію засобу масової інформації –
серія КВ № 23529-13369Р от 03.08.2018

Підписано до друку 29.05.2020 р. Формат 60x84/8 Папір офсетний.
Ум. друк. аркушів 30. Замовлення № 8/0820. Наклад 120 прим.

© Херсонський національний технічний університет 2020

Адреса редакції: 73008, м. Херсон, Бериславське шосе, 24, корп. 3,
каб. 425, тел. (0552) 32-69-95. E-mail: aqmm@kntu.net.ua

Видавництво та друк: «ОЛДІ-ПЛЮС»
вул. Паровозна, 46-А, м. Херсон, 73034
Свідоцтво ДК № 6532 від 13.12.2018 р.

Тел.: +38 (0552) 399-580, +38 (098) 559-45-45,
+38 (095) 559-45-45, +38 (093) 559-45-45
Для листування: а/с 20, м. Херсон, Україна, 73021
E-mail: office@oldiplus.ua