ISSN 2618-0332 (print)
ISSN 2618-0340 (online)

Міністерство освіти і науки України

Херсонський національний технічний університет

ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Т. 6, №2

Рекомендовано до друку Вченою радою
Херсонського національного технічного університету
(протокол № 6 від 26 грудня 2023 року)

Журнал включений до Реєстру наукових фахових видань України категорії Б
На підставі Наказу МОН України від 17 березня 2020 року № 409

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:
Google Scholar, Index Copernicus International World of Journals, CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky)

Видавничий дім
«Гельветика»
2023

Редакційна рада

Головний редактор
Астіоненко І.О.
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри загальноосвітніх, гуманітарних та природничих дисциплін Херсонського національного технічного університету

Заступники головного редактора
Хомченко А.Н.
д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України,
професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили (м. Миколаїв)

Литвиненко О.І.
к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова

Відповідальний секретар
Омельчук А.А.
к.т.н., провідний фахівець кафедри комп'ютерних та інформаційних технологій і систем Державного податкового університету

Члени редакційної колегії за спеціальностями:

Іноземні фахівці

Бабічев С.О.	**к.т.н., доцент (Чехія)**
Гучек П.Й.	**д.т.н., доцент (Польща)**

113 – Прикладна математика

Астіоненко І.О.	к.ф.-м.н., доцент
Гвоздева І.М.	д.т.н., професор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., доцент
Ляшенко В.П.	д.т.н., професор
Миргород В.Ф.	д.т.н., доцент
Різник В.В.	д.т.н., професор
Стрельнікова О.О.	д.т.н., професор
Хомченко А.Н.	д.ф.-м.н., професор

122 – Комп’ютерні науки

Борисенко В.Д.	д.т.н., професор
Ванін В.В.	д.т.н., професор
Вірченко Г.А.	д.т.н., професор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., професор
Гумен О.М.	д.т.н., професор
Корчинський В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко В.І.	д.т.н., професор
Мартин Є.В.	д.т.н., професор
Несвідомін В.М.	д.т.н., професор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., професор
Устенко С.А.	д.т.н., професор
Шоман О.В.	д.т.н., професор

126 – Інформаційні системи та технології

Аль-Амморі А.Н.	д.т.н., професор
Баклан І.В.	к.т.н., доцент
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Левикін В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко О.І.	к.т.н., доцент
Мороз Б.І.	д.т.н., професор
Стеценко І.В.	д.т.н., професор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., професор

151 – Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології

Алексєєв М.О.	д.т.н., професор
Головко В.І.	д.т.н., професор
Кондратець В.О.	д.т.н., професор
Мещеряков Л.І.	д.т.н., професор
Омельчук А.А.	к.т.н.
Осадчий С.І.	д.т.н., професор
Рудакова Г.В.	д.т.н., професор

Інші спеціальності

Дудченко О.М.	к.ф.-м.н., доцент
Кузьмич В.І.	к.ф.-м.н., доцент
Літвінова М.Б.	д.пед.н., к.ф.-м.н., професор

ISSN 2618-0332 (print)
ISSN 2618-0340 (online)

Ministry of Education and Science of Ukraine

Kherson National Technical University

APPLIED QUESTIONS OF MATHEMATICAL MODELLING

V. 6, №2

Recommended for publication by the Academic Council of
Kherson National Technical University
(Minutes No 6 on 26th December 2023)

The journal is included in the scientometric bases, electronic libraries and repositories:
Google Scholar, Index Copernicus International World of Journals, CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

Publishing House
"Helvetica"
2023

Editorial Board

Editor-in-Chief
Astionenko I.O.
Ph.D., Associate Professor, Associate Professor at the Department of General Education, Humanities and Natural Science Disciplines of Kherson National Technical University

Deputies Editor-in-Chief
Khomchenko A.N.
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, Professor at the Department of Intelligent Information Systems of the Petro Mohyla Black Sea National University

Lytvynenko O.I.
Ph.D., Associate Professor, Associate Professor at the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines of the Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding

Executive Secretary
Omelchuk A.A.
Ph.D., Senior Specialist at the Department of Computer and Information Technologies and Systems of the State Tax University

Members of Editorial Board by Specialties:

Foreign Specialists

Babichev S.O.	Ph.D., Associate Professor (Czech Republic)
Huchek P.Y.	Doctor of Engineering Science, Associate Professor (Republic of Poland)

113 – Applied Mathematics

Astionenko I.O.	Ph.D., Associate Professor
Hvozdeva I.O.	Doctor of Engineering Science, Professor
Hnatushenko V.V.	Doctor of Engineering Science, Associate Professor
Liashenko V.P.	Doctor of Engineering Science, Professor
Myrhorod V.F.	Doctor of Engineering Science, Associate Professor
Riznyk V.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Strelnikova O.O.	Doctor of Engineering Science, Professor
Khomchenko A.N.	Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

122 – Computer Science

Borysenko V.D.	Doctor of Engineering Science, Professor
Vanin V.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Virchenko H.A.	Doctor of Engineering Science, Professor
Hnatushenko V.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Humen O.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Korchynskyi V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Lytvynenko V.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Martyn Ye.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Nesvidomin V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Pylypaka S.F.	Doctor of Engineering Science, Professor
Ustenko S.A.	Doctor of Engineering Science, Professor
Shoman O.V.	Doctor of Engineering Science, Professor

126 – Information Systems and Technologies

Al-Ammori A.N.	Doctor of Engineering Science, Professor
Baklan I.V.	Ph.D., Associate Professor
Ben A.P.	Ph.D., Associate Professor
Levykin V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Lytvynenko O.I.	Ph.D., Associate Professor
Moroz B.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Stetsenko I.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Sherstiuk V.H.	Doctor of Engineering Science, Professor

151 – Automation and Computer Integrated Technologies

Aleksieiev M.O.	Doctor of Engineering Science, Professor
Holovko V.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Kondratets V.O.	Doctor of Engineering Science, Professor
Meshcheriakov L.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Omelchuk A.A.	Ph.D.
Osadchyi S.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Rudakova H.V.	Doctor of Engineering Science, Professor

Other Specialties

Dudchenko O.N.	Ph.D., Professor
Kuz'mich V.I.	Ph.D., Associate Professor
Litvinova M.B.	Doctor of Pedagogical Sciences, Ph.D. (physpcs and mathematics), Professor

ЗМІСТ

БІДА С.В., ЗОЦЕНКО М.Л., ПАВЕЛЬЄВА А.К., ЛАПІН М.І.
МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗСУВНОГО СХИЛУ ГОРИ «ПИВИХА» ПРИ ПРОВЕДЕННІ БЕРЕГОУКРІПЛЮВАЛЬНИХ ЗАХОДІВ НА КРЕМЕНЧУЦЬКОМУ ВОДОСХОВИЩІ..9

ГУМЕН О.М., РАЧЕК К.О.
НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ ТА МАШИННЕ НАВЧАННЯ У ОБРОБЦІ ДАНИХ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ КОСМІЧНОЇ ПОГОДИ.....19

GUMEN O.M., SELINA I.B.
MODELING OF A SAFE ELECTRICAL SUPPLY MODE FOR PRODUCTION PREMISES 24

ДАНИЛІНА Г.В., РАШЕВСЬКИЙ М.О., САМУСЕНКО П.Ф.
АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ СИСТЕМАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ.....30

ДЕГТЯРЬОВ К.Г., ВЄРУШКІН І.О., КРЮТЧЕНКО Д.В., СТРЕЛЬНІКОВА О.О., ЗАЙДЕНВАРГ О.Л., НАУМЕНКО Ю.В.
МЕТОД ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ.....39

ДЕГТЯРЬОВ К.Г., КРЮТЧЕНКО Д.В., ГНІТЬКО В.І., ВЄРУШКІН І.О., КОРНІЙЧУК М.Т.
КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА НЕЧІТКИХ УМОВ НАВАНТАЖЕННЯ.....49

КАГАДІЙ Т.С., ШПОРТА А.Г., БІЛОВА О.В., ЩЕРБИНА І.В., ГОВОРУХА В.Б.
ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ СТРИНГЕРУ ТА КРИВОЛІНІЙНОГО ОРТОТРОПНОГО НАПІВПРОСТОРУ....60

КРАСЮК Б.В.
РОЗРОБКА СППР ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БОРОТЬБИ З ВНУТРІШНІМ КОНФЛІКТОМ.....68

ЛЕНЮК О.М., НІКІТІНА О.М., ШИНКАРИК М.І.
МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТІ.....76

МАЗМАНІШВІЛІ О.С.
ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ РОЗПОДІЛІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ КВАДРАТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ, ВИЗНАЧЕНИХ НА РОЗВ'ЯЗКАХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....82

МИРОНЕНКО І.М., ЛИТВИНЕНКО В.В., ЄГУПОВ В.К.
МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ БЕТОНІВ ПРИ ЇХ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ.....90

МОСЬПАН Д.В., ЮРКО О.О., ПЕРЕКРЕСТ А.Л.
ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ РУХОМОГО ОБ'ЄКТА ЗА ПОСЛІДОВНІСТЮ ВІДЕОЗОБРАЖЕНЬ ЗАСОБАМИ LABVIEW.....96

МОСЬПАН Д.В., ЮРКО О.О., . ПЕРЕКРЕСТ А.Л
БІНАРІЗАЦІЯ ЗОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ОБ'ЄКТА В УМОВАХ НЕОДНОРІДНОГО ФОНУ ЗАСОБАМИ LABVIEW.....105

ПАВЛЕЦЬ О.Д., ДУБРОВІН В.І., ДЕЙНЕГА Л.Ю.
ДОСЛІДЖЕННЯ КОНКУРЕНТОСПРОМОЖНОСТІ РЕГІОНІВ УКРАЇНИ.....114

PETRYK M.R., MYKHALYK D.M., BREVUS V.M., GOYANYUK I.V.
HIGH-PERFORMANCE INFORMATION TECHNOLOGIES TO STUDY FILTRATION PROCESSES IN MEDIA WITH VARIABLE-SIZED NANOPOROUS PARTICLES.....122

ТКАЧЕНКО С.М.
КЕРУВАННЯ СКИДАЛЬНИМ ВІЗКОМ ПОРТОВОГО ЕЛЕВАТОРА ЯК НЕПОЗИЦІОНОВАНИМ МЕХАНІЗМОМ.....132

ХОМЧЕНКО А.Н., ЛИТВИНЕНКО О.І., ГУЧЕК П., АСТІОНЕНКО І.О.
«ДУТА» МОДА КВАДРАТНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА: КОГНІТИВНО-ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ.....140

CONTENTS

BIDA S.V., ZOTSENKO M.L., PAVELIEVA A.K., LAPIN M.I.
MODELLING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE LANDSLIDE SLOPE OF MOUNT PYVYKHA DURING BANK PROTECTION MEASURES AT THE KREMENCHUK RESERVOIR.....9

GUMEN O.M., RACHEK K.O.
NEURAL NETWORKS AND MACHINE LEARNING IN DATA PROCESSING FOR SPACE WEATHER FORECASTING.....19

GUMEN O.M., SELINA I.B.
MODELING OF A SAFE ELECTRICAL SUPPLY MODE FOR PRODUCTION PREMISES 24

DANYLINA G.V., RASHEVS'KYI M.O., SAMUSENKO P.F.
ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATIONS.....30

DEGTYAREV K.G., VIERUSHKIN I.A., KRIUTCHENKO D.V., STRELNIKOVA E.A., ZAYDENVARG O.L., NAUMENKO YU.V.
METHOD OF HYPER-SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS IN BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF FRACTURE MECHANICS.....39

DEGTYAREV K.G., KRIUTCHENKO D.V., GNITKO V.I., VIERUSHKIN I.A., KORNEICHUK M.T.
COMPUTER MODELING HYDROELASTIC VIBRATIONS OF STRUCTURE ELEMENTS UNDER FUZZY LOADING CONDITIONS.....49

KAGADIY T.S., SHPORTA A.H., BILOVA O.V., SCHERBINA I.V., GOVORUKHA V.B.
DYNAMIC INTERACTION OF STRINGER AND CURVILINEAR ORTHOTROPIC HALF-SPACE.....60

KRASIUK B.V.
DEVELOPMENT OF A DECISION SUPPORT SYSTEM TO MODEL THE PROCESS OF INFORMATION WARFARE WITH INTERNAL CONFLICT.....68

LENYUK O.M., NIKITINA O.M., SHYNKARYK M.I.
MODELING OF DIFFUSION PROCESSES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF EULER-BESSEL TYPE ON THE SEGMENT.....76

MAZMANISHVILI O.S.
COMPUTATIONAL ALGORITHMS FOR DISTRIBUTIONS OF INTEGRAL QUADRATIC FUNCTIONALS, DETERMINED BY SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS.....82

MYRONENKO I.M., LYTVYNENKO V.V., IEGUPOV V.K.
MECHANICAL PROPERTIES OF CONCRETE UNDER THEIR COMPLEX LOAD.....90

MOSPAN D.V., YURKO O.O., PEREKREST A.L.
DETERMINING THE SPEED OF A MOVING OBJECT BY SEQUENCE OF VIDEO IMAGES USING LABVIEW.....96

MOSPAN D.V., YURKO O.O., PEREKREST A.L.
IMAGE BINARIZATION TO FIND AN OBJECT IN CONDITIONS OF AN INHOMOGENEOUS BACKGROUND USING LABVIEW.....105

PAVLETS O.D., DUBROVIN V.I., DEYNEGA L.YU.
RESEARCH ON THE COMPETITIVENESS OF REGIONS IN UKRAINE.....114

PETRYK M.R., MYKHALYK D.M., BREVUS V.M., GOYANYUK I.V.
HIGH-PERFORMANCE INFORMATION TECHNOLOGIES TO STUDY FILTRATION PROCESSES IN MEDIA WITH VARIABLE-SIZED NANOPOROUS PARTICLES.....122

TKACHENKO S.M.
CONTROLLING THE PORT ELEVATOR DISCHARGE TROLLEY AS A NON-POSITIONED MECHANISM.....132

KHOMCHENKO A.N., LYTVYNENKO O.I., GUCHEK P., ASTIONENKO I.O.
"BLOWN" MODE OF A SQUARE FINITE ELEMENT: A COGNITIVE AND GRAPHICAL ANALYSIS.....140

УДК 624.131.23

С.В. БІДА
Полтавський державний аграрний університет
М.Л. ЗОЦЕНКО, А.К. ПАВЕЛЬЄВА
Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»
М.І. ЛАПІН
ТОВ «Єристівський гірничо-збагачувальний комбінат»

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗСУВНОГО СХИЛУ ГОРИ «ПИВИХА» ПРИ ПРОВЕДЕННІ БЕРЕГОУКРІПЛЮВАЛЬНИХ ЗАХОДІВ НА КРЕМЕНЧУЦЬКОМУ ВОДОСХОВИЩІ

Розглянуто стійкість зсувного схилу узбережжя Кременчуцького водосховища у межах якого знаходиться державний геологічний пам'ятник України – гора «Пивиха». Руйнування гори почалося після створення у кінці 1960-х років Кременчуцького водосховища. Неодноразово проводилось вивчення інженерно-геологічних умов ділянки узбережжя з метою розробки захисних заходів для збереження гори, однак завдяки руйнуючій діяльності хвиль узбережжя постійно руйнується і на ньому відбуваються зсувні процеси. Для вивчення можливості збереження гори Пивиха у сучасному стані були проведені інженерно-геологічні дослідження, що включали збирання та систематизацію раніше проведених вишукувань та проведення додаткових польових робіт і лабораторних випробувань зразків ґрунтів, відібраних по всій довжині узбережжя. Для більш детального вивчення проблеми стійкості узбережжя було проведено моделювання напружено-деформованого стану схилу з використанням програмного пакету Plaxis, призначеного для розрахунку стійкості та визначення деформацій геотехнічних споруд з використанням математичного апарату у вигляді методу скінчених елементів. Для моделювання ґрунтів використовується пружно-пластична задача, яка поставлена так, щоб властивості ґрунтового середовища, які враховуються в розрахунку, могли бути описані характеристиками, що визначаються за стандартними методиками. Метод скінчених елементів дозволяє створення розрахункової схеми, яка враховує будь-яке нашарування ґрунтів. Окрім того, Plaxis відзначається повнотою та ілюстративністю результатів розрахунків. За результатами моделювання визначені найбільш небезпечні зони виникнення зсувних процесів та параметри стійкості схилу по найбільш небезпечних профілях. На основі вивчення розташування зон з максимальними зсувними напруженнями у перерізах були отримані найбільш вірогідні положення площин ковзання ґрунтів, що складають схил. Значення коефіцієнтів стійкості схилу у критичному стані значно менші одиниці, що свідчить про аварійний стан даного схилу. Також визначені безпечні зони розташування техніки при проведенні берегоукріплювальних робіт з урахуванням відстані можливого переміщення масиву ґрунту від підніжжя схилу.

Ключові слова: зсув, коефіцієнт стійкості, моделювання.

S.V. BIDA
Poltava State Agrarian University
M.L. ZOTSENKO, A.K. PAVELIEVA
National University "Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic"
M.I. LAPIN
Yerystivo Mining and Processing Plant, LLC

MODELLING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE LANDSLIDE SLOPE OF MOUNT PYVYKHA DURING BANK PROTECTION MEASURES AT THE KREMENCHUK RESERVOIR

The authors study the stability of the landslide slope of the coast of the Kremenchuk reservoir, within which the state geological monument of Ukraine – Mount Pyvykha – is located. The destruction of the mount began after the Kremenchuk reservoir was created in the late 1960s. The engineering and geological conditions of the coastline have been repeatedly studied to develop protective measures to preserve the mount. However, due to the destructive activity of waves, the coastline is constantly being destroyed, and landslides are occurring. Engineering and geological studies were carried out to study the possibility of preserving Mount Pyvykha in its current state, including the collection and systematisation of previously conducted surveys and additional fieldwork and laboratory testing of soil samples collected along the entire length of the coast. For a more detailed study of the coastal stability problem, the stress-strain state of the slope was modelled using the Plaxis software package designed to calculate the stability and determine the deformations

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

of geotechnical structures using the finite element method. Soil modelling is based on an elastic-plastic problem so that characteristics determined by standard methods can describe the properties of the soil environment considered in the calculation. The finite element method allows for creating a design scheme that considers any soil layering. In addition, Plaxis is distinguished by the completeness and illustrative nature of the calculation results. Based on the modelling results, the most dangerous zones of landslide processes and slope stability parameters along the most hazardous profiles were determined. Based on the study of the location of the zones with maximum shear stresses in the cross-sections, the most probable positions of the sliding planes of the soils that make up the slope were obtained. The values of the slope stability coefficients in the critical state are significantly less than one, which indicates the emergency condition of this slope. Safe zones for equipment location during bank protection works were also determined, considering the distance of possible movement of the soil mass from the foot of the slope.

Key words: shear, stability coefficient, modelling.

Постановка проблеми

На лівому березі Кременчуцького водосховища поблизу с.м.т. Градизьк розташована одна із найбільш мальовничих місцин не лише Полтавщини, а і усієї України – гора Пивиха. Гора має давню історію. За переказами, колись тут було поселення Пива, що належало боярам Пивам. У 1489 році король Польщі Казимир IV подарував землі і різні угіддя, розташовані довкола гори Пивихи, Київському Пустинно-Миколаївському монастирю, ченці якого у XVI ст. заснували тут Пивгородський Миколаївський монастир. Монастир на Пивисі став релігійно-політичним осередком українського народу у визвольній війні за свою державність. Однак пізніше він був зруйнований. У 2008 році Пивиха представляла Полтавщину на всеукраїнському конкурсі «Сім природних чудес України». Естетична привабливість гори Пивиха є не меншою, ніж привабливість відомих місць кримського узбережжя. На жаль, останнім часом все активніше проходить руйнування гори, у чому домінуючу роль відіграють антропогенні фактори.



Рис. 1. Загальний вигляд гори Пивиха

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Після зведення в кінці 1960-х років Кременчуцького водосховища Пивиха поступово руйнується. Щорік вода поглинає близько 7 метрів гори. Сьогодні вже розмито понад 600 метрів Пивихи. Люди знаходять залишки древнього монастиря, які вимиваються дніпровськими хвилями. Тепер гору всіляко прагнуть зберегти. Вздовж берега проводяться укріплювальні роботи, що складаються, в основному, з протиерозійних насаджень.

Дослідженням феномену гори Пивихи у кінці XIX і на початку XX ст. присвятили свою увагу практично всі без винятку відомі вчені-геологи. У ті часи гору Пивиху разом з такими відомими природними об’єктами, як Канівські дислокації, Висачківський горб, гора Калитка, відносили до складу «лінії Карпінського», що об’єднувала у єдиний тектонічний ланцюг Карпати, складчастий Донбас, Кавказ та Мангишлак [1]. На думку Д. Соболєва, гора Пивиха є прикладом льодовикової препарації поверхні. Серед численних робіт про Пивиху початку минулого сторіччя виділяються публікації геологів В. Різниченка та Б. Лічкова. Пізніші (на

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

початку 1970-х років) узагальнення були виконані колективом Інституту геологічних наук НАН України. Ця робота входила в серію робіт з вивчення Чорнобильських та Кам'янка-Ірпінських дислокацій. Відносно геоструктурної обумовленості положення дислокацій гори Пивихи та інших наприкінці 1980-х років було висунуте припущення про їхній зв'язок з лінійними морфоструктурними зонами, в зону впливу яких входять різні дислоковані ділянки долини Дніпра. У подальшому проводились роботи щодо детального вивчення інженерно-геологічних умов території та розробки проекту укріплення берегів Кременчуцького водосховища [2].

У відслоненнях Пивихи присутні мергель, глина, пісок, кристалічний гіпс. У регіоні лише на території Пивихи є місця виходу на денну поверхню блакитного мергелю – рідкісної вапнякової породи, яка використовується в будівництві.

Для вивчення можливості збереження гори Пивиха у сучасному стані були проведені інженерно-геологічні дослідження, що включали збирання та систематизацію раніше проведених вишукувань та проведення додаткових польових робіт і лабораторних випробувань зразків ґрунтів, відібраних по всій довжині узбережжя.

В орографічному відношенні територія розташована на кордоні Придніпровського підвищення та лівобережної Дніпровської западини. В геоморфологічному відношенні територія, яка захищається – це уступ у надзаплавній терасі р. Дніпро з позначками поверхні Землі 95–150 м.

В геологічній будові ділянки приймають участь відклади четвертинної та палеогенової систем.

Відклади четвертинної системи складаються комплексом алювіальних піщано-глинистих відкладів, суглинками та глинами четвертинного віку, льодовиковими, еолово-делювіальними лесовими ґрунтами, загальною потужністю 25–30 м. Підстилаються четвертинні відклади зеленувато-сірими і світло-голубими мергелями київської світи, потужністю більш ніж 46 м.

У нижній частині схилу, де проводиться берегоукріплення, процесами акумуляції наносів водосховища утворилася обмілина, яка складена пісками потужністю 4–10 м.

Мета дослідження

Метою проведених досліджень було визначення стану схилу узбережжя Кременчуцького водосховища та надання рекомендацій щодо безпечного проведення робіт по берегоукріпленню.

Викладення основного матеріалу дослідження

На ділянці для детального вивчення було виділено 12 створів (профілів), за якими виконувалися роботи з визначення топографії схилу, нашарувань грунтів, що його складають, а також фізико-механічних властивостей ґрунтів. Фрагмент схеми із створами, за якими виконувались дослідження, наведений на рис. 2.

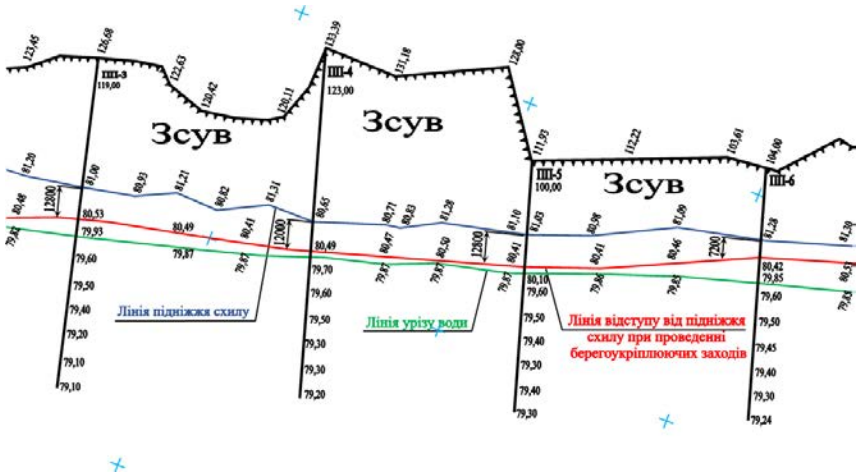


Рис. 2. Фрагмент схеми із створами ПП-3, ПП-4, ПП-5, ПП-6

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

У результаті проведення вишукувальних робіт, вивчення архівних та фондових матеріалів встановлено таке нашарування ґрунтів:

ІГЕ-1 – ґрунтово-рослинний шар потужністю 0,1–0,3 м;

ІГЕ-2 − пісок жовто-сірий, дрібний, середнього ступеня насичення водою, середньої щільності; потужністю 4–8 м;

ІГЕ-7 – пісок дрібний темно-сірий, середньої щільності, малого ступеню водонасичення, потужністю 2–4 м;

ІГЕ-11^{а} та **ІГЕ-12^{а}** – суглинки, жовто-коричневі, напівтверді, потужністю 2,0–3,2 м;

ІГЕ-13^{а} глина, коричнева, тверда, потужністю 15–20 м;

ІГЕ-13 − суглинок палевий, твердий, просадочний, потужністю 2,8–3,1 м;

ІГЕ- 13^{б} – пісок, пилуватий, жовто-сірий, середньої щільності, малого ступеню насичення водою, потужністю 5–6 м;

ІГЕ-13^{в} – супісок, твердий, потужністю 2–3 м;

ІГЕ-22 – мергель, глина напівтверда, потужністю більше 46 м.

Гідрогеологічні умови території характеризуються наявністю постійного безнапірного водоносного горизонту ґрунтового типу, розвантаження якого відбувається у бік водосховища за улоговинами у водотривкому шарі. Водотривким шаром служить ІГЕ-22.

Фізико-механічні характеристики грунтів визначалися на основі вивчення архівних і фондових матеріалів та у лабораторних умовах методами визначення довготривалого та структурного зчеплення [3–9].

В процесі рекогносцировки ділянки схилу візуально встановлено його стан. На фото (рис. 3) чітко видно, що схил зсувний. Про це свідчать численні заколи, місцеві відділення окремих стовпів ґрунту. У підніжжі схилу розташовані масивні брили продуктів руйнування, які ще не розмиті водою. Це підтверджує безперервність процесу руйнування схилу і, внаслідок цього, велику небезпеку при знаходженні в зоні дії зсуву людей і будівельної техніки.



Рис. 3. Зсувні процеси у вигляді зсувів-обвалів блоків порід

Для визначення стійкості схилу було застосовано програмний комплекс Plaxis.

Plaxis – програмний пакет, який призначений для розрахунку стійкості та визначення деформацій геотехнічних споруд з використанням математичного апарату у вигляді методу скінчених елементів. Проектування геотехнічних споруд вимагає складання дискретних моделей для моделювання нелінійної, реологічної поведінки ґрунту. Оскільки ґрунтові умови представлені нашаруванням порід з різними властивостями і характеристиками, а самі породи

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

є трифазними системами, необхідні спеціальні розрахунки для моделювання порового тиску у різних варіантах. Задачу було реалізовано за допомогою комплексу Plaxis, адже він володіє спеціальними можливостями для роботи з багатьма аспектами складних геотехнічних споруд.

Plaxis може бути застосований для вирішення більшості задач у сфері традиційної механіки ґрунтів. Він охоплює питання спорудження та експлуатації різних видів фундаментів, виконання земляних робіт (влаштування котлованів, траншей, насипів тощо), будівництва підпірних стін, розрахунку стійкості укосів та схилів, розрахунків дорожнього насипу (в тому числі і на динамічний вплив), прокладання тунелів та інших робіт у сфері геотехніки.

Програмний комплекс має всі можливості вводу-виводу інформації на екран у зручному для користувача інтерфейсі (у табличній та графічній формі – у вигляді графіків та рисунків). Він також дозволяє врахувати нелінійність процесів деформування основи, використовуючи для цього пружно-пластичну модель ґрунту.

У постановці пружно-пластичної задачі прийняті наступні передумови:

– враховані прояви нелінійності містять пластичну деформацію формозміни при складному напруженому стані, безперешкодне деформування при розтязі, зсув по заданій поверхні;

– при складному напруженому стані (стиску зі зрушенням) загальні деформації включають у себе лінійну (пружну) та пластичну частини, причому пластична складова деформацій виникає після досягнення напруженим станом границі міцності і відповідності з умовою Мора-Кулона для плоскої задачі:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\sin\phi - c \cdot \cos\phi = 0 . \qquad (1)$$

Дискретизація розрахункової області при розв'язанні нелінійної задачі виконується за допомогою методу скінченних елементів.

Програмний комплекс Plaxis дозволяє розглядати напружено-деформований стан при одночасному прикладанні всіх навантажень або ж застосувати покрокове прикладання навантаження. При проведенні розрахунків може бути врахований вихідний напружений стан, який досягнутий системою до прикладання навантаження.

У розрахунках використовуються скінчені елементи у вигляді пружно-пластичних пластин трикутного перерізу. Компоненти напружень визначаються тільки в центрах континуальних скінчених елементів, що моделюють ґрунт, переміщення – в вузлах сітки.

Інформація що вводиться складається із наступних масивів вихідних даних:

– координати вузлів;

– в'язі (вузли із нульовими переміщеннями та вузли з рівними переміщеннями);

– опис навантажень (величина, напрямок та точки (вузли) до яких прикладається);

– опис скінчених елементів (номери вузлів, площі перерізів та моменти інерції стрижнів; фізико-механічні характеристики ґрунтів, кут нахилу поверхні сковзання, природний та вихідний напружений стан);

– максимальна кількість циклів ітерацій.

На друк видаються наступні результати розрахунку:

– переміщення вузлів;

– компоненти напружень в центрах континуальних скінчених елементів;

– поздовжні, поперечні сили та моменти на кінцях стрижневих елементів.

Особливістю методу що розглядається є виконання розрахунків по граничних станах обох груп на одній розрахунковій схемі при одній моделі ґрунту. Практично розрахунок може бути виконаний шляхом поетапного навантаження: діючим навантаженням надається величина, які відповідає розрахунку за граничними станами другої групи, потім сили збільшуються до розмірів розрахункових найбільш невигідних величин.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

Центральним питанням розрахунку основ та ґрунтових споруд за граничними станами першої групи є оцінка можливості втрати міцності та стійкості внаслідок розвитку значних зрушень та допустимості пластичних деформацій ґрунту. Збіг ітераційного процесу, тобто вирішення, яке задовольняє всі встановлені вимоги (за допустимою нев'язкою), свідчить про отримання статичного напруженого стану, що виключає втрату міцності та стійкості.

Пружно-пластична задача, що розглядається, поставлена так, щоб властивості ґрунтового середовища, які враховуються в розрахунку, могли бути описані реально визначеними характеристиками. При підготуванні вихідних даних пружно-пластичного розрахунку необхідні шість основних параметрів кожного шару: питома вага γ, модуль деформації E, коефіцієнт Пуассона ν, кут внутрішнього тертя φ, питоме зчеплення c, параметр дилатансії.

Застосування коефіцієнтів надійності по ґрунту лише для параметрів γ, φ, c та E при використанні середніх характеристик достатньо, щоб забезпечити необхідну довірчу вірогідність результатів розрахунку.

Розрахунок стійкості схилу проводиться за такою розрахунковою схемою, що передбачає зміну характеристик міцності ґрунту доти, доки схил не перейде в стан граничної рівноваги. При такому підході коефіцієнт стійкості схилу визначається як відношення вихідних характеристик міцності до їхніх граничних значень:

$$K_{st} = \frac{c + \sigma \cdot \tan\phi}{c_r + \tan\phi_r}, \tag{2}$$

де c і φ – вхідні параметри міцності, σ – нормальна складова фактичного напруження. Параметри c_r і φ_r – параметри приведеної міцності, за яких забезпечується стійкість схилу. У такому підході зчеплення й тангенс кута внутрішнього тертя приводяться в такій же пропорції:

$$\frac{c}{c_r} = \frac{\tan\varphi}{\tan\varphi_r} = \sum M_{sf}. \tag{3}$$

Приведення параметрів міцності контролюється загальним множником $\sum M_{sf}$. Цей параметр збільшується при поетапному методі доти, поки не відбудеться руйнування. Потім коефіцієнт надійності визначається як значення $\sum M_{sf}$ при руйнуванні, за умови, що при руйнуванні маємо більш-менш постійне значення для числа послідовних ітерацій.

Розрахунок стійкості схилу в районі селища Градизьк Глобинського району Полтавської області виконаний для визначення безпечної відстані від підніжжя схилу для проведення берегоукріплювальних робіт. Безпечна відстань у даному випадку визначалася з умови втрати стійкості схилу чи можливих обвалів ґрунту при зволоженні схилу. Тобто зону розміщення робітників та механізмів для влаштування берегоукріплювальних конструкцій необхідно розміщувати на такій відстані від підніжжя схилу, яка б забезпечила їх безпечну роботу та експлуатацію при можливому виникненні обвалів чи зсувів.

На момент проведення даної роботи на схилі спостерігались зсувні явища та обвали ґрунту з переміщенням масивів ґрунту на відстань 3–5 м від підніжжя. Проте при несприятливому поєднанні деяких факторів масив ґрунтів, що обмежений схилом, може перейти у неурівноважений стан та втратити стійкість. При цьому переміщення ґрунту може відбутися на більшу відстань.

Основними причинами втрати стійкості є:

– влаштування недопустимо крутого укосу чи підрізання схилу, що знаходиться в стані, близькому до граничного;

– збільшення зовнішнього навантаження (зведення споруд, складування матеріалів тощо);

– зміна напружено-деформованого стану (збільшення питомої ваги ґрунту при збільшенні його вологості чи навпаки, вплив виважуючої дії води на ґрунти);

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

– зниження розрахункових характеристик міцності ґрунту та його опору зрушенню внаслідок його зволоження;

– прояв гідродинамічного тиску, сейсмічних сил та різного роду динамічних дій (рух транспорту, забивання паль тощо).

В рамках проведення роботи було виконано розрахунок схилу, що розташований в районі селища Градизьк Глобинського району Полтавської області за 12 профілями. Розрахункова схема включає область перерізу схилу із відповідними нашаруваннями грунтів та граничними умовами. Як приклад на рис. 4 представлена розрахункова схема поперечного профілю ПП-5, з розбиттям сіткою скінчених елементів.

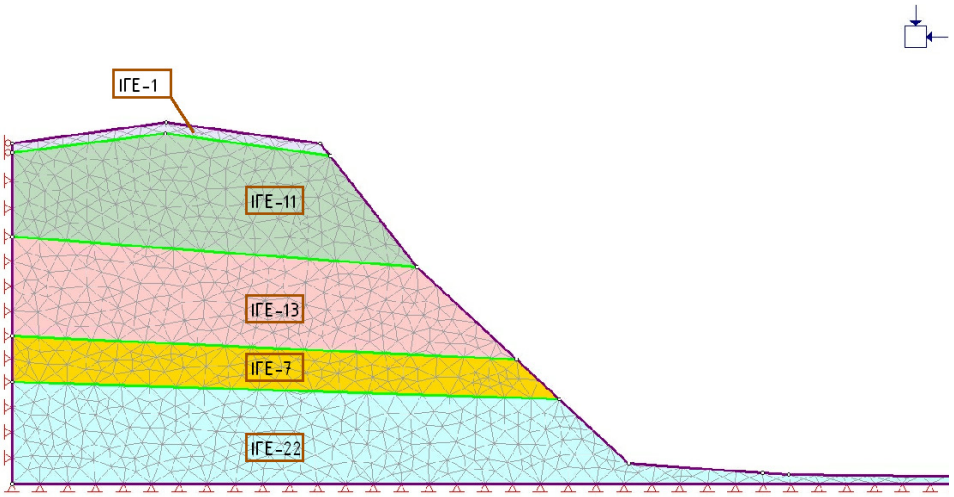


Рис. 4. Розрахункова схема профілю ПП-5

На рис. 5 представлена деформована розрахункова схема, отримана для випадку зсуву мас ґрунту при коефіцієнті стійкості K_{st} = 1,0, яка дає можливість визначити відстань переміщення ґрунту у прибережній зоні.

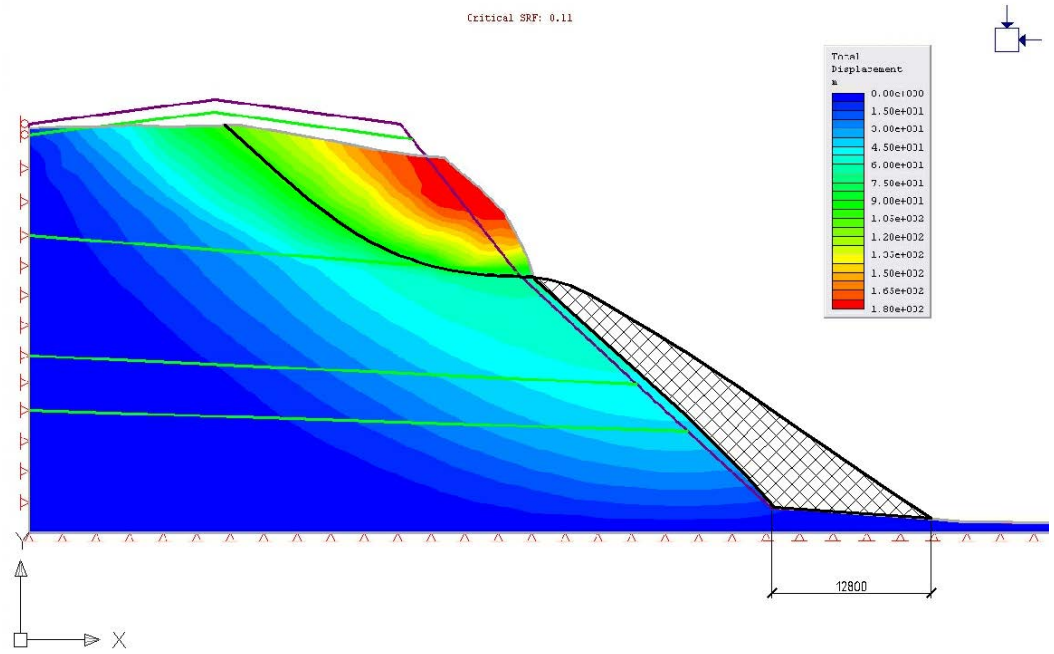


Рис. 5. Переміщення мас ґрунту у результаті зсуву (профіль ПП-5)

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

Результати розрахунків по всіх профілях представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення стійкості схилу та максимальні переміщення масиву ґрунту від його підніжжя

Номер поперечного профілю	Коефіцієнт стійкості схилу у критичному стані, K_{st}	Максимальні переміщення масиву ґрунту від підніжжя схилу при коефіцієнті стійкості схилу K_{st}=1,0, м
ПП-1	**0,23**	**25,8**
ПП-2	**0,10**	**12,4**
ПП-3	**0,17**	**12,8**
ПП-4	**0,18**	**12,0**
ПП-5	**0,11**	**12,8**
ПП-6	**0,19**	**7,2**
ПП-7	**0,12**	**10,6**
ПП-8	**0,12**	**15,1**
ПП-9	**0,09**	**6,8**
ПП-10	**0,14**	**11,2**
ПП-11	**0,14**	**9,0**
ПП-12	**0,23**	22,7

Критичні значення коефіцієнту стійкості по розрізах схилу значно менші одиниці, що свідчить про аварійний стан даного схилу.

Таким чином в результаті проведених розрахунків за 12 розрахунковими схемами, що відповідають 12-ти профілям схилу отримані наступні дані:

– коефіцієнти стійкості схилу;

– найбільш зсувонебезпечні зони за результатами розрахунків по 12 перерізам;

– безпечна відстань від підніжжя схилу для проведення берегоукріплювальних робіт.

На основі вивчення розташування зон з максимальними зсувними напруженнями у перерізах були отримані найбільш вірогідні положення площин ковзання ґрунтів, що складають схил.

Висновки

У результаті проведених досліджень можна зробити такі основні висновки:

1. У геологічній будові ділянки схилу простежуються відклади четвертинної та палеогенової систем. Відклади четвертинної системи складаються комплексом алювіальних піщано-глинистих відкладів, представлених суглинками та глинами четвертинного віку льодовикового, еолово-делювіального походження, загальною потужністю 25–30 м. Підстилаються четвертинні відклади зеленувато-сірими і світло-блакитними мергелями київської світи, потужністю більш ніж 46 м. У нижній частині схилу, де проектується берегоукріплення, процесами акумуляції наносів водосховища утворилася обмілина, яка складена пісками потужністю 4–10 м.

2. У процесі рекогносцировки ділянки схилу візуально встановлено, що його слід класифікувати відповідно до ДБН В.1.1-46:2017 [3] як зсувний. Про це свідчать численні заколи, місцеві відділення окремих стовпів ґрунту. У підніжжі схилу спостерігаються масивні брили продуктів руйнування, які ще не розмиті водою, це підтверджує безперервність процесу руйнування схилу і, внаслідок цього, велику небезпеку при знаходження в зоні дії зсуву людей і будівельної техніки.

3. Відповідно до технічного завдання замовника необхідно забезпечити безпечне проведення будівельних робіт з укріплення берегів водосховища у конкретних умовах. Для цього необхідно було визначити зону у підніжжя схилу, на площу якої вірогідно обвалення гірських порід внаслідок зсувних процесів.

4. Розташування небезпечної зони, у межах якої можливі зрушення і обвали гірських порід схилу, визначено шляхом математичного моделювання зсувних процесів схилу за допомогою програмного комплексу Plaxis, який використовує дискретну модель для моделювання

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

нелінійної, реологічної поведінки ґрунту. В розрахунках використані скінчені елементи трикутної форми. Компоненти напружень визначались тільки в центрах континуальних скінчених елементів, що моделюють ґрунт, переміщення – у вузлах сітки.

5. У результаті проведених досліджень на топографічній основі побудовано схему ділянки схилу берегу водосховища з визначенням на ній зони небезпеки, у межах якої можливі обвалення ґрунтів. У цій зоні заборонено перебування людей та усіх технічних засобів за виключенням тих, за допомогою яких в автоматичному режимі ведуться спостереження за станом схилу.

Список використаної літератури

1. Географічна енциклопедія України: у 3 т / редкол.: О. М. Маринич (відповід. ред.) та ін. К.: «Українська Радянська Енциклопедія» імені М. П. Бажана, 1989–1993.
2. Укріплення берега Кременчуцького водосховища біля с.м.т. Градизьк. Робочий проект. Гідрографічні роботи та інженерно-геологічні умови. 1035. 2/3 ТІ. Харківське відділення інституту «Гідропроект». 1991.
3. ДБН В.1.1-46:2017 Інженерний захист територій, будівель і споруд від зсувів та обвалів. Основні положення. Київ, 2017. 53 с.
4. ДБН В.1.2-14:2018 Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об’єктів. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд. Київ, 2018. 36 с.
5. ДБН В.1.1-45:2017 Будівлі і споруди в складних інженерно-геологічних умовах. Загальні положення. Київ, 2017. 35 с.
6. ДСТУ Б.В.2.1-2-96 (ГОСТ 25100-95). Ґрунти. Класифікація. Київ, 1997. 51 с.
7. ДСТУ Б.В.2.1-3-96 (ГОСТ 30416-96). Ґрунти. Лабораторні випробування. Загальні положення. Київ, 1997. 31 с.
8. ДСТУ Б.В.2.1-4-96 (ГОСТ 12248-96). Ґрунти. Методи лабораторного визначення характеристик міцності і деформативності. Київ, 1997. 107 с.
9. ДСТУ Б.В.2.1-5-96 (ГОСТ 20522-96). Ґрунти. Методи статистичної обробки результатів випробувань. Київ, 1997. 28 с.

References

1. Heohrafichna entsyklopediia Ukrainy: u 3 t (1989-1993). [Geographical encyclopedia of Ukraine: in 3 volumes]. Redkol.: O. M. Marynych (vidpovid. red.) ta in. K.: «Ukrainska Radianska Entsyklopediia» imeni M. P. Bazhana [in Ukrainian]
2. Ukriplennia bereha Kremenchutskoho vodoskhovyshcha bilia s.m.t. Hradyzk. Robochyi proekt. Hidrohrafichni roboty ta inzhenerno-heolohichni umovy (1991). [Fortification of the shore of the Kremenchug Reservoir near the village of Hradizik Working project. Hydrographic works and engineering and geological conditions]. 1035 2/3 . TI. Kharkivske viddilennia instytutu «Hidroproekt» [in Ukrainian]
3. DBN V.1.1-46:2017 Inzhenernyi zakhyst terytorii, budivel i sporud vid zsuviv ta obvaliv. Osnovni polozhennia (2017). [DBN V.1.1-46:2017 Engineering protection of territories, buildings and structures against landslides and collapses. Substantive provisions]. Kyiv. 53 s. [in Ukrainian]
4. DBN V.1.2-14:2018 Systema zabezpechennia nadiinosti ta bezpeky budivelnykh obiektiv. Zahalni pryntsypy zabezpechennia nadiinosti ta konstruktyvnoi bezpeky budivel i sporud (2018). [DBN V.1.2-14:2018 System for ensuring the reliability and safety of construction objects. General principles of ensuring the reliability and structural safety of buildings and structures]. Kyiv. 36 s. [in Ukrainian]
5. DBN V.1.1-45:2017 Budivli i sporudy v skladnykh inzhenerno-heolohichnykh umovakh. Zahalni polozhennia (2017). [DBN V.1.1-45:2017 Buildings and structures in difficult engineering and geological conditions. Terms]. Kyiv. 35 s. [in Ukrainian]

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

6. DSTU B.V.2.1-2-96 (HOST 25100-95). Grunty. Klasyfikatsiia (1997). [DSTU B.V.2.1-2-96 (GOST 25100-95). Soils. Classification]. Kyiv. 51 s.[in Ukrainian]
7. DSTU B.V.2.1-3-96 (HOST 30416-96). Grunty. Laboratorni vyprobuvannia. Zahalni polozhennia (1997). [DSTU B.V.2.1-3-96 (GOST 30416-96). Soils. Laboratory tests. Terms]. Kyiv. 31 s. [in Ukrainian]
8. DSTU B.V.2.1-4-96 (HOST 12248-96). Grunty. Metody laboratornoho vyznachennia kharakterystyk mitsnosti i deformatyvnosti (1997). [DSTU B.V.2.1-4-96 (GOST 12248-96). Soils. Methods of laboratory determination of strength and deformability characteristics]. Kyiv. 107 s. [inUkrainian]
9. DSTU B.V.2.1-5-96 (HOST 20522-96). Grunty. Metody statystychnoi obrobky rezultativ vyprobuvan (1997). [DSTU B.V.2.1-5-96 (GOST 20522-96). Soils. Methods of statistical processing of test results]. Kyiv. 28 s. [in Ukrainian]

Біда Сергій Васильович – к.т.н., доцент, доцент кафедри будівництва та професійної освіти Полтавського державного аграрного університету. E-mail: svbeda1965@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1597-9333.

Зоценко Микола Леонідович – д.т.н., професор, професор кафедри будівельних конструкцій Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка». E-mail: zotcenco@hotmail.com, ORCID: 0000-0003-1886-8898.

Павельєва Анна Костянтинівна – к.філол.н., доцент, доцент кафедри германської філології та перекладу Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка». E-mail: kunsite.zi@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2306-1928.

Лапін Микола Іванович – к.т.н., начальник технічного відділу управління з капітального будівництва і інфраструктури ТОВ «Єристівський ГЗК». E-mail: lapinnikolaj@outlook.com, ORCID: 0009-0007-7854-3426.

Bida Serhii Vasylovych – Ph.D in Technical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Construction and Professional Education of Poltava State Agrarian University. E-mail: svbeda1965@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1597-9333.

Zotsenko Mykola Leonidovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Building Structures of the National University “Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic”. E-mail: zotcenco@hotmail.com, ORCID: 0000-0003-1886-8898.

Pavelieva Anna Kostyantinovna – Ph.D in Philology, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Germanic Philology and Translation of the National University “Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic”. E-mail: kunsite.zi@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2306-1928.

Lapin Mykola Ivanovych – Ph.D in Technical Sciences, Head of the Technical Department of the Capital Construction and Infrastructure Department at Yeristovo Mining and Processing Plant LLC. E-mail: lapinnikolaj@outlook.com, ORCID: 0009-0007-7854-3426.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-1

УДК 514.18:004.8

О.М. ГУМЕН, К.О. РАЧЕК
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ ТА МАШИННЕ НАВЧАННЯ У ОБРОБЦІ ДАНИХ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ КОСМІЧНОЇ ПОГОДИ

Для прогнозування геомагнітних збурень досліджуються не лише емпіричні методи, але і аналітичні: статистичні методи, моделі на основі фізики глобального масштабу (магніто-гідродинамічні, МГД), методи, засновані на машинному навчанні або комбінації цих методів. Ця оглядова робота присвячена саме розробкам на основі штучного інтелекту та машинного навчання для вирішення проблем обробки даних геомагнітної активності і передбачення космічної погоди. Адже, незважаючи на те, що збір та попередньою обробкою даних сонячної та геомагнітної активності займається велика кількість обсерваторій та космічних місій з усієї Землі, цей процес продовжує кидати науковцям виклики, такі як шум у даних, прогалини у часових рядах та аномалії. Все це є неабиякою перешкодою для розвитку прогнозування космічної погоди, зокрема створення прогнозів у реальному часі, і потребує застосування нових методів, розробки алгоритмів, які аналізують швидкість сонячного вітру та корональних викидів, забезпечуючи ефективне прогнозування перед їх досягнення Землі, що є важливим, оскільки сонячний вітер може досягати Землі за дуже короткі проміжки часу.

Методи попередньої обробки даних включають вибір міток, роботу з відсутніми значеннями та стандартизацію даних. Важливо враховувати фізичні явища та адаптувати функції втрат для оптимального використання комп'ютерних систем у цьому контексті.

У статті згадані дві створені моделі для прогнозування індексу Dst (геомагнітні бурі). Перша модель використовує нейронну мережу з Long Short-Term Memory (LSTM), навчану на даних з 2012–2016 років. Ця модель має точність 83,47%. Друга модель, Dst Transformer (DSTT), розроблена для короткострокового прогнозування та використовує рівень уваги та байєсівський висновок. DSTT показує високу точність і враховує два типи невизначеностей в даних. Обидві моделі протестовані авторами та порівняні з іншими методами машинного навчання.

Машинне навчання дозволяє виявляти складні зв'язки та прогнозувати значення планетарних індексів на майбутнє, допомагаючи у попередженні можливих негативних впливів геомагнітних бурь на технології та інфраструктуру, і навіть просто у перспективі надає людям досвід вирішення складних наукових проблем, що може посприяти новим відкриттям, винаходам і опануванню інших фізичних явищ.

Ключові слова: нейронні мережі, машинне навчання, геомагнітні бурі, геомагнітні індекси, Data Science.

O.M. GUMEN, K.O. RACHEK
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

NEURAL NETWORKS AND MACHINE LEARNING IN DATA PROCESSING FOR SPACE WEATHER FORECASTING

To forecast geomagnetic storms, researchers explore not only empirical methods but also analytical approaches, including statistical methods, models based on global-scale physics (magnetohydrodynamic, MHD), methods based on machine learning, or combinations of these. This review is dedicated to developments in artificial intelligence and machine learning aimed at addressing challenges in processing data on geomagnetic activity and predicting space weather. Despite numerous observatories and space missions worldwide collecting and preprocessing data on solar and geomagnetic activity, this process continues to pose challenges to scientists, such as data noise, gaps in time series, and anomalies. All of these are significant hindrances to the development of space weather forecasting, especially in creating real-time predictions, requiring the application of new methods and algorithm development that analyze solar wind speed and coronal mass ejections, ensuring effective forecasting before they reach Earth, which is crucial since solar wind can reach Earth in very short time intervals.

Data preprocessing methods include label assigning, handling missing values, and data standardization. It is essential to consider physical phenomena and adapt loss functions for optimal utilization of computer systems in this context.

The article mentions two models created for forecasting the Dst index (geomagnetic storms). The first model utilizes a neural network with Long Short-Term Memory (LSTM), trained on data from 2012–2016, achieving an accuracy of 83.47%. The second model, Dst Transformer (DSTT), designed for short-term forecasting, utilizes attention levels and Bayesian inference. DSTT demonstrates high accuracy and addresses two types of uncertainties in the data. Both models are tested and compared with other machine learning methods by the authors.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-2

Machine learning enables the identification of complex relationships and forecasting planetary index values in the future, helping to mitigate potential negative impacts of geomagnetic storms on technology and infrastructure. Additionally, it provides people with experience in solving complex scientific problems, which could contribute to new discoveries, inventions, and a better understanding of other physical phenomena in the long run.

Key words: neural networks, machine learning, geomagnetic storms, geomagnetic indices, Data Science.

Постановка проблеми

Збільшення обчислювальної потужності та накопичення великих обсягів даних в сучасному світі створюють унікальні можливості для застосування штучного інтелекту та машинного навчання в різних галузях. Однією з актуальних областей досліджень є використання цих технологій для вирішення завдань Data Science. Науковці інтенсивно працюють над розробкою нейронних мереж та програм на основі машинного та глибокого навчання, щоб досягти кращих результатів у обробці великих обсягів даних.

Ще однією актуальною сферою застосування є вимірювання геомагнітної активності, нормування за різними геомагнітними індексами (aa, am, Kp, Dst, PC, AE, AU, AL, AO, SC, SFE, Q-days, D-days, CK-days тощо) та загальне прогнозування космічної погоди. Різноманітні дані про сонячну та геомагнітну активність, зібрані земними обсерваторіями та космічними зондами різних країн, становлять основу для визначення геомагнітних індексів та прогнозування подій у космосі. Збір параметрів та даних може відбуватися як погодинно, так і похвилинно.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Перед аналізом необхідно провести попередню обробку отриманих великих обсягів даних для усунення помилок вимірювань, таких як шум, прогалини у часових рядах, нульові значення. Додатково, внаслідок збоїв на спостережуваних станціях та виявлення непередбачуваних аномалій у даних, деякі обсяги можуть бути викривлені або втрачені. Втрата даних у результаті випадкових збоїв також може служити індикатором космічної погоди, тому виявлення і аналіз аномалій може стати джерелом додаткових свідчень про космічну погоду, де також може застосовуватися штучний інтелект [1].

Оскільки швидкість руху сонячного вітру та корональних викидів маси в бік Землі може тривати від днів до годин, обробка даних потребує значної оперативності. З цією метою розробляються алгоритми обробки даних у реальному часі або наближеному до реального часу, зокрема розробка засобів передбачення наслідків сонячної активності до того, як сонячний вітер та корональні викиди маси досягнуть Землі. Науковці намагаються максимізувати час для створення успішних прогнозів [2].

Методи і мета дослідження

Комп'ютерні системи, спрямовані на прогнозування параметрів магнітосфери, зазвичай навчають та оцінюють на основі науково оброблених якісних даних, що отримані від космічних апаратів, розташованих в точці L1 за течією від Землі. Вимірювання радіальної швидкості сонячного вітру на L1 виступає ключовим елементом для перевірки вивчених моделей корони та геліосфери, хоча також розглядаються інші параметри сонячного вітру, що не згадані тут. Вже з цієї точки, залежно від швидкості, сонячному вітру зазвичай потрібно близько 40 хвилин для досягнення Землі.

Етапи попередньої обробки даних для використання комп'ютерних систем (штучного інтелекту) передбачають вибір вхідних функцій і міток, врахування зв'язків між змінними та уникнення надмірності [3]. Такі методи, як інтеркореляції та PCA, допомагають видалити небажані функції. Обробка відсутніх значень є надзвичайно важливою, і пропозиції дослідників включають пошук додаткових джерел даних або знаходження балансу між видаленням та інтерполяцією. Стандартизація або нормалізація даних необхідна для ефективного порівняння моделей. Зазначається робота з викидами (outliers), особливо в мітках, з підкресленою необхідністю

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-2

розбірливості користувача, щоб відрізнити реальні аномалії від екстремальних значень. Існують проблеми адаптації функцій втрат у врахування фізичних явищ, що вимагає глибокого розуміння основної фізики, і є ключовим аспектом використання комп'ютерних систем в цьому контексті.

Викладення основного матеріалу дослідження

Способи владнання перелічених питань можна побачити на прикладі досягнення успішних результатів у конкретних авторів. У розробленій [4] нейронній мережі використовується Long Short-Term Memory (LSTM) з декількома шарами. Перший шар – це вхідний послідовний шар, розмір якого дорівнює кількості характеристик вхідних даних. Дані перемішуються після кожної епохи у межах партії для мінімізації обчислювального навантаження і зменшення випадковості мережі. Другий шар – це один LSTM шар з 500 прихованими одиницями та гіперболічною тангенс-активаційною функцією. Третій шар – це повністю з'єднаний шар із розміром, що дорівнює кількості класів. Останній шар – це softmax і класифікаційний вихідний шар, який класифікує дані на основі попередньо визначеного набору даних Ground-Truth. Для навчання модель була відкалібрована вручну за допомогою таких гіперпараметрів як швидкість навчання, поріг градієнта та розмір введення.

Набір даних, використаний для навчання цієї моделі LSTM, складався з даних за 2012–2016 роки і включав дані про магнітне поле геоцентричної сонячної екліптики (величина міжпланетного магнітного поля, Bx, Bz); густину протонів плазми; індекс аврорального електроджекту та потік протонів понад 10 МеВ. Ці дані були перетворені в дані «Ground-Truth» шляхом додавання міток до чотирьох класів (слабкий, помірний, сильний, серйозний) на основі індексу часу штормового занепокоєння.

Модель було протестовано з використанням окремого тестового набору даних за 2017 рік, який використовувався для виявлення Dst (ключового індексу для геомагнітних бур). Модель LSTM присвоїла мітки навчальним даним на основі набору даних «Ground-Truth». Потім прогнозовані значення були перевірені з цими даними тестування, щоб оцінити точність моделі шляхом порівняння передбачуваних виявлень Dst із фактичними даними Dst на основі класифікації набору даних GT. Найвища точність моделі була оцінена в 83,47%, виходячи з даних навчання.

Метод глибокого навчання під назвою Dst Transformer (DSTT), розроблений [5] для короткострокового прогнозування (на 1–6 годин вперед) індексу Dst, використовує рівень уваги (multi-head attention layer) в поєднанні з байєсівським висновком, щоб впоратися як з алеаторичною невизначеністю (випадковість, властива даним), так і з епістемічною невизначеністю (варіабельність параметрів моделі). Архітектура моделі DSTT включає наступні рівні Conv1D, LSTM, рівень уваги, щільний варіаційний рівень (dense variational layer) і шари виключення (dropout layers). Він використовує метод вибірки Монте-Карло для отримання імовірнісних результатів прогнозування, кількісно оцінюючи обидва типи невизначеностей, згаданих вище.

Дані, використані для навчання моделі, були отримані з Координованого архіву даних NASA Space Science. Їхній період був з 1 січня 2010 року по 30 вересня 2021 року із загальним записом 102 976 випадків. Кожен запис містив сім значень параметрів сонячного вітру та етикетку моделі. Тестовий набір включав 1104 записи з 1 жовтня 2021 року по 15 листопада 2021 року.

Для тестування моделі вони провели абляційні дослідження, де оцінили зміну продуктивності з видаленням різних шарів із моделі DSTT. Вони також порівняли модель DSTT із шістьма тісно пов'язаними методами машинного навчання, включаючи лінійну регресію, випадкові ліси, опорну векторну регресію, ARIMA, LSTM і LSTM у поєднанні з процесами Гаусса. Використаними показниками продуктивності були середньоквадратична помилка та значення R-квадрат (R^2) для кожного методу.

Крім того, вони провели 10-кратні тести перехресної перевірки на оригінальному та більшому наборі даних, щоб статистично підтвердити результати. Продуктивність і стабільність DSTT також оцінювалися за допомогою синтетичних даних, що містять до 1,2 мільйона записів.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-2

Висновки

Отже, для оптимізації аналізу та обробки даних та отримання нових кращих результатів розробляються оптимізаційні алгоритми і програми на основі машинного навчання та нейронних мереж, що вдосконалюють обробку даних і здатність до передбачення космічної погоди. Крім того, нейронні мережі можна навчати на масивах даних, вивчати кореляції (між сонячною активністю, космічною погодою у міжпланетному просторі, а також магнітосферними збуреннями на Землі), на основі чого вони зможуть аналітично відновлювати втрачені дані для більш коректної апроксимації та подальшої обробки.

Машинне навчання дозволяє виявити складні зв'язки між різними вхідними параметрами та геомагнітними індексами, які можуть бути недостатньо очевидними для звичайних методів аналізу даних, обходячи виведення законів і пошук формул [6]. Також машинне навчання дозволяє створити моделі, які можуть прогнозувати значення планетарного індексу в майбутньому на основі історичних даних та поточних спостережень [7]. Це допомагає попереджати можливі негативні впливи геомагнітних бур та інших явищ на технології та інфраструктуру.

Список використаної літератури

1. Wintoft P., Lundstedt H., Eliasson L., Kalla L., Hilgers A. Spacecraft anomaly analysis and prediction system – SAAPS. *European Space Agency, (Special Publication)* ESA SP. 2001. 476, 169–176.
2. Smith A. W., Forsyth C., Rae I. J., Garton T. M., Jackman C. M., Bakrania M., Shore R. M., Richardson G. S., Beggan C. D., Heyns M. J., Eastwood J. P., Thomson A. W. P., Johnson, J. M. On the Considerations of Using Near Real Time Data for Space Weather Hazard Forecasting. *Space Weather*. 2022. 20(7).
3. Bouriat S., Vandame P., Barthélémy M., Chanussot J. Towards an AI-based understanding of the solar wind: A critical data analysis of ACE data. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences.* 2022. 9(November). 1–18.
4. Gulati I., Li H., Johnston M., Dlay, S. Classification based Detection of Geomagnetic Storms using LSTM Neural Network. 2022 3rd URSI *Atlantic and Asia Pacific Radio Science Meeting AT-AP-RASC 2022.* 29 May – 3 June. Gran Canaria, 2022.
5. Abduallah Y., Wang J. T. L., Bose P., Zhang G., Gerges F., Wang H. Forecasting the Disturbance Storm Time Index with Bayesian Deep Learning. *Proceedings of the International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference, FLAIRS-35* 2022. 15–18 May. Jensen Beach, 2022.
6. Upendran V., Cheung M. C. M., Hanasoge S., Krishnamurthi G. Solar Wind Prediction Using Deep Learning. *Space Weather.* 2020. 18(9).
7. Schmölter E., Berdermann J. Predicting the effects of solar storms on the ionosphere based on a comparison of real-time solar wind data with the best-fitting historical storm event. *Atmosphere*. 2021. 12(12).

References

1. Wintoft, P., Lundstedt, H., Eliasson, L., Kalla, L., & Hilgers, A. (2001). Spacecraft anomaly analysis and prediction system – SAAPS. *European Space Agency, (Special Publication)* ESA SP, 476, 169–176. [in English]
2. Smith, A.W., Forsyth, C., Rae, I.J., Garton, T.M., Jackman, C.M., Bakrania, M., Shore, R.M., Richardson, G.S., Beggan, C.D., Heyns, M.J., Eastwood, J.P., Thomson, A.W.P., & Johnson, J.M. (2022). On the Considerations of Using Near Real Time Data for Space Weather Hazard Forecasting. *Space Weather*, 20(7). https://doi.org/10.1029/2022SW003098 [in English]
3. Bouriat, S., Vandame, P., Barthélémy, M., & Chanussot, J. (2022). Towards an AI-based understanding of the solar wind: A critical data analysis of ACE data. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences, 9* (November), 1–18. https://doi.org/10.3389/ fspas.2022.980759 [in English]

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-2

4. Gulati, I., Li, H., Johnston, M., & Dlay, S. (2022). Classification based Detection of Geomagnetic Storms using LSTM Neural Network. 2022 3rd URSI *Atlantic and Asia Pacific Radio Science Meeting, AT-AP-RASC 2022, May.* https://doi.org/10.23919/AT-AP-RASC54737.2022.9814226 [in English]
5. Abduallah, Y., Wang, J.T.L., Bose, P., Zhang, G., Gerges, F., & Wang, H. (2022). Forecasting the Disturbance Storm Time Index with Bayesian Deep Learning. *Proceedings of the International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference, FLAIRS, 35*(June). https://doi.org/10.32473/flairs.v35i.130564 [in English]
6. Upendran, V., Cheung, M.C.M., Hanasoge, S., & Krishnamurthi, G. (2020). Solar Wind Prediction Using Deep Learning. *Space Weather, 18*(9). https://doi.org/10.1029/2020SW002478 [in English]
7. Schmölter, E., & Berdermann, J. (2021). Predicting the effects of solar storms on the ionosphere based on a comparison of real-time solar wind data with the best-fitting historical storm event. *Atmosphere*, *12*(12). https://doi.org/10.3390/atmos12121684 [in English]

Гумен Олена Миколаївна – д.т.н., професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: gumens@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3992-895X.

Рачек Катерина Олександрівна – студентка бакалаврату кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: kara-fmf25@lll.kpi.ua, ORCID: 0009-0008-7742-3454.

Gumen Olena Mykolaivna – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Descriptive Geometry, Engineering and Computer Graphics of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". E-mail: gumens@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3992-895X.

Rachek Kateryna Oleksandrivna – a bachelor's degree student of the Department of General Physics and Modeling of Physical Processes of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". E-mail: kara-fmf25@lll.kpi.ua, ORCID: 0009-0008-7742-3454.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-2

UDC 514.18

O.M. GUMEN, I.B. SELINA
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

MODELING OF A SAFE ELECTRICAL SUPPLY MODE FOR PRODUCTION PREMISES

Energy efficiency and energy saving, energy security, monitoring, diagnostics and management of energy processes and equipment are currently particularly relevant issues in the energy industry. The energy system of Ukraine has a number of problems that require both urgent and systemic solutions. This applies not so much to capacities and generation, but to the "arteries" of the system, which include high-voltage transmission lines, power distribution systems, transformers, substations, and those devices that ensure the transportation of electrical energy from generation to the consumer. To ensure the European level of customer service, the energy industry needs systematic modernization of distribution networks. One of the components of a complex solution to the above-mentioned problem is the development of methods for finding all possible modes in networks of arbitrary configuration when calculating stable modes of electrical networks.

A number of works are dedicated to the theory of creating geometric models of multidimensional space, to the development of methods and means of their research, which confirm its effectiveness in the automated modeling of modern production processes. Computer graphic modeling allows you to ensure the completeness and visibility of the research being conducted, expands the possibilities of forecasting, analysis and process management. Existing methods of calculation allow finding one or, in the best case, several separate solutions. The use of the proposed method of geometric modeling of stable modes of direct current electric networks with n consumers in the form of corresponding multispecies as models of complex multiparameter dependencies allows to create algorithms for calculating such modes. It also allows automated modeling of multi-parameter processes of various physical nature in energy. Geometric means of solving the applied problem of calculating steady-state modes of electrical networks illustrate the wide possibilities of geometric modeling of the studied dependence in the form of a manifold, which guarantees the completeness of the solution and its clarity.

Key words: geometric modeling, manifold, multiparameter dependence, steady state of the power grid.

О.М. ГУМЕН, І.Б. СЕЛІНА
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗПЕЧНОГО РЕЖИМУ ЕЛЕКТРОПОСТАЧАННЯ ВИРОБНИЧИХ ПРИМІЩЕНЬ

Енергетична ефективність та енергозбереження, енергетична безпека, моніторинг, діагностика та управління енергетичними процесами та обладнанням на сьогодні є особливо актуальними питаннями в енергетичній галузі. Енергетична система України має низку проблем, які потребують як невідкладного, так і системного вирішення. Це стосується не стільки потужностей, генерацій, скільки «артерій» системи, до яких відносяться лінії високовольтних передач, системи розподілу потужностей, трансформатори, підстанції, ті пристрої, які забезпечують саме транспортування електричної енергії від генерації до споживача. Для забезпечення європейського рівня обслуговування споживачів енергетичне господарство потребує системної модернізації розподільних мереж. Одним із складників комплексного вирішення вищезазначеної проблеми є розроблення методів знаходження всіх можливих режимів у мережах довільної конфігурації при розрахунках усталених режимів електричних мереж.

Теорії створення геометричних моделей багатовимірного простору, розробленню методів та засобів їх дослідження присвячено ряд робіт, що підтверджують її ефективність при автоматизованому моделюванні процесів сучасного виробництва. Комп’ютерне графічне моделювання дозволяє забезпечити повноту і наочність досліджень, що проводяться, розширює можливості прогнозування, аналізу та управління процесами. Існуючі способи розрахунку дозволяють знаходити один чи, в кращому випадку, декілька окремих розв’язків. Використання пропонованого методу геометричного моделювання усталених режимів електричних мереж постійного струму з n споживачами у вигляді відповідних багатовидів як моделей складних багатопараметричних залежностей дозволяє створити алгоритми розрахунків таких режимів. Це також дозволяє здійснювати автоматизоване моделювання багатопараметричних процесів різної фізичної природи в енергетиці. Геометричні засоби вирішення прикладної задачі розрахунку усталених режимів електричних мереж ілюструють широкі можливості геометричного моделювання досліджуваної залежності у вигляді багатовиду, який гарантує повноту рішення і його наочність.

Ключові слова: геометричне моделювання, багатовид, багатопараметрична залежність, усталений режим електричної мережі.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-3

Problem statement

Currently, the energy system of Ukraine is in a state of "great stress". In addition to problems that require an urgent solution, there are also those that require a systematic solution. This applies not so much to capacities and generation, but to the "arteries" of the system, which include high-voltage transmission lines, power distribution systems, transformers, substations, and those devices that ensure the transportation of electrical energy from generation to the consumer (Fig. 1). Energy efficiency and energy saving, energy security, monitoring, diagnostics and management of energy processes and equipment are currently particularly relevant issues in the energy industry.



Fig. 1. "Arteries" of the energy system

The general requirements for the criterion of the quality of functioning of a complex system, which also include distribution electrical networks, are specified in [1]. Today, a sufficient level of quality and reliability of electric energy transmission is not ensured. At the same time, the functioning of modern production with its complex technological complexes, with the wide application of systems of automatic control and control over processes is not possible without the clear operation of all technical means. To ensure the European level of customer service, the energy industry needs systematic modernization of distribution networks.

Analysis of the latest research

Scientific-analytical and scientific-research articles by Ukrainian and foreign specialists based on the results of the studies, directly aimed at solving fundamental problems and solving applied problems of the development and functioning of distribution networks of Ukraine and other countries of the world [2], testify to the need for wider research into this segment of the national energy industry.

A number of works are dedicated to the theory of creating geometric models of multidimensional space, to the development of methods and means of their research, which confirm its effectiveness in the automated modeling of modern production processes. Computer graphic modeling allows you to ensure the completeness and visibility of the research being conducted, expands the possibilities

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-3

of forecasting, analysis and process management. The creation and research of geometric models of multidimensional space is highlighted in a number of theoretical works [3, 4], as well as works of a practical direction [5], containing methods and means of automated modeling of processes, particularly in energetics [6].

One of the components of a complex solution to the above-mentioned problem is the development of methods for finding all possible modes in networks of arbitrary configuration when calculating stable modes of electrical networks. The use of rational manifolds as models of complex multiparameter dependencies in computer graphic modeling ensures completeness and clarity of research and actual automation of calculation processes of all possible modes in electrical networks of arbitrary configuration of the studied system.

Objective of the research

In order to increase the reliability of electricity supply to consumers, it is advisable to involve various means of solving the specified problem, including geometric means involving the possibilities of modern information technologies. Existing methods of calculation allow finding one or, in the best case, several separate solutions. The proposed solution to the given problem illustrates the broad possibilities of geometric modeling of the investigated process in the form of a manifold, which guarantees the completeness of the solution and its visibility, allows to track the operation of the system and establish intersystem connections.

Main part

To develop an algorithm for calculating all possible modes in power grids of arbitrary configuration using rational manifolds to identify the reasons for existence and finding all ambiguous modes, let us consider the solution of the applied problem of calculating steady-state modes of electrical networks using multiple species as models of the studied multi-parameter dependencies.

The steady state of direct current electrical networks with n users (points) is described by a system of algebraic equations of the second order with respect to the unknowns u_s and p_s:

$$\sum_{s=0}^{n} \cdot \sum_{i=0}^{n} u_s j_i = p_s, \tag{1}$$

where u_s and j_i – respectively, voltage and current vectors at the points,
p_s – the power of points.

$$J_i = Y_{is} U_s, \quad i, s = 0,1,\ldots,n,$$

$$Y_{is} = \begin{Vmatrix} Y_{00} & Y_{01} & \cdots & Y_{0n} \\ Y_{10} & Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \\ Y_{no} & Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{Vmatrix} - \tag{2}$$

matrix of nodal conductances, the elements of which are given by the resistance of the sections between the i- and s- points.

Let's rewrite system (2) in the form:

$$Y_{i0}U_iU_0 + Y_{i1}U_1U_1 + \ldots + Y_{ii}U_i^2 + \ldots + Y_{in}U_iU_n = P_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-3

In the Euclidean space of voltages and powers $U_1 \dots U_n, P_1 \dots P_n$, the dimension of which is $2n$, the i – equation from (3) is considered as an analytical expression of the corresponding cylinder. The generators of the i – hypercylinder are linear $(n-1)$ – subspaces of the level parallel to the coordinate $(n-1)$ – dimensional subspace of powers $P_1 \dots P_{i-1}, P_{i-1} \dots P_n$.

In the coordinate $(n+1)$ – dimensional subspace $U_1 \dots U_n P_i$ the i – equation from (3) is considered as the guiding subspace of the i – hypercylinder.

A manifold as a geometric model, the entire set of points of which is placed in a mutually unambiguous correspondence to all possible states of the steady state of networks, is defined as the total intersection of n hypercylinders (3) in E^{2n}.

The dimensionality of the total cross-section of q shapes due to their dimensions s_i $(i = 1 \dots q)$ is written as:

$$\sum_{i=1}^{q} s_i - m\,(q-1), \tag{4}$$

where m – the dimension of the space in which the intersection is sought.

That is, for the considered example of the mutual intersection of n hypercylinders of the 2nd order, the E^{2n} general intersection will be a manifold Π_n^{2n}, that is, a manifold of dimension n and order $2n$ according to (3). Each point of the n-manifold Π_n^{2n} corresponds only to its corresponding combination of number-coordinates $U_1 \dots U_n, P_1 \dots P_n$ that defines one of the possible modes of operation of the network, and the entire set of its points – all possible modes of operation of the electrical network under study.

Thus, by setting specific power values from the entire set of network operation modes, only those that correspond to the specific case of the specific power values of the points in question are selected.

The geometric solution of this problem is reduced to the construction of the mutual intersection of n-manifolds Π_n^{2n} (3) by the system of n hyperplanes of calculated level. According to (4), we obtain a submanifold in the intersection Π_o^{2n}. The set of found points (real or imaginary) determines all possible modes of operation of the network (real or imaginary) for a particular case of values P_i P^i_1. In particular, if all the $P_i = 0$ sought points are at the mutual intersection of asymptotic directions in the voltage subspace $U_1 \dots U_n$.

The sought-after manifold, the entire set of points of which is placed in a mutually unambiguous correspondence to all possible states of the power system, as a geometric model of possible regimes in power networks, is studied by submanifolds constructed in this way. At the same time, each point of the manifold Π_n^{2n} corresponds only to its corresponding combination that determines one of the possible modes of operation of the network, and the entire set of its points – all possible modes of operation of the electrical network under study, thanks to which the reasons for existence are revealed and all ambiguous modes of the power network are found.

When calculating stable modes of electrical networks, the question of finding all possible modes in networks of arbitrary configuration is relevant. Existing methods of calculation allow finding one or, in the best case, several separate solutions. The proposed solution to the given problem illustrates the broad possibilities of geometric modeling of the investigated process in the form of a manifold, which guarantees the completeness of the solution and its visibility, allows to track the operation of the system and establish intersystem connections.

Conclusions

The use of the proposed method of geometric modeling of stable modes of direct current electric networks with n consumers in the form of corresponding multispecies as models of complex

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-3

multiparameter dependencies allows to create algorithms for calculating such modes. It also allows automated modeling of multi-parameter processes of various physical nature in energy.

The proposed algorithm for calculating all possible modes in power grids of arbitrary configuration using the method of multidimensional geometric modeling makes it possible to identify the reasons for the existence of ambiguous modes, gives an answer to the question of the number of solutions and, as a final result, leads to the finding of all ambiguous modes. Solving these problems makes it possible to create a complex of improved programs for calculating steady-state modes of electrical networks, which allow simulating real processes in electrical networks, which is very relevant in connection with the further development of energy systems of Ukraine.

Bibliography

1. Кузьмін І. В. Критерії оцінки ефективності, якості та оптимальності складних систем. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 1994. № 1(2). С. 5–9.
2. Лежнюк П. Д., Комар В. О., Кравцов К. І. Критерій оцінки якості функціонування розподільних мереж. *Наукові праці Вінницького національного технічного університету.* № 3. URL: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2008-3.files/uk/ 08pdlodn_ua.pdf (дата звернення 03.10.2023).
3. Гумен О. М. Дослідження k-багатовидів за координатними m-підбагатовидами ($m \leq k$). *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2005. Вип. 4. Т. 29. С. 69–72.
4. Ванін В. В., Гумен О. М. Деякі аспекти застосування засобів геометричного моделювання у проективному просторі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2011. Вип.87. С. 90–93.
5. Gumen O. M. The method of projective n-spaces in the simulation of multi processes. *Nauka i studia*. 2011. № 3(34). P. 33–37.
6. Костинюк Л. Д., Мороз В. І., Паранчук Я. С. Моделювання електроприводів. Львів: НУЛП, 2004. 404 с.

References

1. Kuzmin, I.V. (1994). Kryterii otsinky efektyvnosti, yakosti ta optymalnosti skladnykh system [Criteria for evaluating the efficiency, quality and optimality of complex systems]. *Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu*, 1(2), 5–9 [in Ukrainian].
2. Lezhniuk, P.D., Komar, V.O., & Kravtsov, K.I. Kryterii otsinky yakosti funktsionuvannia rozpodilnykh merezh [Criterion for assessing the quality of the distribution network]. *Naukovi pratsi Vinnytskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu,* 3. Retrieved from: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2008-3.files/uk/08pdlodn_ua.pdf [in Ukrainian].
3. Gumen, O.M. (2005). Doslidzhennia k-bahatovydiv za koordynatnymy m-pidbahatovydamy ($m \leq k$) [Study of k-manifolds by coordinate m-submanifolds ($m \leq k$)]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika,* 4(29), 69–72 [in Ukrainian].
4. Vanin, V.V., & Gumen, O.M. (2011). Deiaki aspekty zastosuvannia zasobiv heometrychnoho modeliuvannia u proektyvnomu prostori [Some aspects of the application of geometric modeling tools in projective space]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 87, 90–93 [in Ukrainian].
5. Gumen, O.M. (2011). The method of projective n-spaces in the simulation of multi processes. *Nauka i studia,* 3(34), 33–37 [in English].
6. Kostyniuk, L.D., Moroz, V.I., & Paranchuk, Ya.S. (2004). *Modeliuvannia elektropryvodiv [Modeling of electric drives]*. Lviv: NULP [in Ukrainian].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-3

Гумен Олена Миколаївна – д.т.н., професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: gumens@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3992-895X.

Селіна Ірина Борисівна – старший викладач кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: irinaselina2016@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4010-3819.

Gumen Olena Mykolaivna – Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of Descriptive Geometry, Engineering and Computer Graphics of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". Email: gumens@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3992-895X.

Selina Iryna Borysivna – Assistant Professor at the Department of Descriptive Geometry, Engineering and Computer Graphics of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". E-mail: irinaselina2016@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4010-3819.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-3

УДК 517.928

Г.В. ДАНИЛІНА, М.О. РАШЕВСЬКИЙ
Криворізький фаховий коледж Національного авіаційного університету
П.Ф. САМУСЕНКО
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ СИСТЕМАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ

Сингулярно збурені системи оптимального керування, що містять змінні параметри, інтегруються асимптотичними методами. Асимптотичний розв'язок згаданої системи залежить від спектру головної матриці системи. Для систем лінійних алгебраїчно-диференціальних рівнянь асимптотичні розв'язки залежать від спектру граничної в'язки матриць. Оптимізаційні задачі керування системами сингулярно збурених алгебраїчно-диференціальних рівнянь почали досліджуватись у нинішньому столітті. Теорію асимптотичного інтегрування систем з виродженнями розроблено у працях А.М. Самойленка, М.І. Шкіля, Г.С. Жукової, В.П. Яковця наприкінці минулого століття. Розроблені методи дали можливість побудувати асимптотичні розв'язки систем з виродженнями для випадку стабільного спектру граничної в'язки матриць. Розв'язки згаданих систем керування побудовано у працях В.П. Яковця та О.В. Тарасенко.

Важливими у практичних застосуваннях є системи сингулярно збурених рівнянь із точками повороту. Для систем звичайних диференціальних рівнянь із точками повороту асимптотичні розв'язки побудовано у працях М. Івано, Я. Сибуйя, В. Вазова. Асимптотичні розв'язки систем із точками повороту є багатомасштабними. Двомасштабні асимптотичні розв'язки систем алгебраїчно-диференціальних рівнянь побудова-но А.М. Самойленком та П.Ф. Самусенком. Системи оптимального керування звичайними диференціальними рівняннями із нестабільним спектром досліджував В.М. Лейфура.

У цій статті отримані згаданими авторами результати застосовуються до розв'язування задачі оптимального керування системою сингулярно збурених алгебраїчно-диференціальних рівнянь із простою точкою повороту. Побудовано асимптотичне зображення матриці імпульсних перехідних функцій системи рівнянь із простою точкою повороту, дано асимптотичні оцінки побудованих наближень. У загальній постановці задача оптимального керування розглядається без отримання конкретних оцінок. На оцінку похибки впливає як кратність, так і тип точки повороту. Система, що утворюється застосуванням принципу максимуму Понтрягіна також матиме нестабільний спектр, але тип точки повороту може змінитися. Тому конкретні оцінки потребують окремого розгляду. Це буде задачею майбутніх досліджень.

Ключові слова: система оптимального керування, системи диференціальних рівнянь з виродженнями, асимптотичний розв'язок, точка повороту.

G.V. DANYLINA, M.O. RASHEVS'KYI
Kryvyi Rih Professional College of National Aviation University
P.F. SAMUSENKO
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATIONS

Singularly perturbed optimal control systems with variable parameters are integrated by asymptotic methods. The asymptotic solution of this system depends on the spectrum of the main matrix of the system. For systems of linear algebraic-differential equations, the asymptotic solutions depend on the spectrum of the main matrix pencil. Optimization problems of controlling systems of singularly perturbed algebraic-differential equations have been studied in the present century. The theory of asymptotic integration of systems with degeneracies was developed in the works of A.M. Samoilenko, M.I. Shkil, G.S. Zhukova, and V.P. Yakovets at the end of the last century. The developed methods made it possible to construct asymptotic solutions of systems with degeneracies for the case of a stable spectrum of the boundary value of matrices. The solutions of these control systems were constructed in the works of V.P. Yakovets and O.V. Tarasenko.

Systems of singularly perturbed equations with turning points are important in practical applications. For systems of ordinary differential equations with turning points, asymptotic solutions were constructed in the works of M. Iwano, Y. Shibuya, and W. Wasow. Asymptotic solutions of systems with turning points are multiscale. Two-scale asymptotic solutions of systems of algebraic-differential equations were constructed by A.M. Samoilenko and P.F. Samusenko. Optimal control systems for ordinary differential equations with unstable spectrum were studied by V.M. Leifura.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

In this article, the results obtained by the above-mentioned authors are applied to the problem of optimal control of a system of singularly perturbed algebraic-differential equations with a simple turning point. An asymptotic representation of the matrix of impulse transition functions of the system of equations with a simple turning point is constructed, and asymptotic estimates of the constructed approximations are given. In the general post, the optimal control problem is considered without obtaining specific estimates. The error estimate is affected by both the multiplicity and the type of pivot point. The system formed by applying the Pontryagins maximum principle will also have an unstable spectrum, but the type of turning point may change. Therefore, specific estimates need to be considered. This will be the task of future research.

Key words: system of automatic control, systems of differential equations with degenerations, asymptotic solution, turning point.

Постановка проблеми

Процеси, що описуються системою диференціально-алгебричних рівнянь (ДАР)

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\vec{x} + C(t,\varepsilon)\vec{u}\,, \tag{1}$$

привертали увагу дослідників у зв'язку із широкими практичними застосуваннями. Тут $A(t, \varepsilon)$ та $B(t, \varepsilon)$ – квадратні матриці n-го порядку, $C(t, \varepsilon)$ – $(n \times m)$-матриця, $\vec{x}(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор стану, $\vec{u}(t,\varepsilon)$ – m-вимірний вектор керування, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, h – натуральне число, $t \in [0; T]$. Задачу про знаходження керування, під дією якого система (1) переходить зі стану

$$\vec{x}(0,\varepsilon) = \vec{x}_1(\varepsilon) \tag{2}$$

до стану

$$\vec{x}(T,\varepsilon) = \vec{x}_2(\varepsilon)\,, \tag{3}$$

надаючи мінімуму функціоналу $\frac{1}{2\varepsilon^h}\int_0^T (D(t,\varepsilon)u,\, u)dt \to \min\limits_u$, де $D(t, \varepsilon)$ – симетрична $(m \times m)$-матриця, розв'язано [1; 10; 11] у різних припущеннях про спектр в'язки матриць

$$A(t,\, 0) - \lambda B(t,\, 0)\,. \tag{4}$$

Принциповою умовою, що накладалась у згаданих роботах на спектр, була його стабільність.

Для застосування методу малого параметра стандартними є таку вимоги:

1) Матриці $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$, $C(t, \varepsilon)$ та $D(t, \varepsilon)$ зображуються збіжними степеневими рядами вигляду

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t);\; B(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k B_k(t),\ldots \tag{5}$$

2) Коефіцієнти $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$ та $D_k(t)$ розвинень (5) відповідних матриць є нескінченно диференційовними на відрізку [0; T].

3) Вектори початкового та кінцевого станів мають зображення, аналогічні зображенням (5):

$$\overrightarrow{x_1}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \vec{x}_k^{(1)};\; \overrightarrow{x_2}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \vec{x}_k^{(2)}\,. \tag{6}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

4) Матриця $D(t, \varepsilon)$ неособлива на досліджуваному проміжку.

5) Область допустимих значень для керування $u(t, \varepsilon)$ збігається з усім заданим m-вимірним простором.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Сформульована задача (1)–(3) поєднує в собі дван напрямки досліджень у сучасній теорії асимптотичного аналізу систем диференціальних рівнянь. Система (1) є диференціально-алгебричною, теорія таких систем у математиці розвивалася у зв'язку з їхнім широким використанням як у задачах власне теорії диференціальних рівнянь, так і в інших розділах: теорії оптимального керування, теорії електричних кіл, хімічній кінетиці тощо [1; 5; 6; 7]. Рівняння системи мають змінні коефіцієнти, і тому, як правило, не інтегруються у квадратурах. Здебільшого досліджуються такі системи асимптотичними методами. Асимптотичні методи принципово залежать від характеру спектру граничного оператора (4). Для стабільного спектру розвинення за степенями малого параметра записуються на всьому проміжку зміни незалежної змінної. Нестабільність у спектрі граничного оператора, і, зокрема, наявність так званих точок повороту (ТП) [1–4, 12] призводить до необмеженості розв'язку при прямуванні до нуля малого параметра, на що вперше було вказано у дослідженнях С.А. Ломова. Згадана необмеженість у реальних технічних системах може призвести до нестійкості роботи або до аварійних ситуацій. Наявність точок повороту часто лежить в основі явищ, що вивчаються у конкретних системах. Так, у гідродинаміці ТП – це момент переходу ламінарної течії до турбулентної, у теорії механізмів – зникнення центробіжної сили у крайньому розтині лопасті.

Системи керування із нестабільним спектром почали вивчатися також нещодавно, уперше в роботі [1]. Основним методом розв'язування таких систем є багатомасштабний метод [1; 3; 6; 7; 12]. Тільки в окремих випадках можна побудувати розв'язок системи єдиним виразом [3].

Застосування до описаної задачі принципу максимуму Понтрягіна, для чого вводиться до розгляду функція Гамільтона

$$H(t, x, p, u) = \varepsilon^{-h}\left(A(t,\varepsilon)\vec{x}, \vec{p}\right) + \varepsilon^{-h}\left(B(t,\varepsilon)\vec{u}, \vec{p}\right) - \varepsilon^{-2h}\left(D(t,\varepsilon)\vec{u}, \vec{u}\right)$$

та подальші міркування згідно з [8, 10], зводять сформульовану задачу до такої системи рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon^h B(t,\varepsilon)\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\vec{x} + C(t,\varepsilon)\vec{u}; \\ \varepsilon^h \dfrac{d}{dt}\left(B^*(t,\varepsilon)\cdot\vec{p}\right) = -A^*(t,\varepsilon)\cdot\vec{p} + C^*(t,\varepsilon)\cdot\vec{p}; \\ 0 = C^*(t,\varepsilon)\cdot\vec{p} - D(t,\varepsilon)\vec{u}. \end{cases} \tag{7}$$

У позначеннях $\vec{y}(t,\varepsilon) = colon\left(\vec{x}(t,\varepsilon), \vec{p}(t,\varepsilon), \vec{u}(t,\varepsilon)\right)$ остання система запишеться так:

$$\varepsilon^h \tilde{B}(t,\varepsilon)\frac{d\vec{y}}{dt} = \tilde{A}(t,\varepsilon)\vec{y}\,. \tag{8}$$

Тут $\tilde{B}(t,\varepsilon) = diag\left\{B(t,\varepsilon), B^*(t,\varepsilon), 0\right\}$, Надалі дотримуватимемося позначень [5, 11].

$$\tilde{A}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A(t,\varepsilon) & 0 & C(t,\varepsilon) \\ 0 & -A^*(t,\varepsilon) - \varepsilon^h\left(B^*(t,\varepsilon)\right)' & 0 \\ 0 & C(t,\varepsilon) & -d(t,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

Розв'язок системи будується за степенями малого параметра залежно від кратності та кількості коренів характеристичного рівняння $\det(\tilde{A}(t,0) - \lambda\tilde{B}(t,\varepsilon)) = 0$.

Для системи (8) якої з урахуванням умов (2), (3) матимемо крайову задачу

$$\begin{pmatrix} \vec{y}(0,\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vec{y}(T,\varepsilon) & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1(\varepsilon) \\ \vec{x}_2(\varepsilon) \end{pmatrix} = \vec{y}_0(\varepsilon) \tag{9}$$

Отже, задача оптимального керування (1) – (3) зводиться до двоточкової крайової задачі (8), (9).

Нестабільність у спектрі системи (1) призводить до нестабільності у спектрі системи (8), можливо іншого виду. Питання про вид нестабільності не є тривіальним, і потребує окремого дослідження. На теперішній час запропоновано [2; 6; 7] метод побудови асимптотичного розв'язку систем із простою ТП у двох випадках:

I) $\tilde{A}(0,0) = diag\{E_q, J_p\}$; $\tilde{B}(0,0)) = diag\{J_q, E_p\}$;

II) $\tilde{A}(0,0) = diag\{E_q, O_p\}$; $\tilde{B}(0,0)) = diag\{J_q, O_p\}$.

Матриці, що входять до умов I, II описано далі. Прикладом досліджуваної системи без наявності керування є така система [6; 7]:

$$\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ t+\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t+\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\vec{x}.$$

Формулювання мети дослідження

У цьому дослідженні методи [2; 6; 7] використовуються для побудови двомасштабного асимптотичного розв'язку описаної вище задачі оптимального керування системою (1) із нестабільністю у спектрі граничної в'язки матриць. Система вигляду (1) є досить складною для дослідження, тому у цій роботі розглянемо питання побудови матриці імпульсних перехідних функцій цієї системи.

Обговорюється також в загальному випадку схема розв'язування крайової задачі. Проте конкретні оцінки та розрахункові формули потребують окремого дослідження.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо систему ДАР, що відповідає системі (1) без урахування керування:

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\vec{x} \tag{10}$$

Побудуємо асимптотичне зображення загального розв'язку системи при умові, що

6) $A(0,0) = diag\{E_q, J_p\}$; $B(0,0)) = diag\{J_q, E_p\}$; p + q = n.

7) $\frac{d}{dt}(\det A(t,0)|_{t=0} \neq 0$; $\frac{d}{dt}(\det B(t,0)|_{t=0} \neq 0$.

Умови вказують на те, що точка t = 0 є простою ТП. У випадку відсутності ТП асимптотичне зображення розв'язку системи (10) будується методами [5, 10]. Лише в околі ТП асимптотичне зображення стає розривним, що спричинене зміною характеру фізичного явища при переході згаданої точки.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

Побудуємо розв'язок на відрізку $\left[0; k_1\varepsilon^{\frac{n}{n+1}}\right]$. З цією метою застосуємо двомасштабний метод [1; 11]. Згідно з [8] існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$, що справджуються рівності:

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) \equiv diag\{E_q(t,\varepsilon),\ J_p(t,\varepsilon)\};$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = H(t,\varepsilon) \equiv diag\{J_q(t,\varepsilon),\ E_p(t,\varepsilon)\}.$$

Тут $\Omega(t, 0) = \Omega(t) \equiv diag\{E_q(t),\ J_p(t)\};\ H(t, 0) = H(t) \equiv diag\{J_q(t),\ E_p(t)\}$,

$$J_q(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_q(t,\varepsilon) & b_{q-1}(t,\varepsilon) & b_{q-2}(t,\varepsilon) & \cdots & b_1(t,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Виконавши підстановку $\vec{x}(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\vec{y}(t,\varepsilon)$, дістанемо систему вигляду

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)\frac{d\vec{y}}{dt} = S(t,\varepsilon)\vec{y}\,. \tag{11}$$

Тут $S(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t,\varepsilon)Q^{-1}(t,\varepsilon)Q'(t,\varepsilon);\ Q'(t,0) = 0$. Для запису необхідних формул, розкладемо записані матриці у ряди вигляду (5):

$$H(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k H_k(t);\ S(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k S_k(t)\,.$$

Тоді $H_0(t) = H(t),\ H_1(t) = diag\left\{H_{1q}(t);\ H_{1p}(t)\right\}$,

$S_0(t) = \Omega(t),\ S_1(t) = diag\left\{S_{1q}(t);\ S_{1p}(t)\right\}$, де H1q та S1q – квадратні матриці порядку q.

Позначивши $K(t,\varepsilon) = diag\left\{E_q + \varepsilon S_{1q}(t);\ E_p + \varepsilon H_{1p}(t)\right\}$, та помноживши систему (11) на матрицю $K^{-1}(t,\varepsilon)$, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\varepsilon G(t,\varepsilon)\frac{d\vec{y}}{dt} = W(t,\varepsilon)\vec{y}\,. \tag{12}$$

За побудовою [6; 7] $G(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k G_k(t);\ W(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k W_k(t)$,

$$W_0(t) = S_0(t),\ W_1(t) = diag\left\{0;\ W_{1p}(t)\right\} \equiv diag\left\{0;\ S_{1p}(t) - H_{1p}(t)J_p(t)\right\},$$

$$G_0(t) = H_0(t),\ G_1(t) = diag\left\{G_{1q}(t);\ 0\right\} \equiv diag\left\{H_{1q}(t) - S_{1q}(t)J_q(t);\ 0\right\}.$$

Підстановкою $\vec{y} = U(t,\varepsilon)\vec{z} = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k U_k(t,\varepsilon)\vec{z}$ дістанемо таку систему рівнянь:

$$\varepsilon G(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\frac{d\vec{z}}{dt} = (W(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon) - \varepsilon G(t,\varepsilon)U'(t,\varepsilon))\vec{z}\,.$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

Матрицю можна побудувати такою, щоб справджувалася рівність:

$$W(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon) - \varepsilon G(t,\varepsilon)U'(t,\varepsilon) = G(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)(\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\Delta(t,\varepsilon)),$$

де $\Lambda(t,\varepsilon) = diag\{\lambda_1(t,\varepsilon),\lambda_2(t,\varepsilon),...,\lambda_n(t,\varepsilon)\} = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\Lambda_k(t,\varepsilon)$, а $\Delta(t,\varepsilon)$ – нев'язка.

Інтегрування останньої системи методом [6; 7] дає n лінійно незалежних розв'язків, а саме:

$$\vec{x}_j(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)\left(\vec{e}_j + O\left(m^{-1}k_1^{-\frac{m(p+1)}{p}}\right)\right)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_{a_j}^{t}\lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau\right\},\ j=\overline{1,n}.$$

Отримані лінійно незалежні розв'язки складуть фундаментальну матрицю системи на вказаному проміжку.

Згідно із алгоритмом багатомасштабного методу, у системі (11) виконаємо підстановку $\tau = \varepsilon^{-1}t$ і на відрізку $\left[0; k_1\varepsilon^{\frac{p}{p+1}}\right]$ методом [4]–[6] матимемо розв'язок у вигляді

$$V(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k V_k(\tau,\varepsilon),$$

де елементи ряду обчислюються рекурентно як розв'язки систем рівнянь:

$$\begin{pmatrix}\Phi_q(\tau,\varepsilon) & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix}\frac{dV_0}{d\tau} = \begin{pmatrix}E_q & 0\\ 0 & -K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1 + \Phi_p(\tau,\varepsilon)E_p\end{pmatrix}V_0,$$

$$\begin{pmatrix}\Phi_q(\tau,\varepsilon) & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix}\frac{dV_k}{d\tau} = \begin{pmatrix}E_q & 0\\ 0 & -K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1 + \Phi_p(\tau,\varepsilon)E_p\end{pmatrix}V_0 + F_k(\tau,\varepsilon),\ k\geq 1.$$

$$F_k(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{k}M_s(\tau,\varepsilon)V_{k-s}(\tau,\varepsilon) - \sum_{s=2}^{k}N_s(\tau,\varepsilon)V'_{k-s}(\tau,\varepsilon).$$

Із останньої системи матричних рівнянь отримаємо:

$$V_0(\tau,\varepsilon) = diag\{V_{01}(\tau,\varepsilon), V_{02}(\tau,\varepsilon)\},$$
$$V_{01}(\tau,\varepsilon) = diag\left\{\exp\left(\int_{b_1}^{\tau}\omega_1^{-1}(s,\varepsilon)ds\right),...,\exp\left(\int_{b_q}^{\tau}\omega_q^{-1}(s,\varepsilon)ds,...,\right)\right\},$$

де $V_{02}(\tau,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\frac{dV_{02}}{d\tau} = \left(-K_1^{-1}\Phi_0(\tau,\varepsilon)K_1 + \Phi_p(\tau,\varepsilon)\right)V_{02}$$

$$V_k(\tau,\varepsilon) = \int_{b}^{\tau}V_0(\tau,\varepsilon)V_0^{-1}(s,\varepsilon)R_k(s,\varepsilon)ds,\ k\geq 1.$$

Тут $R_k(\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix}\Phi_q^{-1}(\tau,\varepsilon) & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix}F_k(\tau,\varepsilon).$ - , $b = (b_1,b_2,...,b_q,k_1\varepsilon^{-\beta},...,k_1\varepsilon^{-\beta})$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

$$\mathrm{x}(\tau, \varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^{2n} \Phi_{1i} a_i, \quad ..., \quad \sum_{i=1}^{2n} \Phi_{ni} a_i \right);$$

$$\psi(\tau, \varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^{2n} \Phi_{n+1\,i} a_i, \quad ..., \quad \sum_{i=1}^{2n} \Phi_{2n\,i} a_i \right).$$

Розглянемо питання про зрощування розв'язків.

Отже, маємо дві фундаментальні матриці на відповідних проміжках

$$X_1(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon) U(t, \varepsilon) \left(E_n + O\left(m^{-1} k_1^{-\frac{m(p+1)}{p}} \right) \right) \exp\left\{ \varepsilon^{-1} \int_a^t \Lambda(\tau, \varepsilon) d\tau \right\}, \; t \in \left[k_2 \varepsilon^{\frac{n}{n+1}}; T \right],$$

$$X_2(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon) \tilde{T}(\tau, \varepsilon) U(t, \varepsilon)(t, \varepsilon) \left(V^{(m)}(\tau, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m\gamma + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+1}} \right) \right), \; t \in \left[0; k_1 \varepsilon^{\frac{n}{n+1}} \right].$$

За побудовою згідно з [6] k1 > k2, тому на відрізку $\left[k_2 \varepsilon^{1-\beta}; k_1 \varepsilon^{1-\beta} \right]$ побудовано дві фундаментальні матриці системи (1). А тому існує така стала матриця N(ε), що

$$X_2(t, \varepsilon) = X_1(t, \varepsilon) N(\varepsilon), \; t \in \left[k_2 \varepsilon^{1-\beta}; k_1 \varepsilon^{1-\beta} \right].$$

Щоб її визначити, візьмемо фіксоване число $t_1 \in \left[k_2 \varepsilon^{1-\beta}; k_1 \varepsilon^{1-\beta} \right]$, і зі співвідношення $X_2(t_1, \varepsilon) = X_1(t_1, \varepsilon) N(\varepsilon)$ дістанемо: $N(\varepsilon) = X_2^{-1}(t_1, \varepsilon) \cdot X_1(t_1, \varepsilon)$.

Нехай $t_1 = k_0 \varepsilon^{1-\beta}$. Тоді

$$X_1^{-1}(k_0 \varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon) = \exp\left\{ -\varepsilon^{-1} \int_a^{k_0 \varepsilon^{1-\beta}} \Lambda(\tau, \varepsilon) d\tau \right\} \left(E_n + O\left(m^{-1} k_1^{-\frac{m(p+1)}{p}} \right) \right)^{-1} \times$$

$$\times U^{-1}(k_0 \varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon) Q^{-1}(k_0 \varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon);$$

$$X_2(k_0 \varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon) = Q(k_0 \varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon) \tilde{T}(k_0 \varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon) \left(V^{(m)}(k_0 \varepsilon^{1-\beta}, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m\gamma + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+1}} \right) \right).$$

Таким чином, побудовано фундаментальну матрицю системи (10), яку можна записати за допомогою розбиття одиниці:

$$X(t, \varepsilon) = f_1(t) X_1(t, \varepsilon) + f_2(t) X_2(t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\beta} \right)$$

Повторивши міркування [3], та записавши фундаментальну матрицю системи (1):

$\vec{x}(t, \varepsilon) = X(t, \varepsilon) \vec{c} + \int_0^t X(t, \varepsilon) X^{-1}(s, \varepsilon) B^{-1}(s, \varepsilon) C(s, \varepsilon) \vec{u}(s, \varepsilon) ds$, нескладно записати

матрицю імпульсних перехідних функцій згаданої системи.

Зауважимо, що застосувати описані для системи (10) міркування до системи (8) не завжди можливо, оскільки система (8), як правило, матиме інший характер нестабільності, приклад такої зміни наведено у [3], тому у разі побудови асимптотичного розв'язку системи (8), задачу (9) при виконанні умов 1–5 можна розв'язати міркуваннями [10].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

Висновки

Нестабільність у спектрі головної матриці системи призводить до того, що побудова асимптотичного зображення розв'язку є значно складнішим, і потребує громіздких процедур при конструюванні фундаментальної матриці. Якщо, крім цього, наявне виродження основної матриці при похідних, то навіть теорія асимптотичного інтегрування таких систем потребує розвитку перед застосуванням до систем керування. Проте це відноситься до суто математичної частини дослідження. Реальність і фізичний зміст точок нестабільності потребує аналізу для кожної конкретної системи керування.

Список використаної літератури

1. Leifura V. N. On One Problem of Automatic Control with Turning Points. *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* : Proccedings of the Second International Conference. Kyiv, 1997. V. 2. P. 488–491.
2. Rashevs'kyi M.O., Samusenko P.F., Tomashchuk O.P. Asymptotic Solutions of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations with Turning Points. *Journal of Mathematical Sciences.* 2023. Vol. 273. P. 271–289.
3. Рашевський М. О. Асимптотичне розв'язування задачі оптимального керування нестаціонарними системами. *Математичне моделювання*. 2020. № 2(43). С. 14–20.
4. Samoilenko A. M. On the asymptotic integration of a system of linear differential equations with a small parameter in the coefficients of a part of derivatives. *Ukr. Mat. Zh*. 2002. Vol. 54, No. 11. P. 1505–1516.
5. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. Київ : Вища шк., 2000. 294 с.
6. Самойленко А.М., Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь із точками повороту. I. *Укр. мат. журн*., 2020, т. 72, № 12. С. 1669–1681.
7. Самойленко А.М., Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь із точками повороту. II. *Укр. мат. журн*., 2021, т. 73, № 6. С. 849–864.
8. Samusenko P. F. On the Canonical Forms of a Regular Matrix Pencil. Journal of Mathe-matical Sciences. 2021. Vol. 258. P. 713–721. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05575-0.
9. Shkil' N. I., Leifura V.N On the asymptotic solution of the problem of optimal control for systems with slowly varying coefficients. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*. Ser. A, 1976. No. 7. P. 604–608.
10. Tarasenko O.V. Approximate Solution of the Problem of Optimal Control for a Singularly Perturbed Differential-Algebraic System. *Journal of Mathematical Sciences.* 2015. Vol. 205. P. 848–858.
11. Яковець В.П., Тарасенко О.В. Побудова асимптотичного розв'язку однієї задачі оптимального керування. *Нелінійні коливання*. 2010. 13. 3. С. 420–436.
12. Wasow W. Linear Turning Point Theory. New York: Acad. Press, 1985. 246 p.

References

1. Leifura, V.N. (1997). On One Problem of Automatic Control with Turning Points. *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* : Proccedings of the Second International Conference. Kyiv. V. 2. P. 488–491 [in English]
2. Rashevs'kyi, M.O., Samusenko, P.F., & Tomashchuk, O.P. (2023). Asymptotic Solutions of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations with Turning Points. *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. 273. P. 271–289 [in English]
3. Rashevs'kyi, M.O. (2020). Asymptotychne rozviazuvannia zadachi optymalnoho keruvannia nestatsionarnymy systemamy [Asymptotic solution of the optimal control problem for nonstationary systems]. *Matematychne modeluvannya – Mathematical modeling*, 2(43). P. 14–20 [in Ukrainian].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

4. Samoilenko, A.M. (2002). On the asymptotic integration of a system of linear differential equations with a small parameter in the coefficients of a part of derivatives. *Ukr. Mat. Zh*. Vol. 54, No. 11. P. 1505–1516 [in English]
5. Samoilenko, A.M., Shkil', M.I., & Yakovets', V.P. (2000). *Liniini systemy dyferentsialnykh rivnian z vyrodzhenniamy [Linear Systems of Differential Equations with Degenerations]*. Kyiv. Vyshcha Shkola.294 p [in Ukrainian]
6. Samoilenko, A.M., & Samusenko, P.F. (2020). Asymptotychne intehruvannia synhuliarno zburenykh dyferentsialno-alhebraichnykh rivnian iz tochkamy povorotu [Asymptotic integration of singularly perturbed differential algebraic equations with turning points]. Part I. *Ukr. Mat. Zh*. 72, No. 12. P. 1669–1681 [in Ukrainian].
7. Samoilenko, A.M., & Samusenko, P.F. (2021). Asymptotychne intehruvannia synhuliarno zburenykh dyferentsialno-alhebraichnykh rivnian iz tochkamy povorotu [Asymptotic Integration of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations with Turning Points]. Part II. *Ukr Math J*. Vol. 73, № 6. P. 849–864 [in Ukrainian].
8. Samusenko, P.F. (2021). On the Canonical Forms of a Regular Matrix Pencil. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 258. P 713–721. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05575-0 [in English]
9. Shkil', N.I., & Leifura, V.N. (1976). On the asymptotic solution of the problem of optimal control for systems with slowly varying coefficients. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*. Ser. A. No. 7. P. 604–608 [in English]
10. Tarasenko, O.V. (2015). Approximate Solution of the Problem of Optimal Control for a Singularly Perturbed Differential-Algebraic System. *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. 205. P. 848–858 [in English]
11. Yakovets', V.P., & Tarasenko, O. (2010). Pobudova asymptotychnoho rozviazku odniiei zadachi optymalnoho keruvannia [Construction of an asymptotic solution of one optimal control problem]. *Neliniini kolyvannia – Nonlinear Oscill*. 13. 3. P. 420–436 [in English]
12. Wasow, W. (1985). Linear Turning Point Theory. New York: Acad. Press. 246 p. [in English]

Даниліна Галина Володимирівна – к.т.н., доцент, заступник начальника з навчально-методичної роботи Криворізького фахового коледжу Національного авіаційного університету. E-mail: danilina@ukr.net, ORCID: 0009-0007-3634-7734.

Рашевський Микола Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, викладач математики циклової комісії фізико-математичних дисциплін Криворізького фахового коледжу Національного авіаційного університету. E-mail: rashevskyi@g-suit.kk.nau.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1136-2691.

Самусенко Петро Федорович – д.ф.-м.н., професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: psamusenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4241-6173.

Danylina Galyna Volodymyrivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Deputy Head for Educational and Methodological Work of the Kryvyi Rih Professional College of the National Aviation University. E-mail: danilina@ukr.net, ORCID: 0009-0007-3634-7734.

Rashevs'kyi Mykola Oleksandrovych – Candidate of Physical And Mathematical Sciences, Associate Professor, Lecturer of Mathematics at the Cycle Commission of Physical and Mathematical Disciplines of the Kryvyi Rih Professional College of the National Aviation University. E-mail: rashevskyi@g-suit.kk.nau.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1136-2691.

Samusenko Petro Fedorovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Mathematical Analysis and Probability Theory, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". E-mail: psamusenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4241-6173.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-4

УДК 539.3:534

К.Г. ДЕГТЯРЬОВ, І.О. ВЄРУШКІН, Д.В. КРЮТЧЕНКО, О.О. СТРЕЛЬНІКОВА
Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України
О.Л. ЗАЙДЕНВАРГ
Харківський національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»
Ю.В. НАУМЕНКО
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

МЕТОД ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

Метою цього дослідження є розробка ефективного числового методу аналізу напружено-деформованого стану конструкцій з тріщиноподібними дефектами. Новизна запропонованого підходу полягає в застосуванні гіперсингулярних інтегральних рівнянь для розв'язку еталонної задачі з обчислення коефіцієнту інтенсивності напружень. Еталонна задача полягає у визначенні напружено-деформованого стану зразка з круговою тріщиною в умовах дії однорідного розтягування. Для розв'язання цієї задачі використовуються методи скінчених та граничних елементів. При застосуванні методу скінченних елементів розглядається зразок у вигляді паралелепіпеду, що містить центральну кругову тріщину. Використовується сітка скінченних елементів, що згущується біля тріщини. При використанні методу граничних елементів розглядається тріщина у необмеженому тривимірному просторі. Крайову задачу теорії пружності для тіла з розрізом з використанням методів теорії потенціалу зведено до сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому обчислення коефіцієнтів інтенсивності зводиться до визначення скачка переміщень вздовж контуру тріщини. Визначення цього скачку здійснюється шляхом розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння на круговій області. В роботі запропоновано використання одновимірних та двовимірних гіперсингулярних рівнянь. Побудовані аналітичні формули для обчислення скінченних частин за Адамаром, які є елементами матриці системи розв'язувальних лінійних алгебраїчних рівнянь. при використанні обох типів гіперсингулярних рівнянь. За допомогою вказаних методів отримані значення числових коефіцієнтів інтенсивності напружень. Зроблено порівняння результатів, отриманих різними методами. Порівнюються також розмірності розв'язувальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. З'ясовані переваги та недоліки застосованих підходів.

Ключові слова: гіперсингулярне інтегральне рівняння, метод граничних елементів, метод скінченних елементів, коефіцієнти інтенсивності напружень.

K.G. DEGTYAREV, I.A. VIERUSHKIN, D.V. KRIUTCHENKO, E.A. STRELNIKOVA
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences
O.L. ZAYDENVARG
National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute"
Yu.V. NAUMENKO
V.N. Karazin National University

METHOD OF HYPER-SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS IN BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF FRACTURE MECHANICS

The purpose of this study is to develop an effective numerical method for analysing stress-strain state of structures with crack-like defects. The novelty of the proposed approach is in applying hypersingular integral techniques for solving the benchmark test problem of calculating the stress intensity factor. The reference problem consists in determining the stress-strain state of a sample with a circular crack under uniform tension. Finite and boundary element methods are used to solve this problem. When applying the finite element method, the sample in the form of a parallelepiped containing the central circular crack is considered. A mesh of finite elements is used, which thickens near the crack. When using the boundary element methods, the crack is considered in an infinite three-dimensional space. The boundary value problem of the elasticity theory for a cracked body is reduced to hypersingular integral equations using the potential theory methods. At the same time, the calculation of the stress intensity factors is reduced to the jump of movement determination along the crack contour. The determination of this jump is carried out by solving the hypersingular integral equation on the circular domain. The paper proposes the use of one-dimensional and two-dimensional hypersingular equations for this simulation. Analytical formulas are obtained for calculating finite parts according to Hadamard of the singular integrals, which are the matrix elements of the solving system of linear algebraic equations, using both types of hypersingular integral equations. Using the specified methods, the numerical values of the stress intensity factors were obtained. A comparison of the results obtained by different methods was made. The dimensions of solving systems of linear algebraic equations are also compared. The advantages and disadvantages of the applied methods are clarified.

Key words: hypersingular integral equation, boundary element method, finite element method, stress intensity factor.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

Постановка проблеми

Для елементів обладнання, виготовлених з конструкційних матеріалів, завжди характерна наявність різноманітних мікродефектів, які виникли в процесі виробництва або експлуатації. Ці дефекти можуть вплинути як на безпеку, так і на довговічність конструкцій. Поширення втомної тріщини є основною причиною катастрофічних руйнувань на залізничному транспорті, пошкоджень турбо- і гідрогенераторів, аварій літаків та гелікоптерів тощо. У гідротурбінах втомні тріщини, як правило, розташовуються поблизу опорних поверхонь. Новоутворена тріщина починає повільно рости, навіть якщо навантаження не перевищують номінальних значень. При досягненні тріщиною критичної довжини несучий елемент раптово отримує велику кінетичну енергію, що призводить до катастрофічного руйнування. В даний час, коли значна частина енергетичного обладнання України практично виробила свій нормативний ресурс, або була пошкоджена, проблеми оцінки залишкового ресурсу стають конче потрібними. Таким чином, актуальними є питання довговічності, працездатності та залишкового ресурсу елементів конструкції з тріщино-подібними дефектами.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідження динамічних процесів в елементах конструкції експериментальними методами призводить до значних матеріальних витрат, небажаних екологічних наслідків і не дозволяє отримати детальний розподіл напружень, деформацій, переміщень, температур, а також описати процеси виникнення та зростання тріщини, і руйнування споруд. Тому виникає необхідність у проведенні комп'ютерного експерименту. Для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) запропоновано багато числових методів. Серед них зазначимо метод Галеркіна [1], метод скінченних елементів для моделювання КІН в балках з тріщиною [2], згладжений метод скінченних елементів для тривимірних тіл з тріщиною [3], узагальнений метод скінченних елементів [4], P-версія методу скінченних елементів із контурними інтегралами [5], метод граничних елементів для 2D тіл із дефектами [6]. У [7] метод граничних елементів використовується для розрахунку КІН у функціонально градуйованих пластинах. Іншим важливим аспектом дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкції з дефектами є поширення тріщини. Двовимірну постановку такої задачі розглянуто в [8], експериментальні дослідження розвитку тріщини в балках виконано в [9]. Тривимірний аналіз поширення втомної тріщини в зварній сталевій балці на основі глобального-локального числового аналізу розглянуто в [10]. Останнім часом з'явилися наукові праці, що використовують теорію потенціалу. Це дає змогу не лише покращити точність обчислень, а й суттєво зменшити розмірність задач, що розглядаються [11], [12]. Методи теорії потенціалу та граничних інтегральних рівнянь привабливі ще й тим, що їх застосування не обмежується задачами з механіки руйнування. Наприклад, ці методи застосуються при вивченні проблем підтоплення міських територій [13], особливостей коливань рідини в пружних та жорстких резервуарах [14], визначенні аеродинамічних характеристик крила в потоці [15], тощо. Тому саме ці методи використовуються в даній роботі.

Як засвідчив аналіз літератури, проблема поширення тріщини в елементах обладнання ще далека від повного вирішення. Для цього необхідна розробка нових числових методів, які покажуть свою ефективність і надійність у дослідженні процесу розвитку тріщини в реальних конструкціях.

Мета дослідження

Метою дослідження є створення розрахункової методики для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень в тілах з дефектами типу тріщини.

Викладення основного матеріалу дослідження

Основні рівняння для аналізу напружено-деформованого стану для тіл з дефектами

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

Для визначення напружено-деформованого стану пружного тіла використовується розв'язуюча система трьох рівнянь еліптичного типу в частинних похідних другого порядку (рівняння Ламе)

$$\mu\Delta U_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},\ \vartheta = \mathrm{div}\mathbf{U},\quad j=1,2,3. \tag{1}$$

Тут $\mu=G=E/[2(1+\nu)]$ є модулем здвигу, $\lambda=E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ – коефіцієнт Ляме, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, **U** – вектор переміщень.

Введемо оператор напружень класичної теорії пружності як

$$\mathbf{T}^{\mathbf{n}(x)}\,\mathbf{U} = 2\mu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} + \lambda\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{U} + \mu(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{U}), \tag{2}$$

де n – одинична зовнішня нормаль до поверхні, що розглядається.

Нехай на частині межі Ω_1 задані кінематичні умови першої крайової задачі, а на межі Ω_2 мають виконуватись умови статичного навантаження другої крайової задачі, крім того $\Omega = \Omega_1\cup\Omega_1$. На поверхнях тріщини зазвичай вважаються відомими компоненти нормальних та дотичних напружень.

Отже, для визначення **U** формулюємо наступну крайову задача для тривимірного тіла, обмеженого Ω та ослабленого системою розрізів S_i (i =1,...,n):

$$\mu\Delta U_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j},\ j=1,2,3,\ U_i(\mathbf{x})=u_{il}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Omega_1,. \qquad \mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{U}(\mathbf{x})=\mathbf{X}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_2, \tag{3}$$

$$(\mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{u}(x)\cdot\mathbf{n}(x)) = N_{3i},\ (\mathbf{T}^{n(x)}\,\mathbf{u}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}_k(x)) = N_{ki},\ \mathbf{x}\in,\ i=1,2.$$

Розглянемо крайову задачу (3) і представимо її розв'язок у вигляді суми векторних функцій $\mathbf{U}(\mathbf{x})=\mathbf{u_0}(\mathbf{x})+\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Тут $\mathbf{u_0}(\mathbf{x})$ – переміщення, які виникають в твердому деформованому тілі без тріщини за однакові задані поверхневі навантаження, та визначаються таким чином:

$$\mu\Delta u_{j0} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} = 0,\ u_{j0}(\mathbf{x})=u_{il}(\mathbf{x}),\ j=1,2,3,\ \mathbf{x}\in\Omega_1,\ \mathbf{T}^{n(x)}\mathbf{u_0}(\mathbf{x})=\mathbf{X}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_2. \tag{4}$$

Розв'язок крайової задачі (4) можна знайти різними числовими методами. Серед них слід назвати метод скінченних елементів (МСЕ) [16] та метод граничних елементів (МГЕ) [14]; обидва ці методи засновані на використанні методу зважених нев'язок. Отже, невідомі будуть подані у вигляді рядів за базисом із функцій зі скінченним носієм $\{\psi_n\}\big|_{n=1}^{N_1}$, і для тестових функцій використовується той же самий базис.

Скінченно-елементне формулювання

Спочатку розглядається скінченно-елементне формулювання. Отже, апроксимація переміщень застосована у вигляді

$$\mathbf{u}_0 = \{N^u\}\{u_s\}, \tag{5}$$

де $\{N^u\}$ є функціями форми для переміщень, і $\{u_s\}$ це вузлові значення невідомих. Після інтегрування фінальних рівнянь і зведення частини об'ємних інтегралів до поверхневих отримуємо скінченно-елементне фориулювання задачі (4) у вигляді

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

$$[\mathbf{K}_s]\{u_s\} = \{\mathbf{f}_s\}. \tag{6}$$

Тут $[\mathbf{K}_s]$ – матриця жорсткості, , $\{\mathbf{f}_s\}$ – відомий вектор зусиль.

Гранично-елементне формулювання

Далі наведемо гранично-елементне формулювання задачі. Суттєвою особливістю МГЕ є використання сингулярних тестових функцій, які задовольняють диференціальне рівняння (1) всюди, крім однієї особливої точки. Таким чином, фундаментальний і сингулярний розв'язки рівняння (1) застосовуються як тестові функції. Фундаментальний розв'язок отримано з розгляду рівняння (1) з правою частиною у вигляді дельта-функції, та представлено у наступній матричній формі:

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x}-\mathbf{y}|} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\boldsymbol{x}-\mathbf{y}|^3}\right], \tag{7}$$

Цей розв'язок називається матрицею фундаментальних рішень Кельвіна-Соміліано.

Ця матриця є симетричною, і кожен її стовпець і рядок задовольняють рівнянню статики у переміщеннях (1) у довільній точці $x \in E^3$, за винятком $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. З використанням фундаментального розв'язку (7) і диференціального оператору поверхневих напружень (2) сингулярний розв'язок рівнянь (1) отримується як

$$\mathbf{T^n}(\partial_{\boldsymbol{x}},\mathbf{n}(\mathbf{x}))\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \Gamma_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad \Gamma_2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = [\mathbf{T^n}(\partial_{\mathrm{y}},\mathbf{n}(\mathbf{y}))\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x})]'. \tag{8}$$

Отже, вектор-функцію $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ можна розглядати як узагальнений пружний потенціал простого шару вздовж границь тіла

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \iint_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}_0(\mathbf{y})d\Omega_y, \tag{9}$$

де $\mathbf{p}_0(\mathbf{y})$ – невідомий вектор густини. Вектор-функція $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ задовольняє рівняння Ламе для будь-якої густини $\mathbf{p}_0(\mathbf{y})$, інтегровної на Ω. Підставляючи (9) у граничні умови (4), отримуємо інтегральні рівняння

$$\iint_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}_0(\mathbf{y})d\Omega_{\mathrm{y}} = \mathbf{u}_{\mathrm{l}}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_1, \quad \mathbf{p}_0(\mathbf{x}) + \iint_\Omega \Gamma_1(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}_0(\mathbf{y})d\Omega_{\mathrm{y}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_2. \tag{10}$$

Визначимо переміщення $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, розглядаючи їх інтегральне зображення як суму узагальнених пружних потенціалів простого і подвійного шарів. Потенціал подвійного шару розподіляється по поверхні розрізів $S = \cup S_i$, тоді як потенціал простого шару прикладається до межі поверхні тіла Ω, тому

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iint_S \Gamma_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y})dS_{\mathrm{y}} + \iint_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{p}(\mathbf{y})d\Omega_{\mathrm{y}}. \tag{11}$$

Завдяки властивостям узагальнених потенціалів простого та подвійного шарів вектор-функція u(x) задовольняє рівнянню (1). Розглядаючи граничні умови для визначення функції $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

Гіперсингулярні інтегральні рівняння

Рівняння, отримані за допомогою подання (11), перетворюються на систему гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГІР) відносно невідомої густини $\alpha(\mathbf{y})$. Для тріщини нормального відриву в необмеженому тілі ця система зводиться до одного гіперсингулярного рівняння [7]

$$\frac{1}{4\pi}\iint_s \frac{\alpha_3(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\,dS_y = Mq(\mathbf{x}),\ M=\frac{1-\nu}{G}, \tag{12}$$

де функція $q(\mathbf{x})$ характеризує навантаження на розтяг. Для тестування числових методів зручно використовувати копійчану (кругову) тріщину в необмеженому пружному тілі при рівномірному розтязі. У даній роботі розглядається щілинна копійчана тріщина, а для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) застосовано МСЕ та МГЕ. По-перше, рівняння (12) було розглянуто для тріщини у формі кола радіуса R при одновісному рівномірному розтязі σ. Отже, $q(\mathbf{x})$= σ, а S є колом в рівнянні (12). Область інтеграції S розділена на N плоских трикутних і чотирикутних елементів, рис. 1а). Розглянемо гіперсингулярний інтеграл по апроксимованій поверхні та отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{N} H_{kj3k} = f\left(\mathbf{x}_{0j}\right),\ \ j=1,2,\ldots N\,. \tag{13}$$

Тут елементи матриці H_{kj} обчислюються за формулою

$$H_{kj}=\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\left([\mathbf{l}_i\times\mathbf{r}_i]\cdot\mathbf{n}\right)}{\left|[\boldsymbol{l}_i\times\boldsymbol{r}_i]\right|^2}\left[\frac{(\boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{r}_{i+1})}{r_{i+1}}-\frac{(\boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{r}_i)}{r_i}\right], \tag{14}$$

де m – кількість сторін у k-го граничного елемента, а вектори $\mathbf{r}_k, \mathbf{l}_i, \mathbf{n}$ є такими:

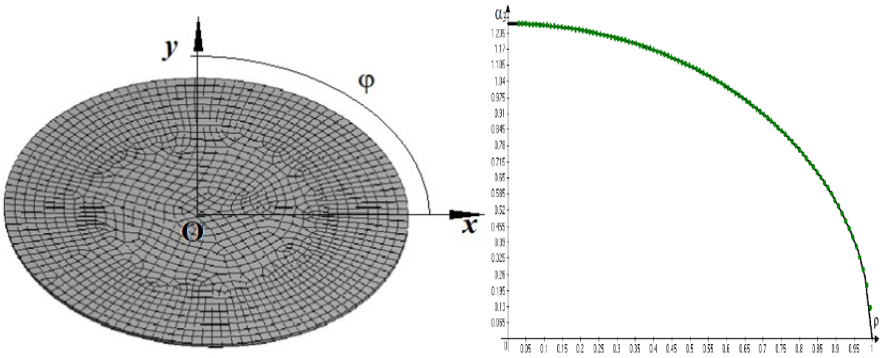
$$\mathbf{r}_k=(x_k-x_0, y_k-y_0, z_k-z_0), \mathbf{l}_i=(x_{i+1}-x_i, y_{i+1}-y_i, z_{i+1}-z_i), i=\overline{1,m}\,, \tag{15}$$

$$\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3),\ x_{m+1}=x_1,\ y_{m+1}=y_1, z_{m+1}=z_1,\ r_k=|\mathbf{r}_k|\,.$$

Оскільки область S у рівнянні (12) є колом, то двовимірне гіперсингулярне рівняння зводиться до одновимірного [12]. Застосовано циліндричну систему координат

$x=\rho\cos, y=\rho\sin,,\ x_0=\rho_0\cos_0,\ \ y_0=\rho_0\sin_{,0}$ та введено позначення

$$a={}^2+{}_0^2+(z-z_0)^2,\ b=2_0\,,$$



а) б)

Рис. 1. Дискретизація для кругової тріщини, а) порівняння розв'язків, б)

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

Отримано таке одновимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \alpha_3(\rho)\frac{\rho E(k)d\rho}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2} = \frac{1-\nu}{G}. \qquad (15)$$

Тут E(k) є еліптичним інтегралом другого роду, $k^2 = 2b/(a+b)$.

Для числового розв'язку рівняння (15) застосовано одновимірний МГЕ [17]. Відрізок [0, R] розбивається на N1 одновимірних граничних елементів. Для обчислення внутрішнього еліптичного інтеграла використовується метод, розроблений у [18]. Для порівняння результатів та їх перевірки використовується МСЕ. Розглянуто центральну кругову тріщину радіусом R в однорідному матеріалі (рис. 2а).

Числові результати

Розглянуто копійчану (кругову) тріщину радіусом R при одновісному розтягу σ. При використанні МГЕ тріщина розглядається в необмеженому 3D просторі. Отже, задіяно два формулювання з гіперсингулярними інтегральними рівняннями.

Перше стосується рівняння (12), тоді як друге відповідає аксіально-симетричному формулюванню (15). При чисельному моделюванні обрано такі параметри: R=0,005м, σ= 1МПа. Дискретизація області S на граничні елементи показана на рис. 1а). Загальна кількість плоских трикутних і чотирикутних елементів склала N = 9284 для числового розв'язку рівняння (12). Відрізок [0, R] розбивали на N_1 = 100 одновимірних граничних елементів. Аналітичний розв'язок рівняння (15) з правою частиною $f(\rho_0)$= –1 отримано в [7] як $_3(\rho) = 4\sqrt{R^2 - Á^2}$ /

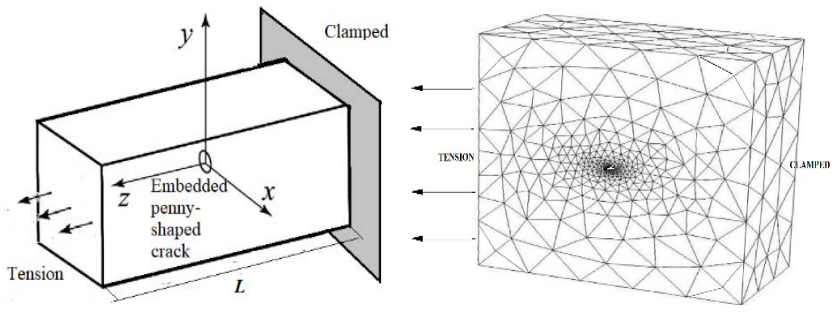
На малюнку 2b) показано порівняння аналітичних (суцільна лінія) та числових рішень (зелені точки) у безрозмірних координатах Á= Á/ R, $_3$=$_3$ /R. При розрахунках досягнуто точність ε=10^{-3}.

Найважливішими параметрами руйнування в аналізі напружень деформованого тіла є коефіцієнти інтенсивності напружень. Вони характеризують поля напружень і переміщень біля вершини тріщини і успішно використовуються для прогнозування поширення тріщини і руйнування конструкції.

У розглянутому випадку копійчаної (пенні-подібної) кругової тріщини єдиний КІН, необхідний для точного опису напружено-деформованого стану біля вершині тріщини, це KI. Його аналітичний вираз для кругової тріщини радіусом R при одновісному розтягу σ становить $K_I = 2\sqrt{R}$ / $K_I = 2\sqrt{R}$ /, [7]. Цей КІН в теорії гіперсингулярних рівнянь [16] виражається через компоненти вектору зміщення наступним чином

$$K_1(\boldsymbol{x}) = \lim_{r\to 0}\sqrt{Á/2r}\,\frac{G}{1-\nu}u_3(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}\in S, \qquad (16)$$

де $r = |\boldsymbol{x}-\mathbf{y}|$ – декартова відстань між точками $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{y}$, при цьому $\lim_{yx} u_3(\mathbf{y}) = \pm_3(\mathbf{x})/2$



а) б)

Рис. 2. Кругова тріщина в паралелепіпеді

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

Нижче, в таблиці 1, результати обчислення КІ наведені з використанням розв'язків рівнянь (12) і (15) та порівняні з аналітичним розв'язком за й рішенням за методом скінченних елементів. При цьому розглядається копійчана тріщина в прямокутному зразку, рис. 2а). Скінченно-елементна сітка складається з 43674 елементів, її половина зображена на рисунку 2б). Результати, наведені в таблиці 1, свідчать про точність і достовірність методів МСЕ і МГЕ, залучених до оцінок. Тут КІН розраховується в різних точках контуру відповідно до кута φ, рис. 1а).

Таблиця 1

Порівняння значень $K_1 / \sqrt{R}$, отриманих різними методами

φ	Аналітичне значення	МГЕ, двовимірне ГСІУ, (12)	МГЕ, двовимірне ГСІУ, (16)	МСУ
10	1.12827	1.13217	1.12988	1.14217
30	1.12827	1.12945	1.12837	1.14207
50	1.12827	1.12876	1.12830	1.14204
70	1.12827	1.12842	1.12828	1.14203
90	1.12827	1.12830	1.12828	1.14200

Слід зазначити, що найбільш точні результати отримані при використанні одновимірного МГЕ. Але недоліком цього методу є його обмеження лише круговими та еліптичними областями інтегрування.

Висновки

Для аналізу напружень конструкцій з тріщиноподібними дефектами застосовано методи граничних та скінченних елементів. Формулювання з використанням граничних елементів базується на використанні гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Тестові розрахунки показали високу точність МГЕ та МСЕ. Порівняння розрахунків методу скінченних та граничних елементів підтвердило достовірність результатів.

Список використаної літератури

1. Xu B.B., Gao X.W., Jiang W.W., Cui M., Jun L. Galerkin free element method and its application in Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 2019. 218, 106575.
2. Bertolini P., Eder M. A., Taglialegne L., Valvo P. S. Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections. *Thin-Walled Structures*, 137, 527–540, 2019, DOI:10.1016/j.tws.2019.01.008.
3. Rokach V. Smoothed finite element method for stress intensity factor estimation: benefits and limitations, CoRR abs/1903.11401. 2019.
4. Serenza E.N., Oscar A. G. Suarez O.A., Rossi G. A study about SIF estimation using XFEM, Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC Foz do Iguaçu/PR, Brazil, 2020.
5. Simionato F., Daros C. H.: Boundary element method analysis for mode III linear fracture mechanics in anisotropic and nonhomogeneous media, *Z Angew Math Mech*. 99, e201800211, 2019, //doi.org/10.1002/zamm.201800211.
6. Palladino S., Esposito L., Ferla P., and Minutolo V.: Functionally Graded Plate Fracture Analysis Using the Field Boundary Element Method, *Appl. Sci*.,11, 8465, 2021.
7. Zhang J., Xu R., He Y., Yang W. Direct Computation of 3-D Stress Intensity Factors of Straight and Curved Planar Cracks with the P-Version Finite Element Method and Contour Integral Method, *Materials,*14(14), 3949, 2021, DOI:10.3390/ma14143949
8. Yi W., Rao, Q., Li, Z., and Chun-Lin, C. A New Method for Predicting the Crack Propagation Process of Brittle Rock Under Thermo-Hydro-Mechanical Loading Conditions, *IEEE Access*, 9, 2021, DOI:10.1109/ACCESS.2021.3076001.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

9. Ren Y., Dong Y., Liu B., Zhao S., Yang R. Research on low stress high temperature precision shear separation process of metal bars. *Heavy Mach*., 05, 37–41, 2021.
10. Zong L., Shi G. Three-dimensional fatigue crack propagation analysis of welded steel beam based on global-local numerical model. *Advances in Bridge Eng*., 2(4), 1–17. 2021.
11. Obaiys S.J., Ibrahim R.W., Ahmad A.F. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study. In: *Differential and Integral Inequalities*. Springer Optimization and Its Applications, 151, 2019. https//doi.org/10.1007/978-3-030-27407-8_25.
12. Gnitko V., Karaiev A., Degtyariov K., Vierushkin I., Strelnikova E. Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 134, 67–79, 2022, DOI:10.2495/BE450061.
13. Serikova E., Strelnikova E., Yakovlev V. Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities, *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*, vol. 1, pp. 86–90, 2015. /Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf.
14. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 2016, 17(1), pp. 75–87. URL: https://www.ikppress.org/index.php/JOBARI/article/view/3788.
15. Avramov K. V., Strelnikova E. A. Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid. *Int. Appl. Mech* 50, 2014, pp. 329–335.
16. Rusanov A., Khorev O., Agibalov Y., Bykov Y., Korotaiev P. Numerical and Experimental Research of Radial-Axial Pump-Turbine Models with Spliters in Turbine Mode, In: ICTM 2020, Lecture Notes in Networks and Systems, 188, 2021, DOI:/10.1007/978-3-030-66717-7_36.
17. Karaiev A., Strelnikova E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / *International Journal of Modeling. Simulation, and Scientific Computing*. 11(1), 2050003. 2020, DOI:10.1142/S1793962320500038.
18. Karaiev A, Strelnikova E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *Z Angew Math Mech*. 101, e201800339. 2021, DOI:10.1002/zamm.201800339.

References

1. Xu, B.B., Gao, X.W., Jiang, W.W., Cui, M., & Jun, L. (2019). Galerkin free element method and its application in Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 218, 106575 [in English]
2. Bertolini, P., Eder, M.A., Taglialegne, L., & Valvo, P.S. (2019). Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections. *Thin-Walled Structures*, 137, 527–540, DOI:10.1016/j.tws.2019.01.008 [in English]
3. Rokach, V. (2019). Smoothed finite element method for stress intensity factor estimation: benefits and limitations, CoRR abs/1903.11401 [in English]
4. Serenza, E.N., Oscar, A.G., Suarez, O.A., & Rossi, G. (2020). A study about SIF estimation using XFEM, Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC Foz do Iguaçu/PR, Brazil [in English]
5. Simionato, F., & Daros, C.H. (2019). Boundary element method analysis for mode III linear fracture mechanics in anisotropic and nonhomogeneous media, *Z Angew Math Mech*. 99, e201800211 https://doi.org/10.1002/zamm.201800211 [in English]
6. Palladino, S., Esposito, L., Ferla, P., & Minutolo, V. (2021). Functionally Graded Plate Fracture Analysis Using the Field Boundary Element Method, *Appl. Sci*.,11, 8465 [in English]
7. Zhang, J., Xu, R., He, Y., & Yang, W. (2021). Direct Computation of 3-D Stress Intensity Factors of Straight and Curved Planar Cracks with the P-Version Finite Element Method and Contour Integral Method, *Materials*,14(14), 3949, DOI:10.3390/ma14143949 [in English]

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

8. Yi, W., Rao, Q., Li, Z., & Chun-Lin, C. (2021). A New Method for Predicting the Crack Propagation Process of Brittle Rock Under Thermo-Hydro-Mechanical Loading Conditions, *IEEE Access*, 9, DOI:10.1109/ACCESS.2021.3076001 [in English]
9. Ren, Y., Dong, Y., Liu, B., Zhao, S., & Yang, R. (2021). Research on low stress high temperature precision shear separation process of metal bars. *Heavy Mach*., 05, 37–41 [in English]
10. Zong, L., & Shi, G. (2021). Three-dimensional fatigue crack propagation analysis of welded steel beam based on global-local numerical model. *Advances in Bridge Eng*., 2(4), 1–17 [in English]
11. Obaiys, S.J., Ibrahim, R.W., & Ahmad, A.F. (2019). Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study. In: *Differential and Integral Inequalities*. Springer Optimization and Its Applications, 151, https://doi.org/10.1007/978-3-030-27407-8_25 [in English]
12. Gnitko, V., Karaiev, A., Degtyariov, K., Vierushkin, I., & Strelnikova, E. (2022). Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 134, 67–79, DOI:10.2495/BE450061 [in English]
13. Serikova, E., Strelnikova, E., & Yakovlev, V. (2015). Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities, Journal of Environment Protection and Sustainable Development, vol. 1, pp. 86–90, Retrieved from: /Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf [in English]
14. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., & Strelnikova, E (2016). Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp. 75–87. https://www.ikppress.org/index.php/JOBARI/article/view/3788 [in English]
15. Avramov, K.V., & Strelnikova, E.A. (2014). Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid. *Int. Appl. Mech* 50, pp. 329–335 [in English]
16. Rusanov, A., Khorev, O., Agibalov, Y., Bykov, Y., & Korotaiev, P. (2021). Numerical and Experimental Research of Radial-Axial Pump-Turbine Models with Spliters in Turbine Mode, In: ICTM 2020, Lecture Notes in Networks and Systems, 188, DOI:/10.1007/978-3-030-66717-7_36 [in English]
17. Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2020). Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / *International Journal of Modeling. Simulation, and Scientific Computing*. 11(1), 2050003. DOI:10.1142/S1793962320500038 [in English]
18. Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2021). Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *Z Angew Math Mech*. 101, e201800339. DOI:10.1002/zamm.201800339 [in English]

Дегтярьов Кирило Георгійович – к.т.н., молодший науковий співробітник відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Вєрушкін Іван Олексійович – аспірант Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: ivanveruskin86@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3837-5567.

Крютченко Денис Володимирович – провідний інженер відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Стрельнікова Олена Олександрівна – д.т.н., професор, провідний науковий співробітник Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: elena15@gmx.com, ORCID: 0000-0003-0707-7214.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

Зайденварг Ольга Леонідівна – старший викладач кафедри прикладної математики Харківського національного аерокосмічного університету імені Н.Є. Жуковського. E-mail: olga.zaudenvarg@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7214-6656.

Науменко Юрій Віталійович – магістрант Науково-навчального інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. E-mail: yuriy.naumenko@karazin.ua, ORCID: 0000-0001-9058-6727.

Degtyarov Kyrylo Heorhiiovych – Ph.D., Junior Researcher, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Vierushkin Ivan Oleksiiovych – Postgraduate Student, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: ivanveruskin86@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3837-5567.

Kriutchenko Denys Volodymyrovych – Leading Engineer, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Strelnikova Olena Oleksandrivna – D.Sc., Prof., Senior Researcher, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: elena15@gmx.com, ORCID: 0000-0003-0707-7214.

Zaydenvarg Olga Leonidivna – Assistant Professor, Department of Applied Mathematics at the N.E. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute". E-mail: olga.zaudenvarg@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7214-6656.

Naumenko Yuriy Vitaliyovych – Master's Student, Scientific and Educational Institute of Computer Physics and Energy at the V.N. Karazin Kharkiv National University. E-mail: yuriy.naumenko@karazin.ua, ORCID: 0000-0001-9058-6727.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-5

УДК 539.3:534

К.Г. ДЕГТЯРЬОВ, Д.В. КРЮТЧЕНКО, В.І. ГНІТЬКО, І.О. ВЄРУШКІН
Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України
М.Т. КОРНІЙЧУК
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА НЕЧІТКИХ УМОВ НАВАНТАЖЕННЯ

Сучасне обладнання зазвичай працює в умовах підвищених силових та температурних навантажень. Це потребує ще на стадії проєктування визначити міцності та динамічні характеристики елементів конструкцій з метою обґрунтування надійності експлуатації. Експериментальні дослідження дозволяють оцінити необхідні характеристики з достатньою точністю. Але проведення натурних експериментів є коштовною та не завжди безпечною процедурою. Тому актуальними є дослідження міцності та коливань елементів конструкцій, засновані на комп'ютерному моделюванні. Але параметри зовнішнього навантаження не завжди можна визначити однозначно. В цій роботі розроблений ефективний метод аналізу гідропружних коливань елементів конструкцій, заснований на застосуванні методів теорії потенціалу та елементів нечіткої логіки. Спочатку задача вимушених гідропружних коливань елементу конструкції розв'язується в детерміністичному формулюванні. Припускається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, індукований малими коливаннями пружного елементу, є безвихровим. Тоді існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівнянню Лапласа. Використано метод заданих форм, в якості базисних функцій обрано форми коливань елементу конструкції без врахування приєднаних мас рідини. Для знаходження тиску рідини на елемент конструкції побудовано гіперсингулярне інтегральне рівняння, числове розв'язання якого здійснено методом граничних елементів з використанням апроксимації невідомої густини сталими величинами на граничних елементах. Далі параметри навантаження були фазифіковані з використанням трикутних функцій приналежності. Потім в математичну модель була додана випадковість параметрів навантаження. Отримані нечіткі стохастичні диференціальні рівняння, які розв'язані числовим методом. Подані числові результати демонструють вплив невизначеності вихідних даних на поведінку елементів конструкцій.

Ключові слова: гідропружні коливання, гіперсингулярне інтегральне рівняння, метод граничних елементів, методи нечіткої математики.

K.G. DEGTYAREV, D.V. KRIUTCHENKO, V.I. GNITKO, I.A. VIERUSHKIN
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences
M.T. KORNEICHUK
V.N. Karazin National University

COMPUTER MODELING HYDROELASTIC VIBRATIONS OF STRUCTURE ELEMENTS UNDER FUZZY LOADING CONDITIONS

Modern equipment usually operates under increased power and temperature loads. This requires determining the strength and dynamic characteristics of structural elements at the design stage in order to substantiate the reliability of operation. Experimental studies make it possible to estimate such characteristics with sufficient accuracy. But conducting natural experiments is an expensive and not always safe procedure. Therefore, studies of the strength and vibrations characteristics of structural elements based on computer modelling are relevant. But the external load parameters cannot always be determined unambiguously. In this work, an effective method of analysing hydroelastic vibrations of structural elements is developed, based on the application of potential theory methods, and elements of fuzzy logic. First, the problem of forced hydroelastic oscillations of a structural element is solved in a deterministic formulation. It is assumed that the fluid is ideal and incompressible, and its motion, induced by small oscillations of the elastic element, is vortex-free. Then there exists a velocity potential that satisfies the Laplace equation. The method of given modes is used, the oscillation modes of the structural element without taking into account the attached fluid masses are chosen as the basic functions. To find the pressure of the liquid on the structural element, a hypersingular integral equation is received, the solution of which is carried out by the boundary element method, using the unknown density approximation by constants on the boundary elements. Next, the load parameters are fuzzified using triangular membership functions. Then the randomness of load parameters was added to the mathematical model. Fuzzy stochastic differential equations are obtained, which are solved by a numerical method. The presented numerical results demonstrate the influence of the uncertainty of the initial data on the behaviour of structural elements.

Key words: hydroelastic oscillations, hypersingular integral equation, boundary element method, methods of fuzzy mathematics.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

Постановка проблеми

Ефективність та надійність роботи обладнання в різних інженерних застосунках залежить від його раціонального проектування. Таке проектування має враховувати наявність різних факторів, таких як взаємодія із оточуючим середовищем, інтенсивні силові та температурні впливи внаслідок землетрусів, терактів та інших форс-мажорних обставин. Зазвичай зовнішні навантаження мають випадковий характер. Навіть, якщо обмежитись гармонічним навантаженням, то такі параметри як частота, та амплітуда можна вважати заданими з деякою невизначеністю. Треба оцінити розбіжність результатів розрахунків динамічних характеристик устаткування, викликану невизначеністю початкових умов та параметрів навантаження. В цій роботі розглянуті вимушені коливання пружних елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною, за умови дії нечіткого гармонічного навантаження. Таке формулювання дає змогу надати більш адекватні характеристики міцності елементів конструкцій та знайти діапазони небажаних частот зовнішнього навантаження.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Проблема гідропружної взаємодії при вивченні коливань елементів конструкцій виникла ще в середині минулого століття, але інтерес до неї інженерів та науковців не вщухає дотепер. Це пов'язано із широким колом явищ, де потрібно враховувати взаємодію пружного тіла з рідиною або газом. Серед цих питань відмітимо дослідження міцності та вибір оптимальних параметрів лопатей повітряних установок [1], пропелерів субмарин [2], лопатей та проточних частин гідравлічних та парових турбін [3], аналіз коливань рідини в паливних баках [4] та резервуарах для збереження нафти [5], коливань тонких пластин та оболонок в рідині [6], коливань елементів обладнання під час місії ракет-носіїв [7], деякі проблеми підтоплення міських територій [8]. Останнім часом розвинені потужні числові методи для розв'язання крайових задач гідропружної взаємодії. Найбільш ефективними виявились методи скінченних елементів [9], скінченних об'ємів [10], методи теорії потенціалу з використанням граничних інтегральних рівнянь [11]. Але, навіть отримані із задовільною точністю числові розв'язки не дають змогу зробити висновки щодо надійності експлуатації обладнання внаслідок завжди присутній невизначеності в параметрах навантаження та вихідних даних. Наразі з'явилась низка досліджень, в яких використовуються поняття нечіткої математики та нечіткої логіки. Концепції нечіткого параметра та нечіткої логіки вперше були запропоновані Zadeh в [12], і з того часу вони стали потужним інструментом для моделювання невизначеності у різноманітних практичних інженерних питаннях [13]. Слід зазначити, що для такого математичного моделювання необхідне використання нечітких диференціальних рівнянь. Одним із способів подолати невизначеність є додавання випадковості деяким параметрам моделі за допомогою реалізації нечітких стохастичних диференціальних рівнянь [14].

Мета дослідження

Метою дослідження є створення розрахункової методики для оцінки динамічних характеристик елементів обладнання при взаємодії із рідиною, та за умови нечіткого завдання початкових умов та параметрів зовнішнього навантаження.

Викладення основного матеріалу дослідження

Метод граничних елементів в задачах гідропружної взаємодії елементів конструкцій

При застосуванні методу граничних елементів крайові задачі теорії пружності для елементів конструкцій, що взаємодіють із рідиною, зводяться до двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Наведемо формулювання задачі. Розглянемо пружний елемент конструкції, що занурений в рідину, та здійснює коливання внаслідок дії деякого зовнішнього навантаження. Рівняння руху такого елементу у загальному вигляді можна подати таким чином:

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

$$\boldsymbol{M_S\ddot{U} + K_S U = P + F}. \tag{1}$$

Тут **U** є вектором переміщень, $\mathbf{M}_S$, $\mathbf{K}_S$ – матриці мас та жорсткості пружного елементу відповідно, **P** – перепад тиску рідини на поверхнях елементу, **F** – сила зовнішнього збудження.

Якщо рідина є нестисливою та нев'язкою, а її рух безвихровим, то існує потенціал швидкостей $\boldsymbol{v}(x,y,z,t) = \mathrm{grad}\Phi(x,y,z,t)$, який задовольняє рівнянню Лапласа. На бокових поверхнях пружного елементу мають виконуватись умови непронікнення. Сформулюємо крайову задачу відносно потенціалу $\Phi(x,y,z,t)$

$$\Delta\Phi = 0,\ \frac{\partial\Phi^{\pm}}{\partial\mathbf{n}} = \left(\dot{\mathbf{U}},\mathbf{n}\right), \tag{2}$$

де *n* є одиничною нормаллю до поверхні елементу. Оскільки ідеальна рідина створює лише нормальний тиск на поверхні зануреного тіла, то **P**=*P***n**, при цьому величину *P* визначимо з лінеаризованого інтегралу Коші-Лагранжа

$$P = -\rho_l\left[\frac{\partial\Phi^{+}(x,y,z,t)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^{-}(x,y,z,t)}{\partial t}\right], \tag{3}$$

де ρ_l – густина рідини. Якщо розв'язок крайової задачі (2) знайдено, то можна записати

$$\Phi(x,y,z,t) = G\left(\dot{\mathbf{U}}\right),\quad \mathbf{P}(x,y,z,t) = -\mathbf{H}(\ddot{\mathbf{U}}), \tag{4}$$

де *G*, **H** поки ще невідомі. Тоді

$$\mathbf{M_S\ddot{U} + K_S U = -H\ddot{U} + F,} \tag{5}$$

де **H** є матрицею приєднаних мас рідини. Засіб її побудови з використанням методу граничних елементів наведено в [10]. Інтегральне подання для невідомого потенціалу швидкостей обрано як гармонічний потенціал подвійного шару

$$\Phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_\xi}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right]dS_\xi,\ \mathbf{x} = (x,y,z),\ \boldsymbol{\xi} = (\xi,\eta,\zeta). \tag{6}$$

Тут $\Gamma(\xi,t)$ – невідома густина потенціалу, $\mathbf{n}_\xi$ є одиничним вектором нормалі до поверхні $S\xi$. Надалі використовуємо метод заданих форм, тобто застосовуємо таке подання для визначення невідомих пружних переміщень:

$$\mathbf{U}(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t)\mathbf{U}_k\,(x,y,z), \tag{7}$$

в якому $\mathbf{U}_k$ є формами коливань елементу конструкції в вакуумі (без врахування приєднаних мас). Тоді маємо таку формулу:

$$\Gamma(\boldsymbol{\xi},t) = \sum_{k=1}^{N}\dot{c}_k(t)\Gamma_k\,(\boldsymbol{\xi}). \tag{8}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

Функції Γ_k (ξ) визначаються шляхом розв'язання таких гіперсингулярних інтегральних рівнянь:

$$\mathbf{N}\Gamma_k = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right] dS_\xi = (\mathbf{U}_k, \mathbf{n}). \tag{9}$$

Маємо, використовуючи (3),(9),

$$\Phi^+ - \Phi^- = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t)\Gamma_k(\mathbf{x}),\ P = -\rho_l \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)\Gamma_k(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)\mathbf{M}_S\mathbf{U}_k(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^N c_k(t)\mathbf{K}_S\mathbf{U}_k(\boldsymbol{x}) + \mathbf{n}\rho_l \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)\Gamma_k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}. \tag{11}$$

З використанням співвідношень

$$\mathbf{K}_S(\mathbf{U}_k) = \omega_k^2 \mathbf{M}_S(\mathbf{U}_k)\ ,\ (\mathbf{M}_S(\mathbf{U}_k), \mathbf{U}_j) = \delta_{kj} \tag{12}$$

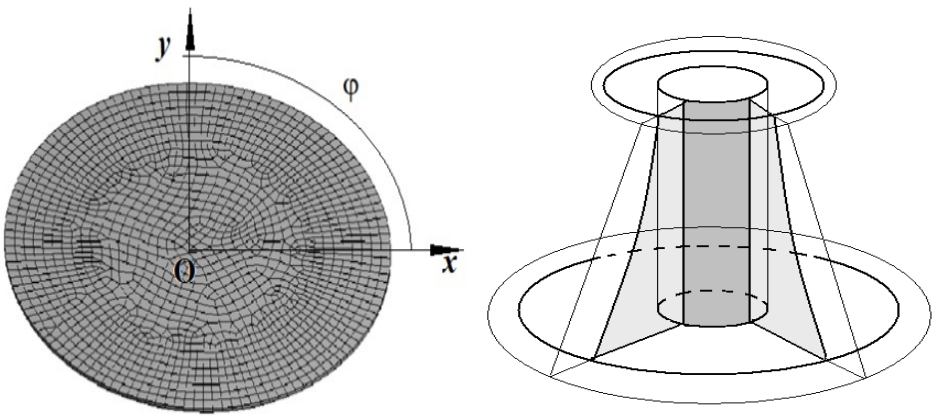
після виконання скалярного добутку рівняння (11) на функції $\mathbf{U}_l$ здобудемо

$$\ddot{c}_l(t)\left[\delta_{kl} + \rho_l \sum_{k=1}^N (\mathbf{n}\Gamma_k(\mathbf{x}), \mathbf{U}_l)\right] + \omega_l^2 \delta_{kl} c_l(t) = (\mathbf{F}, \mathbf{U}_l). \tag{13}$$

Для однозначного розв'язку системи диференційних рівнянь (13) треба додати початкові умови. В подальшому для розв'язання детерміністичної задачі обираємо нульові початкові умови, тобто вважаємо, що рух пластини в рідині почався із стану спокою.

Тестування детерміністичного методу

Розглянемо коливання круглої пружної пластини, зануреної в воду. Вважаємо, що пластина жорстко закріплена вздовж контуру. Пластина має такі фізичні та геометричні параметри: модуль пружності E=2.06·10^8 КРа, коефіцієнт Пуассона ν=0.3, густина матеріалу ρ = 7850 кг / м^3, товщина h = 0.01 м, радіус пластини R = 1.0 м, рис. 1а).



а) б)

Рис. 1. Схеми елементів конструкцій, що взаємодіють із рідиною

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

Форми коливань цієї пластини у вакуумі знайдені у вигляді [15]

$$U_{km}(\rho,\varphi) = w_m(\rho)\cos k\varphi,\ w_m(\rho) = J_0(\alpha_m\rho) - \frac{J_0(\alpha_m R)}{I_0(\alpha_m R)} I_0(\alpha_m\rho), \tag{14}$$

де $J_0(\alpha_m\rho)$, $I_0(\alpha_m\rho)$ – функції Бесселя та модифіковані функції Бесселя нульового порядку, α_m – корені характеристичного рівняння

$$J_0(\alpha R)\, I_1(\alpha R) - I_0(\alpha R)\, J_1(\alpha R) = 0. \tag{15}$$

Частоти коливань «сухої» круглої пластинки Ω знаходяться зі співвідношення

$$\alpha^4 = \Omega^2 \frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}. \tag{16}$$

Для знаходження частот коливань пластини з урахуванням приєднаних мас рідини використовуємо рівняння (13) з нульовою правою частиною. При цьому застосовуємо числові розв'язки рівнянь (9). Слід зазначити, що як у випадку «сухої» пластини, так і при врахуванні доданих мас рідини існують кратні частоти, що відповідають таким формам

$$w_{11}(\rho)\cos\theta\,, w_{11}(\rho)\sin\theta, w_{21}(\rho)\cos 2\theta, w_{21}(\rho)\sin 2\theta. \tag{17}$$

У таблиці 1 нижче наведені значення частот для цих форм для «сухої» пластини Ω_{i1} і ω_{i1}, для пластини, зануреної в рідину, при жорсткому закріпленні. При визначенні частот та форм пластинки, зануреної в рідину, використано метод граничних елементів. На рис. 1а) наведено дискретизацію розрахункової області. Для отримання точності $\varepsilon=10^{-3}$ використано 9200 трикутних та чотирикутних граничних елементи.

Таблиця 1

Частоти коливань круглої пластини, Гц

i	0	1	2
Ω_{i1}	25.20	52.44	86.00
ω_{i1}	7.241	12.69	16.80

Зауважимо, що форми коливань пластини, зануреної в рідину, практично збігаються з формами коливань «сухої» пластини. Врахування наявності рідини призводить до значного зниження частот вільних коливань.

Наступний числовий результат стосується визначення матриці приєднаних мас для конструкції, що моделює робоче колесо радіально-осьової турбіни Френсіса, рис. 1б). Використано гіперсингулярні інтегральні рівняння, отримані за допомогою непрямого формулювання. Тут розглядався нескінченний об'єм рідини, а лопаті моделювалися тонкими поверхнями. Реалізація техніки граничних інтегральних рівнянь привела до наступної системи гіперсингулярних рівнянь:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N_b}\iint_{\Omega_i}\gamma_i(\mathbf{x})\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\partial\mathbf{n}(\mathbf{x}_{0j})}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{0j}|}\,d\Omega_i = \frac{\partial w(\mathbf{x}_{0j})}{\partial t},\ j = 1,2,\dots N, \tag{18}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

де N_b – кількість лопатей у турбінному колесі Френсіса, N – кількість розрахункових точок, γ_i (**x**) – невідомі густини; кожна з яких пропорційна перепаду тиску з обох сторін лопаті, функції $w(\mathbf{x}_{0j})$ зображують форми коливань лопаті без врахування приєднаних мас рідини.

У таблиці 2 наведено порівняння експериментальних даних із чисельними результатами.

Таблиця 2

Порівняння числових і експериментальних частот, Гц

Номер	Числові результати	Експериментальні дані
частоти	Метод граничних елементів	Турбоатом
1	22.2	21.6
2,3	28.7	28.5
4,5	32.9	32.7
6,7	37.8	37.2
8	45.3	40.2

В цьому випадку також наявні кратні частоти, що відповідають формам коливань у вигляді (17), але з функціями w_j, що залежать від поверхневих координат.

Експериментальні дані були отримані на підприємстві «Українські енергетичні машини» (раніше «Турбоа́том») для моделі колеса турбіни Френсіса на електростанції П'єдра-дель-Агіла [10].

Отримані дані використовуються при відстроюванні від небажаних резонансних частот.

Комп'ютерне моделювання вимушених коливань конструкції за умови

нечіткого завдання параметрів навантаження

Переходимо до числового розв'язання системи диференціальних рівнянь (13). Припустимо, що вектор **F** подається таким чином:

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}a_0 \cos(f_0 t) + \mathbf{k}a_1 \cos(f_0 t). \tag{19}$$

де f_0 є частотою зовнішнього навантаження, a_0, a_1 – амплітуди навантаження в горизонтальному та вертикальному напрямках.

Початкові дані обираємо у вигляді

$$c_k(t) = 0, \dot{c}_k(t) = 0, k \neq l \; \dot{c}_l(t) = q_1. \tag{20}$$

Далі детерміновані параметри f_0, q_1, a_0, a_1 фазифікуються як трикутні нечіткі числа B=(b_1, b_2, b_3) з використанням неосесиметричних функцій приналежності $\mu B(x)$, зображених на рисунку 2.

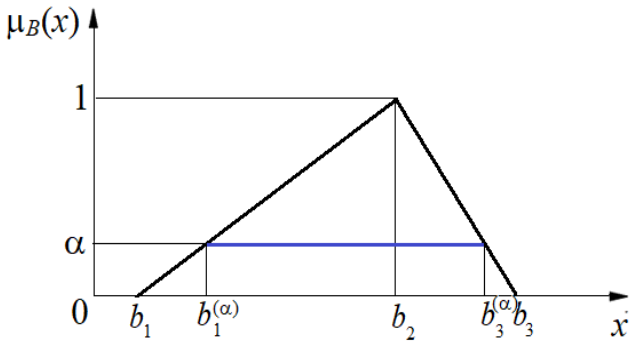


Рис. 2. Функція приналежності нечіткого числа

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

Функція приналежності $\mu B(x)$ задається таким чином

$$\mu_B(x) = \begin{cases} (x - b_1)/(b_2 - b_1), & b_1 \le x \le b_2 \\ (b_3 - x)/(b_3 - b_2), & b_2 \le x \le b_3 \\ 0, \quad x < b_1, & x > b_3 \end{cases}$$

Чіткі інтервали B_α, визначені операцією α-перерізу, отримуємо за допомогою наступного співвідношення $B_\alpha = \left[b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}\right]$, де $b_1^{(\alpha)} = (b_2 - b_1)\alpha + b_1$, $b_3^{(\alpha)} = (b_2 - b_3)\alpha + b_3$. Таким чином, всі чіткі параметри фазифікуються наступним чином

$$a_0 \quad \leftrightarrow \quad A_0 = (a_{01}, a_{02}, a_{03}), \quad a_1 \leftrightarrow \quad A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}). \tag{21}$$

З фазифікованими параметрами числовий розв'язок системи (13) отримано за допомогою підходу, розробленого в [12], [14]. В результаті отримано α-перерізи для функції (**U**,**n**) для різних α, що дозволяє аналізувати невизначеності, внесені зовнішнім навантаженням при оцінці амплітуди коливань елементів пружної конструкції.

Нижче розглядаються інтервали α-перерізів для всіх нечітких параметрів, а також оцінюються нижня та верхня межі α-перерізів для амплітуди коливань. При цьому обирались такі трикутні нечіткі числа:

$$F_0 = (2.0, 3.45, 20.0),\ Q_1 = (0.01, 0.05, 0.075),\ A_0 = (0.01, 0.1, 0.2),\ A_1 = (0.01, 0.05, 0.2).$$

Частота 3.45 Гц є основною частотою обертання валу турбіни, її розглядаємо як частоту зовнішнього навантаження. Зауважимо, що порівняно з частотою зовнішнього навантаження, що дорівнює 3.45 Гц, спектр власних частот конструкції значно вищий, як свідчать дані таблиці 2. Тому трикутне нечітке число обираємо з середнім значенням 3.45 Гц, та розповсюдженим до 20.0 Гц. Частота 20.0 Гц достатньо близька до першої власної частоти 22.2 Гц. При проведенні числового аналізу вважаємо, що коливання конструкції в рідині починається із стану спокою, але при розрахунках початкові дані також задаються нечітким числом Q_1. Амплітуди зовнішнього навантаження задаємо нечіткими числами A_0 та A_1. В таблиці 3 наведені верхні та нижні межі фазифікованих параметрів при різних α.

Таблиця 3

α-перерізи для фазифікованих параметрів

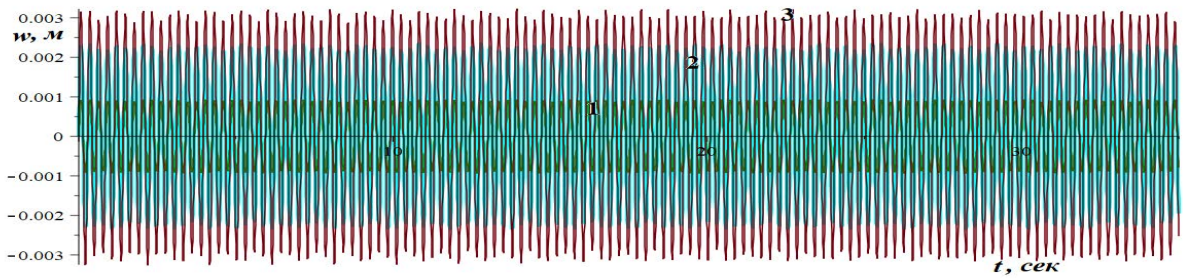
α-перерізи	0.25	0.5	0.75
f_0^L	2.7375	2.9750	3.2125
f_0^U	15.8525	11.7250	7.5875
a_0^L	0.0325	0.055	0.0775
a_0^U	0.175	0.15	0.125
a_1^L	0.02	0.03	0.08
a_1^U	0.165	0.125	0.0875
$\underline{q_1^L}$	0.02	0.03	0.04
	0.06875	0.0625	0.05625

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

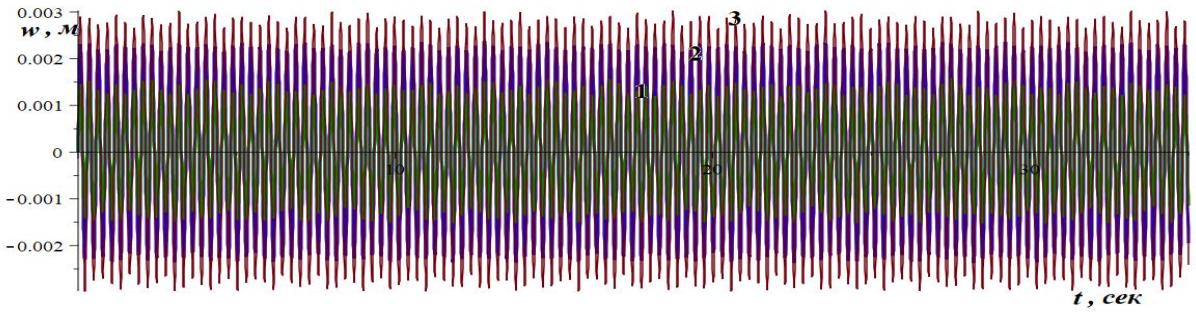
Нижче розглядаються інтервали α-перерізів для всіх введених нечітких параметрів, а також оцінюються нижня та верхня межі α-перерізів для максимальної амплітуди w коливань лопатей робочого колеса з урахуванням приєднаних мас.

Рисунки 3а)–3в) демонструють як чіткі розв'язки, так і нижню та верхню межі α-перерізів для функції w протягом перших 35 секунд руху для різних α.

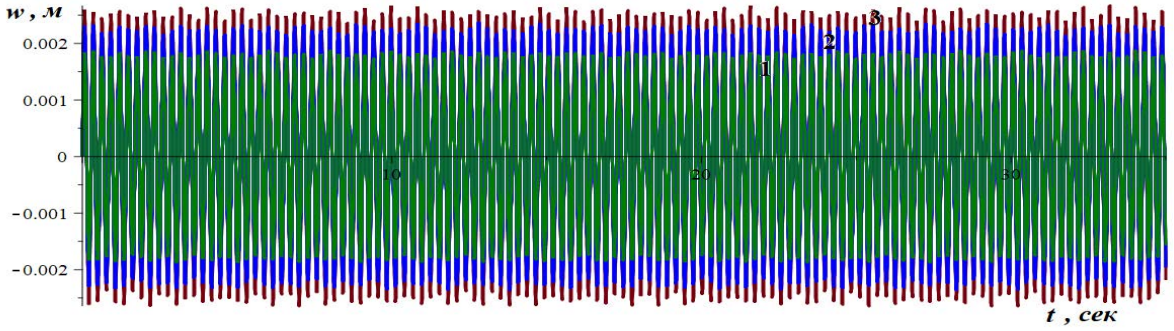
Цифра 2 на цих рисунках відповідає чітким розв'язкам, цифрами 1 і 3 позначені нижня і верхня межі α-перерізів. Прийняті такі значення параметру α: 0.25, 0.5, 0.75, відповідні межі нечітких параметрів наведені в таблиці 3.



а) α=0.25



б) α=0.5



в) α=0.75

Рис. 3. Нижня та верхня межі α-перерізів для функції w

Висновки

Створено розрахункові моделі для перевірки достовірності відстроювання конструкції гідротурбіни від небажаних частот зовнішнього навантаження. З отриманих результатів можна зробити висновок, що в розглянутих діапазонах параметрів навантаження відбуваються малі коливання конструкції: найбільша амплітуда сягає 0,003 м на верхній межі α-перерізів. Це допустимі значення згідно з [10].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

Список використаної літератури

1. Sierikova O., Strelnikova E., Degtyariov K. Numerical Simulation of Strength and Aerodynamic Characteristics of Small Wind Turbine Blades. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2022. ICTM 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, 657, 2023, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-36201-9_31
2. Salvatore F., Sarichloo Z., Calcagni D. Marine Turbine Hydrodynamics by a Boundary Element Method with Viscous Flow Correction. *Journal of Marine Science and Engineering*. 6(2),53. 2018, https://doi.org/10.3390/jmse6020053
3. Rusanov A., Shubenko A., Senetskyi O., Babenko O., Rusanov R. Heating modes and design optimization of cogeneration steam turbines of powerful units of combined heat and power plant. *Energetika*, vol. 65(1), 39-50, 2019, https://doi.org/10.6001/energetika.v65i1.3974
4. Gnitko V., Karaiev A., Degtyariov K., Strelnikova E. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells. *WIT Transactions on Engineering Sciences,* 126, 189-200, 2019, WIT Press, https://doi.org/10.2495/BE420171.
5. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 2016. 17(1), 75-87. URL: https://www.ikppress.org/index.php/JOBARI/article/view/3788.
6. Avramov K. V., E. A. Strelnikova. Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid. *Int. Appl. Mech* 50. 2014. 329-335.
7. Gontarovskyi P., Smetankina N., Garmash N., Melezhyk I. Numerical Analysis of Stress-Strain State of Fuel Tanks of Launch Vehicles in 3D Formulation. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2020. ICTM 2020. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 188. 2021. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7_52.
8. Serikova E., Strelnikova E., Yakovlev V. Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities, *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*, vol. 1, pp. 86-90, 2015. /Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf.
9. Chantarawichit P., Sompornjaroensuk Y. Vibration of Circular Plates with Mixed Edge Conditions. Part I: Review of Research, *ITK Research Journal*, 14(2) pp. 136-156, 2020.
10. Kantor B., Strelnikova O., Medvedovska T., Rzhevska I., Yeseleva O., Lynnyk O., Zelenska O. Calculation of the Residual Resource of the Elements of the Flowing Section of HPS and HPSPP Hydro-Turbines. Methodological guidelines: normative document. SOU-N MEV 40.1 -21677681-51: 2011: approved by the Ministry of Energy and Coal Mining of Ukraine: effective as of 07.07.11. Kyiv: Ministry of Energy and Coal Mining of Ukraine. 76 p.
11. Karaiev A., Strelnikova E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. *International Journal of Modeling. Simulation, and Scientific Computing*. 11(1), 2050003. 2020 https://doi.org/10.1142/S1793962320500038.
12. Zadeh L. A. Fuzzy sets, *Information and Control*, vol.8, 1965, pp. 338-353.
13. Andrić J., Lu D.-G., Seismic hazard analysis based on fuzzy-probabilistic approach, 6th ECCOMAS Thematic Conf. on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering M. Papadrakakis, M. Fragiadakis (eds.), Greece, 15–17 June, 2017. https://doi.org/10.7712/120117.5739.17539.
14. Wang Z. W, Ge N., Li C. W., Structural Vibration Mode Fuzzy Control Based on BPNeural Network Algorithm, *Journal of Shandong University (Engineering Science)*, vol. 50, 243(05), 2020, pp. 17-23.
15. Gnitko V., Martynenko O., Vierushkin I., Kononenko Y., Degtyarev K. Coupled Finite and Boundary Element Methods in Fluid-Structure Interaction Problems for Power Machine Units.

In: Altenbach, H., et al. Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2023. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_29

References

1. Sierikova, O., Strelnikova, E., & Degtyariov, K. (2023). Numerical Simulation of Strength and Aerodynamic Characteristics of Small Wind Turbine Blades. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., & Kritskiy, D. (Eds.). Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2022. ICTM 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, 657, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-36201-9_31 [in English]
2. Salvatore, F., Sarichloo, Z., & Calcagni, D. (2018). Marine Turbine Hydrodynamics by a Boundary Element Method with Viscous Flow Correction. *Journal of Marine Science and Engineering*. 6(2),53. https://doi.org/10.3390/jmse6020053 [in English]
3. Rusanov, A., Shubenko, A., Senetskyi, O., Babenko, O., & Rusanov, R. (2019). Heating modes and design optimization of cogeneration steam turbines of powerful units of combined heat and power plant. *Energetika*, vol. 65(1), 39-50. https://doi.org/10.6001/energetika.v65i1.3974 [in English]
4. Gnitko, V., Karaiev, A., Degtyariov, K., & Strelnikova, E. (2019). Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 126, 189-200, WIT Press, https://doi.org/10.2495/BE420171 [in English]
5. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., & Strelnikova, E. (2016). Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), 75–87. Retrieved from: https://www.ikppress.org/index.php/JOBARI/article/view/3788 [in English]
6. Avramov, K.V., & Strelnikova, E.A. (2014). Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid. *Int. Appl. Mech* 50. 329-335 [in English]
7. Gontarovskyi, P., Smetankina, N., Garmash, N., & Melezhyk, I. (2021). Numerical Analysis of Stress-Strain State of Fuel Tanks of Launch Vehicles in 3D Formulation. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2020. ICTM 2020. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 188. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7_52 [in English]
8. Serikova, E., Strelnikova, E., & Yakovlev, V. (2015). Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities, *Journal of Environment Protection and Sustainable Development*, vol. 1, pp. 86-90. /Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf [in English]
9. Chantarawichit, P., & Sompornjaroensuk, Y. (2020). Vibration of Circular Plates with Mixed Edge Conditions. Part I: Review of Research, *ITK Research Journal*, 14(2) pp. 136-156 [in English]
10. Kantor, B., Strelnikova, O., Medvedovska, T., Rzhevska, I., Yeseleva, O., Lynnyk, O., & Zelenska, O. (2011). Calculation of the Residual Resource of the Elements of the Flowing Section of HPS and HPSPP Hydro-Turbines. Methodological guidelines: normative document. SOU-N MEV 40.1 -21677681-51: 2011: approved by the Ministry of Energy and Coal Mining of Ukraine: effective as of 07.07.11. Kyiv: Ministry of Energy and Coal Mining of Ukraine. 76 p. [in English]
11. Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2020). Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / *International Journal of Modeling. Simulation, and Scientific Computing*. 11(1), 2050003. https://doi.org/10.1142/S1793962320500038 [in English]
12. Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, vol.8, pp. 338-353 [in English]
13. Andrić, J., Lu, D.-G. (2017). Seismic hazard analysis based on fuzzy-probabilistic approach, 6th ECCOMAS Thematic Conf. on Computational Methods in Structural Dynamics and

Earthquake Engineering M. Papadrakakis, M. Fragiadakis (eds.), Greece, 15–17 June, 2017. https://doi.org/10.7712/120117.5739.17539 [in English]

14. Wang, Z.W., Ge, N., & Li, C.W. (2020). Structural Vibration Mode Fuzzy Control Based on BPNeural Network Algorithm, *Journal of Shandong University (Engineering Science),* vol. 50, 243(05), pp. 17-23 [in English]
15. Gnitko, V., Martynenko, O., Vierushkin, I., Kononenko, Y., & Degtyarev, K. (2023). Coupled Finite and Boundary Element Methods in Fluid-Structure Interaction Problems for Power Machine Units. In: Altenbach, H., et al. Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_29 [in English]

Дегтярьов Кирило Георгійович – к.т.н., молодший науковий співробітник відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Гнітько Василій Іванович – к.т.н., старший науковий співробітник відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: gnitkovi@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2475-5486.

Крютченко Денис Володимирович – провідний інженер відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Вєрушкін Іван Олексійович – аспірант Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: ivanveruskin86@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3837-5567.

Корнейчук Микита Тимофійович – аспірант кафедри комп'ютерної фізики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. E-mail: korneichuk.nikita@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0189-6155.

Degtyarov Kyrylo Heorhiiovych – Ph.D., Junior Researcher, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Gnitko Vasyl Ivanovych – Ph.D., Senior Researcher, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: gnitkovi@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2475-5486.

Kriutchenko Denys Volodymyrovych – Leading Engineer, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Vierushkin Ivan Oleksiiovych – Postgraduate Student, Department of Hydroaeromechanics of Power Machines at the A.M. Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: ivanveruskin86@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3837-5567.

Korneichuk Mykyta Tymofiiovych – Postgraduate Student, Department of Computer Physics at the V.N. Karazin Kharkiv National University. E-mail: korneichuk.nikita@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0189-6155.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-6

УДК 539.3

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
О.В. БІЛОВА
Український державний університет науки і технологій
І.В. ЩЕРБИНА, В.Б. ГОВОРУХА
Дніпровський державний аграрно-економічний університет

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ СТРИНГЕРУ ТА КРИВОЛІНІЙНОГО ОРТОТРОПНОГО НАПІВПРОСТОРУ

Актуальність дослідження динамічної взаємодії криволінійного ортотропного напівпростору з включенням не повинна викликати сумнівів. Такі задачі про передачу навантаження від підкріплюючого волокна до матриці безпосередньо відносяться до механіки композитів і допомагають при дослідженні проблем руйнування таких матеріалів. Як відомо, структура початкових напружень має довільну природу. Так, наприклад, вони можуть виникнути внаслідок технологічних операцій при виготовленні сучасних конструкціиних матеріалів і машин. Внутрішні напруження, які можна розглядати як початкові в елементах конструкцій і деталях машин впливають на властивості матеріалів, змінюють динамічні характеристики конструкцій. Розв'язання складних контактних задач асимптотичним методом дає можливість отримати результати, що можна використовувати для поточнення чисельних даних, оцінювання методики постановки певних експериментів. Досягнення задовільної практичної точності розв'язків, отриманих запропонованим методом збурення, також неодноразово демонструвалась на тестових задачах. Мета цього дослідження – застосування ефективного асимптотичного методу для отримання аналітичного розв'язку на випадок динамічної взаємодії стрингеру та ортотропного напівпростору. Розглянуто пружне ортотропне напівскінченне тіло з циліндричною анізотропією, посилене стрижнем кругового поперечного перерізу, що знаходиться під дією динамічного навантаження. Радіус стрижня вважається малим. Потрібно знайти розподіл контактних зусиль в матриці та зусилля в стрижні. Як і для плоского випадку, крайова задача зведена до послідовного розв'язання задач теорії потенціалу (основні функції знаходяться з рівнянь Лапласа). Для кожного типу напруженого стану сформульовані граничні умови. Знайдено розподіл зусиль в стрижні та функція, що визначає розподіл контактного напруження. Показано, що без врахування інерційних сил, зусилля в стрингері не залежать від часу (квазістатичний розрахунок). Виконано низку граничних переходів, що пов'язують динамічну і статичну постановку задачі. Показана відповідна поведінка основних шуканих функцій.

Ключові слова: асимптотичний метод, малий параметр, пружний стрижень, динамічне навантаження.

T.S. KAGADIY, A.H. SHPORTA
National TU "Dnipro Polytechnic"
O.V. BILOVA
Ukrainian State University of Science and Technology
I.V. CHERBINA, V.B. GOVORUKHA
Dnipro State Agrarian and Economic University

DYNAMIC INTERACTION OF STRINGER AND CURVILINEAR ORTHOTROPIC HALF-SPACE

The relevance of studies of the dynamic interaction of a curvilinear orthotropic half-space with an inclusion should not cause doubts. Such problems of load transfer from the reinforcing fiber to the matrix are directly related to the mechanics of composites and help in the study of the problems of the destruction of such materials. As is known, the structure of the initial stresses has an arbitrary nature. So, for example, they can arise as a result of technological operations in the manufacture of modern construction materials and machines. Internal stresses, which can be considered initial in structural elements and machine parts, affect the properties of materials and change the dynamic characteristics of structures. Solving complex contact problems by the asymptotic method makes it possible to obtain results that can be used for streaming numerical data, evaluating the methodology of setting up certain experiments. Achieving satisfactory practical accuracy of the solutions obtained by the proposed perturbation method was also repeatedly demonstrated on test tasks. The purpose of this study is to apply an efficient asymptotic method for obtaining an analytical solution for the case of dynamic interaction of a stringer and an orthotropic half-space. An elastic orthotropic semi-finite body with cylindrical anisotropy reinforced by a rod of circular cross-section under dynamic load is considered. The radius

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-7

of the rod is considered small. It is necessary to find the distribution of contact forces in the matrix and forces in the rod. As in the flat case, the boundary value problem is reduced to the sequential solution of potential theory problems (the main functions are from Laplace's equations). Boundary conditions are formulated for each type of stress state. The distribution of forces in the rod and the function determining the distribution of contact stress were found. It is shown that without considering inertial forces, the forces in the stringer do not depend on time (quasi-static calculation). A number of boundary transitions connecting the dynamic and static formulation of the problem have been performed. The corresponding behavior of the main searched functions is shown.

Key words: asymptotic method, small parameter, elastic rod, dynamic load.

Постановка проблеми

Підвищення надійності і довговічності інженерних споруд і машин є однією з наибільш актуальних задач сучасного будівництва, конструювання машин та обладнання. Її успішному розв'язанню значною мірою сприяють широкі наукові дослідження в області механіки твердого деформівного тіла, зокрема, при вивченні проблеми передачі навантаження в конструкціях і деталях машин [6–9]. Поява нових матеріалів, необхідність підвищення експлуатаційних властивостей споруд і машин, зменшення їх ваги, збільшення термінів експлуатації, зниження вартості і досягнення економічної сумісності – все це залежить від методів розрахунків. Тому актуальність досліджень динамічної взаємодії криволінійного напівпростору з включеннями, особливо криволінійного ортотропного, не повинна викликати сумнівів. Як відомо, природа виникнення початкових напружень має довільну структуру. Так, наприклад, вони можуть виникнути внаслідок технологічних операцій при виготовленні сучасних конструкціиних матеріалів і машин. Внутрішні напруження, які можна розглядати як початкові в елементах конструкцій і деталях машин впливають на характеристики матеріалів, змінюють динамічні характеристики конструкцій. Тому результати дослідження різними методами напружено-деформованого стану контактуючих об'єктів з урахуванням складних властивостей матеріалу і навантаження можуть бути корисними для практики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Як відомо, дія динамічного навантаження характеризується швидким наростанням напружень та деформацій. При цьому опір матеріалів деформуванню значно відрізняється від його опору при статичному навантаженні. Динамічне навантаження викликає суттєві прискорення частин конструкції в процесі її деформування або руху всієї конструкції в цілому.

Методика інженерних розрахунків на дію динамічного навантаження в опорі матеріалів будується на спрощуючих гіпотезах, в результаті яких динамічні фактори (зусилля, напруження, деформації, переміщення) виражаються через відомі статичні з допомогою введення так званого динамічного коефіцієнта (відношення динамічного переміщення до статичного, визначених динамічною і статичною дією певного навантаження). Контактні задачі про динамічне навантаження стрингерів, як підкріплюючих елементів конструкцій з ізотропних матеріалів доствтньо досліджені. Для розв'язання використовуються різні методи, наприклад, метод скінченних елементів [1], або різноманітні методи інтегральних перетворень [2]. Актуальними залишаються задачі для сучасних композиційних матеріалів з криволінійною анізотропією. В представленій в даній роботі задачі розглядається така форма навантаження на пружний стрижень як удар, що викликає лише пружні деформації.

Мета дослідження

Розв'язання складних контактних задач асимптотичним методом дає задовільні результати щодо точності отриманих результатів, що було показано у роботах [3–5]. Мета цього дослідження – розвинути метод збурення, ефективність якого вже неодноразово доводилась, на випадок динамічної взаємодії стрингеру та ортотропного напівпростору.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-7

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо пружне ортотропне напівскінченне тіло $(0 \le z < \infty)$ з циліндричною анізотропією, яке посилене пружним напівскінченним стрижнем кругового поперечного перерізу. Площа F поперечного перерізу стрижня досить мала, тобто радіус a стрижня досить малий. Середня лінія стрижня перпендикулярна до площини, що обмежує напівпростір, і збігається з віссю $0z$. Потрібно визначити закон розподілу контактної напруги між стрижнем і напівпростором, коли в кінцевому перерізі ($z = 0$) стрижня діє динамічне навантаження $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{H}(t)$ ($\mathrm{H}(t)$ – ступінчаста функція Хевісайда), спрямована по осі стрижня. Стрижень трактується, як одновимірний пружний континуум у поєднанні з моделлю контакту циліндричної поверхні для напівпростору.

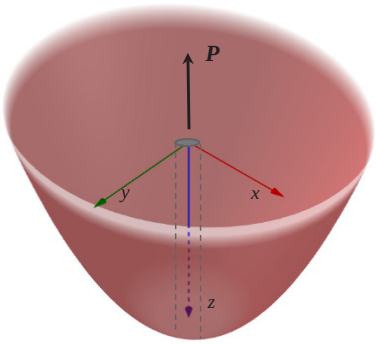


Рис. 1

У такій постановці задача зводиться до інтегрування рівняння руху стрижня

$$EF = \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} - \rho_1 F \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} = -\tau(z,t) \tag{1}$$

та рівняння руху напівпростору (осесиметрична задача)

$$E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + mG \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z} + E_1 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - E_2 \frac{u}{r^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$G \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + E_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + mG \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + G \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + m_1 G \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

за наступних крайових умов (початкові умови – нульові):

$$N = EF \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = P_0 H(t), \quad \sigma_{33} = \sigma_{13} = 0 \qquad (z = 0) \tag{3}$$

$$\omega = \omega_1, \qquad u = 0 \qquad (r = a),$$

На нескінченності всі функції перетворюються на нуль. Тут u, ω – проекції вектора переміщень, E_1, E_2, E_3 – модулі пружності вздовж головних напрямків, G-модуль зсуву, E – модуль пружності матеріалу стрижня, $\rho(\rho_1)$ – щільність матеріалу напівпростору (стрижня), $\tau(z,t)$ – контактне напруження на одиницю довжини стрижня, що підлягає визначенню, причому $\tau(z,t) = 2\pi a \sigma_{13}(a,z,t)$.

Оскільки $u = 0 (\partial u / \partial z) = 0$ при $r = a$ напруження $\sigma_{13}(a,z,t)$ цілком визначається функцією $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ при $r = a$. Тому

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-7

$$\tau(z,t) = 2\pi a G(\partial\omega/\partial r) \quad (r = a) \tag{4}$$

Асимптотичний метод [3–5] дозволяє розкласти напружено – деформований стан напівпростору на два типи: що повільно змінюється вздовж координати z (напружений стан першого типу), який у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння

$$E_3 \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + G\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) - \rho\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

і напружений стан типу пограничного шару (другого типу), що описується у першому наближенні рівнянням

$$E_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + G\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - E_2\frac{u}{r^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

Вирішальну роль у зазначених напружено-деформованих станах відіграють ті самі складові, що й у статичному випадку [3–5] тому крайові умови формуються аналогічно.

Оскільки контактна напруга (4) визначається лише функцією ω, розв'язування поставленої вище задачі зводиться до інтегрування рівнянь руху (1), (5) (з урахуванням (4)) за наступних крайових умов:

$$\begin{gathered} N = EF(\partial\omega_1/\partial z) = \mathrm{P}_0 H(t), \\ \sigma_{33} = E_3(\partial\omega/\partial z) = 0 \qquad (z = 0); \\ \omega = \omega_1 \qquad (r = a), \end{gathered} \tag{7}$$

на нескінченності всі функції перетворюються на нуль.

Після застосування перетворення Лапласа за часом та перетворення Фур'є за координатою z, розв'язки отриманого з (5) звичайного диференціального рівняння знаходимо у вигляді

$$W^*(r,s,p) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{P_0}{EF}\times$$

$$\times\frac{K_0\left(r\sqrt{\alpha^2 s^2 + c^2 p^2}\right)}{p\left[g_*\sqrt{\alpha^2 s^2 + c^2 p^2}\,K_1\left(a\sqrt{\alpha^2 s^2 + c^2 p^2}\right) + \left(s^2 + c_1^2 p^2\right)K_0\left(\alpha^2 s^2 + c^2 p^2\right)\right]} \tag{8}$$

де

$$W^*(r,s,p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty W(r,s,p)\cos szdz\,, \qquad \alpha^2 = \frac{E_3}{G}, \qquad c^2 = \frac{\rho}{G},$$

$$W\ (r,s,p) = \int_0^\infty \omega(r,s,p)\ e^{-pt}dt\,, \qquad c_1^2 = \frac{\rho_1}{E}, \qquad g_* = \frac{2\pi a G}{EF}.$$

$K_0(x)$, $K_1(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Виконуючи в (8) зворотне перетворення Лапласа та Фур'є, отримаємо потрібну функцію $\omega(r,z,t)$.

Припустимо, що напівпростір безінерційний, а вся інерція зосереджена в стрижні. В цьому випадку $(\rho = 0, c = 0)$ вираз (8) приймає вигляд:

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-7

$$W^*(r,s,p) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{P}_0}{EF}\frac{K_0(\alpha rs)}{p\left[gsK_1(\alpha as)+(s^2+c_1^2p^2)K_0(\alpha as)\right]}, \tag{9}$$

$$g = g_*\alpha = 2\pi aG\alpha/EF = 2G\alpha/Ea \qquad (F=\pi a^2).$$

Обернення перетворень Лапласа та Фур'є в (9) дає:

$$W(r,z,t) = -\frac{2\mathrm{P}_0}{\pi EF}\int_0^\infty \frac{(1-\cos[\omega(s)t])K_0(\alpha rs)}{s\left[gK_1(\alpha as)+sK_0(\alpha as)\right]}\cos zsds \tag{10}$$

$$\omega(s) = \frac{1}{c_1}\sqrt{s^2+gs\frac{K_1(\alpha as)}{K_0(\alpha as)}}.$$

Зусилля в стрижні $N(z,t)$ та контактне зусилля $\tau(z,t)$ (4) визначаються за формулами:

$$N(z,t) = \frac{2\mathrm{P}_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos[\omega(s)t]}{f(s)}\sin zsds, \tag{11}$$

$$\tau(z,t) = \frac{2\mathrm{P}_0 g}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos[\omega(s)t]}{f_1(s)}\cos szsds, \tag{12}$$

$$f(s) = g\frac{K_1(\alpha as)}{K_0(\alpha as)}+s, \qquad f_1(s) = g+s\frac{K_0(\alpha as)}{K_1(\alpha as)} \qquad (S>0).$$

Враховуючи наближені значення функції $K_0(x)$ при великих додатних аргументах, маємо: $f(s)\approx g+s, \qquad f_1(s)\approx g+s,$

$$\cos[\omega(s)t] \approx \cos(ts/c_1) \qquad (s\to+\infty)$$

При цьому зусилля в стрижні $N(z,t)$ і та контактне напруження $\tau(z,t)$ виражаються таким чином:

$$N(z,t) = 0 \qquad (t^*\le z^*),$$

$$\begin{aligned} N(z,t) = \frac{2\mathrm{P}_0}{\pi}\{ & \ \mathrm{ci}\,z^*\sin z^* - \cos z^*\,\mathrm{si}\,z^* + \\ & +1/2\left[\mathrm{ci}(t^*-z^*)\sin(t^*-z^*)-\cos(t^*-z^*)\,\mathrm{si}(t^*-z^*)\right]- \qquad (t^*>z^*), \\ & -1/2\left[\mathrm{ci}(t^*+z^*)\sin(t^*+z^*)-\cos(t^*+z^*)\,\mathrm{si}(t^*+z^*)\right]\ \} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\tau(z,t) = 0 \qquad (t^*\le z^*),$$

$$\begin{aligned} \tau(z,t) = -\frac{2\mathrm{P}_0 g}{\pi}\{ & \ \mathrm{ci}\,z^*\cos z^* + \mathrm{si}\,z^*\sin z^* - \\ & -1/2\left[\mathrm{ci}(t^*-z^*)\cos(t^*-z^*)+\mathrm{si}(t^*-z^*)\sin(t^*-z^*)\right]- \qquad (t^*>z^*), \\ & -1/2\left[\mathrm{ci}(t^*+z^*)\cos(t^*+z^*)\,\mathrm{si}(t^*+z^*)\sin(t^*+z^*)\right]\ \} \end{aligned} \tag{14}$$

$$z^* = gz, \qquad t^* = gt/c_1.$$

Граничний перехід при $\rho_1\to 0 \quad (c_1\to 0)$ дає розв'язок відповідної статичної задачи:

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-7

$$N(z) = (2P_0/\pi)\cdot(\mathrm{ci}\, z^* \sin z^* - \mathrm{si}\, z^* \cos z^*) \tag{15}$$

$$\tau(z) = -(2P_0 g/\pi)\cdot(\mathrm{ci}\, z^* \cos z^* + \mathrm{si}\, z^* \sin z^*). \tag{16}$$

Великим значенням параметра s (11), (12) відповідають малі значення координати z.

Отже, поведінка зусиль у стрижні та контактних напружень між стрижнем і напівпростором при малих z повністю визначається формулами (13)–(16). З цих розв'язків випливає, що знайдені значення контактного напруження на лінії $(r = a, z = 0)$ мають логарифмічну особливість.

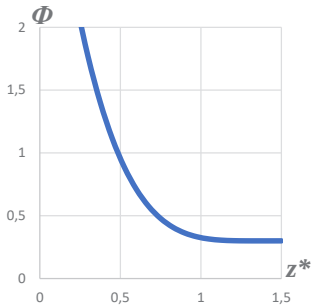


Рис. 2

На рис. 2 представлена величина $\Phi(z^*) = -(\mathrm{ci}\, z^* \cos z^* + \mathrm{si}\, z^* \sin z^*)$, що визначає поведінку контактних напружень у статичній задачі при малих значеннях координати z.

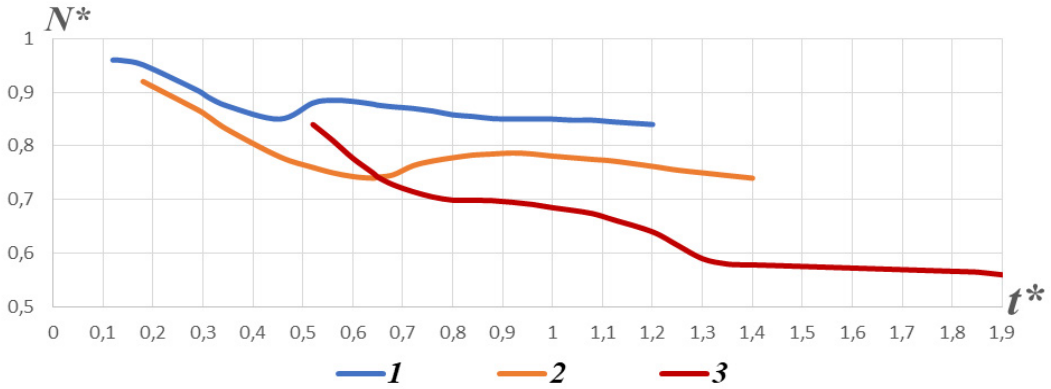


Рис. 3

На рис. 3 представлені результати розрахунку безрозмірних зусиль в стрижні $\left(N^* = \frac{N}{P_0}\right)$ для перетинів $z^*=0,1$ (крива 1), $z^*=0,2$ (крива 2), $z^*=0,3$ (крива 3) в залежності від часу t^*. У випадку, коли інерційні сили не враховуються, значення зусилля в стрижні не залежать від часу (квазістатичний розрахунок) і на графіку виглядають як горизонтальні прямі.

При малих додатних значеннях аргументу x справедливі представлення

$$K_0(x) \approx \ell n(2/\gamma x), \qquad K_1(x) \approx 1/x \tag{17}$$

Тому при малих δ, що відповідає великим значенням координати z, зусилля в стрижні $N(z)$ (статична задача) можна представити у вигляді:

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-7

$$N(z) = \frac{2P_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} \frac{\sin zs}{s(\lambda(s)+1)} ds\right], \tag{18}$$

$$\lambda(s) = \frac{Ea^2 s^2}{2G} \ell n \frac{2}{r\alpha as}. \text{ (} r \text{ – константа Ейлера).}$$

Інтеграл в (18) при малих s достатньо швидко прямує до $\pi/2$.

Отже, при великих значеннях z характер поведінки зусиль у стрижні та контактних напружень між стрижнем і напівпростором такий самий, як і в статичній задачі про тонке пружне включення [4].

Висновки

Розв'язана задача про пружний напівпростір з включенням циліндричної форми малого діаметру, що знаходиться під динамічним навантаженням. Знайдено основні функції, що визначають напружено-деформований стан анізотропного тіла, виконано граничні переходи і порівняння з відомими розв'язками інших задач для тіл з прямолінійною анізотропією.

Список використаної літератури

1. Encyclopedia of Computational Mechanics / E. Stein, R.de Borst, T.J.R. Hughes, eds. Vol. 1. Solids, Vol. 2. Fluids. Wiley, 2004.
2. Vetrov O.S. Shevchenko V.P. Stady of the stress-strain state of ortotropic shells under the action of dynamical impulse loads. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. 183, № 2. P. 231–240.
3. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В., Шпорта А.Г. Математичне моделювання в задачах геометрично нелінійної теорії пружності. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2021. Т. 3. No 2.1. С. 107–117.
4. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2020. Т. 3. No 2.1. С. 107–116.
5. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В. Застосування методу малого параметру при моделюванні задач теорії в язкопружності. *Вісник Херсонського національного університету*. 2019. No 2(69). Ч. 3. С. 69–76.
6. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / ред.: І. О. Луковський, Г. С. Кіт, Р. М. Кушнір. Львів : Ін-т приклад. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. 412 с.
7. Wriggers P., Nackenhorst U. Analysis and Simulation of Contact Problems. LNACM Vol. 27, Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. 408 p.
8. С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов, В. Ф. Лазар. Динамічні процеси в тіла(матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 2. Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту*. 2021. Вип. 38, № 1. С. 114–122.
9. A. Chao Correas, A. Casares Crespo, H. Ghasemnejad, G. Roshan. Analytical Solutions to Predict Impact Behaviour of Stringer Stiffened Composite Aircraft Panels. Applied Composite Materials. *An International Journal for the Science and Application of Composite Materials*. Vol. 28, 2021, pp. 1237–1254.

References

1. Encyclopedia of Computational Mechanics (2004). (E.Stein, R.de Borst, T.J.R. Hughes, Eds.). Vol. 1. Solids, Vol. 2. Fluids. Wiley [in English]
2. Vetrov, O.S., & Shevchenko, V.P. (2012). Stady of the stress-strain state of ortotropic shells under the action of dynamical impulse loads. *Journal of Mathematical Sciences*. 183, № 2. P. 231–240 [in English]
3. Kahadii, T.S., Bilova, O.V., Shcherbyna, I.V., & Shporta, A.H. (2021). Matematychne modeliuvannia v zadachakh heometrychno neliniinoi teorii pruzhnosti [Mathematical modeling in problems of geometrically nonlinear theory of elasticity]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia – Applied problems of mathematical modeling.* 3 (2.1), 107–117 [in Ukrainian]

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-7

4. Kahadii, T.S., Shporta, A.H., Bilova, O.V., & Shcherbyna, I.V. (2020). Napruzheno-deformovanyi stan sharuvatoi osnovy z pidkripliuiuchym elementom [Stress-deformed state of a layered base with a reinforcing element]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia – Applied problems of mathematical modeling*. KhNTU. 3 (2.1), 107–116 [in Ukrainian]
5. Kahadii, T.S., Bilova, O.V., & Shcherbyna, I.V. (2019). Zastosuvannia metodu maloho parametru pry modeliuvanni zadach teorii v iazkopruzhnosti [Application of the small parameter method in modeling problems of the theory of viscoelasticity]. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho universytetu – Bulletin of the Kherson National University*. 2 (69). Ch.3, 69–76 [in Ukrainian]
6. Matematychni problemy mekhaniky neodnoridnykh struktur (2014). [Mathematical problems of the mechanics of inhomogeneous structures]. (Lukovskyi, I.O., Kit, H.S., & Kushnir, R.M. Eds.). Lviv : In-t pryklad. problem mekhaniky i matematyky im. Ya. S. Pidstryhacha NAN Ukrainy [in Ukrainian]
7. Wriggers, P., & Nackenhorst, U. (2006). Analysis and Simulation of Contact Problems. LNACM Vol. 27, Berlin–Heidelberg: Springer [in English]
8. Babych, S.Yu., Hlukhov, Yu.P., & Lazar, V.F. (2021). Dynamichni protsesy v tila(materialakh) z pochatkovymy napruzhenniamy. Chastyna 2. Ploski dynamichni kontaktni zadachi dlia pivploshchyny z pochatkovymy napruzhenniamy [Dynamic processes in bodies (materials) with initial stresses. Part 2. Planar dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses]. *Nauk. visnyk Uzhhorod. un-tu – Science Uzhhorod Herald. university*. Vyp. 38, № 1. S. 114–122.
9. A. Chao Correas, A. Casares Crespo, H. Ghasemnejad, G. Roshan. (2021). Analytical Solutions to Predict Impact Behaviour of Stringer Stiffened Composite Aircraft Panels. Applied Composite Materials. *An International Journal for the Science and Application of Composite Materials*. Vol. 28, pp. 1237–1254 [in English].

Кагадій Тетяна Станіславівна – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Білова Оксана Вікторівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри економічної інформатики Українського державного університету науки і технологій. E-mail: okbelova00@gmail.com, okbilova@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Щербина Ірина Володимирівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, фізики та загально інженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Шпорта Анна Григорівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358

Говоруха Володимир Борисович – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри вищої математики, фізики та загально інженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: govorukhavb@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-0936-9272.

Kahadii Tetiana Stanislavivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Applied Mathematics of the National Technical University “Dnipro Polytechnic”. E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Bilova Oksana Viktorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Economic Informatics of the Ukrainian State University of Science and Technology. E-mail: okbelova00@gmail.com, okbilova@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Shcherbyna Iryna Volodymyrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Advanced Mathematics, Physics and General Engineering Disciplines of the Dnipro State Agrarian and Economic University. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Shporta Anna Hryhorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer at the Department of Applied Mathematics of the National Technical University “Dniprovsk Polytechnic”. E-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358.

Govorukha Volodymyr Borysovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Physics and General Engineering Disciplines, Dnipro State Agrarian and Economic University. E-mail: govorukhavb@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-0936-9272.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-7

УДК 517.9

Б.В. КРАСЮК
Національний університет «Острозька академія»

РОЗРОБКА СППР ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БОРОТЬБИ З ВНУТРІШНІМ КОНФЛІКТОМ

Сучасне інформаційне суспільство переживає стрімкий розвиток технологій та інформаційних потоків, що відкриває нові можливості для поширення різних видів інформації. Зростаюче значення інформаційної сфери зумовлює потребу в ефективних стратегіях інформаційної безпеки та регулюванні цих процесів. У цій публікації розглядаються інформаційна боротьба та конфлікти в сучасному суспільстві.

Підкреслюється важливість глибокого розуміння процесів поширення інформації та розробки адекватних заходів для забезпечення інформаційної безпеки. Зростання впливу та поширення шкідливої інформації зумовлює актуальність вивчення механізмів інформаційної боротьби та конфліктів у сучасному суспільстві. Практичним підходом до аналізу цих процесів є моделювання.

У статті запропоновано декілька моделей, які дозволяють розглядати інформаційну боротьбу та конфлікти в суспільстві, враховуючи вплив різних видів інформації та динаміку її поширення. Ці моделі базуються на різних параметрах, таких як коефіцієнти зовнішнього та внутрішнього рекрутування, які визначають інтенсивність інформаційного впливу та схильність індивідів до сприйняття інформації.

Дослідження включає аналіз інформаційної боротьби в контексті конкуренції між різними видами інформації в суспільстві. Крім того, в дослідженні розглядається модель конфлікту, яка описується як система, де інші актори конкурують за контроль над спільною сферою інтересів.

Для автоматизації розрахунків, пов'язаних з цими моделями інформаційної боротьби та конфлікту, було розроблено дзеркальну систему програмних засобів. Ця система дозволяє аналізувати динаміку поширення різних видів інформації в інформаційних процесах суспільства.

Використання результатів дослідження та застосування системи підтримки прийняття рішень може сприяти розробці стратегій управління інформаційною безпекою та регулювання інформаційних процесів у суспільстві. Ці інструменти допоможуть удосконалити управління та забезпечити стабільність в інформаційному середовищі, сприяючи раціональному використанню ресурсів та зменшенню ризиків, пов'язаних з інформаційними війнами та конфліктами.

Ключові слова: СППР, модель інформаційної боротьби, конфліктна взаємодія.

B.V. KRASIUK
The National University of Ostroh Academy

DEVELOPMENT OF A DECISION SUPPORT SYSTEM TO MODEL THE PROCESS OF INFORMATION WARFARE WITH INTERNAL CONFLICT

The modern information society is experiencing rapid development of technologies and information flows, which opens up new opportunities for disseminating various types of information. The growing importance of the information sphere creates the need for effective information security strategies and regulation of these processes. This publication examines information warfare and conflicts in modern society.

The article emphasises the importance of a deep understanding of information dissemination processes and developing adequate measures to ensure information security. The increasing influence and spread of harmful information creates the relevance of studying the mechanisms of information wars and conflicts in modern society. Modelling is considered a practical approach to analysing these processes.

The article proposes several models that allow us to consider information warfare and conflicts in society, considering the impact of different types of information and the dynamics of its spread. These models are based on various parameters, such as external and internal recruitment coefficients, which determine the intensity of information influence and the propensity of individuals to perceive information.

The study includes an analysis of information warfare in the context of competition between different types of information in society. In addition, the study considers the conflict model, which is described as a system where other actors compete for control over a common area of interest.

A specular system of software tools has been developed to automate the calculations related to these models of information struggle and conflict. This system allows analysis of the dynamics of the spread of various types of information in the information processes of society.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-8

The use of research results and the use of a decision support system can contribute to the development of information security management strategies and the regulation of information processes in society. These tools will help to improve administration and ensure stability in the information environment, promoting the rational use of resources and reducing the risks associated with information wars and conflicts.

Key words: Decision support system, Information warfare model, Conflict interaction.

Постановка проблеми

У сучасному «інформаційному суспільстві» зростаюче значення інформаційної сфери підкреслює необхідність ефективної інформаційної безпеки та регулювання. Швидкий розвиток технологій поширення інформації відкрив двері для поширення шкідливої інформації, що вимагає глибокого розуміння механізмів поширення інформації для розробки адекватних контрзаходів. Моделювання є перевіреним та ефективним підходом до вирішення цих проблем. Ця праця має на меті заглибитися в модель інформаційної боротьби та її інтеграцію з таким поняттям, як конфлікт, що обговорюється в різних статтях, присвячених цій проблематиці. Зрештою, ця робота спрямована на створення комплексної системи, яка описує модель інформаційнрої боротьби з внутрішнім конфліктом і оцінює її динаміку за допомогою програмних засобів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У цьому дослідженні ми почнемо з розгляду проблеми в її найпростішій формі, як це описано в роботі [1]. Ми розглядаємо соціальну спільноту з початковою чисельністю населення, позначеною як N_0, чутливу до впливу різних інформаційних потоків, а саме $I_1, I_2, ..., I_p$. Ці інформаційні потоки за своєю суттю є несхожими, а в крайньому випадку – діаметрально протилежними. У момент часу $t_0 = 0$ два джерела одночасно починають транслювати ці інформаційні потоки, в результаті чого вони поширюються в суспільстві. Оскільки потоки суттєво відрізняються, цей процес можна влучно охарактеризувати як інформаційну боротьбу або конкуренцію.

В роботах [3], [6], [7] описано стохастичні моделі зі збуреннями та марковськими чи напівмарковськими переключеннями, як ілюстративний приклад проаналізовано модель поширення інформаційної загрози, в працях [4] та [5] розглянуто моделі відповідно розвитку епідемії та антагоністичної моделі інформаційної боротьби з урахуванням впливу випадкового середовища та низки інших факторів.

Мета дослідження

Основною метою цього дослідження є розробка СППР для математичної моделі боротьби, автоматизація розрахункових етапів. Модель повинна давати уявлення про часову еволюцію цього змагання, зокрема, у вигляді функцій $N_1(t)$, $N_2(t)$, ... $N_p(t)$, які представляють кількість «адептів», що сприйняли інформацію з відповідних джерел. Крім того, модель повинна дозволяти визначити кінцевий результат цієї боротьби, ідентифікуючи «переможця» і «переможеного». «Переможець» визначається як джерело інформації, якому вдалося охопити більшу частку спільноти, перевищивши N_0/p.

Викладення основного матеріалу дослідження

Модель інформаційної боротьби

Розглянемо основні припущення моделі. Кожен з інформаційних потоків, $I_1, I_2, ..., I_p$, поширюється в громаді двома різними інформаційними каналами:

а) перший канал, який вважається «зовнішнім» по відношенню до громади, характеризується параметрами швидкості поширення $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, ... $\alpha_p>0$. Ці параметри вважаються незалежними від часу;

б) другий канал, «внутрішній», являє собою міжособистісну комунікацію між членами соціальної спільноти. Інтенсивність цього каналу описується параметрами $\beta_1>0$, $\beta_2>0$, ... $\beta_p>0$, які також не залежать від часу. У межах цього каналу індивіди, які вже сприйняли джерело

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-8

інформації «1» (N_1 (t), сприяють рекрутуванню тих, хто ще не зазнав впливу жодного джерела ($N_0 – N_1$(t) N_2(t) – ⋯ – N_p(t).

Швидкість зміни кількості послідовників, (N_1(t) + N_2(t) + ⋯ + N_p(t), яка представляє кількість осіб, завербованих інформаційними потоками I_1, I_2, ..., I_p за одиницю часу, є комбінацією;

а) коефіцієнтів зовнішнього рекрутування, які пропорційні добуткові параметрів α_1, α_2, …, α_p на кількість активних членів ($N_0 – N_1$(t) N_2(t) – ⋯ – N_p(t), тобто α_1 ($N_0 – N_1$(t) N_2(t) – ⋯ – N_p(t), α_2($N_0 – N_1$(t) N_2(t) – ⋯ – N_p(t), α_p($N_0 – N_1$(t) N_2(t) – ⋯ – N_p(t), для I_1, I_2, ..., I_p відповідно;

б) внутрішні коефіцієнти рекрутування, які пропорційні добуткам параметрів β_1, β_2, …, β_p, помноженим на кількість активних послідовників N_1(t) + N_2(t) + ⋯ + N_p(t) та кількість нерекрутованих осіб ($N_0 – N_1$(t) N_2(t) – ⋯ – N_p(t), тобто, β_1 N_1(t) ($N_0 – N_1$(t) – N_2(t) – ⋯ – N_p(t)), β_2 N_2(t) ($N_0 – N_1$(t) – N_2(t) – ⋯ – N_p(t)), ..., β_p N_p(t) ($N_0 – N_1$(t) – N_2(t) – ⋯ – N_p(t)) для I_1, I_2, ..., I_p відповідно.

Крім того, слід враховувати кількість ще не залучених членів громади, N_0, за вирахуванням тих, хто сприйняв обидва типи інформації (тобто суму N_1(t) + N_2(t) + ⋯ + N_p(t). Слід зазначити, що параметри α_1, α_2, …, α_p, β_1, β_2, …, β_p визначають не лише інтенсивність інформаційного впливу, але й схильність індивідів до одночасного сприйняття інформації. Більші значення цих параметрів свідчать про більш швидке сприйняття інформації гіпотетичним «середньостатистичним» представником громади, який спочатку займає нейтральну позицію по відношенню до I_1, I_2, ..., I_p. Крім того, навіть якщо вплив I_1 сильніший за вплив I_2, (тобто $\alpha_1>\alpha_2$, $\beta_1>\beta_2$,), деякі члени спільноти все одно можуть сприймати I_2, що свідчить про відсутність повної монополії одного типу інформації над іншим.

Підсумовуючи попередні припущення, отримуємо модель:

$$\begin{cases} N_1^{(n+1)} = \left(\alpha_{11} + \beta_{11}N_1^{(n)} + \cdots + \beta_{1p}N_p^{(n)}\right)\left(N_0 - N_1^{(n)} - \cdots - N_p^{(n)}\right) + N_1^{(n)} \\ N_2^{(n+1)} = \left(\alpha_{21} + \beta_{21}N_1^{(n)} + \cdots + \beta_{2p}N_p^{(n)}\right)\left(N_0 - N_1^{(n)} - \cdots - N_p^{(n)}\right) + N_2^{(n)} \\ \cdots \\ N_p^{(n+1)} = \left(\alpha_{p1} + \beta_{p1}N_1^{(n)} + \cdots + \beta_{pp}N_p^{(n)}\right)\left(N_0 - N_1^{(n)} - \cdots - N_p^{(n)}\right) + N_p^{(n)} \end{cases} \quad (1)$$

Конфлікт, що розглядається, охоплює набір з p різних типів інформації, позначених як I_1, I_2, ..., I_p, в контексті певної спільноти. Для того, щоб інтегрувати цей конфлікт у практичну модель, ми позиціонуємо цю спільноту в межах певної території і далі розбиваємо її на регіони. У межах цієї спільноти індивіди можуть бути віднесені до прихильників I_1, I_2, ..., I_p або до нейтральних суб'єктів.

Крім того, ми визначаємо конфлікт як фізичну систему, в якій речовини A_1, A_2, ..., A_p конкурують за контроль над спільним полем інтересів, позначеним як Ω. Це поле Ω поділяється на окремі регіони, представлені як i, і кожна речовина A_i прагне домінувати в цих регіонах. Присутність кожної речовини в цих регіонах кількісно оцінюється через невід'ємні координатні вектори, що задаються через A_i=($A_{i1,}$ A_{i2},... A_{im}), які відображають їхній вплив у зазначених областях. Розвиток конфлікту а його вплив на субстанції A_i відбувається через дискретний динамічний процес:

$$\left\{A_1^N, \ldots, A_p^N\right\} \overset{*}{\rightarrow} \left\{A_1^{N+1}, \ldots, A_p^{N+1}\right\}, N = 0,1,\ldots, \quad (2)$$

де N – кількість дискретних кроків у часі.

Карта * символізує невідомий закон конфліктної взаємодії між речовинами A_i. Ми прагнемо зобразити модель внутрішньої конфліктної інформаційної боротьби, подібної до циклічної

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-8

міграції Лотки-Вольтерри [1]. Щоб відобразити міграцію, наш закон взаємодії, ми приймемо модель конфлікту в дискретному часі за участю незламних суперників [2], що узгоджується з припущеннями нашої моделі боротьби.

Розробка СППР

Створення системи підтримки прийняття рішень (СППР) для розрахунку та моделювання інформаційної боротьби є актуальним у сучасному інформаційному суспільстві з наступних причин:

1. Зростання обсягів інформації. Величезний обсяг інформації, що циркулює в Інтернеті та соціальних мережах, ускладнює виявлення та аналіз небезпечних сигналів і тривожних тенденцій.

2. Динаміка інформаційної війни. Інформаційна війна постійно змінюється і розвивається. СППР дозволить відстежувати та аналізувати цю динаміку, а також прогнозувати її розвиток.

3. Важливість математичного моделювання. Математичні моделі дозволяють більш точно розуміти процеси інформаційної війни та прогнозувати їх результати. СППР спростить розробку та застосування цих моделей.

Основним функціоналом, що увійшов до поточної версії СППР є:

1. Можливість динамічно зазначати кількість інформаційних загроз.

2. Можливість динамічно обирати початкові умови.

3. Можливість динамічно обирати та змінювати коефіцієнти для внутрішнього та зовнішнього каналів поширення.

4. Візуалізувати отримані розрахунки на графіку.

Функціонал, що планується до впровадження:

1. Рекомендації, щодо контрзаходів поширення конкретної інформаційної загрози.

2. Рекомендації, щодо пришвидшення поширення конкретної інформаційної загрози.

3. Рекомендації, щодо вибору найбільш ефективних каналів поширення конкретної інформаційної загрози.

На серверній стороні ми використовуємо Python для розробки бізнес-логіки та обробки даних (рис. 1). Для реалізації комунікації з серверною частиною було обрано фреймворк Flask. Python також володіє великою кількістю бібліотек для математичного моделювання, які можна використовувати для розробки та вдосконалення моделей інформаційної боротьби, також за умови наявності відповідних бібліотек, час на розробку та впровадження, може бути суттєво скорочений.

```
29  @app.post("/calculate")
30  def calculate():
31      input_data = map_from_request(request.json)
32
33      response = inf_calculate(
34          input_data.n,
35          input_data.n_zero,
36          input_data.n_start,
37          input_data.a_coef,
38          input_data.b_coef)
39
40      return response
```

Рис. 1. Фрагмент коду відповідального за обробку запиту для розрахунку результатів інформаційної боротьби

На стороні клієнта ми використовуємо ReactJS (рис. 2) для створення користувацького інтерфейсу. ReactJS дозволяє створювати динамічні та інтерактивні веб-сторінки, що

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-8

важливо для взаємодії з користувачем та відображення результатів моделювання інформаційної боротьби. ReactJS також спрощує управління станом додатку та реакцію на дії користувача.

```
60  const renderChart = () => {
61    const data = {
62      labels: chartData?.x_row,
63      datasets: chartData?.y_rows.map((row, i) => ({
64        label: `Case ${i + 1}`,
65        data: row,
66        yAxisID: `y-${i}`,
67      })),
68    };
69
70  > const config = {…
87    };
88
89    const chartElem = document.getElementById("acquisitions");
90  > if (chartElem) {…
92    }
93  };
```

Рис. 2. Фрагмент коду, відповідальний за генерацію графіку динаміки інформаційної боротьби

Для зв'язку між сервером і клієнтом ми використовуємо REST API для передачі даних і комунікації між двома частинами системи. Приклад запиту та відповіді сервера зображено на рис. 3.

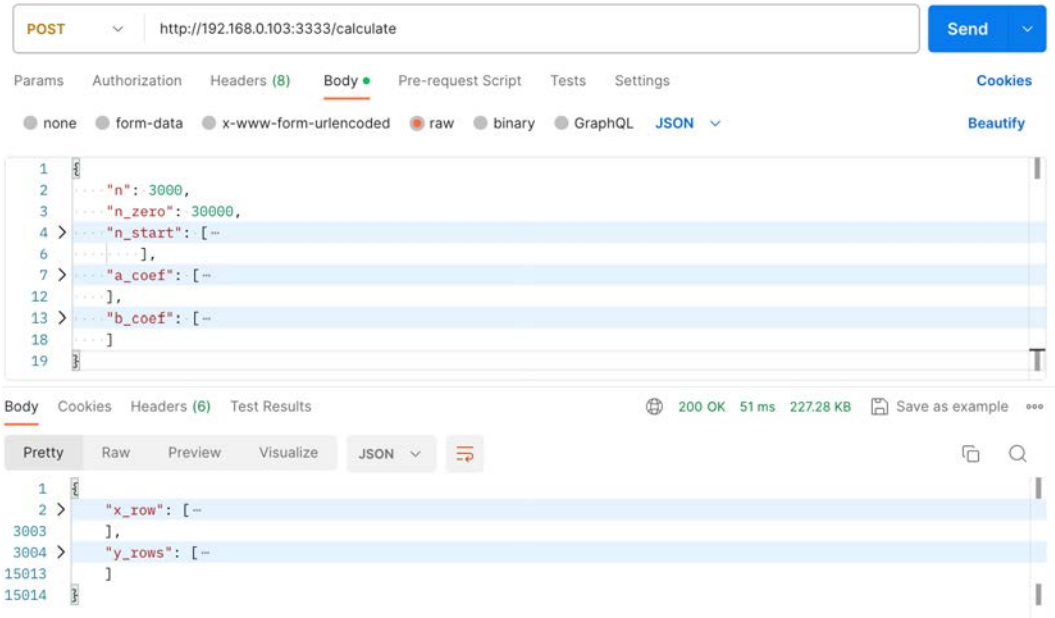


Рис. 3. Приклад запиту, відповідального за розрахунок динаміки інформаційної боротьби

Варто зазначити, що розроблена СППР є лише першою ітерацією і надалі буде доповнюватися новими функціями. Вже наявний функціонал буде вдосконалено для забезпечення максимально простої та ефективної взаємодії з користувачем.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-8

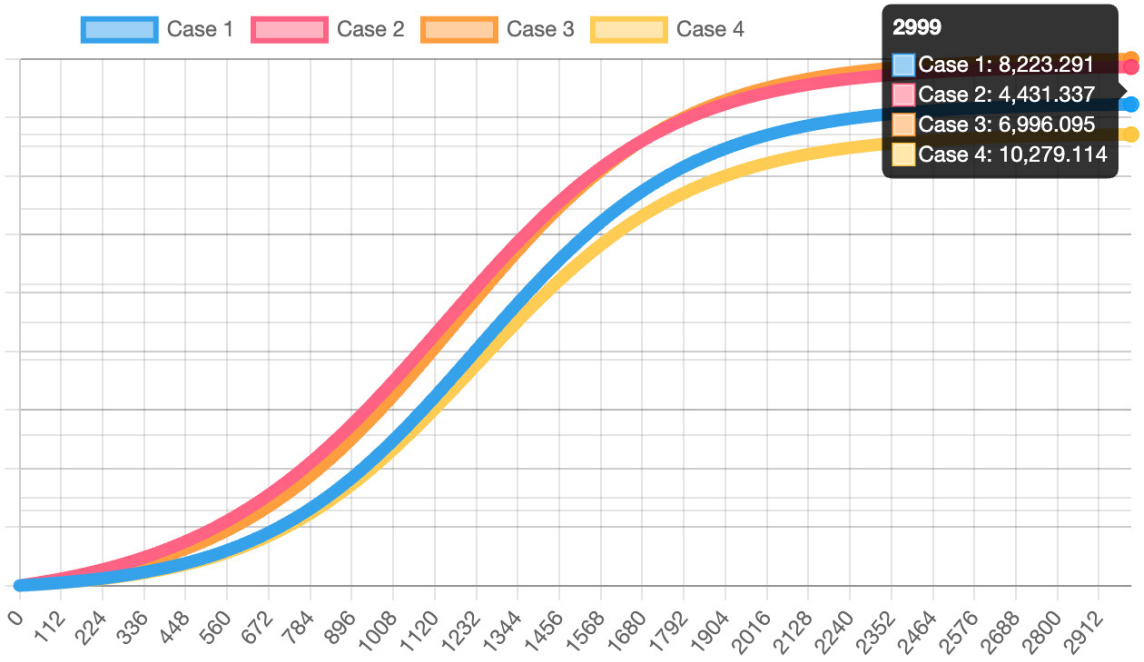


Рис. 4. Візуалізація результатів розрахунку інформаційної боротьби для випадку з 4-ма типами інформаційних загроз

Розглянемо кілька практичних застосувань, як видно з рис. 4, для $p = 4$ та нульових початкових умов при значеннях коефіцієнтів: $_1 = 0.000012, _2 = 0.000015, _3 = 0.000018, _4 = 0.000015$, $_1 = 0.00000012, _2 = 0.00000009, _3 = 0.0000001, _4 = 0.00000012$. Переможцем виступає четвертий тип інформаційної загрози, через сумарну перевагу обох каналів поширення.

Розглянемо ситуацію, де ^{3} набуде вищого значення, наприклад $_3 = 0.0000002$.

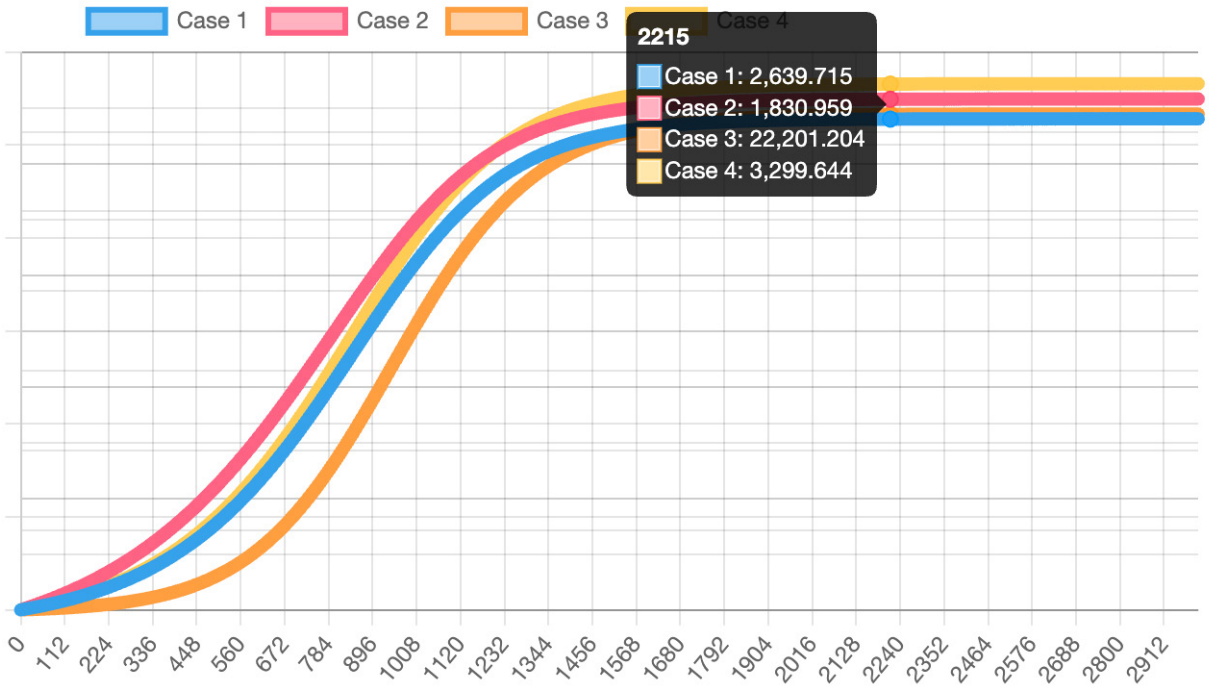


Рис. 5. Візуалізація результатів розрахунку інформаційної боротьби при вищому значенні $_3 = 0.0000002$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-8

Як бачимо з рис. 5, навіть подібна зміна привела до суттєвої перемого третьої інформаційної загрози.

Наступним кроком розглянемо поведінку другого типу інформаційної загрози при збільшенні зовнішнього каналу поширення $_2 = 0.00002$, попереднє значення $_2 = 0.000015$.

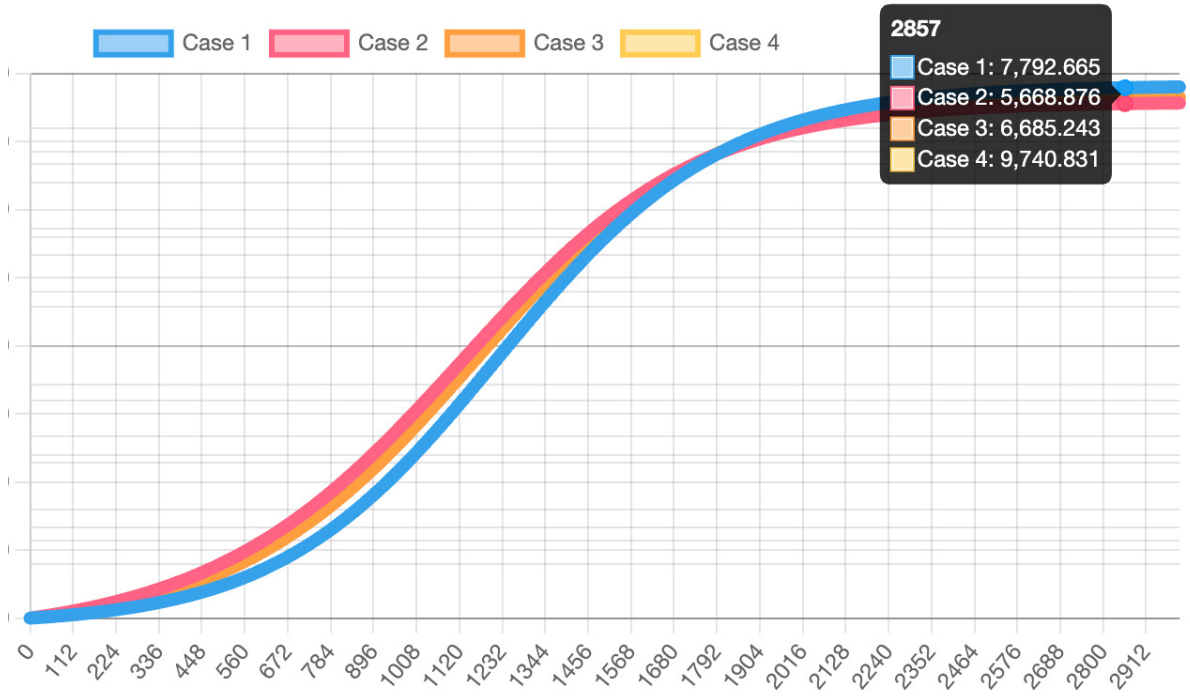


Рис. 6. Візуалізація результатів розрахунку інформаційної боротьби при вищому значенні $_2 = 0.00002$

Як видно з рис. 6, навіть при такому суттєвому збільшенні коефіцієнта зовнішнього каналу поширення, кардинально ситуація не змінилася. Четвертий тип інформаційної загрози досі є переможцем.

Подібна поведінка в черговий раз підтверджує потребу в наявності інструменту, що дозволить швидко перевіряти результат інформаційної боротьби при зміні вхідних параметрів.

Висновки

В рамках дослідження були представлені математичні моделі, спрямовані на аналіз інформаційної боротьби у сучасному суспільстві. Ці моделі дозволяють відобразити складні взаємодії різних видів інформації та їх вплив на суспільство.

Зокрема, розроблено програмний комплекс (СППР) для автоматизації розрахункових процесів. Ця система дає можливість визначати динаміку поширення різних видів інформації в досліджуваному середовищі з урахуванням різних факторів та параметрів.

Результати дослідження, представлені в цій статті, можуть бути корисними для розробки стратегій управління інформаційною безпекою та регулювання інформаційних процесів. Використання СППР сприяє підвищенню якості оцінки ризиків та прийняттю обґрунтованих рішень у сфері інформаційної політики та безпеки.

Застосування отриманих результатів та використання розробленої СППР може сприяти вдосконаленню управління та забезпеченню стабільності в інформаційному середовищі, сприяючи раціональному використанню ресурсів та зменшенню ризиків, пов’язаних з інформаційними війнами та конфліктами.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-8

Список використаної літератури

1. Mykhaylov A. P., Marevtseva N. A. Models of the information struggle. *Mat. modelling*. 2011. № 10. P. 19–32.
2. Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I. The conflict interaction between two complex systems. Cyclic migration. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*. 2008. №2. P. 163–185.
3. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes: Monografia (ISBN: 978-1-119-77973-5) November 2020 Wiley-ISTE 225 p.
4. Bekesiene S., Samoilenko I., Nikitin A., Meidute-Kavaliauskiene I. The Complex Systems for Conflict Interaction Modelling to Describe a Non-Trivial Epidemiological Situation. *Mathematics*. 2022. № 10. P. 537.
5. Samoilenko I. V., Nikitin A. V., Verovkina G. V. Peculiarities of Construction and Analysis of the Information Warfare Model with Markov Switchings and Impulse Perturbations Under Levy Approximation Conditions. *Cybern Syst Anal*. 2021. № 57. P. 621–628.
6. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. Control Problem for the Impulse Process under Stochastic Optimization Procedure and Levy Conditions. *Matematychni Studii*. 2021. № 55. P. 107–112.
7. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. Asymptotics of Control Problem for the Impulse Perturbation Process under Stochastic Optimization Procedure and Levy Approximation Conditions. International Conference on System Analysis and Intelligent Computing. 2020. № 2. P. 1–2.

References

1. Mykhaylov, A.P., & Marevtseva, N.A. (2011). Models of the information struggle, *Mat. modelling*, volume 23, number 10, 19 – 32 [in English]
2. S. Albeverio, V. Koshmanenko, & I. Samoilenko (2008). The conflict interaction between two complex systems. Cyclic migration. *Journal of Interdisciplinary Mathematics* Vol. 11, No. 2, P. 163–185 [in English]
3. Y.Chabanyuk, A.Nikitin, & U.Khimka. (2020). Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes.-Monografia (ISBN: 978-1-119-77973-5) November 2020 Wiley-ISTE 240 Pages [in English]
4. Bekesiene, S., Samoilenko, I., Nikitin, A., & Meidute-Kavaliauskiene, I. (2022). The Complex Systems for Conflict Interaction Modelling to Describe a Non-Trivial Epidemiological Situation. *Mathematics*, *10*, 537. https://doi.org/10.3390/math10040537 [in English]
5. Samoilenko, I.V., Nikitin, A.V., & Verovkina, G.V. (2021). Peculiarities of Construction and Analysis of the Information Warfare Model with Markov Switchings and Impulse Perturbations Under Levy Approximation Conditions. *Cybern Syst Anal* 57, 621–628. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00387-1 [in English]
6. Y.Chabanyuk, A.Nikitin, & U.Khimka. (2021). Control Problem for the Impulse Process under Stochastic Optimization Procedure and Levy Conditions. *Matematychni Studii*, 55(1), P. 107–112 [in English]
7. Y.Chabanyuk, A.Nikitin, & U.Khimka. (2022). Asymptotics of Control Problem for the Impulse Perturbation Process under Stochastic Optimization Procedure and Levy Approximation Conditions. 2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis and Intelligent Computing, SAIC 2020, 1 – 2 [in English]

Красюк Богдан Віталійович – аспірант кафедри економіко-математичного моделювання та інформаційних технологій Національного університету «Острозька академія». E-mail: bohdan.krasiuk@oa.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1651-800X.

Krasiuk Bohdan Vitaliyovych – Postgraduate Student of the Department of Economic-Mathematical Modeling and Information Technologies of the National University of Ostroh Academy. E-mail: bohdan.krasiuk@oa.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1651-800X.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-8

УДК 517.91:532.2

О.М. ЛЕНЮК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
О.М. НІКІТІНА
Чернівецький ліцей № 1 математичного та економічного профілів
М.І. ШИНКАРИК
Західноукраїнський національний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТІ

На нинішньому етапі науково-технічного прогресу виникає необхідність дослідження фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які дедалі частіше використовуються для виробництва різних деталей. Моделювання фізичних процесів у таких матеріалах, зокрема процесу дифузії, математично призводить до задачі розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку параболічного типу на кусково-однорідному інтервалі з певними початковими та крайовими умовами, оскільки для різних матеріалів фізичні процеси описуються різними диференціальними операторами. Одним із найбільш ефективних методів одержання інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень, який виник у другій половині 20 століття.

У цій роботі одержано розв'язок задачі дифузії на двоскладовому сегменті $[0;R_2]$ з однією точкою спряження за допомогою гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Бесселя.

Математичне моделювання дифузійних процесів в двокомпонентних матеріалах математично означає побудувати обмежений розв'язок сепаратної системи двох диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу з певними крайовими умовами, початковими умовам та, умовами спряження. Застосувавши до такої крайової задачі побудоване заздалегідь гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя на сегменті, ми одержуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння. Знайшовши розв'язок задачі Коші, ми застосовуємо до нього обернене гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя.

Пряме гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя на сегменті з однією точкою спряження можна записати у вигляді матриці-рядка. Якщо при цьому вихідну систему та початкові умови записати в матричній формі, то, застосовавши до такої задачі операторну матрицю-рядок за правилом множення матриць, ми в результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, яка нескладно розв'язується. Якщо записати обернене гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя у вигляді операторної матриці-стовпця, то, застосувавши його до одержаного розв'язку задачі Коші, після здійснення елементаргих перетворень, ми одержуємо єдиний розв'язок вихідної задачі в аналітичному вигляді.

Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Ключові слова: гібридний диференціальний оператор, задача дифузії, гібридне інтегральне перетворення.

O.M. LENYUK
Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych
O.M. NIKITINA
Chernivtsi Lyceum №1 of Mathematical and Economic Profiles
M.I. SHYNKARYK
West Ukrainian National University

MODELING OF DIFFUSION PROCESSES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF EULER-BESSEL TYPE ON THE SEGMENT

At the current stage of scientific and technical progress, there is a need to study the physical and technical characteristics of composite materials, which are increasingly used for the production of various parts. Modeling physical processes in such materials, in particular the diffusion process, mathematically leads to the problem of solving a separate system of partial differential equations of the second order of the parabolic type on a piecewise homogeneous interval with certain initial and boundary conditions, since for different materials physical processes are described by different differential operators.

One of the most effective methods of obtaining integral images of analytical solutions of the algorithmic nature of such mathematical physics problems is the method of hybrid integral transforms, which arose in the second half of the 20th century.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

In this work, the solution of the diffusion problem on the two-component segment [0;R_2] with one point of conjugation is obtained using the Euler-Bessel hybrid integral transform.

Mathematical modeling of diffusion processes in two-component materials mathematically means constructing a limited solution of a separate system of two partial differential equations of the parabolic type with certain boundary conditions, initial conditions, and conjugation conditions. Applying to such a boundary-value problem the previously constructed Euler-Bessel hybrid integral transform on a segment, we obtain the Cauchy problem for an ordinary differential equation. Having found the solution of the Cauchy problem, we apply to it the inverse Euler-Bessel hybrid integral transform.

The direct Euler-Bessel hybrid integral transform on a segment with one point of conjugation can be written in the form of a row matrix. If at the same time the original system and initial conditions are written in matrix form, then, applying the row operator matrix to such a problem according to the rule of matrix multiplication, we get the Cauchy problem for an ordinary differential equation of the first order, which is easily solved. If we write the inverse Euler-Bessel hybrid integral transform in the form of a column operator matrix, then, applying it to the resulting solution of the Cauchy problem, after performing elementary transformations, we obtain a unique solution of the original problem in analytical form.

Constructed solutions of boundary value problems are algorithmic in nature, which allows them to be used both in theoretical studies and in numerical calculations.

Key words: hybrid differential operator, problem of diffusion, hybrid integral transform.

Постановка проблеми

На теперішньому етапі науково-технічного прогресу виникає необхідність дослідження фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які дедалі частіше використовуються для виробництва різних деталей. Моделювання фізичних процесів у таких матеріалах, зокрема процесу дифузії, математично призводить до задачі розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку параболічного типу на кусково-однорідному інтервалі з певними початковими та крайовими умовами [1–3], оскільки для різних матеріалів фізичні процеси описуються різними диференціальними операторами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним із найбільш ефективних класичних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків крайових задач математичної фізики неоднорідних структур є метод гібридних інтегральних перетворень, який виник у другій половині 20 століття. В [4] побудовано скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на сегменті [0, R_2] з однією точкою спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Ейлера-Бесселя, яке можна застосовувати для моделювання різних фізичних процесів в неоднорідних середовищах. В даній роботі показано застосування відповідного СГІП до розв'язування задачі дифузії.

Мета дослідження

Одержати аналітичний вигляд розв'язку задачі дифузії на двоскладовому сегменті [0;R_2] з однією точкою спряження за допомогою гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Бесселя.

Викладення основного матеріалу дослідження

Моделювання дифузії тепла на двоскладовому сегменті з точкою спряження математично приводить до побудови в області

$$D_1 = \{(t,r) : t > 0, r \in I_1\}, \; I_1 = \{r : r \in (0,R_1) \cup (R_1,R_2); R_2 < \infty\}$$

обмеженого розв'язку сепаратної системи рівнянь з частинними похідними параболічного типу [4]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B^*_{\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r), \; r \in (0,R_1), \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}[u_2] = f_2(t,r), \; r \in (R_1,R_2), \end{aligned} \tag{1}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

за початковими умовами

$$u_1(t,r)\big|_{t=0} = g_1(r),\ r \in (0, R_1),$$
$$u_2(t,r)\big|_{t=0} = g_2(r),\ r \in (R_1, R_2), \tag{2}$$

умовами спряження в точці контакту

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1\right)u_1 - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1\right)u_2\right]\Big|_{r=R_1} = 0,\ j = 1,2, \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}[r^\gamma u_1] = 0, \quad \left(\alpha_{22}^2 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^2\right)u_2\,|_{r=R_2} = 0. \tag{4}$$

Тут беруть участь диференціальний оператор Ейера $B_{\alpha_1}^*$ та диференціальний оператор Бесселя B_{ν,α_2} [4].

Коефіцієнти, які беруть участь в постановці крайової задачі (1)–(4), природньо задовольняють певні умови обмеження [4].

В праці [4] одержані формули для прямого $H_{\nu,(\alpha)}$ й оберненого $H_{\nu,(\alpha)}^{-1}$ СГІП, породжених на множині I_1 ГДО

$$M_{\nu,(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\alpha_1}^* + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}\ :$$
$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_0^{R_2} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{5}$$

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \tag{6}$$

При цьому для ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ виведена основна тотожність СГІП:

$$H_{\nu,(\alpha)}[M_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - k_1^2\int_0^{R_1} g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr - k_2^2\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr +$$
$$+c_{11}^{-1}R_1^{2\alpha_1+1}[Z_{\nu,(\alpha);12}^1(\beta)\omega_{21} - Z_{\nu,(\alpha);22}^1(\beta)\omega_{11}] + (\alpha_{22}^2)^{-1}a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}V_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta)g_R. \tag{7}$$

Тут $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [1], спектральна вектор-функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta),$$

вагова функція $\sigma(r)$, спектральна щільність $\Omega_{(\alpha)}(\beta)$ а також інші величини та функції, визначені в праці [4].

Знайдемо інтегральне зображення аналітичного розв'язку задачі (1)–(4) методом СГІП типу Ейлера-Бесселя на двоскладовому сегменті $[0, R_2]$ з однією точкою спряження, які діють за правилами (5)–(7).

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

Для цього потрібно записати систему рівнянь (1) та початкові умови (2) у наступній матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 B^*_{\alpha_1}\right) u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}\right) u_2(t,r) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,r) \\ \\ f_2(t,r) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Інтегральний оператор $H^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$, який діє згідно правила (5), можна зобразити у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,(\alpha)}[\ldots] = \left[\int_0^{R_1} \ldots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1} dr \right]. \tag{9}$$

Застосуємо до задачі (8) операторну матрицю-рядок (9) за правилом множення матриць. Використавши основну тотожність (7), ми отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2\right)\tilde{u}(t,\beta) + \left(k_1^2 + \gamma_1^2\right)\int_0^{R_1} u_1(t,r) V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} dr +$$

$$+\left(k_2^2 + \gamma_2^2\right)\int_{R_1}^{R_2} u_2(t,r) V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\,\sigma_2 r^{2\alpha_2+1} dr = \tilde{f}(t,\beta),$$

$$\tilde{u}\,|_{t=0} = \tilde{g}(\beta).$$

Припустимо, що $\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2\right\} = \gamma_1^2$. Тоді покладемо $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0$. Задача Коші набуде вигляду:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + \gamma_1^2\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta), \tag{10}$$

$$\tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta).$$

Безпосередньо нескладно перевіряється, що розв'язок задачі Коші (10) записується наступною формулою

$$\tilde{u}(t,\beta) = e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}\tilde{g}(\beta) + \int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)(t-\tau)}\tilde{f}(\tau,\beta)d\tau. \tag{11}$$

Інтегральний оператор $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$, який діє згідно правила (6), як обернений до оператора (9), можна зобразити у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\ldots] = \frac{2}{\pi}\begin{bmatrix} \int_0^\infty [\ldots] V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \int_0^\infty [\ldots] V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (12) за правилом множення матриць, до матриці елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (11). Виконавши елементарні перетворення, одержуємо єдиний розв'язок вихідної задачі дифузії (1)–(4):

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

$$u_j(t,r) = \int_0^t \int_0^{R_1} G_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho) + g_1(\rho)\delta_+(\tau)\right]\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}\, d\rho\, d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_{R_1}^{R_2} G_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho) + g_2(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_2 r^{2\alpha_2+1} d\rho\, d\tau, \quad j=1,2. \tag{13}$$

У рівностях (13) присутні функції впливу, породжені неоднорідністю системи (1):

$$G_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta)d\beta, \quad j,k=1,2. \tag{14}$$

При цьому $\delta_+(t)$ – дельта-функція Дірака, зосереджена в точці $t=0+$. Вона використовується лише для спрощення запису розв'язку.

Зауваження. Якщо $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2\} = \gamma_2^2$, то $k_j^2 = \gamma_2^2 - \gamma_j^2 \geq 0,\ j=1,2,$ й у формулах (10)–(14) вираз $(\beta^2+\gamma_1^2)$ потрібно замінити на вираз $(\beta^2+\gamma_2^2)$.

Висновки

Побудований розв'язок (13) крайової задачі (1)–(4), яка описує процес дифузії тепла у двокомпонентному середовищі, має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в в числових розрахунках, так і в теоретичних дослідженнях.

Список використаної літератури

1. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 188 с.
2. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. Чернівці: Прут, 2004. 276 с.
3. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. Тернопіль: Економ. Думка, 2004. 368 с.
4. Нікітіна О.М. Гібридні інтегральні перетворення типу (Ейлера-Бесселя). Львів, 2008. 86 с. (Препринт. НАН України, Ін-т прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача; 01–08).

References

1. Leniuk, M.P. (1997). *Temperaturni polia v ploskykh kuskovo-odnoridnykh ortotropnykh oblastiakh [Temperature fields in flat piecewise homogeneous orthotropic regions]*. K.: In-t matematyky NAN Ukrainy. 188. [in Ukrainian]
2. Konet, I.M., & Leniuk, M.P. (2004). *Temperaturni polia v kuskovo-odnoridnykh tsylindrychnykh oblastiakh [Temperature fields in piecewise homogeneous cylindrical regions]*. Chernivtsi: Prut. 276. [in Ukrainian]
3. Leniuk, M.P., & Shynkaryk, M.I. (2004). *Hibrydni intehralni peretvorennia (Furie, Besselia, Lezhandra). Chastyna 1 [Hybrid integral transformations (Fourier, Bessel, Legendre). Part 1].* Ternopil: Ekonom. Dumka. 368 s. [in Ukrainian]
4. Nikitina, O.M. (2008). Hibrydni intehralni peretvorennia typu (Eilera-Besselia) [Hybrid integral transformations of the (Euler-Bessel) type]. Lviv. 86. (Preprynt. NAN Ukrainy, In-t prykladnykh problem matematyky i mekhaniky im. Ya.S. Pidstryhacha; 01–08) [in Ukrainian]

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

Ленюк Олег Михайлович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. E-mail: O.Lenyuk@chnu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9494-2864.

Нікітіна Ольга Михайлівна – к.ф.-м.н., доцент, вчитель математики Чернівецького ліцею №1 математичного та економічного профілів. E-mail: o.nikitina.chv@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0702-0453.

Шинкарик Микола Іванович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики Західноукраїнського національного університету. E-mail: shynkaryk_m@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8191-8953.

Lenyuk Oleh Myhaylovych – Ph.D in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Differential Equations Department of Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych. E-mail: O.Lenyuk@chnu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9494-2864.

Nikitina Ol'ha Myhaylivna – Ph.D in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Teacher of athematics of Chernivtsi Lyceum №1 of Mathematical and Economic Profiles. E-mail: o.nikitina.chv@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0702-0453.

Shynkaryk Mykola Ivanovych – Ph.D in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Applied Mathematics Department of West Ukrainian National University. E-mail: shynkaryk_m@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8191-8953.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-9

УДК 535.36

О.С. МАЗМАНІШВІЛІ
Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут»

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ РОЗПОДІЛІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ КВАДРАТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ, ВИЗНАЧЕНИХ НА РОЗВ'ЯЗКАХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Континуальне інтегрування – один із ефективних методів сучасної теоретичної фізики та прикладної математики. Відомо, що з відомих конструкцій континуальних інтегралів беруться лише континуальні інтеграли по гаусової міри. Розвиток обчислювальних методів та засобів забезпечує можливість успішного вирішення різноманітних завдань. При розгляді реальних марківських процесів результат взяття відповідних континуальних інтегралів гаусової мірою містить кореневі вирази. Як правило, ці вирази є Лаплас-трансформантами від шуканих розподілів значень інтегральних функціоналів. Для отримання самих розподілів необхідно зробити зворотне перетворення Лапласа, тобто знайти значення відповідного інтеграла Фур'є на поверхні Рімана. У зв'язку з двозначністю зазначених кореневих виразів комп'ютерними засобами неможливо визначити правильний знак від радікалів, що виникають. Це в свою чергу призводить до необхідності розвитку аналітичних методів, орієнтованих на етап дослідження, попередній чисельному. У роботі викладено результати аналітичного знаходження типових континуальних інтегралів. Докладно викладено процедуру взяття континуального інтеграла квадратичного виду щодо амплітуди розв'язання стохастичного диференціального рівняння. Змістовний зміст цього функціоналу у тому, що він визначає середнє щодо кінцевого інтервалу спостереження потужність нормального процесу – рішення стохастичного диференціального рівняння. У роботі викладено результати, присвячені саме аналітичній та чисельній сторонам отримання фізичних та прикладних залежностей у завданнях, частиною яких є необхідність статистичного усереднення у функціональному просторі рішень використовуваного стохастичного диференціального рівняння. Як результати наводяться залежності, що описують імовірнісні властивості інтегральних функціоналів, що розглядаються.

Ключові слова: континуальне інтегрування, гаусова міра, квадратичний функціонал, стохастичне диференціальне рівняння, марківський процес, перетворення Лапласа.

O.S. MAZMANISHVILI
National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology"

COMPUTATIONAL ALGORITHMS FOR DISTRIBUTIONS OF INTEGRAL QUADRATIC FUNCTIONALS, DETERMINED BY SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Path integration is one of the effective methods of modern theoretical physics and applied mathematics. It is well known that from the known constructions of path integrals only path integrals with respect to the Gaussian measure are taken. The development of computational methods and tools makes it possible to successfully solve a variety of problems. When considering real Markov processes, the result of taking the corresponding path integrals over the Gaussian measure contains root expressions. As a rule, these expressions are Laplace transformants of the desired distributions of values of integral functionals. To obtain the distributions themselves, it is necessary to perform the inverse Laplace transform, in other words, to find the value of the corresponding Fourier integral on the Riemann surface. Due to the two-valued nature of these root expressions, it is impossible to determine the correct sign of the resulting radicals using computer tools. This in turn leads to the need to develop analytical methods focused on the research stage preceding the numerical one. The paper presents the results of the analytical determination of typical path integrals. The procedure for taking a path integral of quadratic form with respect to the amplitude of the solution of a stochastic differential equation is described in detail. The meaningful meaning of this functional is that it describes the average power of a normal process relative to a finite observation interval – the solution of a stochastic differential equation. The paper presents results devoted specifically to the analytical and numerical aspects of obtaining physical and applied dependencies in problems, part of which is the need for statistical averaging in the functional space of solutions of the stochastic differential solution used. As results, dependencies are given that describe the probabilistic properties of the integral functionals under consideration.

Key words: path integration, Gaussian measure, quadratic functional, stochastic differential equation, Markov process, Laplace transform.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-10

Постановка проблеми

Континуальне інтегрування – один із ефективних методів сучасної теоретичної фізики та прикладної математики. Відомо, що з відомих конструкцій континуальних інтегралів беруться лише континуальні інтеграли по гаусової міри. Гаусова властивість повинна мати не тільки міра, тобто вагова функція, за допомогою якої здійснюється процедура усереднень у просторі рішень стохастичного диференціального рішення, але й вираз, математичне очікування якого шукається. Розвиток обчислювальних методів і засобів забезпечує можливість успішного вирішення різноманітних завдань, що у свою чергу призводить до необхідності розвитку аналітичних методів, орієнтованих на етап дослідження, що передує чисельному.

У роботі викладено процедуру взяття континуального інтеграла квадратичного вигляду, що квадратично визначений через амплітуду розв'язання стохастичного диференціального рівняння. Змістовний зміст цього функціоналу у тому, що він визначає середнє щодо кінцевого інтервалу спостереження – потужність нормального процесу розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Особлива увага приділяється обчислювальній стороні, тобто етапу отримання кількісних характеристик фізичних і прикладних залежностей, що шукаються, в задачах, частиною яких є необхідність статистичного усереднення в просторі розв'язків використовуваного стохастичного диференціального рівняння.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

До задачі знаходження значення континуального інтеграла призводять багато проблем статистичної фізики [1], квантової механіки [2], статистичної радіофізики [3, 4], квантової оптики [5], фізики високих енергій [6], теорії оцінювання [7] та інші. Кількість публікацій, присвячених застосуванню континуального інтегрування, велика.

Мета дослідження

Метою роботи є виклад аналітичної процедури для обчислення зворотного перетворення Лапласа, яка виникає після взяття континуального інтеграла квадратичного виду щодо амплітуди розв'язку стохастичного рівняння. У роботі викладено результати, присвячені саме аналітичній та чисельній сторонам отримання фізичних та прикладних залежностей у завданнях, частиною яких є необхідність статистичного усереднення у функціональному просторі. Як результати наводяться залежності, що описують властивості аналізованого інтегрального функціоналу.

Викладення основного матеріалу дослідження

Теорія, що описує нелінійні системи, значно складніша проти теорії лінійних систем. Якщо на вхід лінійної системи надходить нормальний випадковий процес, то визначення статистичної структури результуючого процесу достатньо визначити перші два моменти процесу на виході. У разі нелінійної системи потрібно знаходити всю функцію розподілу. Кількість точно розв'язуваних завдань з аналітичним описом результуючих процесів досить мала, тим часом інформація, що отримується при вирішенні, важлива як для аналізу, так і для наступних чисельних розрахунків. Тут обмежимося розглядом нелінійних систем квадратичного типу.

Найбільш важливим із квадратичних функціоналів є функціонал – середня за кінцевий інтервал спостереження L потужність J нормального процесу Орнштейна-Уленбека [1] (ОУ-процесу) $h(s)$

$$\mathrm{J} = \frac{1}{L}\int_0^L ds\, h^2(s)\,. \tag{1}$$

Цей марківський процес підпорядковується рівнянню $h'(s) + \nu h(s) = w(s)$ з породжувальним процесом $w(s)$ «білого» шума і параметрами: інтенсивність $\sigma_{\text{н}}^2$ та декремент ν, при цьому $\langle h(s)\rangle_{\text{н}} = 0$ и $\langle h^2(s)\rangle_{\text{н}} = \sigma_{\text{н}}^2$ [1–4].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-10

Нехай необхідно визначити густину розподілу $f(\eta)$ (або функцію розподілу $F(\eta)$) випадкових значень функціоналу J. До цієї задачі примикає велика кількість близьких щодо постановки завдань. Для тих варіантів з них, у яких підінтегральний вираз функціоналів типу (1) залишається квадратичним щодо $h(s)$, можна розраховувати на просування в аналітичному відношенні. Відзначимо, що марківський процес $h(s)$ є регулярним, тому функціонал J має одне-єдине значення і умовна густина розподілу ймовірностей $f(\eta)$ може бути записана з використанням δ-функції Дірака: $f(\eta) = \delta\left(\eta - L^{-1}\int_0^L ds\, h^2(s)\right)$. У загальному випадку стохастичного ОУ-процесу $h(s)$ умовну густину $f(\eta)$ необхідно усереднити за всіх можливих флуктуаціях, що реалізуються на інтервалі $(0 \le s \le L)$:

$$f(\eta) = \left\langle \delta\left(\eta - \frac{1}{L}\int_0^L ds\, h^2(s)\right)\right\rangle_{\text{Н}}. \tag{2}$$

Це усереднення, позначене індексом «Н», включає врахування всіх можливих флуктуацій $\{h_0 = h(0)\}$ на старті ($s = 0$), внесок усіх можливих реалізацій процесу $\text{H}(s)$ на інтервалі $(0 < s < L)$ та, нарешті, облік усіх можливих реалізацій $\{h_L\}$ на фініші ($s = L$). При цьому повинні враховуватися ті реалізації $\{h(s)\}$ ОУ-процесу, які стартують з $\{h_0 = h(0)\}$ і фінішують в $\{h_L = h(L)\}$. Використовуючи Фур'є-уявлення для δ-функції Дірака, зазначене усереднення можна позначити у вигляді

$$f(\eta) = \left\langle \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dh_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{Н}}^2}} \exp\left(-\frac{h_0^2}{2\sigma_{\text{Н}}^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dh_L \exp\left\{i\lambda\left[\eta - \frac{1}{L}\int_0^L ds\, h^2(s)\right]\right\}\right\rangle_{\text{Н}}. \tag{3}$$

Виділяючи усереднення на кінцях інтервалу, перепишемо (3) у вигляді

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{Н}}^2}}\int_{-\infty}^{\infty} dh_0 \exp\left(-\frac{h_0^2}{2\sigma_{\text{Н}}^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dh_L \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(i\lambda\eta)\,\Psi(i\lambda,\eta)\ , \tag{4}$$

де введена твірна (характеристична) функція

$$\Psi(\lambda; h_0, h_L) = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{L}\int_0^L ds\, h^2(s)\right\}\right\rangle_{0<s<L} = \langle h_0 \mid \exp\left\{-\frac{\lambda}{L}\int_0^L ds\, h^2(s)\right\} \mid h_L\rangle, \tag{5}$$

яка є умовним середнім по всіх траєкторіях ОУ-процесу, що мали за $s = 0$ значення h_0 і прийняли за $s = L$ значення h_L. Шляхом усереднення по всіх випадкових реалізаціях процесу $h(s)$ на старті ($s = 0$) і всіх можливих реалізацій на фініші ($s = L$) знаходимо безумовну твірну функцію (ТФ):

$$Q_{\text{J}}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{Н}}^2}} \exp\left(-\frac{h_0^2}{2\sigma_{\text{Н}}^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dh_L \langle h_0 \mid \exp\left\{-\frac{\lambda}{L}\int_0^L ds\, h^2(s)\right\} \mid h_L\rangle = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{L}\int_0^L ds\, h^2(s)\right\}\right\rangle_{\text{Н}}, \tag{6}$$

яка містить усю статистичну інформацію про функціонал (1).

Таким чином, завдання знаходження густини розподілу $f(\eta)$ та опису статистико-імовірнісних властивостей функціоналу (1), яка сама по собі досить ємна, можна розділити на етапи:

а) знаходження умовної твірної функції $\Psi(\lambda; h_0, h_L)$ (5) та знаходження безумовної твірної функції $Q_{\text{J}}(\lambda)$ (6);

б) за допомогою зворотного перетворення Фур'є на підставі знайденої характеристичної функції $Q_{\text{J}}(\lambda)$ з використанням чисельного алгоритму отримати густину розподілу $f(\eta)$ випадкових значень функціоналу (1):

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-10

$$f(\eta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\ \exp(i\lambda\eta)\,Q_J(i\lambda)\,. \tag{7}$$

Твірна функція інтегрального квадратичного функціоналу.

Проблема визначення характеристичної функції $\Psi(\lambda;h_0,h_S)$ (6) досить часто зустрічається у тому чи іншому формулюванні, зокрема, у завданнях квантової механіки та статистичної фізики. Наприклад, функція Гріна рівняння Шредінгера [2] чи рівняння Фоккера-Планка [1, 3, 5] має вигляд за структурою досить близький до (5).Наслідуючи [2, 3], побудуємо для $\Psi(\lambda;h_0,h_s)$ рівняння

$$\frac{\partial}{\partial s}\Psi = \frac{\partial}{\partial h_S}\left(\nu h_S + \frac{1}{2}\sigma_{\text{H}}^2\frac{\partial}{\partial h_S}\right)\Psi - \lambda h_S^2\Psi \tag{8}$$

з початковою умовою $\Psi(\lambda;h_0,h_S \mid s=0) = \delta(h_0 - h_S)$. Останній доданок в (8) відображає конкретний вид квадратичного функціоналу (1). Будемо шукати рішення рівняння (8) у такому вигляді:

$$\Psi(\lambda;h_0,h_S) = \exp\left(-\frac{\nu - r}{2\sigma_{\text{H}}^2}\left(h_S^2 - h_0^2\right) + \frac{\nu + r}{2}s\right)\chi\left(\lambda;h_0,\exp(rs)h_S\right), \tag{9}$$

де $r = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_{\text{H}}^2}$. Позначимо $y = h_s\exp(rs)$. Для введеної функції $\chi(\lambda;h_0,y)$ отримуємо наступне диференціальне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial s}\chi(\lambda;h_0,y) = \frac{1}{2}\sigma_{\text{H}}^2\exp(2rs)\frac{\partial^2}{\partial y}\chi(\lambda;h_0,y), \tag{10}$$

розв'язок якого відомий [1, 3]:

$$\chi(\lambda;h_0,y) = \left(\frac{r}{\pi\sigma_{\text{H}}^2\left(\exp(2rs)-1\right)}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{r\left(y-h_0\right)^2}{\sigma_{\text{H}}^2\left(\exp(2rs)-1\right)}\right). \tag{11}$$

Таким чином, згідно (9) з використанням (11) отримаємо при $s = L$

$$\Psi(\lambda;h_0,h_L) = \left(\frac{r}{\pi\sigma_{\text{H}}^2\left(\exp(2rL)-1\right)}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\nu - r}{2\sigma_{\text{H}}^2}\left(h_L^2 - h_0^2\right) + \frac{\nu + r}{2}L - \frac{r\left[h_L - \exp(-rL)h_0\right]^2}{\sigma_{\text{H}}^2\left(1-\exp(-2rL)\right)}\right). \tag{12}$$

Інтегруючи тепер по змінній h_L та змінній h_0 з рівновісною вагою

$$g(h_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{H}}^2}}\exp\left\{-\frac{h_0^2}{2\sigma_{\text{H}}^2}\right\}, \tag{13}$$

Отримаємо

$$Q_J(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dh_0\ g(h_0)\,Q(\lambda,L;h_0) = \sqrt{\frac{4\nu r\exp(\nu L - rL)}{(\nu+r)^2 - (\nu-r)^2\exp(-2rL)}}\,,\quad r = r(\lambda) = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_{\text{H}}^2}\,. \tag{14}$$

З (14) випливає, що $Q_J(0) = 1$. Далі отримуємо для математичних очікувань:

$$\mathbf{M}[\text{J}] = -\frac{d}{d\lambda}Q_J(\lambda)\big|_{\lambda=0} = \sigma_{\text{H}}^2,\quad \mathbf{M}[\text{J}^2] = \frac{d^2}{d\lambda^2}Q_J(\lambda)\big|_{\lambda=0} = \sigma_{\text{H}}^4\,\frac{-1 + 2\nu L + \nu^2L^2 + \exp(-2\nu L)}{2\nu^2L^2}, \tag{15}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-10

тому дисперсія Δ^2 густини розподілу $f(\eta)$ випадкового функціоналу J дорівнює

$$\Delta^2 = \mathbf{M}[\mathrm{J}^2] - (\mathbf{M}[\mathrm{J}])^2 = (\mathbf{M}[\mathrm{J}])^2 \frac{-1 + 2\nu L + \exp(-2\nu L)}{2\nu^2 L^2}. \tag{16}$$

При $\nu L >> 1$ маємо $\Delta^2 \approx \sigma_{\text{н}}^2 / \nu L$, а при $\nu L << 1$ маємо $\Delta^2 \approx \sigma_{\text{н}}^2$.

Для довільного значення декременту ν густина $f(\eta)$ та функція розподілу $F(\eta)$ при $\eta \to 0$ (флуктуаційна область) прагнуть до нуля швидше, ніж будь-яка ступінь η.

У разі, коли η значно перевищує $\langle\eta\rangle = \sigma_{\text{н}}^2$ (периферійна область), для $f(\eta)$ можна отримати наближений вираз при $\nu L \approx 1$

$$f(\eta) \cong \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\nu L}{\pi\eta\langle\eta\rangle}}\left(1 - \frac{1}{9}\exp(-2\nu L)\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\nu L}{4}\frac{\eta}{\langle\eta\rangle}\right). \tag{17}$$

Для випадку, коли $\nu L >> 1$, з (14) випливає асимптотичний вираз

$$f(\eta) = \sqrt{\frac{\nu L}{\pi}}\frac{\langle\eta\rangle}{\eta}\left[\left(\eta + \langle\eta\rangle\right)^2 - \left(\eta - \langle\eta\rangle\right)^2 \exp\left(-2\nu L\frac{\langle\eta\rangle}{\eta}\right)\right]^{-1/2} \exp\left(-\frac{\nu L}{4}\left[\sqrt{\frac{\eta}{\langle\eta\rangle}} - \sqrt{\frac{\langle\eta\rangle}{\eta}}\right]^2\right), \tag{18}$$

який можна отримати, виділяючи в експоненті $\exp(\nu L - rL)$ формули (14) квадратичну форму щодо нової змінної $r = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_{\text{н}}^2}$ та інтегруючи з застосуванням методу перевалу.

У загальному випадку для отримання інформації про статистичну структуру випадкової величини – функціонала (1) – необхідне залучення чисельних методів.

Числові характеристики імовірнісних властивостей інтегрального квадратичного функціоналу

Оскільки інтегральний функціонал (1) позитивно визначений, густина розподілу ймовірностей $f(\eta)$ випадкової величини J може бути отримана на основі твірної функції $Q_{\mathrm{J}}(\lambda)$, використовуючи зворотне перетворення Лапласа.

Функціонал (1) підпорядковується розподілу типу χ^2. Цей функціонал – узагальнений відносно розподілу χ^2 в тому сенсі, що він визначений на процесу, відліки якого є корельованими. Хоча явно вираз для твірної функції $Q_{\mathrm{J}}(\lambda)$ функціоналу J наведено в (14), чисельні процедури, що виникають при виконанні зворотного перетворення Лапласа, призводять до необхідності здійснення ряду трудноперебірних дій. До них відносяться, зокрема, побудова на λ-площині Рімана розрізів, необхідних для усунення безлічі кореневих розгалужень і пов'язаних з ними неоднозначностей, і подальше інтегрування вздовж зазначених розрізів.

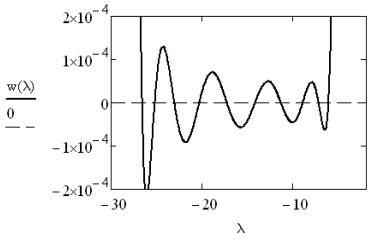
Полюси твірної функції (14) визначаються її знаменником. Нулі функції – це полюси твірної функції (14). У виразі, що міститься під радикалом, є функція

$$w(\lambda) = \frac{\left(\nu + r(\lambda)\right)^2 \exp\left(r(\lambda)L\right) - \left(\nu - r(\lambda)\right)^2 \exp\left(-r(\lambda)L\right)}{4\nu r(\lambda)\exp\left(\nu L\right)}, \quad r(\lambda) = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_{\text{н}}^2}, \tag{19}$$

що є аналітичною функцією аргументу, тому в (14) достатньо вибрати знак «+» у радикалів. Полюси цієї функції визначаються рівнянням $(r - \nu)(r + \nu)^{-1} = \exp(rL)$ відносно змінної r. Порівнюючи його ліву і праву частини цього рівняння, можна зробити висновок, що у точці полюса величина r має бути чисто уявною, $r = ib$, де b – реальна величина. Тому в точці полюса $\lambda = -(\nu^2 + b^2) / 2\nu\sigma_{\text{н}}^2$, тобто $\lambda < 0$, і полюси Q-функції розташовані на негативному промені реальної осі λ-площини. При $\nu L << 1$ точка першого полюса λ_1 (вважаючи праворуч наліво) приблизно дорівнює $\lambda_1 \approx (1 + \nu L) / \sigma_{\text{н}}^2$. Якщо $\nu L >> 1$, то перший полюс тим далі від точки $\lambda = 0$, чим більший декремент ν.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-10

Нижче наведемо залежності для двох випадків (результати отримані в середовищі MathCad). У першій серії буде інтенсивність $\sigma_{\text{H}}^2 = 0.8$ і декремент $\nu = 1.0$. Відповідно, у другій серії результатів розрахунків інтенсивність $\sigma_{\text{H}}^2 = 1.0$ і декремент $\nu = 1.0$.



$$\Lambda 08 := \begin{pmatrix} -6.1317303018313291951 \\ -7.1997991236771874994 \\ -8.9642167118906678458 \\ -11.347596914515556356 \\ -14.191880748881845605 \\ -17.269247539347542327 \\ -20.310112718550727701 \\ -23.036115333355829254 \\ -25.192056026687055827 \\ -26.573714199937030052 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Нулі знаменника ТФ $Q_{\text{J}}(\lambda)$; ліворуч – функція $w(\lambda)$ (19), праворуч – таблиця $\Lambda 08$ перших 10 нулів; параметри: $L = 1$, $\nu = 1.0$, $\sigma_{\text{H}}^2 = 0.8$

На рис. 1 наведено графік знаменника (19) та таблиця $\Lambda 08$ – знайдені перші 10 його нулів (вважаючи праворуч наліво) при $\sigma_{\text{H}}^2 = 0.8$.

Слідуючи [2], після обліку нормування отримаємо наступне факторизаційне уявлення для твірної функції

$$Q_{\text{J}}(\lambda) = \sqrt{\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{2\lambda\sigma_{\text{H}}^2 + \lambda_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda_n}{2\lambda\sigma_{\text{H}}^2 + \lambda_n}}\,. \tag{20}$$

Факторизації твірних функцій відповідає згортка сукупності парціальних густин ймовірностей $\phi_1(\eta), \phi_2(\eta), ..., \phi_N(\eta), ...$. Розглянемо, наприклад, густину, що відповідає множнику з індексом n,

$$\phi_n(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp(\lambda\eta) \sqrt{\frac{\lambda_n}{2\lambda\sigma_{\text{H}}^2 + \lambda_n}}\, d\lambda\,. \tag{21}$$

Хоча в кожному з інтегралів (21) також є коренева особливість, інтеграл (21) береться аналітично і можна скористатися відомим результатом:

$$\phi_n(\eta) = \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{2\pi\sigma_{\text{H}}^2\eta}} \exp\left(-\frac{|\lambda_n|}{2\sigma_{\text{H}}^2}\eta\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{22}$$

і $\phi_n(\eta) = 0$ якщо $\eta \le 0$.

Таким чином, для густини розподілу ймовірностей $f(\eta)$ випадкових значень адитивного функціоналу (1) отримуємо формулу у вигляді згортки нескінченної кратності

$$f(\eta) = (\phi_1 * \phi_2 * \ldots * \phi_N * \ldots)(\eta)\,. \tag{23}$$

Коренева особливість, присутня в ТФ (20), обійдена, оскільки для кожного з співмножників (21) на функціональному рівні виконано зворотне перетворення Лапласа у вигляді (22).

Далі у чисельних розрахунках обмежимося випадком використання $N = 10$ нулів, тобто. замінимо знаменник у (14) поліномом 10-го ступеня. З урахуванням нормування отримаємо наступне факторизаційне уявлення для твірної функції

$$Q_{\text{J}}(\lambda) = \prod_{n=1}^{10} \sqrt{\frac{\lambda_n}{2\lambda\sigma^2 + \lambda_n}}\,, \tag{24}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-10

при цьому згортку (23) зручно здійснювати рекурентно:

$$\phi_{1,2}(\eta) = (\phi_1 * \phi_2)(\eta)\,, \quad \phi_{1,3}(\eta) = (\phi_{1,2} * \phi_3)(\eta)\,, \ldots, f(\eta) = (\phi_{1,9} * \phi_{10})(\eta)\,. \tag{25}$$

З метою контролю одержуваних залежностей у розрахунках з $N = 10$ необхідно їх повторити, але вже з $N = 11$ або $N = 12$, і можна переконатися в тому, що кількість використаних нулів у факторизації (24) є достатньою.

В результаті приходимо до залежностей для густини розподілу, наведеним на рис. 2 (праворуч на ньому – у логарифмічному масштабі).

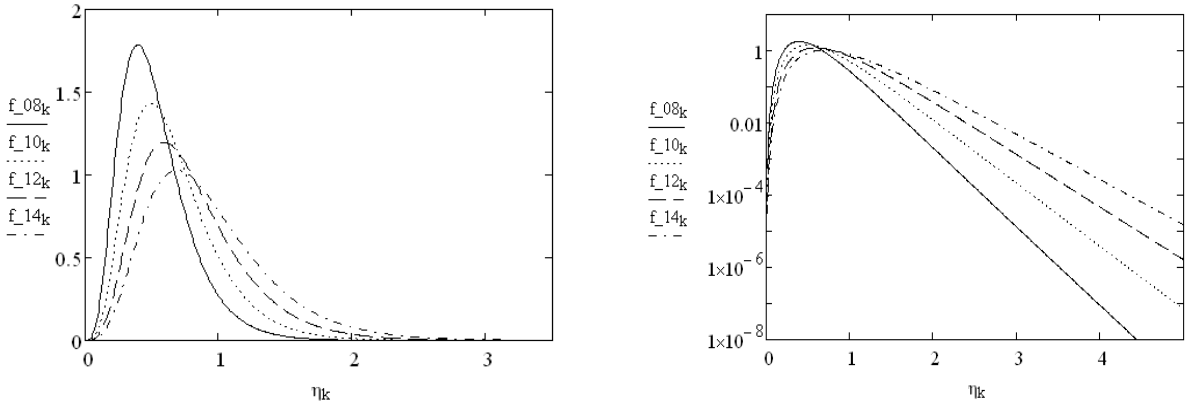


Рис. 2. Густини розподілу $f(\eta)$; (праворуч – у логарифмічному масштабі); параметри: $\nu = 1$, $L = 1$, $\sigma_H^2 = 0.8, 1.0, 1.2, 1.4$

З рис. 2 видно, що всі густини $f(\eta)$ мають експоненційну асимптотику на периферії $\eta >> \langle\eta\rangle$ згідно з (22) і дорівнюють нулю у точці $\eta = 0$, тобто. через позитивну визначеність функціоналу (1) ймовірність події $\{A : J = 0\}$ дорівнює нулю. Зі збільшенням інтенсивності σ_H^2 густини $f(\eta)$ поширюються у бік великих ухилень, при цьому їхній загальний вигляд залишається незмінним.

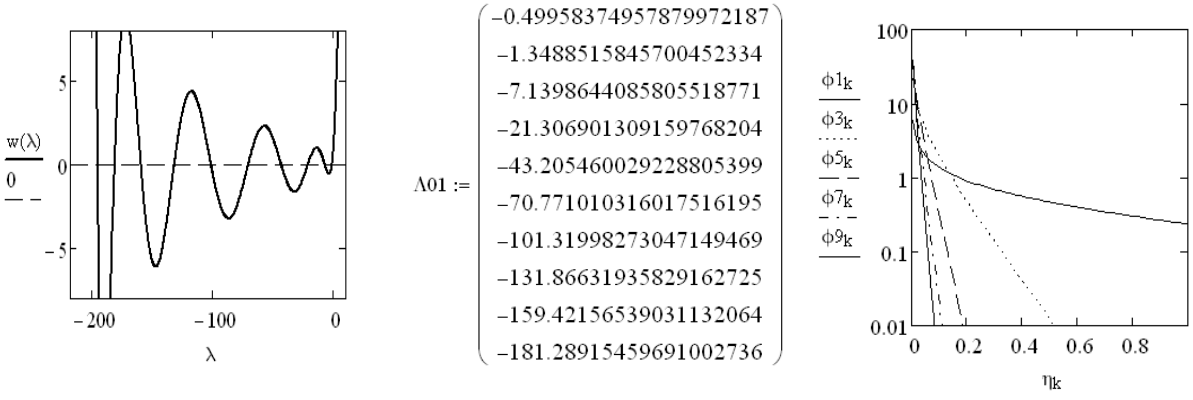


Рис. 3. Нулі знаменника твірної функції $Q_J(\lambda)$; ліворуч – функція $w(\lambda)$ (22), посередині – таблиця $\Lambda 01$ перших 10 нулів; параметри: $L = 1$, $\sigma_H^2 = 1$, $\nu = 1.0$; праворуч – парціальні щільності ймовірностей $\phi_1(\eta), \phi_3(\eta), \phi_5(\eta), \phi_7(\eta), \phi_9(\eta)$

На рис. 3 наводиться друга серія залежностей, в яких фіксовані інтенсивність $\sigma_H^2 = 1.0$ і декремент $\nu = 1.0$. З таблиці нулів $\Lambda 01$ (рис. 3) видно, що інтервали з-поміж них утворюють

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-10

регулярну послідовність, при цьому всі нулі – прості. Проста структура парціальних функцій $\phi_n(\eta)$ (22) зручна для чисельної організації їх кратної згортки згідно (23). Залежності для густини розподілу $f(\eta)$ аналогічні наведеним на рис. 2.

Розрахунки, виконані при різних значень параметра νL, показали, що знайдені залежності мають форму, яка практично збігається з тими, для яких $\nu L = 1$.

Висновки

Таким чином, у роботі викладено алгоритм, застосування якого дозволяє виконати зворотне перетворення Лапласа. Кореневі особливості та пов'язана з цим докладна деталізація контуру інтегрування при виконанні зворотного перетворення обійдені. В алгоритмі чисельні процедури складаються з знаходження нулів дисперсійного рівняння та послідовності згорток власних парціальних функцій, що відповідають власним нулям. Отримані дані дозволяють зробити висновки про ймовірнісні властивості функціоналу (1).

Список використаної літератури

1. Chandrasekhar S. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics*. 1943. 15 (1). 1–89.
2. Feynman Richard P., Hibbs Albert Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw Hill. 1965. 365 p. (ISBN 0-07-020650-3)
3. Скороход А. В. Лекції з теорії випадкових процесів. К.: Либідь, 1990. 168 с.
4. Rytov S.M. Introduction to statistical radiophysics. Nauka Press, 1966. 404 p.
5. Mazmanishvili A.S. Path integration as a method for solving physical problems. K.: Naukova Dumka Press. 1997. 224 p.
6. Helstrom C.W. Quantum detection and estimation theory. *J. Stat. Phys.* 1969. 1. 231–252. doi: 10.1007/BF01007479.
7. Laskin N.V., Mazmanishvili A.S., Nasonov N.N., Shulga N.F. On the theory of the Landau-Pomeranchuk effect of suppression of the radiation of relativistic electrons in amorphous and crystalline media. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 89, No. 3(9), pp. 763–780, 1985.

References

1. Chandrasekhar, S. (1943). Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics*. 15 (1). 1–89 [in English]
2. Feynman, Richard P., & Hibbs, Albert (1965). Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw Hill. (ISBN 0-07-020650-3) [in English]
3. Skorokhod, A. V. (1990). Lektsii z teorii vypadkovykh protsesiv [Lectures on the theory of random processes]. K.: Lybid. [in Ukrainian]
4. Rytov, S.M. (1966). Introduction to statistical radiophysics. Nauka Press. [in English]
5. Mazmanishvili, A.S. (1997). Path integration as a method for solving physical problems. K.: Naukova Dumka Press. [in English]
6. Helstrom, C.W. (1969). Quantum detection and estimation theory. *J. Stat. Phys.* 1:231–252. doi: 10.1007/BF01007479 [in English]
7. Laskin, N.V., Mazmanishvili, A.S., Nasonov, N.N., & Shulga, N.F. (1985). On the theory of the Landau-Pomeranchuk effect of suppression of the radiation of relativistic electrons in amorphous and crystalline media. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 89, 3(9), 763–780 [in English]

Мазманішвілі Олександр Сергійович – д.ф.-м.н., професор, старший науковий співробітник Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут». E-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

Mazmanishvili Oleksandr Serhiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Senior Researcher at the National Science Center "Kharkiv Physical-Technical Institute". E-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-10

УДК 624.01:51.001:624.131

І.М. МИРОНЕНКО, В.В. ЛИТВИНЕНКО
Одеський національний морський університет
В.К. ЄГУПОВ
Інститут геофізики імені С.І. Субботіна НАН України

МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ БЕТОНІВ ПРИ ЇХ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Складні навантаження, під якими розуміють сукупні явища, що виникають під час зіткненні тіл, що рухаються, дуже часто зустрічаються в інженерній практиці під час будівництва та експлуатації, як окремих конструкцій, так і цілих споруд. При цьому складні навантаження можуть бути враховані при проектуванні, наприклад конструкції фундаментів ковальських молотів і тиску вальцьових пресів, оголовки забивних паль тощо, а також можуть бути пов'язані з випадковістю, наприклад, випадкове зіткнення якого-небудь тіла (транспорту, льоду , каміння та ін.) з елементами конструкцій або споруд.

Одночасно зі складною дією (запланованою або випадковою) матеріал конструкції сприймає навантаження, пов'язані зі зміною температурно-вологісних умов експлуатації. Багаторазові заморожування та розморожування, насичення вологою, експлуатація при підвищених температурах призводять до зміни структури матеріалу та викликають зменшення терміну експлуатації. Сумарна дія імпульсного, техногенного та екологічного впливів може призвести до передчасного руйнування конструкцій. Імовірність цього ґрунтується на встановленому явищі, що в умовах складної дії матеріал руйнується за більш низьких напружень у порівнянні зі статичними навантаженнями.

На думку багатьох фахівців, бетон є грубогетерогеним матеріалом з поліструктурною будовою. Об'єктивними структурними параметрами таких матеріалів слід вважати технологічні тріщини та залишкові деформації, що виникають у період отримання самого матеріалу та його оформлення у конструктивні форми при подальшому твердінні. Основною причиною руйнування матеріалів під дією складного та екологічного впливу є незворотне зростання технологічних тріщин до тріщин руйнування або магістральних. У свою чергу, кінетика трансформації технологічних тріщин в експлуатаційні з їх подальшим розвитком значною мірою залежить від характеру розподілу початкових недосконалостей. Останні визначаються початковим складом та технологічними умовами отримання матеріалу та виробів з нього. Таким чином, виявлення механізмів утворення технологічних тріщин з метою регулювання характеру їх розподілу на різних структурних рівнях для підвищення стійкості бетонів в умовах складного навантаження при впливі навколишнього середовища є своєчасним та актуальним завданням. Особливо слід підкреслити значення досліджень впливу складних навантажень на руйнування конструкцій та споруд з огляду на значні катастрофи, спричинені землетрусами, вибухами технологічного та технічного обладнання тощо.

У зв'язку з цим вирішення проблеми підвищення стійкості бетонів від складних навантажень з урахуванням несприятливого впливу навколишнього середовища є виправданим та практично необхідним.

Ключові слова: механічні властивості, бетон, складне навантаження, нелінійне середовище, модель.

I.M. MYRONENKO, V.V. LYTVYNENKO
Odessa National Maritime University
V.K. IEGUPOV
S.I. Subbotin Institute of Geophysics of the National Academy of Sciences of Ukraine

MECHANICAL PROPERTIES OF CONCRETE UNDER THEIR COMPLEX LOAD

Complex loads, understood as cumulative phenomena arising from the collision of moving bodies, are very often encountered in engineering practice during construction and operation of both individual structures and entire buildings. In this case, complex loads can be taken into account in the design, for example, the design of foundations of forging hammers and pressure of roll presses, heads of driven piles, etc., and can also be associated with chance, for example, the accidental collision of some body (transport, ice, stones, etc.) with elements of structures or buildings.

Simultaneously with the complex action (planned or accidental), the material of the structure perceives loads associated with changes in temperature and humidity conditions of operation. Repeated freezing and thawing, moisture saturation, operation at elevated temperatures lead to changes in material structure and cause reduction of service life. The combined effect of impulse, anthropogenic and environmental influences can lead to premature destruction of structures. The probability of this is based on the established phenomenon that under conditions of complex action the material fails at lower stresses compared to static loads.

According to many experts, concrete is a roughly heterogeneous material with a polystructural structure. The objective structural parameters of such materials should be considered as technological cracks and residual deformations, which

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-11

occur during the period of obtaining the material itself and its formation into structural forms during subsequent curing. The main cause of materials destruction under the action of complex and environmental impact is irreversible growth of technological cracks to fracture cracks or backbone cracks. In turn, the kinetics of transformation of technological cracks into operational cracks with their subsequent development depends to a large extent on the nature of the distribution of initial imperfections. The latter are determined by the initial composition and technological conditions of obtaining the material and products from it. Thus, revealing the mechanisms of formation of technological cracks in order to regulate the nature of their distribution at different structural levels to improve the durability of concrete under conditions of complex loading under the influence of the environment is a timely and relevant task. Especially it is necessary to emphasize the importance of studies of the influence of complex loads on the destruction of structures and facilities, taking into account significant disasters caused by earthquakes, explosions of technological and technical equipment, etc.

In this connection, the solution of the problem of increasing the resistance of concrete against complex loads, taking into account the unfavorable effects of the environment, is justified and practically necessary.

Key words: mechanical properties, concrete, complex load, nonlinear environment, model.

Постановка проблеми

Механічні характеристики властивостей будівельних матеріалів, які впливають на їх напружено-деформований стан, що виникає від дії зовнішніх навантажень є основними параметрами рівнянь стану. Вони зазвичай визначаються експериментальними дослідженнями макроскопічної поведінки матеріалів, тобто феноменологічно. Рівняння стану разом з кінематичними і динамічними співвідношеннями створюють повну систему рівнянь, необхідну для вирішення прикладних задач. В зв'язку з цим побудова найбільш повних нових і обґрунтування сучасних моделей для різних середовищ, що деформуються залежить від накопичення про них експериментальних даних. На підставі експериментальних даних розглядається взаємозв'язок основних механічних параметрів будівельних матеріалів, які виникають в умовах складного навантаження споруд, що експлуатуються.

В подальшому будемо використовувати інваріанти тензора напружень і тензора деформацій.

Інваріанти тензора напружень [1, с. 58–60].

$$\sigma_o = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\Psi = \operatorname{arctg}\left[\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)}\right]; \quad -\frac{\pi}{6} < \Psi < \frac{\pi}{6};$$

Ψ – кут виду напруженного стану; зв'язаний з параметром Лоде співвідношенням

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \sqrt{3}\,\operatorname{tg}\Psi$$

$\sigma_i (i=1,2,3)$ – головні значення тензору напружень

Інваріанти тензора деформації

$$\gamma_o = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

$$\overline{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (\gamma_2 - \gamma_3)^2 + (\gamma_3 - \gamma_1)^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\gamma}{\overline{\gamma}^3}\right) = \operatorname{arcctg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3}{\gamma_1 - \gamma_3}\right]$$

$$-\frac{\pi}{6} < \gamma < \frac{\pi}{6}$$

$\gamma_i (i=1,2,3)$– головні значення тензора деформації

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-11

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Бетон є складним багатофазним і нелінійним середовищем, властивості якого залежать від багатьох внутрішніх і зовнішніх факторів. При побудові моделей необхідно враховувати особливості їх механічних властивостей, до яких відноситься тріщинуватість, неоднорідність, анізотропія, усадка, пластичність і в'язкість. Для визначення властивостей бетону було виконано по різним методикам багато експериментів [2; 3; 4; 5]. Але експерименти, оброблені з використанням теорії кінцевих деформацій авторам невідомі, тому особливості деформування бетонів при складному напруженому стані будуть розглянуті тільки при малих деформаціях.

Мета дослідження

Метою дослідження є вивчення особливостей деформування бетонів при складному напруженому стані.

Виклад основного матеріалу дослідження

Основною особливістю бетонів є нелінійна залежність деформацій від напруженого стану. Але причина виникнення нелінійності пов'язана, в основному, з тріщиноутворенням. Розглянемо це явище більш детально з позицій другої групи граничного стану на підставі робіт [4; 6; 7, с. 160].

Структуру бетону формує великий заповнювач, розчина частина і пустоти, які виникають після випаровування води. В процесі твердіння бетону між заповнювачем і цементним каменем, чи по цементному каменю виникають технологічні тріщини, які визивають внутрішні напруження [8, с. 64; 9; 10; 11].

При осьовому навантаженні циліндричного зразка, який виготовлено із бетону до деякого рівня напружень зазначеного через $f^{o}_{c\,k}$ у ньому не спостерігається поява нових мікротріщин. При цьому відношення поперечних деформацій до продовжних, яке фіксується коефіцієнтом ν не збільшується, тобто здійснюється зменшення об'єму. З ростом навантаження поступово прискорюється розвиток мікротріщин, поперечні деформації починають рости швидше продовжних, тобто зменшення об'єму затримується, а потім починають зростати. Рівень напружень, якому відповідає мінімальний об'єм зразка зазначено як $f^{\nu}_{c\,k}$. Величина $f^{\nu}_{c\,k}$ характеризує границю порушення сплощності бетону за рахунок появи в ньому мікроруйнувань. В інтервалі між границями $f^{o}_{c\,k}$ і $f^{\nu}_{c\,k}$ в бетоні виникають пластичні деформації.

Остаткові деформації у бетоні, що виникають при напруженнях вище границі $f^{\nu}_{c\,k}$, супроводжуються спочатку незворотними процесами мікроруйнування, потім переростають у макроскопічні руйнування з порушенням сплошності у бетоні. Тому остаткові деформації, які з'являються при напруженнях вище рівня $f^{\nu}_{c\,k}$ називають пластичними деформаціями другого роду чи псевдо пластичними деформаціями.

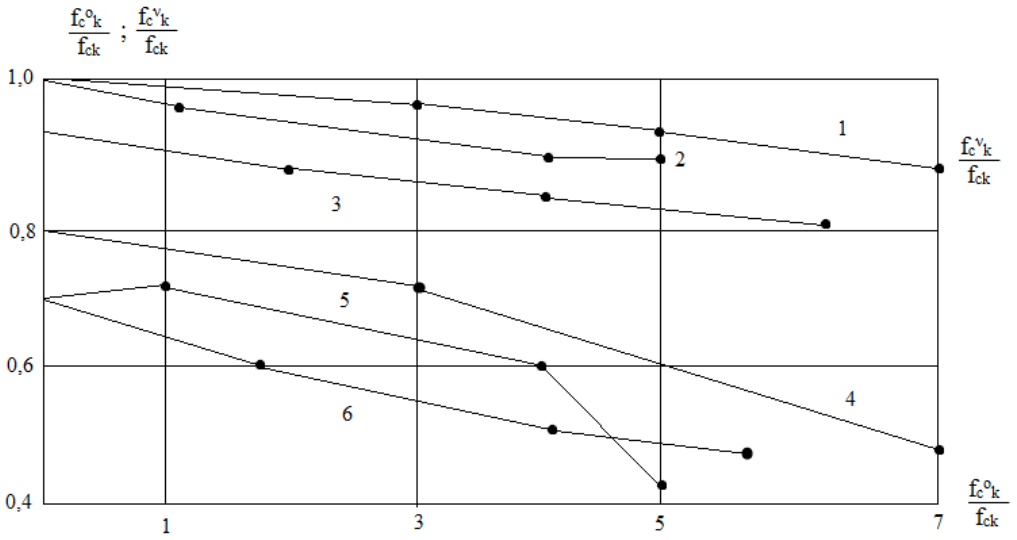
В [6] показано, що границі рівнів напруження $f^{o}_{c\,k}$ і $f^{\nu}_{c\,k}$ залежать від багатьох факторів: від співвідношення w/c, від складу заповнювачем, від цементно-піщаного співвідношення, від зчеплення цементного каменю із заповнювачем. На рисунку 1 наведені залежності $f^{o}_{c\,k}$ і $f^{\nu}_{c\,k}$ від складу бетону [6].

Експериментальні дані свідчать, що підвищення складу крупного заповнювача знижує значення рівнів напружень $f^{o}_{c\,k}$ і $f^{\nu}_{c\,k}$. Також встановлено, що для крупнозернистих тяжких бетонів границі $f^{o}_{c\,k}$ і $f^{\nu}_{c\,k}$ підвищуються зі збільшенням призменної міцності.

Неоднорідна структура бетону сприяє виникненню тріщин і знижує його здатність опору зовнішнім впливам. При всебічному стиску гідростатичний тиск не тільки затримує появу тріщин, але і сприяє їх закриттю.

У бетоні до границі напруженого стану $f^{o}_{c\,k}$ деформації вважаються упругими. При подальшому активному навантаженні вони складають лише частину загальних деформацій. Пружні властивості бетону як ізотропного середовища характеризується початковим модулем пружності E_o і коефіцієнтом Пуасона ν_o.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-11



ср w/c

1. 1 : 4 : x : 0,8
2. 1 : 2 : x : 0,54
3. 1 : 3 : x : 0,65
4. 1 : 4 : x : 0,61
5. 1 : 2 : x : 0,54
6. 1 : 3 : x : 0,65

x – щебінь

Рис. 1. Значення $f_{c\,k}^{o}$ і $f_{c\,k}^{v}$ при різному складі бетону

Модуль пружності, визначений при розтягу, наближається по значенню до модулю пружності визначеному при стиску. Він значно збільшується на початку виготовлення і не залежить від розмірів зразків. Найбільший вплив на нього мають умови його твердіння і дії підвищених та понижених температур.

При малоциклових повторних впливах, коли напруження не перевищує величини f_{ckj}, яка є метою появи мікротріщин, початковий модуль пружності не змінюється. Величина модуля пружності значним чином залежить від міцності бетону. Вплив цих і інших факторів на значення модуля пружності надані і узагальнені в [6].

Зв'язок між повздовжніми і поперечними деформаціями у суцільних середовищах визначається через коефіцієнт Пуасона. При пружних деформаціях для бетону він приймає початкове значення рівним ν_o=0,15…0,2. При розтягу зі збільшенням рівня напружень він зменшується. При стиску він збільшується до 0,5 а іноді перевищує цю величину, що для суцільних середовищ теоретично неможливе. Практично це викликано тим, що при інтенсивному навантаженні зразків бетону виникає процес тріщиноутворення і порушення сплошності. Фактично об'єм зразка збільшується не за рахунок збільшення об'єму його матеріалу, а за рахунок утворених пустот. Тому процес мікроруйнувань в бетоні характеризується зміною ряду параметрів, одним з яких є коефіцієнт поперечної деформації ν. Коефіцієнт ν спочатку зі збільшенням навантаження був постійним, потім з рівня напружень 0,6 f_{ck} він почав зростати. Це пов'язано зі швидким розвитком тріщин і з інтенсивним збільшенням об'єму.

Найбільш вивченим для бетону є процес його руйнування при стиску. Після досягнення межі $f_{c\,k}^{v}$, яка відповідає ν=0,5, відбувається інтенсивне утворення повздовжніх тріщин, середнє значення міцності на розтяг в поперечному напрямку збільшується до f_{ctk} і здійснюється руйнування від подолання спротиву відриву.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-11

В [4] позначено, що у механізмі руйнування бетону можна виділити два типи руйнування: відривний і зсувний. При складному напруженому стані механізми руйнування бетону мають змішаний відривно-зсувний характер. Утворення і розвиток магістральних тріщин руйнування можуть включати і об'єднувати різноманітні локальні тріщини відриву і зсуву.

Макроскопічна картина руйнування бетону від відриву і зсуву знаходить експериментальне підтвердження, але це представлення про механізм руйнування не є остаточно встановленим. Феноменологічні теорії міцності для випадків складного напруженого стану повинні задовольнити основним положенням механіки, задовольняти практичним вимогам і головне, їх результати повинні задовільно погоджуватися з експериментальними даними.

Висновки

Бетон відноситься до квазікрихких матеріалів і займає проміжне положення між пластичними та крихкими представниками. Тому при його складному напруженому стані навряд чи можливе руйнування тільки від нормальних напружень (відрив) і тільки від дотичних (зсув). Очевидно, починаючи з якогось рівня дотичні напруження здійснюють розрихлення бетону зі збільшенням його об'єму, а розповсюдження тріщин здійснюється під дією нормальних напружень.

Підмічені особливості дозволяють вважати, що деформування бетону як однорідного, і спочатку, ізотропного середовища буде найбільш повно враховуватися теорією пластичної течії і зміцненням. Вона дозволяє через функцію навантаження врахувати вплив на напружено-деформований стан бетону при складному навантаженні трьох інваріантів $Б_о$, Б і Ψ, необхідність яких підтверджується експериментальними даними.

Деформаційні теорії дають задовільні результати тільки при простому навантаженні, чи при окремому випадку складного навантаження, коли не виникає повороту головних осей тензора напружень.

Список використаної літератури

1. Гришин В. А., Дорофєєв В. С. Розрахунок протизсувних споруд. Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. 215 с.
2. Гришин В. А., Дорофєєв В. С. Нелінійні моделі конструкцій, що взаємодіють із ґрунтовим середовищем / монографія. Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2006. 242 с.
3. Гришин В. А., Дорофєєв В. С. Деякі нелінійні моделі ґрунтового середовища. Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2007. 309 с.
4. Кривенко П. В., Пушкарьова К. К., Кочевих М. О. Заповнювачі для бетону. К.: ФАДА ЛТД, 2001. 399 с.
5. Фиц С. Wpływ ilości cementu na wytrzymałość bromu na uderzenie. *Вісник.* №8. Одеса: ОДАБА, 2002. С. 202–208.
6. Владіміров В. А. Нелінійні хвильові структури в моделях середовищ, що релаксуютъ. Автореф. дис. доктора фіз-мат. наук (10.04.01). Одеса, 2000. 35 с.
7. Дорофєєв В. С., Мишутин О. В. Підвищення довговічності бетону тонкостінних гідротехнічних споруд за рахунок застосування комплексних модифікаторів. *Вісник ОДАБА*. В. 27. Одеса: Зовнішрекламсервіс. 2007. С. 160-164.
8. Вировий В. М., Дорофєєв В. С., Суханов В. Г. Моделювання конструкцій як складних систем. *Вісник ОДАБА*. В.28. Одеса: Зовнішрекламсервіс: 2007. С. 64–70.
9. Вировий В. М., Дорофєєв В. С., Макарова С. С., Абакумов С. А. Спосіб виявлення тріщин у бетонних та залізобетонних конструкціях на неорганічному в'яжучому. Позитивне рішення №5008907/93 (059304) от 03.07.91.
10. Гришин В. А., Дорофєєв В. С. Нелінійна динаміка конструкцій, що взаємодіють з деформованим середовищем. Одеса, Астропрінт, 2000.136 с.
11. Соломатов В. І., Вировий В. М., Дорофєєв В. С. Основи композиційних будівельних матеріалів. Харків: ХІНГХ, 1990. 52 с.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-11

References

1. Hryshyn, V.A., & Dorofieiev, V.S. (2009). *Rozrakhunok protyzsuvnykh sporud [Calculation of anti-slide structures].* Odesa: Zovnishreklamservis. 215 s. [in Ukrainian]
2. Hryshyn, V.A., & Dorofieiev, V.S. (2006). *Neliniini modeli konstruktsii, shcho vzaiemodiiut iz gruntovym seredovyshchem [Nonlinear models of structures interacting with the soil environment].* Odesa: Zovnishreklamservis. 242 s. [in Ukrainian]
3. Hryshyn, V.A., & Dorofieiev, V.S. (2007). *Deiaki neliniini modeli gruntovoho seredovyshcha [Some nonlinear models of the soil environment]*. Odesa: Zovnishreklamservis, 309 s. [in Ukrainian]
4. Kryvenko, P.V., Pushkarova, K.K., & Kochevykh, M.O. (2001). *Zapovniuvachi dlia betonu [Aggregates for concrete].* K.: FADA LTD. 399 s. [in Ukrainian]
5. Fyts, S. (2002). Wpływ ilości cementu na wytrzymałość bromu na uderzenie [The effect of the amount of cement on the strength of bromu on impact]. *Visnyk*. 8. Odesa: ODABA, S. 202–208 [in Polish]
6. Vladimirov, V.A. (2000). Neliniini khvylovi struktury v modeliakh seredovyshch, shcho relaksuiut [Nonlinear wave structures in models of relaxing media]. *Extended abstract of doctor's thesis*. Odesa. 35 s. [in Ukrainian]
7. Dorofieiev, V.S., & Myshutyn, O.V. (2007). Pidvyshchennia dovhovichnosti betonu tonkostinnykh hidrotekhnichnykh sporud za rakhunok zastosuvannia kompleksnykh modyfikatoriv [Increasing the durability of concrete of thin-walled hydraulic structures due to the use of complex modifiers]. *Visnyk ODABA*. 27. Odesa: Zovnishreklamservis. S. 160–164 [in Ukrainian]
8. Vyrovyi, V.M., Dorofieiev, V.S., & Sukhanov, V.H. (2007). Modeliuvannia konstruktsii yak skladnykh system [Modeling of structures as complex systems]. *Visnyk ODABA*. V.28. Odesa: Zovnishreklamservis: S. 64–70 [in Ukrainian]
9. Vyrovyi, V.M., Dorofieiev, V.S., Makarova, S.S., & Abakumov, S.A. (1991). Sposib vyiavlennia trishchyn u betonnykh ta zalizobetonnykh konstruktsiiakh na neorhanichnomu viazhuchomu. Pozytyvne rishennia № 5008907/93 (059304) ot 03.07.91 [The method of detecting cracks in concrete and reinforced concrete structures using an inorganic binder. Positive decision No. 5008907/93 (059304) dated 07.03.91] [in Ukrainian]
10. Hryshyn, V.A., & Dorofieiev, V.S. (2000). *Neliniina dynamika konstruktsii, shcho vzaiemodiiut z deformovanym seredovyshchem [Nonlinear dynamics of structures interacting with a deformed environment].* Odesa, Astroprint. 136 s. [in Ukrainian]
11. Solomatov, V.I., Vyrovyi, V.M., & Dorofieiev, V.S. (1990). *Osnovy kompozytsiinykh budivelnykh materialiv [Basics of composite building materials].* Kharkiv: KhINHKh. 52 s. [in Ukrainian]

Мироненко Ігор Миколайович – к.т.н., доцент кафедри цивільної інженерії та архітектури Одеського національного морського університету. E-mail: igmir1510@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5322-9859.

Литвиненко Вікторія Вікторівна – старший викладач кафедри морські та річкові порти, водні шляхи та їх технічна експлуатація Одеського національного морського університету. E-mail: litviktory0102@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0715-5190.

Єгупов Вячеслав Костянтинович – к.т.н., науковий співробітник Інституту геофізики імені С. І. Субботіна НАН України. E-mail: slava.yegupov@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5093-6948.

Myronenko Ihor Mykolayovych – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer at the Department of Civil Engineering and Architecture of the Odessa National Maritime University. E-mail: igmir1510@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5322-9859.

Lytvynenko Viktoriya Viktorivna – Assistant Professor at the Department of Sea and River Ports, Waterways and Their Technical Operation of Odessa National Maritime University. E-mail: litviktory0102@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0715-5190.

Iegupov Viacheslav Kostiantynovich – Candidate of Technical Sciences (PhD), Researcher at the S. I. Subbotin Institute of Geophysics, National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: slava.yegupov@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5093-6948.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-11

УДК 004.93

Д.В. МОСЬПАН, О.О. ЮРКО, А.Л. ПЕРЕКРЕСТ
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ РУХОМОГО ОБ'ЄКТА ЗА ПОСЛІДОВНІСТЮ ВІДЕОЗОБРАЖЕНЬ ЗАСОБАМИ LABVIEW

При проведенні фізичних експериментів, дослідних робіт та автоматизації процесів на виробництві виникає необхідність слідкування за рухомим об'єктом в реальному часі з метою визначення кінематичних параметрів руху: координат в заданий момент часу, траєкторії, миттєвої швидкості та прискорення. У попередній роботі авторами був розроблений віртуальний прилад для аналізу відеозображень з метою визначення кінематичних характеристик рухомих об'єктів за допомогою інструментів машинного зору Vision and Motion програмного забезпечення Labview. При слідкуванні за об'єктом, що рухається повільно, у зв'язку з піксельною дискретизацією поля зору виникає ефект руху «ривками», тобто об'єкт не змінює положення протягом декількох кадрів, а потім відбувається зсув на 1 піксель. Це спричиняє імпульсний характер швидкості і спотворює реальні значення даного параметра. Для часткового усунення даного ефекту була застосована кусково-лінійна апроксимація координатних залежностей переміщення об'єкта з наступним усередненням отриманих значень швидкості. При цьому вдалося зменшити відносну похибку до 10%, але залишився стрибкоподібний характер зміни швидкості відносно середнього значення. Це, в свою чергу, при подальшому аналізі спричиняє появу знакозмінного прискорення навіть при рівномірному русі, що спотворює розраховані кінематичні параметри руху об'єкта.

У роботі було удосконалено віртуальний прилад для аналізу відеозображень для підвищення точності визначення кінематичних характеристик рухомих об'єктів за допомогою програмного забезпечення Labview і були отримані наступні результати. При рівномірному та рівноприскореному прямолінійному русі найкращі результати при аналізі даних дає попередня поліноміальна апроксимація координат переміщення об'єкта. При цьому похибки з визначення кінематичних характеристик не перевищують 0,5%. При криволінійній траєкторії руху, доцільно не використовувати апроксимації координат переміщення об'єкта, а застосувати усереднення отриманих значень швидкості. При розмірі об'єкта у 100 пікселів можна рекомендувати ширину вікна не менше за 30 пікселів. Похибка визначення швидкості буде залежати від кривизни траєкторії на величини самої швидкості руху об'єкта.

Ключові слова: машинний зір, кінематичні характеристики, слідкування за об'єктом, поліноміальна апроксимація, віртуальний прилад.

D.V. MOSPAN, O.O. YURKO, A.L. PEREKREST
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

DETERMINING THE SPEED OF A MOVING OBJECT BY SEQUENCE OF VIDEO IMAGES USING LABVIEW

When conducting physical experiments, research work and automation of industrial processes, there is a need to monitor a moving object in real time in order to determine the kinematic parameters of movement: coordinates at a given point in time, trajectory, instantaneous speed and acceleration. In previous work, the authors developed a virtual instrument for analyzing video images to determine the kinematic characteristics of moving objects using the Vision and Motion computer vision tools of Labview software. When tracking a slowly moving object, due to the pixel sampling of the field of view, the effect of "jerky" movement occurs, that is, the object does not change position for several frames, and then a shift of 1 pixel occurs. This is the reason for the impulse nature of the speed and distorts the real values of this parameter. To partially eliminate this effect, piecewise linear approximation of the coordinate dependencies of the object's movement was used, followed by averaging of the obtained velocity values. In this case, it was possible to reduce the relative error to 10%, but the abrupt nature of the change in speed relative to the average value remained. This, in turn, during further analysis entails the appearance of sign acceleration even with uniform motion, which distorts the calculated kinematic parameters of the object's movement.

In this work, a virtual instrument for analyzing video images was improved to increase the accuracy of determining the kinematic characteristics of moving objects using Labview software and the following results were obtained. With uniform and uniformly accelerated rectilinear motion, the best results in data analysis are obtained by a preliminary polynomial approximation of the coordinates of the object's movement. In this case, errors in determining kinematic characteristics do not exceed 0.5%. With a curvilinear trajectory of movement, it is advisable not to use an approximation of the coordinates of the object's movement, but to use the averaging of the obtained speed values. If the object size is 100 pixels, we can recommend a window width of at least 30 pixels. The error in determining the speed will depend on the curvature of the trajectory and the magnitude of the speed of the object itself.

Key words: computer vision, kinematic characteristics, object tracking, polynomial approximation, virtual device.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-12

Постановка проблеми

При проведенні фізичних експериментів, дослідних робіт та автоматизації процесів на виробництві виникає необхідність слідкування за рухомим об'єктом в реальному часі з метою визначення кінематичних параметрів руху: координат в заданий момент часу, траєкторії, миттєвої швидкості та прискорення [1].

У попередній роботі [2] авторами був розроблений віртуальний прилад для аналізу відеозображень [3, 4] з метою визначення кінематичних характеристик рухомих об'єктів за допомогою інструментів машинного зору Vision and Motion [5] програмного забезпечення Labview [6, 7]. При слідкуванні за об'єктом, що рухається повільно, у зв'язку з піксельною дискретизацією поля зору виникає ефект руху «ривками», тобто об'єкт не змінює положення на протязі декількох кадрів, а потім відбувається зсув на 1 піксель. Це спричиняє імпульсний характер швидкості і спотворює реальні значення даного параметра.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для часткового усунення ефекту описаного в роботі [2] була застосована кусково-лінійна апроксимація координатних залежностей переміщення об'єкта з наступним усередненням отриманих значень швидкості. При цьому вдалося зменшити відносну похибку до 10%, але залишився стрибкоподібний характер зміни швидкості відносно середнього значення. Це, в свою чергу, при подальшому аналізі спричиняє появу знакозмінного прискорення навіть при рівномірному руху, що спотворює розраховані кінематичні параметри руху об'єкта.

Отже виникає необхідність альтернативного варіанту обробки координат, отриманих в результаті слідкування за рухомим об'єктом для зменшення похибки при визначенні швидкості.

Мета дослідження

Удосконалення віртуального приладу для аналізу відео зображень для підвищення точності визначення кінематичних характеристик рухомих об'єктів за допомогою програмного забезпечення Labview.

Викладення основного матеріалу дослідження

Для поліноміальної апроксимації було використано ВП General Polynomial Fit з використанням методу найменших квадратів та порядком поліному 2.

В результаті було отримано коефіцієнти поліному та графіки залежності (рис. 1) за кожною складовою переміщення:

$$x(i) = 52{,}9892 + 3{,}23307 \cdot 10^{-6} \cdot i + 0{,}00125003 \cdot i^2,$$

$$y(i) = 50{,}9892 + 3{,}23307 \cdot 10^{-6} \cdot i + 0{,}00125003 \cdot i^2.$$

Значення швидкості в залежності від номера кадра i розраховується відповідно до:

$$v(i) = \sqrt{\left(x(i) - x(i-1)\right)^2 + \left(y(i) - y(i-1)\right)^2}.$$

Для оцінки точності визначення швидкості було розраховано відносні похибки лінійної апроксимації з усередненням значень та поліноміальної апроксимації. Відповідні графіки наведені на рис. 2. Після початку руху за межами лінійного розміру корпусу об'єкта похибка лінійного усереднення знаходиться в межах 10%, а похибка поліноміальної апроксимації не перевищує 0,5%. Отже поліноміальна апроксимація на окремих ділянках дає покращення точності у 20 разів при визначенні швидкості.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-12

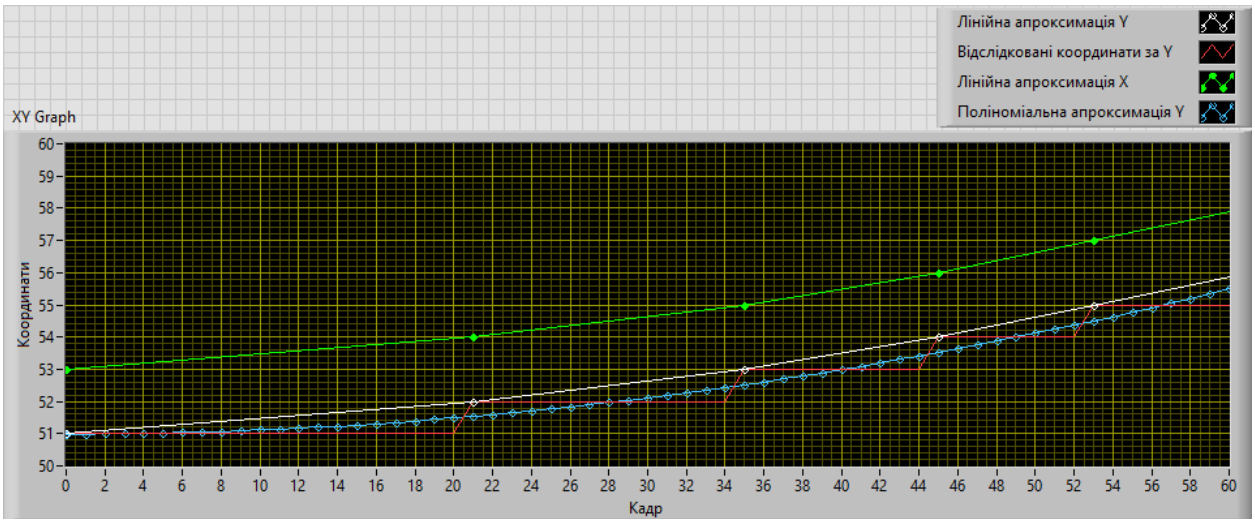


Рис. 1. Порівняння результатів лінійної та поліноміальної апроксимації



Рис. 2. Відносна похибка визначення швидкості

У випадку лінійного прямолінійного руху добре працюють як лінійна, так і поліноміальна апроксимації (рис. 3). Тому. як більш універсальну, доцільно застосовувати поліноміальну апроксимацію руху.

Створення тестових відеофайлів з моделюванням руху об'єкта з заданими кінематичними параметрами доцільно розробити відповідний віртуальний прилад.

Для створення відеозапису з рухом об'єкту на площині використаємо палітру інструментів AVI з розділу Vision and Motion → Vision Utilities → Files → AVI. ВП AVI2 Create дозволяє створити новий відео файл в форматі avi. До входу AVI Path підключимо Path Constant із вказаним шляхом до місця зберігання файлу. Оскільки більшість бюджетних варіантів веб камер мають частоту 30 кадрів/с, відповідне значення подамо на вхід Frames Per Second [8].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-12

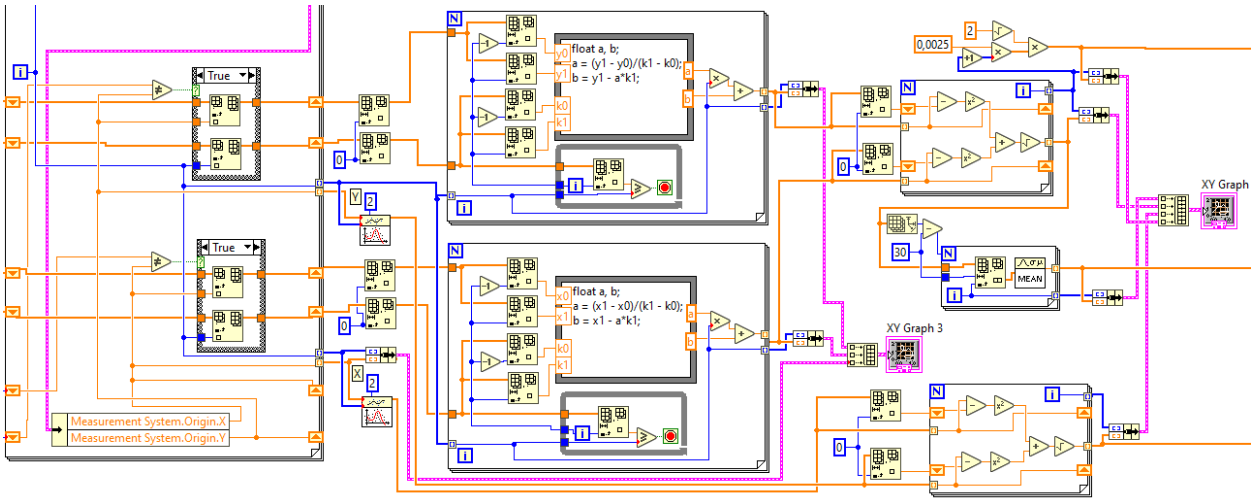


Рис. 3. Фрагмент блок схеми реалізації лінійної та поліноміальної апроксимації

Послідовність зображень об'єкта будемо формувати в циклі For Loop. Кількість ітерацій циклу буде визначати кількість кадрів відео файлу. В нашому випадку задамо N = 600. Отже тривалість відео запису буде складати 600/30 = = 20 с. Також кількість кадрів обмежує максимально допустимий розмір створюваного відеофайлу – 2 ГБ.

Приймемо робоче поле спостереження 1000×1000 пікселів. При формуванні кольорового 32-бітного зображення на кожен піксель (8 Б, тобто 256 значень на кожен базовий колір), отримуємо розмір одного кадру 32×1000×1000 = 32 МБ. Але при зберіганні окремого кадра у форматі bmp або tiff, розмір зображення стискається у 8 разів, тобто складає 3 МБ. З урахуванням загальної кількості кадрів маємо розмір відеофайла: 3 МБ × 600 = 1,8 ГБ, що є менше за встановлене обмеження.

Для створення зображення (кадру) Image та виділення для нього області пам'яті скористаємося ВП Create VI. Оскільки потрібне кольорове зображення, то обираємо його тип – RGB (U32).

Необхідне зображення формуємо у вигляді двовимірної масиву даних розміром 1000×1000, елементами якого є константи кольору Color Box Constant. Спочатку формуємо матрицю фонового зображення білого кольору. Об'єктом спостереження буде червоний квадрат розміром 100×100 пікселів. В залежності від його положення за координатою X, формуються відразу всі рядки з зображенням об'єкту (прямокутний масив 1000×100 пікселів білого кольору з накладеним червоним квадратом). Потім у фоновому зображенні в залежності від положення за координатою Y замінюються необхідні рядки на створений прямокутний масив із зображенням об'єкта. Координати верхнього лівого кута об'єкта визначаються розрахунками за рівнянням обраної траєкторії руху і подаються в якості індексів рядків та стовбців до інструментів Replace Array Subset, як показано на рис. 4.

ВП ArrayToColorImage зі створеної двовимірної матриці чисел створює кольорове зображення кадру типу Image. Для можливості перегляду процесу створення кадрів в реальному часі в циклі розташуємо індикатор Display Image. ВП AVI2 Write Frame формує з послідовності створених зображень avi файл [9].

Для організації процесу пошуку та слідкування за об'єктом за допомогою блоку Vision Assistant окрім потоку відеоданих необхідно мати окреме виділене зображення, що безпосередньо містить сам об'єкт. Тому після формування даних відеоряду виділимо окремий кадр за допомогою інструменту Delete From Array та запишемо отримане зображення у файл, користуючись ВП Write File 2. Для зменшення розміру файлу оберемо формат jpeg.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-12

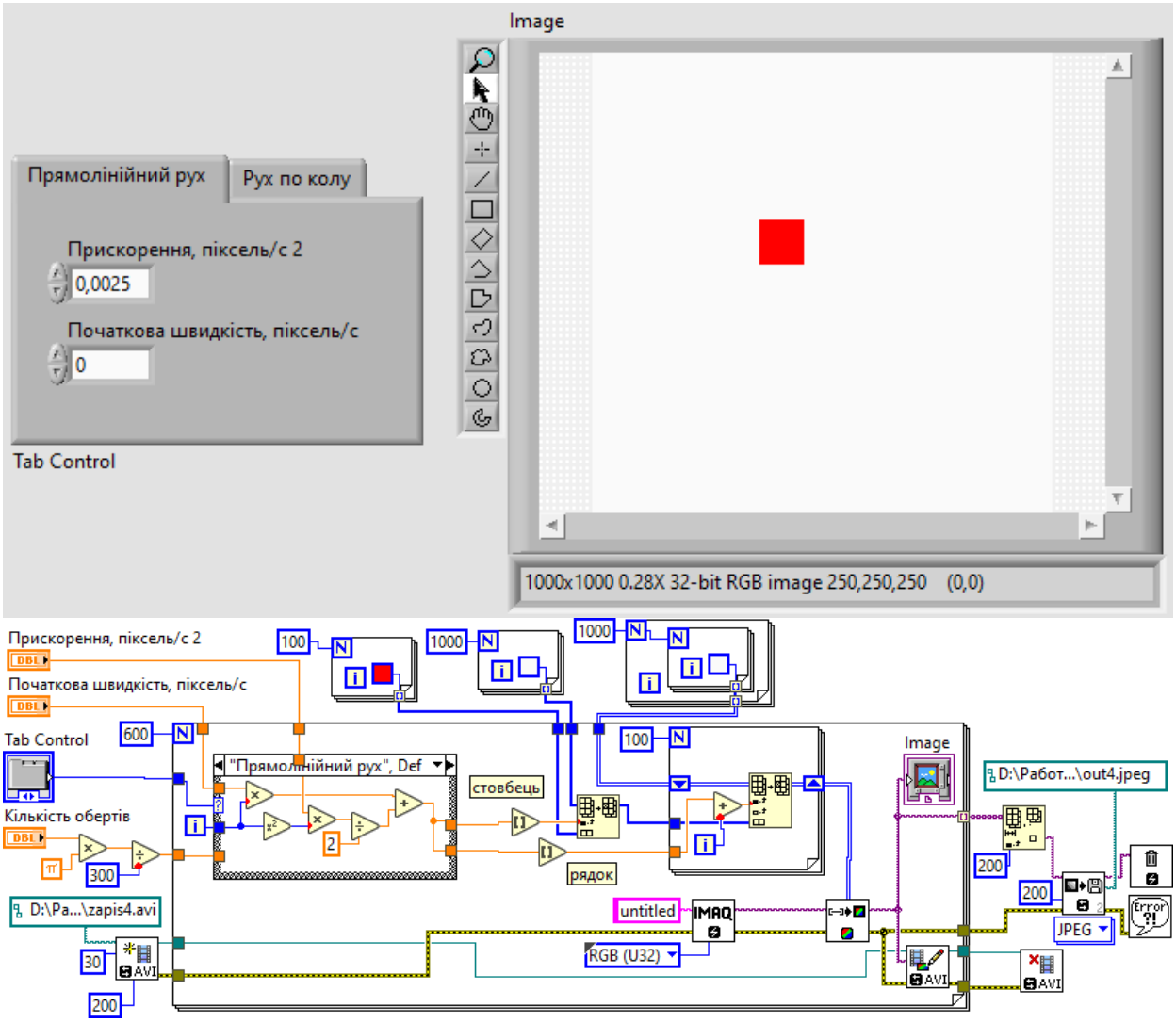


Рис. 4. Передня панель та блок-діаграма для створення тестових відеофайлів з записом руху об'єкту

Для моделювання прямолінійного руху вихідними даними будуть початкова швидкість v_0 та прискорення a. Тоді для руху об'єкта по діагоналі робочого поля розрахунок координат виконується за формулами:

$$x_i = v_0 \cdot i + a \cdot i^2 / 2,$$

$$y_i = v_0 \cdot i + a \cdot i^2 / 2.$$

Для моделювання рівномірного руху за колом радіусом R = 400 пікселів із центром, розташованим приблизно у центрі робочого поля, тобто зсув на 450 пікселів по горизонталі та вертикалі. Отже рівняння траєкторії має вигляд:

$$(x_i - 450)^2 + (y_i - 450)^2 = 400^2.$$

Для створення рівномірного руху об'єкт повинен мати незмінну кутову швидкість. Тому зручно скористатися рівнянням кола в полярних координатах з завданням зміни кута оберту з необхідним кроком та наступним перерахунком в декартові координати. Отже розрахунок координат в робочому полі при рівномірному русі об'єкта по колу буде мати вигляд:

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-12

$$x_i = 450 + 400 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{300} i\right),$$

$$y_i = 450 + 400 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{300} i\right),$$

де n – задана кількість повних обертів, які повинен виконати об'єкт протягом 600 кадрів; i – номер кадра.

Для зручності моделювання різних кінематичних сценаріїв руху на лицьову панель винесемо закладки, де користувач зможе обирати:

– «Прямолінійний рух» з вхідними параметрами: v_0 – початкова швидкість, піксель/кадр; a – прискорення, піксель/кадр^2. При a = 0 маємо рівномірний прямолінійний рух, а при a ≠ 0 – рівноприскорений рух по діагоналі робочого поля;

– «Рух по колу» з вхідним параметром n – кількість повних обертів за 600 кадрів (за 20 с.), що відповідає кутовій швидкості π·n/10 рад/с. Здійснюється рівномірний рух по колу радіусом 400 пікселів, розташованим у центрі робочого поля.

Для аналізу рівномірного руху об'єкта за нелінійною траєкторією оберемо відеофайл, що містить результати моделювання руху об'єкта за круговою траєкторією з радіусом R = 400 px (пікселів) і за період T = 20 с (600 кадрів) виконує два оберти. Отже швидкість руху об'єкту буде дорівнювати:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi 400}{10} = 251,2 \text{ px/c, або } v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi 400}{300} = 8,37 \text{ px/кадр.}$$

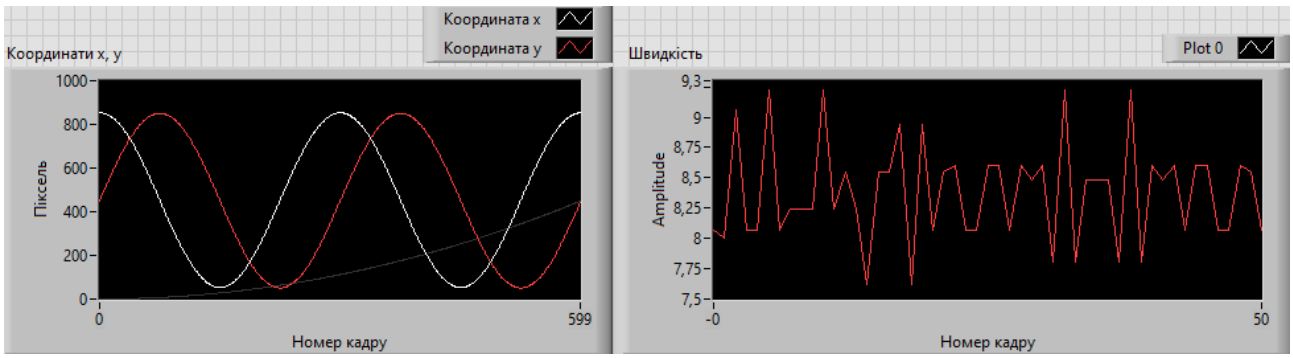


Рис. 5. Відслідковування параметрів об'єкта, що рухається по траєкторії кола

Використаємо попередньо розроблений віртуальний прилад для аналізу тестового відео зображення з метою визначення координат та швидкості об'єкта.

На рис. 5 наведені результати слідкування за об'єктом в реальному режимі без наступної обробки даних. Так графіки координат мають періодичний гармонійний характер з двома повними періодами, що відповідає вихідним умовам при моделюванні руху. Визначена швидкість має деякий розкид значень:8,4 ± 0,8 px/кадр, тобто за відносною похибкою відхилення не перевищує 9,5%.

При застосуванні попередньо розробленого ВП з реалізацією алгоритма кусково-лінійної апроксимації з наступним усередненням за вікном у 30 пікселів, отримуємо усереднене значення швидкості 8,4 px/кадр з незначним відхиленням (на рис. 6 виділено білим кольором).

У даному випадку кусково-лінійна апроксимація траєкторії руху за координатами буде зайвою, оскільки в кожному кадрі є зміна положення об'єкта. Це підтверджується на рис. 6, де значення швидкості отримані без лінійної апроксимації і лише з застосуванням усереднення,

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-12

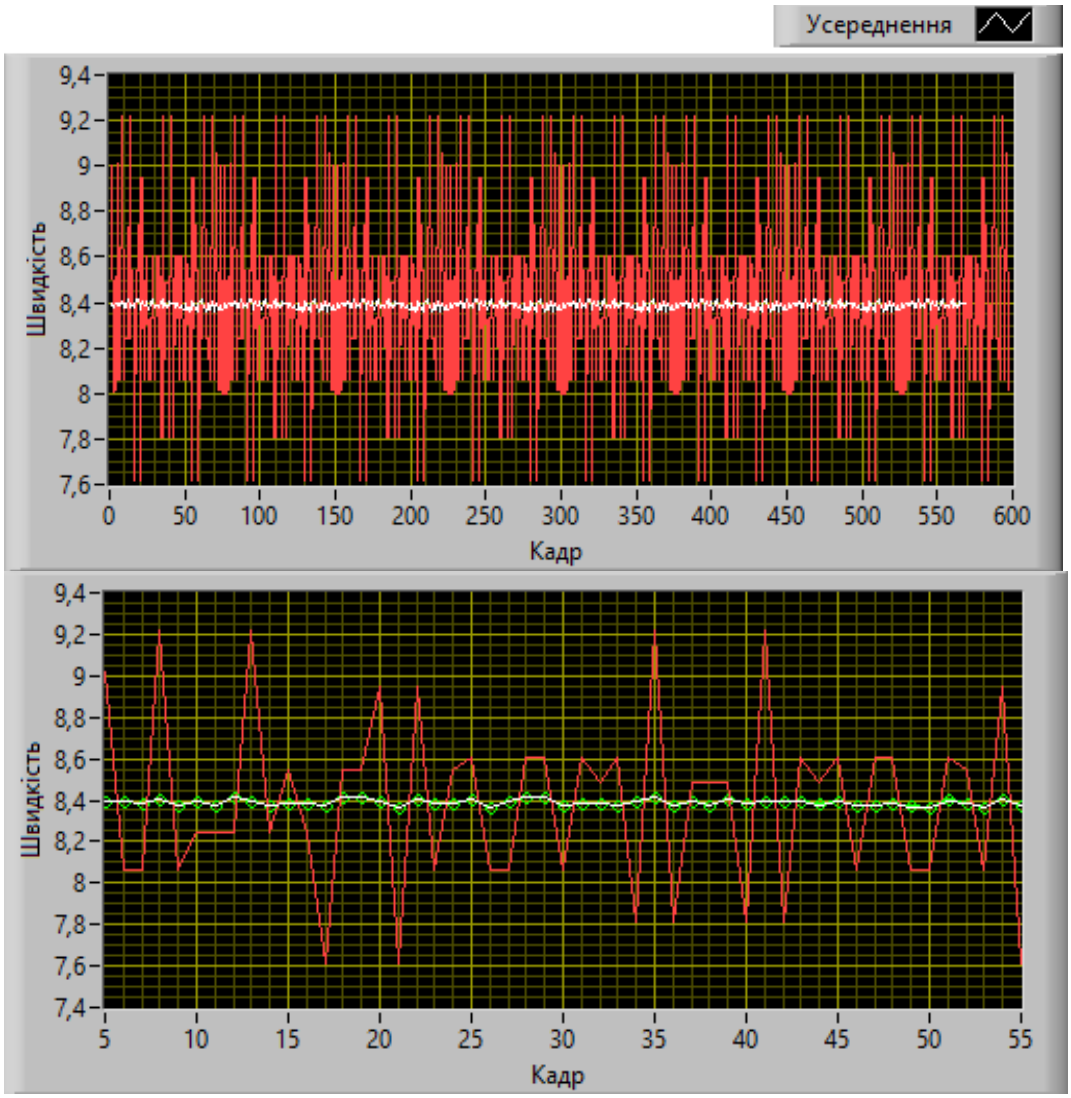


Рис. 6. Застосування алгоритма кусково-лінійної апроксимації з наступним усередненням для визначення швидкості при круговому русі

показані зеленими кругами-точками. Ці точки повністю лягають на білу лінію (отримана з використанням лінійної апроксимації з усередненням).

Отже при аналізі рівномірного руху об'єкта за нелінійною траєкторією для визначення швидкості руху об'єкта достатньо скористатися усередненням даних без застосування кусково-лінійної апроксимації. Це дозволяє отримати прийнятну точність розрахунку при економії програмних ресурсів [10].

Висновки

1. Пікселізація зображення вносить похибки при визначенні швидкості рухомого об'єкта, що набуває імпульсного характеру. Особливо це спостерігається при невеликих швидкостях та криволінійних траєкторіях.

2. При рівномірному та рівноприскореному прямолінійному русі найкращі результати при аналізі даних дає попередня поліноміальна апроксимація координат переміщення об'єкта. При цьому похибки з визначення кінематичних характеристик не перевищують 0,5%.

3. При криволінійній траєкторії руху, доцільно не використовувати апроксимації координат переміщення об'єкта, а застосувати усереднення отриманих значень швидкості. При

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-12

розмірі об’єкта у 100 пікселів можна рекомендувати ширину вікна не менше за 30 пікселів. Похибка визначення швидкості буде залежати від кривизни траєкторії на величини самої швидкості руху об’єкта.

Список використаної літератури

1. Мосьпан Д. В., Юрко О. О., Перекрест А. Л., Кухаренко Д. В., Вадурін К. О. Комп’ютеризований практикум з моделювання фізичних процесів. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. Кременчук: КрНУ, 2022. Випуск 6 (137). С. 29–35.
2. Мосьпан Д., Юрко О., Перекрест А., Кухаренко Д., Вадурін К., Повниця С. Візуальна фіксація руху об’єкта засобами Labview при проведенні фізичного експерименту. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. Кременчук: КрНУ, 2023. Випуск 4 (141). С. 39–45.
3. Зюляєв Д. Д. Особливості використання USB та web-камер. *ЧДУ*. 2010. Випуск 121. Том 134. С. 99–105.
4. Смолій В. В., Савицька Я. А., Місюра М. Д., Шкарупило В. В. Системи візуалізації та розпізнавання образів. Навчальний посібник. Київ: ФОП Ямчинський О. В., 2020. 200 с.
5. NI Vision Assistant Tutorial. Worldwide Technical Support and Product Information. National Instruments Corporation, USA, 2004. 62 p.
6. Machine vision forum. NI Community. URL: https://forums.ni.com/t5/Machine-Vision/bd-p/200 (дата звернення: 16.10.2023).
7. NI Vision for LabVIEW. User Manual. National Instruments Corporation. November 2005. 149 p.
8. National Instruments [Електронний ресурс] Режим доступу: URL: http://www.ni.com/ (дата звернення: 16.10.2023).
9. Convert Series of Graph Images to AVI Video. NI Community. URL: https://knowledge.ni.com/KnowledgeArticleDetails?id=kA00Z000000kKcMSAU&l=ru-UA (дата звернення: 16.10.2023).
10. Мосьпан Д. В. Вхідний контроль параметрів матеріалу системи автоматизованого виготовлення товстостінних деталей з рифтами. *Науково-виробничий журнал «Електромеханічні і енергозберігаючі системи»*. Кременчук: КрНУ, 2023. Випуск 2 (61). С. 64–69.

References

1. Mos′pan, D.V., Yurko, O.O., Perekrest, A.L., Kukharenko, D.V., & Vadurin, K.O. (2022). Komp′yuteryzovanyy praktykum z modelyuvannya fizychnykh protsesiv [Computerized workshop on simulation of physical processes]. *Visnyk Kremenchutskoho natsionalnoho universytetu imeni Mykhayla Ostrohradskoho*. Kremenchuk: KrNU. 6 (137). 29–35 [in Ukrainian].
2. Mos′pan, D., Yurko, O., Perekrest, A., Kukharenko, D., Vadurin, K., & Povnytsia, S. (2023). Vizual′na fiksatsiya rukhu ob’yekta zasobamy Labview pry provedenni fizychnoho eksperymentu [Visual fixation of object movement by means of Labview during a physical experiment]. *Visnyk Kremenchutskoho natsionalnoho universytetu imeni Mykhayla Ostrohradskoho*. Kremenchuk: KrNU. 4 (141). 29–35 [in Ukrainian].
3. Zyulyayev, D.D. (2010). Osoblyvosti vykorystannya USB ta web-kamer [Peculiarities of using USB and web cameras]. *Black Sea National University named after Petro Mohyla*. 121 (134). 99–105 [in Ukrainian].
4. Smoliy, V.V., Savyts′ka, YA.A., Misyura, M.D., & Shkarupylo, V.V. (2020). Systemy vizualizatsiyi ta rozpiznavannya obraziv. [Visualization and pattern recognition systems]. Kyiv: FOP Yamchynskyi O.V. [in Ukrainian].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-12

5. NI Vision Assistant Tutorial (2004). Worldwide Technical Support and Product Information. National Instruments Corporation, USA [in English].
6. Machine vision forum. NI Community. Retrieved from: https://forums.ni.com/t5/Machine-Vision/bd-p/200 [in English].
7. NI Vision for LabVIEW (2005). User Manual. National Instruments Corporation. USA [in English].
8. National Instruments. Retrieved from: http://www.ni.com/ [in English].
9. *Convert Series of Graph Images to AVI Video. NI Community.* Retrieved from: https://knowledge.ni.com/KnowledgeArticleDetails?id=kA00Z000000kKcMSAU&l=ru-UA [in English].
10. Mospan, D.V. (2023). Vkhidnyi kontrol parametriv materialu systemy avtomatyzovanoho vyhotovlennia tovstostinnykh detalei z ryftamy. *Naukovo-vyrobnychyi zhurnal «Elektromekhanichni i enerhozberihaiuchi systemy»*. Kremenchuk: KrNU. Vypusk 2 (61). S.64-69. [in Ukrainian].

Мосьпан Денис Владиславович – к.т.н., доцент кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. E-mail: denis.mospan@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5473-7874.

Юрко Олексій Олексійович – к.т.н., доцент кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. E-mail: yurkoalexe@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8244-2376.

Перекрест Андрій Леонідович – д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки Кременчуцькоо національного університету імені Михайла Остроградського. E-mail: pksg13@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7728-9020.

Mospan Denis Vladyslavovich – Ph.D in Technical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Computer Engineering and Electronics of the Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. E-mail: denis.mospan@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2151-4858.

Yurko Oleksiy Oleksiyovych – Ph.D in Technical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Computer Engineering and Electronics of the Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. E-mail: yurkoalexe@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8244-2376.

Perekrest Andrii Leonidovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computer Engineering and Electronics of the Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. E-mail: pksg13@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7728-9020.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-12

УДК 004.93

Д.В. МОСЬПАН, О.О. ЮРКО, А.Л. ПЕРЕКРЕСТ
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

БІНАРІЗАЦІЯ ЗОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ОБ'ЄКТА В УМОВАХ НЕОДНОРІДНОГО ФОНУ ЗАСОБАМИ LABVIEW

Для проведенні дослідних робіт з визначення кінематичних характеристик рухомих об'єктів було створено віртуальний прилад для аналізу потоку відеоданих з веб камери за допомогою програмного забезпечення Labview. У попередній роботі авторів положення об'єкта на зображенні визначалося за колірною ознакою, шляхом порівняння прямокутної області виділеної з об'єкта з пікселями зображення. При цьому фон робочого поля був однорідним білого кольору, тобто об'єкт добре контрастував на обраному фоні. Але у випадку нерівномірної освітленості та неоднорідного фону з різними структурними включеннями задача виявлення об'єкта сильно ускладнюється. При використанні моделі віртуального приладу для візуальної фіксації руху об'єктів виявлено, що незначна зміна освітленості робочого поля знижує впевненість захвату об'єкта, особливо біля границь обзору веб камери. Для поліпшення умов знаходження об'єкта на зображенні застосуємо методи гістограмних перетворень. Аналіз зображення щодо кількісного розподілення компонентів кольорів дозволяє провести бінарізацію зображення для виділення контуру об'єкта та ігнорування другорядних деталей. В результаті проведеної роботи було встановлено, що застосування гістограмної обробки зображень із застосуванням HSL колірної моделі з наступною бінарізацією дозволяє збільшити впевненість виявлення об'єкта, особливо на краях робочого поля та збільшити точність визначення координат у порівнянні з методом застосування маски об'єкта за колірною ознакою. Також було запропоновано використання різницевого зображення фону робочого поля та об'єкта дослідження на даному фоні, що дозволяє спростити задачу виявлення меж для колірних компонентів при перетворенні гістограм для бінарізації зображення з метою виділення об'єкта. Було створено віртуальний прилад для: отримання зображень фону робочого поля та об'єкту при наявних умовах освітленості; гістограмного аналізу різницевих зображень при проведенні бінарізації зображення для виділення об'єкта; використання отриманих налаштувань для слідкування за об'єктом з потоку відеоданих веб камери та отримання його поточних координат.

Ключові слова: машинний зір, кінематичні характеристики, колірна модель, гістограма зображення, бінарізація зображення.

D.V. MOSPAN, O.O. YURKO, A.L. PEREKREST
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

IMAGE BINARIZATION TO FIND AN OBJECT IN CONDITIONS OF AN INHOMOGENEOUS BACKGROUND USING LABVIEW

To carry out research work to determine the kinematic characteristics of moving objects, a virtual device was created to analyze the stream of video data from a webcam using Labview software. In the authors' previous work, the position of an object in the image was determined by color by comparing a rectangular area extracted from the object with the pixels of the image. In this case, the background of the working field was a uniform white color, that is, the object contrasted well against the selected background. But in the case of uneven illumination and a heterogeneous background with different structural inclusions, the task of detecting an object becomes much more complicated. When using a virtual device model to visually capture the movement of objects, it was found that a slight change in the illumination of the working field reduces the confidence of capturing an object, especially at the boundaries of the web camera view. To improve the conditions for finding an object in the image, we apply histogram transformation methods. Analysis of the image regarding the quantitative distribution of color components allows for binarization of the image to highlight the contour of the object and ignore secondary details. As a result of the work carried out, it was found that the use of histogram image processing using the HSL color model with subsequent binarization makes it possible to increase the confidence of object detection, especially at the edges of the working field, and to increase the accuracy of determining coordinates compared to the method of using an object mask based on color. It was also proposed to use a difference image of the background of the working field and the object of study on this background, which simplifies the task of identifying the boundaries of color components when converting histograms to binarize the image in order to highlight the object. A virtual device was created to: obtain images of the background of the working field and the object under existing lighting conditions; histogram analysis of difference images when performing image binarization to highlight an object; using the received settings to track an object from the web camera video stream and obtain its current coordinates.

Key words: computer vision, kinematic characteristics, color model, image histogram, image binarization.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-13

Постановка проблеми

Для проведенні дослідних робіт з визначення кінематичних характеристик рухомих об'єктів було створено віртуальний прилад для аналізу потоку відеоданих з веб камери за допомогою програмного забезпечення Labview [1, 2]. У попередній роботі авторів [1] положення об'єкта на зображенні визначалося за колірною ознакою, шляхом порівняння прямокутної області виділеної з об'єкта з пікселями зображення. При цьому фон робочого поля був однорідним білого кольору, тобто об'єкт добре контрастував на обраному фоні. Але у випадку нерівномірної освітленості та неоднорідного фону з різними структурними включеннями задача виявлення об'єкта сильно ускладнюється.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

При використанні моделі віртуального приладу для візуальної фіксації руху об'єктів [1, 2] виявлено, що незначна зміна освітленості робочого поля знижує впевненість захвату об'єкта, особливо біля границь обзору веб камери [3]. Для поліпшення умов знаходження об'єкта з потоку відеоданих застосуємо методи гістограмних перетворень [4]. Аналіз зображення щодо кількісного розподілення компонентів кольорів дозволяє провести бінарізацію зображення для виділення контуру об'єкта та ігнорування другорядних деталей.

Мета дослідження

Удосконалення віртуального приладу для аналізу відео зображень для підвищення впевненості виявлення рухомих об'єктів в умовах неоднорідного фону засобами Labview.

Викладення основного матеріалу дослідження

Створимо віртуальний прилад для виконання наступних операцій:

– запис зображень фона робочого поля та об'єкта дослідження на даному фоні в окремі файли формату jpeg;

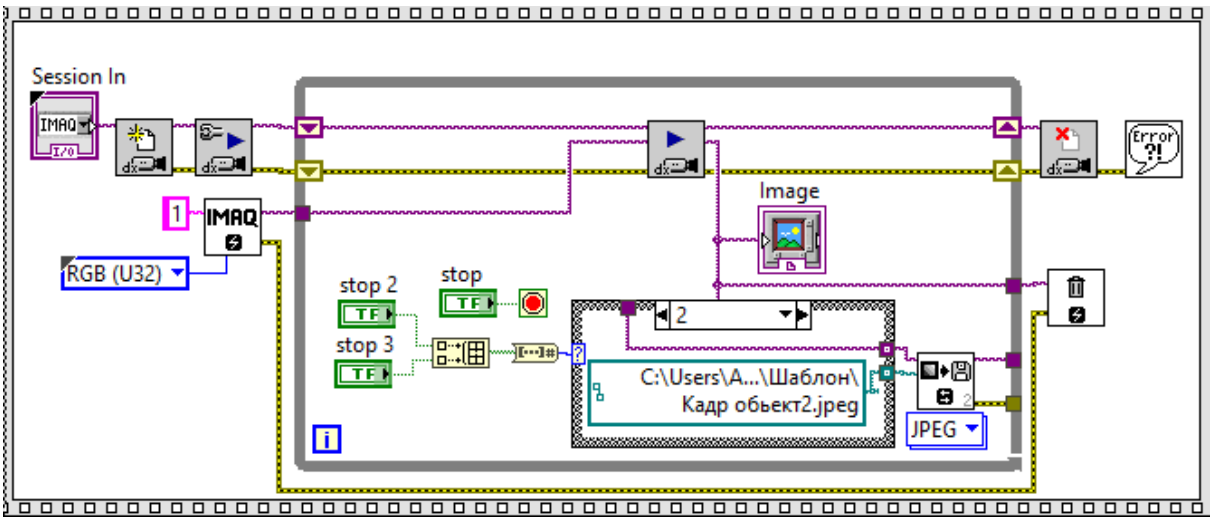


Рис. 1. Отримання кадрів та їх збереження до окремих файлів з потоку відеоданих веб камери

– зчитування зображень з файлів, отримання різниці зображень та побудова їх гістограм;

– на основі аналізу гістограм проведення бінарізації зображення для виділення об'єкта та отримання його координат;

– з використанням отриманих налаштувань здійснення слідкування за об'єктом з потоку відеоданих веб камери.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-13

Використаємо структуру Flat Sequence для створення покадрової послідовності дій (рис. 1) [5, 6]. В першому кадрі структури організований перегляд користувачем відеоданих з веб камери з можливістю вибору кадру із записом його до окремого файлу в форматі jpeg. Це здійснюється натисканням на кнопку «Об'єкт» та «Фон» на панелі керування, що задає відповідний шлях для запису файлу. Робочий простір обрано зі вираженою структурою з нерівномірним освітленням (рис. 2). Для завершення роботи першого етапу програми необхідно натиснути кнопку «STOP» для завершення умовного циклу.



Рис. 2. Збережені кадри: «об'єкт + фон» та «фон»

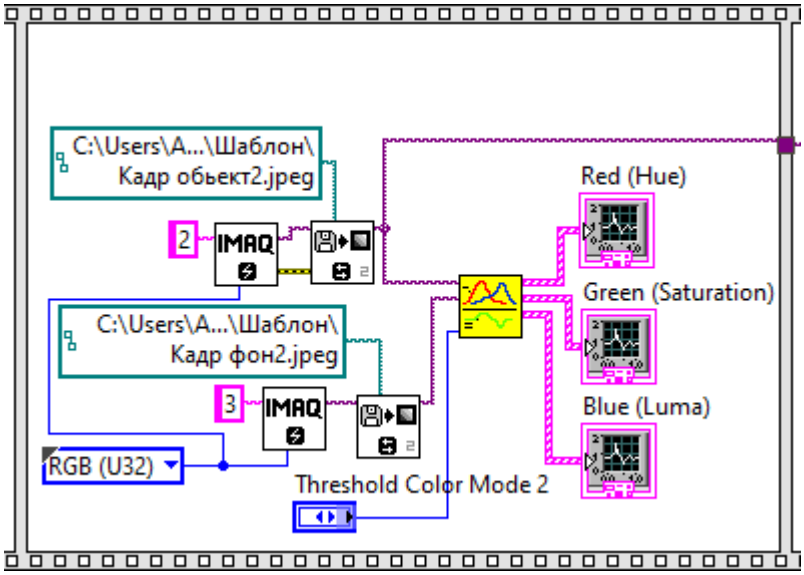


Рис. 3. Отримання накладених гістограм двох файлових зображень та їх різниці за компонентами обраної кольорної моделі

Наступним етапом є зчитування отриманих файлів зображень об'єкта з фоном та самого фону робочого стола (рис. 3). Для аналізу даних зображень необхідно побудувати їхні гістограми та різницю між ними. Остання буде відповідати розподіленню кольорів саме об'єкта відповідно до фону. Для цього створимо окремий підприлад (рис. 4) з використанням інструменту IMAQ ColorHistograph, який обчислює гістограми, отримані з трьох компонентів зображення. Цей ВП може працювати в одному з чотирьох режимів, що відповідають колірним моделям RGB, HSL, HSV і HSI.

Для отримання різницевої гістограми з вихідних кластерів однакових компонентів виділимо складову Histogram, перетворимо до типу даних DBL та знайдемо відповідну різницю. Для сумісності з графіком LabVIEW [7, 8, 9] зберемо у кластер з необхідними даними та об'єднаємо в масив з кластерами об'єкта з фоном та фону. Дані операції виконуються для кожного з трьох вихідних компонентів.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-13

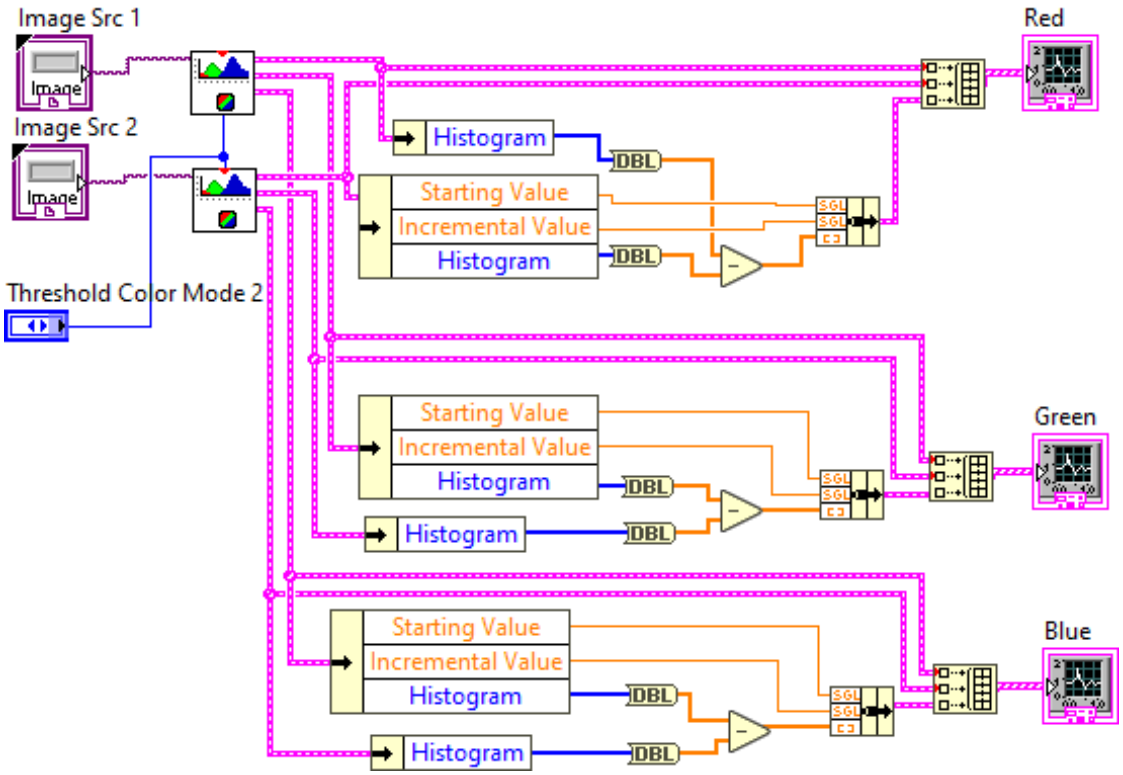


Рис. 4. Блок-діаграма віртуального приладу для компонентного відображення накладених гістограм зображень: Image 1, Image 2 та Image 1 – Image 2.

На панель керування встановлено Radio Batton для обрання користувачем колірної моделі для режиму відображення гістограми: RGB або HSL.

HSL (скорочено від англ. Hue, Saturation, Lightness) – колірна модель, в якій будь-який колір визначається трьома характеристиками: кольоровим тоном (англ. Hue), наприклад, синім, червоним, жовтим тощо; насиченістю (англ. Saturation), тобто частиною чистого кольору, без домішки чорної та білої фарб; «світністю» (англ. Lightness), тобто близькістю до білого кольору.

На рис. 5 наведені гістограми отримані в двох кольорових режимах: HSL та RGB, де застосовані наступні кольорові позначення: об’єкт з фоном – білий пунктир; окремо фон – червона лінія; різниця – зелена лінія.

Наступний етап – бінарізація зображення за допомогою гістограмних перетворень для виділення об’єкту дослідження (рис. 6).

Скористаємося інструментом IMAQ ColorThreshold (позиція 1 рис. 6), який виконує бінарізацію кольорового зображення відповідно до заданих порогових значень трьох компонентів RGB або HSL. Результатом обробки є 8-бітне бінарне зображення.

При застосуванні кольорового режиму HSL набагато спрощується виділення об’єкта при бінарізації зображення у порівняння з режимом RGB (рис. 6). Так, достатньо лише зменшити компоненту кольорового тону Hue, а останні дві можна залишити незмінними. Як показано на фрагменті гістограми компоненти Hue (рис. 8) на ділянці градацій від 5 до 20 присутній сплеск з білого пунктиру та зеленої кривої, а червона крива співпадає з нулем. Тобто ці градації тонів відповідають лише об’єкту і відсутні в фоні. Тому межа 20 компоненти Hue дозволяє виділити бажаний об’єкт з фону при бінарізації.

В режимі RGB також можна виділити об’єкт, але це потребує скрупульозного настроювання меж кожного кольорового компонента, і при цьому більше спотворюється границя об’єкта при бінарізації.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-13

Для покращення розпізнавання форми об’єкта бажано його середину зробити однотонною. Це можна виконати за допомогою інструменту IMAQ FillHole (позиція 2 рис. 6), що заповнює отвори, виявлені в однорідній області. Отвори заповнюються значенням пікселя 1. Вихідне зображення має бути 8-бітним двійковим зображенням. Отвори, виявлені в контакті з межею зображення, не заповнюються, оскільки неможливо визначити, чи належать ці отвори до границі об’єкта.

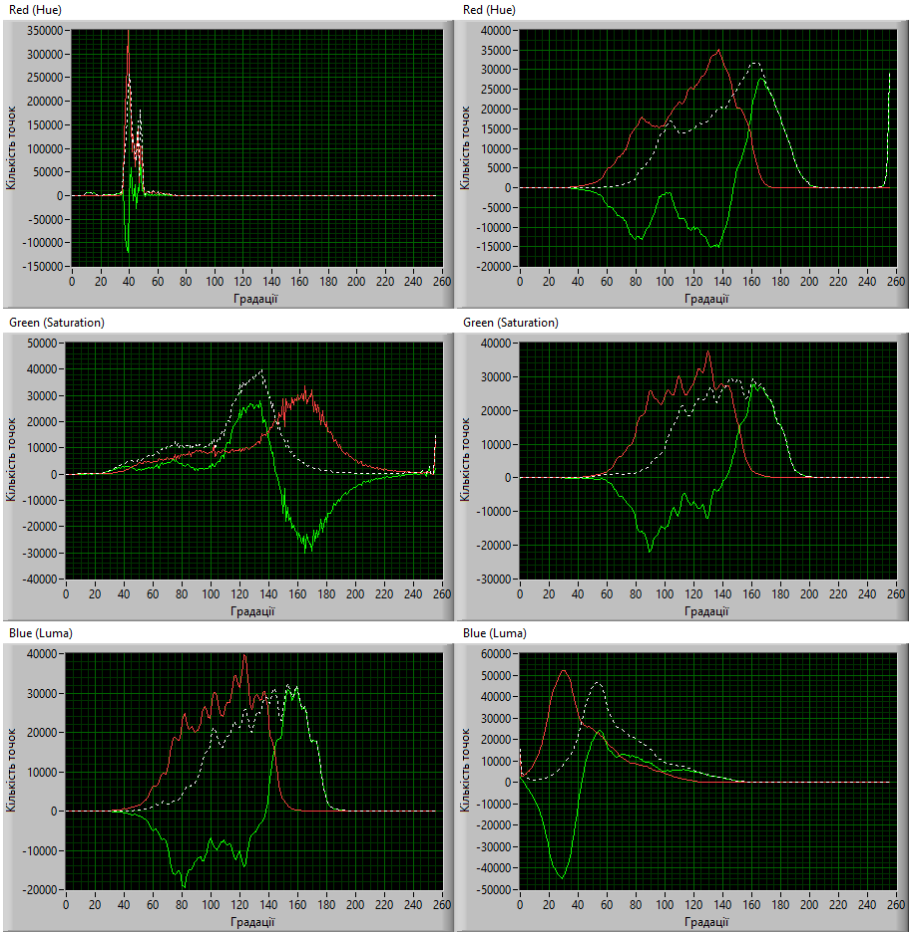


Рис. 5. Гістограми отримані в двох кольорових режимах: HSL (ліворуч) та RGB (праворуч)

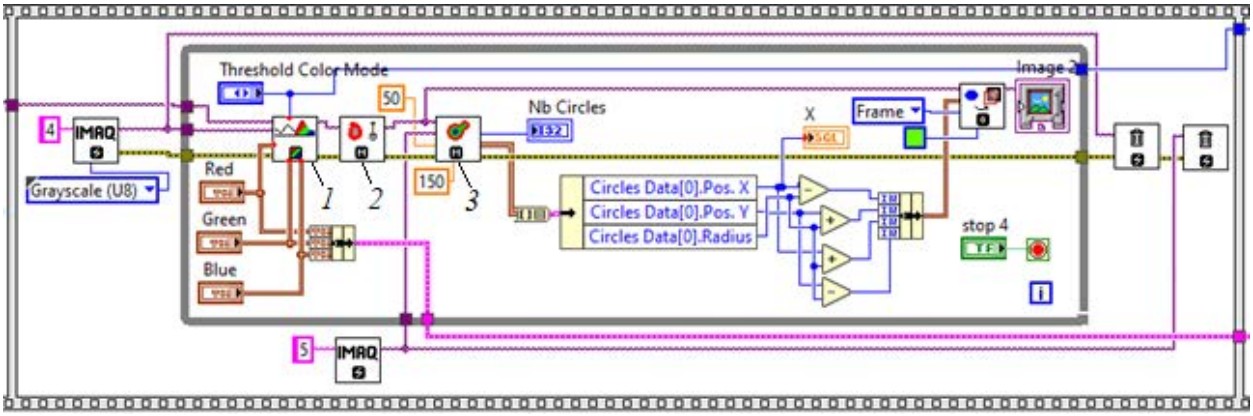


Рис. 6. Блок-діаграма для бінарізації зображення, знаходження об’єкту та отримання координат його центру

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-13

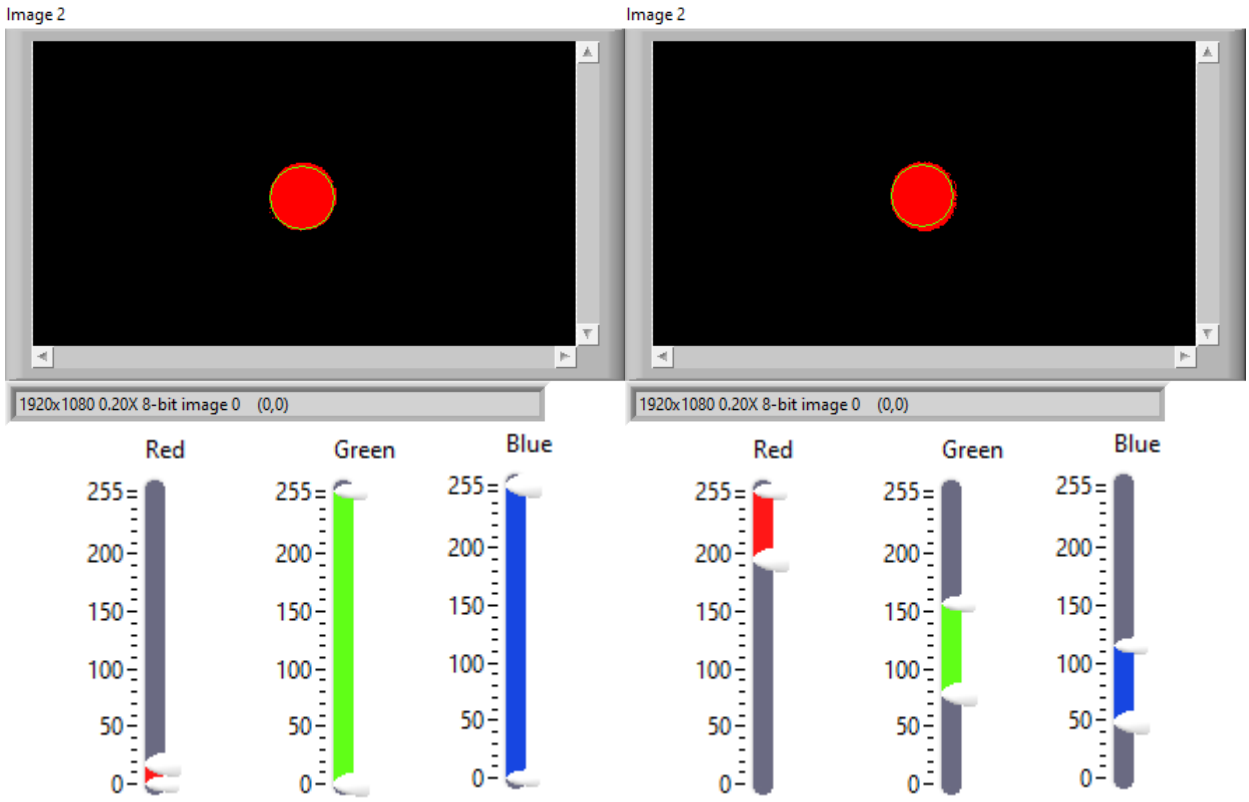


Рис. 7. Настроювання для компонентів в режимах HSL (ліворуч) та RGB (праворуч) для виділення об'єкта при бінарізації зображення

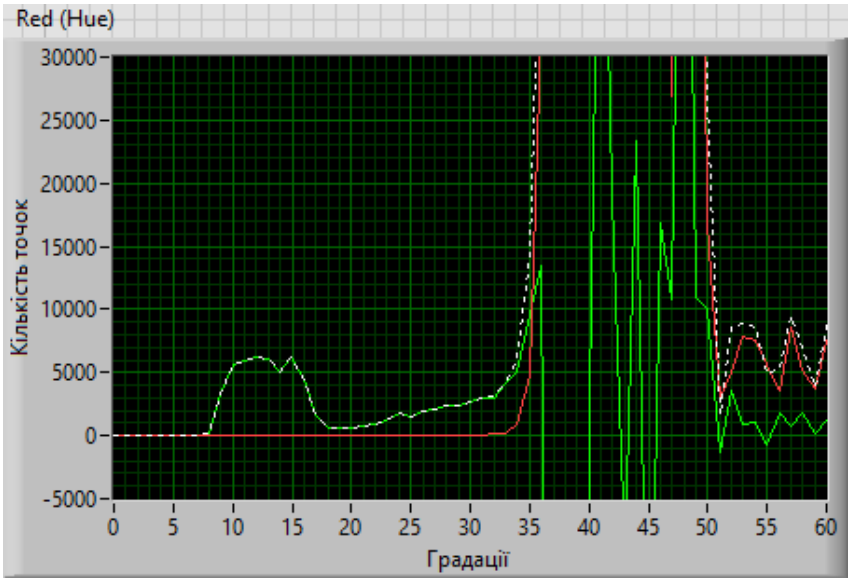


Рис. 8. Фрагмент гістограми компоненти Hue

Пошук об'єкту на бінарному зображенні буде здійснювати інструмент IMAQ Find Circles (позиція 3 рис. 6), який знаходить круглі фігури і класифікує їх за радіусом, площею поверхні та периметром. На бінарному зображенні, він знаходить радіус і центр круглих об'єктів, навіть якщо їхні контури перекриваються. Крім того, цей ВП може відстежувати кола на зображенні. Для того, щоб була однозначність при знаходженні об'єкта, необхідно правильно підібрати

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-13

допустимі розміри кола, а саме мінімальний та максимальний радіуси для пошуку. З вихідного масиву даних інструмента виділяємо кластер зі значеннями координат центру та радіусу знайденого кола. Для візуалізації результатів пошуку за допомогою інструмента Overlay Oval створимо накладання визначеного контуру кола зеленим кольором на бінарне зображення об'єкта (рис. 6).

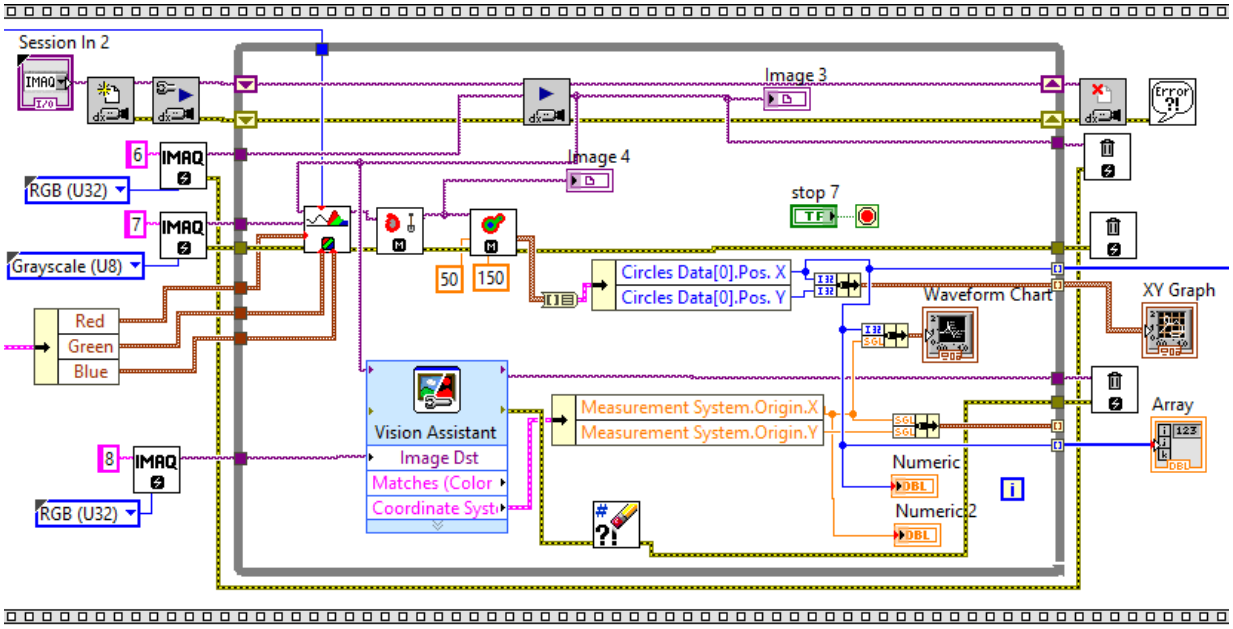


Рис. 9. Блок-діаграма для порівняння двох методів визначення координат об'єкта: при бінарізації та за колірною ознакою

В результаті роботи даного етапу програми користувач обирає колірну модель зображення і за отриманими гістограмами підбирає найкраще співвідношення границь для колірних компонентів для відображення об'єкта на бінарному зображенні.

Отримані значення меж компонентів для обраної колірної моделі надходять у наступний кадр програми для подальшої обробки.

Потік даних з веб камери паралельно надходить на гістограмну обробку з визначеними раніше налаштуваннями для бінарізації зображення, а також на інструмент Vision Assistant для виділення заданої маски об'єкта за колірною ознакою (рис. 9). Це дає можливість для порівняння результатів визначення координат центру об'єкта двома методами, котрі відображаються на індикаторі Waveform Chart (рис. 10).

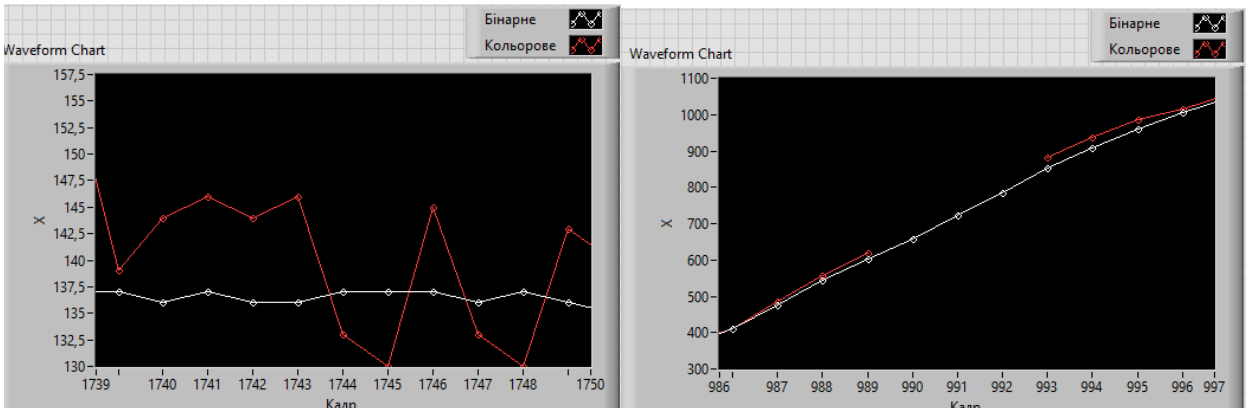


Рис. 10. Відображення поточних координат рухомого об'єкта визначених при бінарізації кадрів та за колірною ознакою

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-13

В результаті аналізу отриманих даних виявлення координат за бінарізацією зображення має менше значення розкиду відносно середнього значення і в окремих випадках перевищує в 10 разів аналогічний параметр при застосуванні маски за колірною ознакою. Також на краях діапазону робочого поля виявлення об’єкта за колірною ознакою стає неможливим у зв’язку з повною відсутністю числових даних на відповідному виході ВП. При бінарізації зображення зберігається можливість відслідковувати координати об’єкта навіть при частковому виході його границь за межі поля зору камери.

Висновки

1. Застосування гістограмної обробки зображень із застосуванням HSL колірної моделі з наступною бінарізацією дозволяє збільшити впевненість виявлення об’єкта, особливо на краях робочого поля та збільшити точність визначення координат у порівнянні з методом застосування маски об’єкта за колірною ознакою.

2. Було запропоновано використання різницевого зображення фона робочого поля та об’єкта дослідження на даному фоні, що дозволяє спростити задачу виявлення меж для колірних компонентів при перетворенні гістограм для бінарізації зображення з метою виділення об’єкта.

3. Було створено віртуальний прилад для: отримання зображень фону робочого поля та об’єкту при наявних умовах освітленості; гістограмного аналізу різницевих зображень при проведенні бінарізації зображення для виділення об’єкта; використання отриманих налаштувань для слідкування за об’єктом з потоку відеоданих веб камери та отримання його поточних координат.

Список використаної літератури

1. Мосьпан Д. В., Юрко О. О., Перекрест А. Л. Визначення швидкості рухомого об’єкта за послідовністю відеозображень засобами Labview. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2023. Том 6, № 2.
2. Мосьпан Д., Юрко О., Перекрест А., Кухаренко Д., Вадурін К., Повниця С. Візуальна фіксація руху об'єкта засобами Labview при проведенні фізичного експерименту. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. Кременчук: КрНУ, 2023. Випуск 4 (141). С. 29–35.
3. Зюляєв Д. Д. Особливості використання USB та web-камер. ЧДУ 2010. Випуск 121. Том 134. С. 99–105.
4. Смолій В. В., Савицька Я. А., Місюра М. Д., Шкарупило В. В. Системи візуалізації та розпізнавання образів. Навчальний посібник. Київ: ФОП Ямчинський О. В., 2020. 200 с.
5. NI Vision Assistant Tutorial. Worldwide Technical Support and Product Information. National Instruments Corporation, USA, 2004. 62 p.
6. Machine vision forum. NI Community. URL: https://forums.ni.com/t5/Machine-Vision/bd-p/200 (дата звернення: 16.10.2023).
7. NI Vision for LabVIEW. User Manual. National Instruments Corporation. November 2005. 149 p.
8. National Instruments [Електронний ресурс] Режим доступу: URL: http://www.ni.com/ (дата звернення: 16.10.2023).
9. Convert Series of Graph Images to AVI Video. NI Community. URL: https://knowledge.ni.com/KnowledgeArticleDetails?id=kA00Z000000kKcMSAU&l=ru-UA (дата звернення: 16.10.2023).

References

1. Mos′pan, D.V., Yurko, O.O., & Perekrest, A.L. (2023). *Vyznachennya shvydkosti rukhomoho ob"yekta za poslidovnistyu videozobrazhen' zasobamy Labview [Determination of the speed of*

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-13

a moving object by a sequence of video images using Labview]. KHNTU. Prykladni pytannya matematychnoho modelyuvannya. Odesa: Vydavnychyy dim «Hel′vetyka». 6 (2) [in Ukrainian].
2. Mos′pan, D., Yurko, O., Perekrest, A., Kukharenko, D., Vadurin, K., & Povnytsia, S. (2023). *Vizual'na fiksatsiya rukhu ob'yekta zasobamy Labview pry provedenni fizychnoho eksperymentu [Visual fixation of object movement by means of Labview during a physical experiment]*. Visnyk Kremenchutskoho natsionalnoho universytetu imeni Mykhayla Ostrohradskoho. Kremenchuk: KrNU. 4 (141). 29–35 [in Ukrainian].
3. Zyulyayev, D.D. (2010). *Osoblyvosti vykorystannya USB ta web-kamer [Peculiarities of using USB and web cameras]*. Black Sea National University named after Petro Mohyla. 121 (134). 99–105 [in Ukrainian].
4. Smoliy, V.V., Savyts′ka, YA.A., Misyura, M.D., & Shkarupylo, V.V. (2020). *Systemy vizualizatsiyi ta rozpiznavannya obraziv. [Visualization and pattern recognition systems]*. Kyiv: FOP Yamchynskyi O.V. [in Ukrainian].
5. *NI Vision Assistant Tutorial* (2004). Worldwide Technical Support and Product Information. National Instruments Corporation, USA [in English].
6. *Machine vision forum. NI Community.* Retrieved from: https://forums.ni.com/t5/Machine-Vision/bd-p/200 [in English].
7. *NI Vision for LabVIEW (2005). User Manual. National Instruments Corporation.* USA [in English].
8. *National Instruments.* Retrieved from: http://www.ni.com/ [in English].
9. *Convert Series of Graph Images to AVI Video. NI Community.* Retrieved from: https://knowledge.ni.com/KnowledgeArticleDetails?id=kA00Z000000kKcMSAU&l=ru-UA [in English].

Мосьпан Денис Владиславович – к.т.н., доцент кафедри комп’ютерної інженерії та електроніки Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. E-mail: denis.mospan@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5473-7874.

Юрко Олексій Олексійович – к.т.н., доцент кафедри комп’ютерної інженерії та електроніки Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. E-mail: yurkoalexe@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8244-2376.

Перекрест Андрій Леонідович – д.т.н., професор, завідувач кафедри комп’ютерної інженерії та електроніки Кременчуцькоо національного університету імені Михайла Остроградського. E-mail: pksg13@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7728-9020.

Mospan Denis Vladyslavovich – Ph.D in Technical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer of the Department of Computer Engineering and Electronics of the Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. E-mail: denis.mospan@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2151-4858.

Yurko Oleksiy Oleksiyovych – Ph.D in Technical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer of the Department of Computer Engineering and Electronics of the Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. E-mail: yurkoalexe@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8244-2376.

Perekrest Andrii Leonidovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computer Engineering and Electronics of the Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. E-mail: pksg13@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7728-9020.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-13

УДК 004. 021

О.Д. ПАВЛЕЦЬ, В.І. ДУБРОВІН, Л.Ю. ДЕЙНЕГА
Національний університет «Запорізька політехніка»

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНКУРЕНТОСПРОМОЖНОСТІ РЕГІОНІВ УКРАЇНИ

В останні роки акцент на аналізі регіонального та економічного розвитку зазнає постійних викликів через постійне поповнення теорій і моделей, що робить визначення ідентифікаторів розвитку ускладненим завданням. Однак, серед цього різноманіття концепцій та теорій, концепція територіального капіталу вирізняється як найбільш широко використовувана в аналізі регіонального розвитку. Її сутність полягає в розширенні звичних показників важливості, таких як продуктивний капітал, людський капітал, доступність, інфраструктура та земля, за допомогою нових показників, що описують соціальний капітал, таких як інноваційність, рівень корупції та інтенсивність соціальних відносин.

Ця концепція надає можливість здійснювати комплексний аналіз та оцінку різних аспектів регіональної конкурентоспроможності, враховуючи як матеріальні, так і соціальні фактори [1]. Саме через такий підхід можна отримати більш повну картину процесів, що відбуваються на рівні окремих регіонів. Наприклад, аналіз соціального капіталу дозволяє врахувати не тільки економічні показники, але й рівень співпраці, інноваційність, аспекти довіри в суспільстві та рівень взаємодії між громадянами [2].

Особливо важливим стає застосування концепції територіального капіталу в умовах сучасних геополітичних викликів та економічних труднощів. Україна, знаходячись в центрі подій геополітичного напруження, є прекрасним прикладом впливу таких факторів на регіональний розвиток. На тлі конфлікту із сусідньою Росією та наслідків, що його супроводжують, таких як санкції та економічні обмеження, важливо розглядати аспекти регіонального розвитку через призму територіального капіталу. Серед таких аспектів – поглиблення корупційних процесів, слабкі інституції та управління, що становлять серйозні виклики для ефективного функціонування регіонів.

Тому, дослідження в цьому напрямку може виявитися не лише актуальним, але й необхідним для розуміння взаємозв'язку між геополітичними та економічними труднощами та їх впливом на розвиток регіонів.

Ключові слова: емпірична система, регіони України, ВВП.

O.D. PAVLETS, V.I. DUBROVIN, L.Y. DEYNEGA
Zaporizhzhia Polytechnic National University

RESEARCH ON THE COMPETITIVENESS OF REGIONS IN UKRAINE

In recent years, the emphasis on the analysis of regional and economic development has faced constant challenges due to the continuous evolution of theories and models, making the identification of development indicators a complicated task. However, amidst this diversity of concepts and theories, the concept of territorial capital stands out as the most widely used in the analysis of regional development. Its essence lies in extending the conventional indicators of importance, such as productive capital, human capital, accessibility, infrastructure, and land, through new indicators describing social capital, such as innovativeness, the level of corruption, and the intensity of social relations.

This concept allows for a comprehensive analysis and evaluation of various aspects of regional competitiveness, considering both material and social factors [1]. It is through this approach that a more complete picture of the processes occurring at the level of individual regions can be obtained. For example, analyzing social capital enables consideration not only of economic indicators but also of the level of cooperation, innovativeness, aspects of trust within society, and the level of interaction among citizens [2].

The application of the concept of territorial capital becomes particularly important amid contemporary geopolitical challenges and economic difficulties. Ukraine, situated at the center of geopolitical tension, serves as a notable example of the influence of such factors on regional development. Against the backdrop of conflict with neighboring Russia and its accompanying consequences, such as sanctions and economic constraints, it is crucial to consider aspects of regional development through the lens of territorial capital. Among these aspects are the deepening of corrupt processes, weak institutions, and governance, posing serious challenges to the effective functioning of regions.

Therefore, research in this direction may prove not only relevant but also necessary for understanding the interconnection between geopolitical and economic difficulties and their impact on regional development.

Key words: empirical system, regions of Ukraine, GDP.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-14

Постановка проблеми

Територіальний капітал розглядає вплив різних факторів на територіальні активи: матеріальні блага та змащені блага. Основною функцією капіталу є підвищення ефективності та продуктивної економічної діяльності на місцевому рівні. Підхід територіального капіталу корисний не тільки для статистичної перевірки потенційних ідентифікаторів регіонального розвитку, але й для динамічного прогнозування регіональних факторів економічного розвитку.

Емпірично ця концепція використовує набагато більшу базу даних, ніж підходи, включаючи кілька елементів «капіталу», які часто нелегко порівняти, або про які не повідомляється в національних системах бухгалтерського обліку на регулярній (наприклад, щорічній) основі для регіонів чи територій.

Територіальний капітал – це широкий погляд на інтеграцію місцевих (ендогенних) ресурсів, які можна ефективно використовувати для поліпшення регіональної конкурентоспроможності. Концепція територіального капіталу, хоча концептуально чітко виражена, також є широкою концепцією, яка має бути оперативною для емпіричного тестування. Виділяються такі елементи територіального капіталу, що враховують макроекономічні, інституційні, соціально-економічні та демографічні сили для аналізу та прогнозування регіонального розвитку:

– соціальні блага та послуги;
– проміжні матеріальні товари змішаного суперництва;
– приватний основний капітал та давальницькі товари;
– соціальний капітал;
– реляційний капітал;
– людський капітал;
– економіка агломерації, зв’язність і сприйнятливість;
– мережі співпраці;
– реляційні приватні послуги.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Підхід територіального капіталу використовується для обмеженої кількості регіонів та країн. Але існує лише кілька робіт про емпіричну обумовленість підходу територіального капіталу для країн Центральної та Східної Європи з перехідною економікою [3]. По-перше, існуюча війна та тимчасова окупація території України Росією, яка призвела до санкцій Європейського Союзу (Рада Європейського Союзу 2023), створює економічні труднощі політичної та економічної співпраці з Європейським Союзом [4]. Але критики стверджують, що слабкі інститути та управління, а також корупція все ще є серйозними проблемами [5–6]. Також проблеми з даними є особливо серйозними в країнах з перехідною економікою, оскільки дані часто відсутні через короткий період спостереження або розриви в часових рядах або відповідних змінних [7–8]. З іншого боку, доступність даних створює обмеження для застосування повної концептуальної моделі підходу територіального капіталу [9]. Таким чином, ця стаття спеціально розглядає різницю у зростанні між регіонами в Україні через слабке управління та війну в рамках концепції територіального капіталу.

Мета дослідження

Таким чином, ми досліджуватимемо ідентифікатор регіонального економічного розвитку українських регіонів у цьому контексті. Будуть розглянуті такі питання:

– Які змінні концепції територіального капіталу визначають розвиток регіонів в Україні?
– Які змінні, пов’язані з інституціями та структурою управління (корупція), впливають на регіональний розвиток [10]?

Викладення основного матеріалу дослідження

Емпіричні дані щодо підходу до територіального капіталу

Сутність проблеми слабких регіональних показників у залежності від туристичного сектору полягає в переважанні масових споживчих продуктів та послуг, які часто мають обмежену

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-14

цінність для розвитку регіону. Оцінка такої ситуації повинна враховувати як кількісні, так і якісні аспекти територіального капіталу.

Наукові дослідження та літературний аналіз підтверджують важливість територіального підходу у вивченні регіонального економічного розвитку. Однак, цей підхід має свої обмеження. Емпірична література не є однозначною у визначенні значення та конкретного впливу різних аспектів територіального капіталу на регіональний розвиток. І тут важливу роль відіграє емпірична база даних, яка дозволяє уточнити та підтвердити теоретичні висновки (рис. 1).

	Обсяг реалізованої інноваційної промислової продукції (товарів, послуг)					
	2018		2019		2020	
	тис.грн	відсотків до загального обсягу реалізованої продукції (товарів, послуг) промислових підприємств	тис.грн	відсотків до загального обсягу реалізованої продукції (товарів, послуг) промислових підприємств	тис.грн	відсотків до загального обсягу реалізованої продукції (товарів, послуг) промислових підприємств
Україна	**24861143**	**0,8**	**34264893**	**1,3**	**47526197**	**1,9**
Автономна Республіка Крим	…	…	…	…	…	…
області						
Вінницька	512849	0,7	660721	0,9	669645	0,9
Волинська	330588	1,0	219429	0,7	450488	1,4
Дніпропетровська	1143570	0,2	1078100	0,2	6393062	1,4
Донецька	1088328	0,3	14689702	5,2	15398156	6,3
Житомирська	183849	0,4	274401	0,8	74817	0,2
Закарпатська	609656	2,4	138821	0,7	89199	0,4
Запорізька	4165782	2,1	2801756	1,6	1989522	1,2
Івано-Франківська	564035	1,1	141891	0,3	238652	0,5
Київська	1748004	1,4	990486	0,9	1501543	1,0
Кіровоградська	1327867	4,8	977385	4,2	1421588	4,7
Луганська	47312	0,3	461047	3,0	740048	4,6
Львівська	1243427	1,0	871903	0,8	1253064	1,0
Миколаївська	133829	0,3	957227	2,4	1748038	4,1
Одеська	786430	1,1	722192	1,5	824393	1,3
Полтавська	750153	0,4	314443	0,2	4300978	2,7
Рівненська	53436	0,2	7409	0,0	116767	0,4
Сумська	750270	2,1	732201	2,0	412819	1,1
Тернопільська	440260	1,9	153364	0,9	532281	2,4
Харківська	3530114	2,5	3583269	3,0	3157266	2,5
Херсонська	429460	1,7	453549	2,3	420578	1,9
Хмельницька	19442	0,1	219969	0,7	387437	1,0
Черкаська	1176838	1,7	1016093	1,5	549427	0,8
Чернівецька	49276	0,5	26896	0,4	66187	0,8
Чернігівська	886903	2,7	682823	2,6	325742	1,1
міста						
Київ	2889465	0,4	2089816	0,3	4464500	0,9
Севастополь	…	…	…	…	…	…

Рис. 1. Обсяг реалізованої інноваційної промислової продукції (товарів, послуг) [11]

Дані про обсяг реалізованої інноваційної промислової продукції по регіонах наведено на рис. 1.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-14

Серйозні дослідження на емпіричній основі дозволять більш точно визначити, як саме різні аспекти соціального капіталу впливають на регіональний розвиток та конкурентоспроможність. Врахування якісних факторів у вимірюванні територіального капіталу, таких як соціальні мережі, динаміка співпраці та рівень довіри, може допомогти зрозуміти їхню роль у стимулюванні економічного розвитку регіонів.

15.1. Капітальні інвестиції
Capital investment

(млн. грн)

	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Україна	**273116**	**359216**	**448462**	**578726**	**623979**	**508217**
Автономна Республіка Крим	…	…	…	…	…	…
області						
Вінницька	7373	8302	11744	17627	15725	13601
Волинська	6167	6384	7042	8687	12664	9122
Дніпропетровська	25920	33169	42908	60289	66951	58601
Донецька	8304	11902	17269	26979	30594	26598
Житомирська	4044	5573	7722	8742	8467	9270
Закарпатська	3778	4663	5624	7501	9330	5081
Запорізька	7794	11040	15880	15732	14877	15495
Івано-Франківська	9609	7948	9708	9394	9306	6338
Київська	24359	33411	34494	40713	50296	32760
Кіровоградська	4057	6355	7321	7181	7794	6746
Луганська	2060	4122	3330	3219	3358	3259
Львівська	13387	18605	24106	28996	31062	23641
Миколаївська	5990	9730	11178	10099	12549	9505
Одеська	9984	16729	22300	23788	21080	21438
Полтавська	8338	15265	15855	18637	23005	25157
Рівненська	4334	4324	6127	7228	6729	5651
Сумська	3663	5763	6947	7750	7734	7200
Тернопільська	3828	4888	7151	8375	9210	7297
Харківська	11247	16546	19362	23551	22875	20249
Херсонська	3107	4591	7362	8853	12368	7199
Хмельницька	6809	9123	10500	11275	10534	10617
Черкаська	4486	6499	8144	11110	11386	9079
Чернівецька	2789	2669	2992	3721	4097	3320
Чернігівська	3550	5319	7351	8971	8740	7957
міста						
Київ	88139	106296	136045	200308	213248	163036
Севастополь	…	…	…	…	…	…

Рис. 2. Капітальні інвестиції [11]

Окрім того, важливо підкреслити, що детальні емпіричні дані дозволяють не лише встановити, але й попередити можливі проблеми, пов’язані з розвитком регіонів та туризмом. Вони можуть служити основою для розробки стратегій, спрямованих на створення інноваційних

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-14

та сталих туристичних продуктів, які забезпечать не лише економічне, а й культурне та соціальне збагачення регіонів (рис. 2).

Дані про капітальні інвестиції по регіонах наведено на рис. 2.

Описові та економетричні результати

Для вивчення регіонів України використовують шість різних категорій територіального капіталу. Але через обмеженість щодо доступності даних різні виміри (елементи) територіального капіталу повинні функціонувати за допомогою обмеженої кількості змінних [12].

1. Народний капітал (транспортна інфраструктура) орієнтований і функціонує за допомогою щільності автомобільних і залізничних колій (довжина інфраструктури на квадратний км). Звичайно, крім транспортної інфраструктури, державний капітал включає й інші форми капіталу. Але дані про енергетику, телекомунікації та комунальні послуги не є доступними на регіональному рівні у стандартизованій формі в момент написання цієї роботи.

2. Культурний капітал включає гетерогенні зміни, такі як кількість музеїв, готелів.

3. Фізичний капітал позначається запасом капіталу, тобто основними способами (наприклад, машини), та сумою інвестиційного капіталу. Способи фінансування інвестицій включають фінансування за рахунок банківських кредитів та місцевих/регіональних урядів. Альтернативу фінансовим зобов'язанням центрального уряду та міжнародних інвесторів.

4. Змінні, які позначають людський капітал, включають віковий розподіл населення у спрощеній версії (тобто співвідношення дорослих у віці 20–24 року до загальної чисельності) та кількість випускників коледжів та університетів.

5. Інституційний капітал (управління) включає кількість благодійних та некомерційних організацій, а також зареєстровані випадки злочинності та корпції на думку громадян.

6. Рівень, до якого інтелектуальна власність може грати ролі в регіональному розвитку, позначається кількістю захищених документів (наприклад, патентів) як частин підприємницького та реляційного капіталу.

Детальний опис різних категорій територіального капіталу вказує на важливість розуміння індивідуальних складових, які впливають на регіональний розвиток. Важливою є також усвідомлення обмежень і можливих областей для покращення регіональних показників, особливо у контексті обмежень доступності даних.

Висновки

Елементи територіального капіталу мають різний рівень впливу на економічні показники регіонів України. Результати досліджень показують, що люди та їх діяльність (через людський чи культурний капітали) більшою мірою визначають валовий регіональний продукт кожного рівня (рівень ВВП). Результати також говорять про те, що капітальні інвестиції та кількість благодійних організацій мають значний позитивний вплив на регіональний ВВП на душу населення, тоді як неприбуткові організації негативно корелюють із його рівнем.

Трохи інша ситуація спостерігається щодо впливу обраних змінних на збільшення ВВП. На відміну від попереднього випадку, не було виявлено впливу густоти населення на збільшення ВВП. Однак, подібно до регіонального ВВП на душу населення, спостерігається суттєвий позитивний вплив населення у віці 20–24 років і капітальних інвестицій на регіональне зростання. Крім того, спостерігається негативна кореляція основних фондів та благодійних та некомерційних організацій зі збільшенням ВВП.

Вплив чисельності та щільності населення не є значним у порівнянні з рівнем зайнятості. Результати також говорять про те, що частина молодого населення та культурного капіталу мають значний позитивний вплив на коефіцієнт зайнятості. При цьому виявлено значний негативний вплив злочинів та патентів на зайнятість.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-14

Можна зробити висновок, що людський капітал має найбільший позитивний вплив на економічні показники регіонів України серед елементів територіального капіталу. Виявлено сприятливий вплив культурного капіталу, а також (приватного) фізичного капіталу в окремих випадках на регіональний розвиток. Отримані результати свідчать, що транспортна інфраструктура має обмежений вплив чи взагалі впливає економічний стан регіонів. У той час як культурний та фізичний капітал надає очікуваний вплив на регіональний ВВП, транспортна інфраструктура має менше значення, оскільки відмінності між регіонами та в часі недостатньо великі. Хоча інституційний, реляційний та соціальний капітал демонструють неоднозначний вплив на регіональну економіку, підприємницький капітал, здається, не має помітного впливу на регіональний економічний розвиток.

Підхід до територіального капіталу дозволяє детально проаналізувати сильні сторони цих регіонів в Україні та слабкі сторони, а також покращити розуміння розвитку регіональної економіки. Окрім відновлення постраждалих від військових конфліктів економік, результати цієї роботи містять низку висновків регіональної та економічної політики, наприклад, щодо значення елементів територіального капіталу регіонів [13–14]. Результати свідчать про відсутність чіткого впливу підходу територіального капіталу до регіонального розвитку. Однак такий підхід збагачує існуючі моделі регіонального розвитку, що особливо наголошують на важливості запропонованої сторони економіки.

Результати цієї роботи також вказують на важливість державної політики щодо підтримки цих елементів територіального капіталу. Ця політика включає забезпечення та впровадження надійної правової бази для підвищення довіри та зменшення корупції. Україна докладала різних зусиль для покращення структур управління. Однак показники корупції все ще викликають занепокоєння.

Крім того, підтримка освітніх зусиль та інституцій громадянського суспільства, а також сприяння місцевим (муніципальним) інвестиціям у розумінні фундаментальної економіки є ще важливими сферами економічної політики. Щодо наслідків військових конфліктів на сході України, результати ще раз показують, що такі конфлікти руйнують основи економічного розвитку, деградуючи як фізичний, так і нематеріальний територіальний капітал.

Список використаної літератури

1. Каманьї Р., Капелло Р. Територіальний капітал і регіональна конкурентоспроможність: теорія та докази. *Регіональні дослідження*. 2008, № 39. С. 19–39.
2. Капелло Р. Прогнозна територіальна модель регіонального зростання: модель MASST. *Ann Regional Sci*. 2007. №41. С. 753–787.
3. Рада Європейського Союзу. Обмежувальні заходи ЄС у відповідь на кризу в Україні – 2023
4. Маццола Ф., Ло Кашіо І., Епіфаніо Р., Ді Джакомо Г. Територіальний капітал і зростання під час Великої рецесії: локальний аналіз для Італії. *Ann Reg Sci*. 2018. № 60. С. 411–441.
5. Weyerstrass K. Економічна політика на шляху Словенії до єврозони. *Econ Syst*. 2008. № 32. С. 92–102.
6. Weyerstrass K, Haber G, Neck R. Макроекономічна модель для Словенії. *Int Adv Econ Resources*. 2001. № 7. С. 20–3.
7. Welfe W. Моделі країн Середньої та Східної Європи. *Adv Stud Theoret Appl Econometrics.* 2013. № 47. С. 123–190.
8. Гетцнер М., Мороз С. Регіональний розвиток і прямі іноземні інвестиції в країнах з перехідною економікою: кейс для регіонів України. *Посткомуністична економіка*. 2020. № 32. С. 813–832.
9. Тот Б. Територіальний капітал – нечітка концепція, керована політикою: контекст, проблеми та перспективи. *ЄВРОПА XXI*. 2017. № 33. С. 5–19.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-14

10. Ферверда Ю. Саасе А., Унгер Б., Гетцнер М. Оцінка потоків відмивання грошей за допомогою симуляції на основі гравітаційної моделі. *Sci Rep.* 2020. № 10. С. 18–52.
11. ukrstat.gov.ua/druk/publicat/Arhiv_u/Arch_reg.h
12. Державна служба статистики України. URL: www.ukrstat.gov.ua.
13. Бахтреглер Дж., Фратезі У., Перукка Г. Вплив місцевого контексту на впровадження та вплив політики згуртованості ЄС. *Reg Stud*. 2019. № 54. С. 21–34.
14. Фратезі У., Перукка Г. Ефективність регіональної політики ЄС і роль територіальної столиці. *Springer.* 2020. № 20. С. 29–37.

References

1. Camagni, R., & Capello, R. (2008). Terytorialnyi kapital i rehionalna konkurentospromozhnist: teoriia ta dokazy [Territorial capital and regional competitiveness: theory and evidence]. *Rehionalni doslidzhennia*, 39, 19–39 [in Ukrainian]
2. Capello, R. (2007). Prohnozna terytorialna model rehionalnoho zrostannia: model MASST [A forecasting territorial model of regional growth: the MASST model]. *Ann Regional Sci,* 41, 753–787 [in Ukrainian]
3. Rada Yevropeiskoho Soiuzu. Obmezhuvalni zakhody YeS u vidpovid na kryzu v Ukraini – 2023 (2023). [Council of the European Union. EU restrictive measures in response to the crisis in Ukraine. Council of the European Union] [in Ukrainian]
4. Matstsola, F., Lo Kashio, I., Epifanio, R., & Di Dzhakomo, H (2018). Terytorialnyi kapital i zrostannia pid chas Velykoi retsesii: lokalnyi analiz dlia Italii [Territorial capital and growth over the Great Recession: a local analysis for Italy]. *Ann Reg Sci*, 60, 411–441 [in Ukrainian]
5. Weyerstrass, K. (2008). Ekonomichna polityka na shliakhu Slovenii do yevrozony. [Economic policies on Slovenia's road to the euro area]. *Econ Syst*, 32, 92–102 [in Ukrainian]
6. Weyerstrass, K., Haber, G., & Neck, R. (2001). Ekonomichna polityka na shliakhu Slovenii do yevrozony [A macroeconomic model for Slovenia]. *Int Adv Econ Resources* 7, 20–37 [in Ukrainian]
7. Welfe, W. (2013). Modeli krain Serednoi ta Skhidnoi Yevropy [The models of the Middle and East European Countries]. *Adv Stud Theoret Appl Econometrics,* 47, 123–190 [in Ukrainian]
8. Getzner, M., & Moroz, S. (2020). Rehionalnyi rozvytok i priami inozemni investytsii v krainakh z perekhidnoiu ekonomikoiu: keis dlia rehioniv Ukrainy [Regional development and foreign direct investment in transition countries: a case-study for regions in Ukraine]. *Postkomunistychna ekonomika*, 32, 813–832 [in Ukrainian]
9. Tóth, B.I. (2017). Terytorialnyi kapital – nechitka kontseptsiia, kerovana politykoiu: kontekst, problemy ta perspektyvy [Territorial capital – a fuzzy policy-driven concept: context, issues, and perspectives]. YeVROPA XXI, 13–32 [in Ukrainian]
10. Ferwerda, Jv., Saase, A., Unger, B., & Getzner, M. (2020). Otsinka potokiv vidmyvannia hroshei za dopomohoiu symuliatsii na osnovi hravitatsiinoi modeli [Estimating money laundering flows with a gravity model-based simulation]. *Sci Rep,* 1, 18-52 [in Ukrainian]
11. ukrstat.gov.ua/druk/publicat/Arhiv_u/Arch_reg.html
12. Derzhavna sluzhba statystyky Ukrainy [State Statistics Service of Ukraine]. Retrieved from: www.ukrstat.gov.ua [in Ukrainian]
13. Bachtrögler, J., Fratesi, U., & Perucca, G. (2019). Vplyv mistsevoho kontekstu na vprovadzhennia ta vplyv polityky zghurtovanosti YeS [The influence of the local context on the implementation and impact of EU cohesion policy]. *Reg Stud*, 54, 21–34 [in Ukrainian]
14. Fratesi, U., & Perucca, G. (2020). Efektyvnist rehionalnoi polityky YeS i rol terytorialnoi stolytsi [EU Regional policy effectiveness and the role of territorial capital]. *Springer*. 20*,* 29–37 [in Ukrainian]

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-14

Павлець Олексій Дмитрович – студент кафедри програмних засобів Національного університету «Запорізька політехніка». E-mail: alexpaleko@gmail.com, ORCID: 0009-0006-6661-8219.

Дубровін Валерій Іванович – професор кафедри програмних засобів Національного університету «Запорізька політехніка». E-mail: vdubrovin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0848-8202.

Дейнега Лариса Юріївна – старший викладач кафедри програмних засобів Національного університету «Запорізька політехніка». E-mail: deynega.larisa@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0304-4327.

Pavlets Oleksiy Dmytrovych – student of the Department of Software of Zaporizhia Polytechnic National University. E-mail: alexpaleko@gmail.com, ORCID: 0009-0006-6661-8219.

Dubrovin Valery Ivanovych – Professor at the Department of Software of Zaporizhia Polytechnic National University. E-mail: vdubrovin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0848-8202.

Deynega Larisa Yuriivna – Assistant Professor at the Department of Software of Zaporizhzhya Polytechnic National University. E-mail: deynega.larisa@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0304-4327.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-14

UDC 519.6

M.R. PETRYK, D.M. MYKHALYK, V.M. BREVUS, I.V. GOYANYUK
Ternopil National Ivan Pul'uj Technical University

HIGH-PERFORMANCE INFORMATION TECHNOLOGIES TO STUDY FILTRATION PROCESSES IN MEDIA WITH VARIABLE-SIZED NANOPOROUS PARTICLES

This study presents mathematical solutions for the pressure distribution and consolidation coefficient within a nanoporous material characterized by varying compressibility and permeability properties. The mathematical model of nanoporous filtration systems is founded on a phenomenological model developed by the authors. This model encapsulates the intricate dynamics of a two-phase and two-level transport process, known as nanofiltration-consolidation. To solve the defined mathematical problem analytically, the operational Heaviside's method where employed in composition with Laplace integral and Fourier integral transformations. The application of the finite integral cos Fourier transform allowed to get analytical representations for pressure profiles both in interparticle and intraparticle spaces as a function of particle position within media, particles radius, and total time.

To advance understanding of complex nanofiltration processes occurring within media containing nanoporous particles of varied sizes, a specialized software complex has been engineered. The adherence to software development best practices has rendered the software design highly adaptable, allowing for effortless future extensions and improvements. This, in turn, empowers the software with the capacity to seamlessly incorporate new features and enhancements.

As a part the simulation phase, a constructed software suite was used to explore the internal kinetics of filtration processes within multidimensional nanoporous particle media. Numerical modelization results reveal insight into internal processes, such as pressure drop within the intraparticle network, leading to a notable deceleration in nanofiltration kinetics, specifically in relation to nanoporous particles of differing sizes. Among them, the consolidation coefficients indicate that particles of the second-type have a less destroyed cellular structure compared to particles of the first-type. The simulated profiles illustrate that liquid pressure experiences rapid drops at the surface of the particles in contrast to the sections closer to the center of the particles. Furthermore, a more substantial overall decline occurs as vary-sized particles approach the media edge. In the other hand, a noticeable slowing down of the liquid pressure drop can be observed in the micropores of the particles.

Key words: filtration processes, numerical modeling, parallel computing, nanoporous particles media.

М.Р. ПЕТРИК, Д.М. МИХАЛИК, В.М. БРЕВУС, І.В. ГОЯНЮК
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ВИСОКОПРОДУКТИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ В СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ НАНОПОРИСТИМИ ЧАСТИНКАМИ РІЗНОГО РОЗМІРУ

В дослідженні представлено розв'язки математичної моделі для розподілів тиску та коефіцієнту консолідації всередині нанопористого матеріалу, що характеризується різними властивостями стисливості та проникності. Математична модель фільтрації в нанопористому середовищі базується на феноменологічній моделі, розробленій авторами. Ця модель охоплює складну динаміку двофазного та дворівневого процесу транспортування, відомого як нанофільтрація-консолідація. Для відшукання розв'язку поставленої математичної задачі аналітично використовувався операційний метод Хевісайда в поєднанні з інтегральними перетвореннями Лапласа та перетвореннями Фур'є. Застосування скінченного інтегрального перетворення Фур'є cos дозволило отримати аналітичні представлення для профілів тиску як у міжчастинковому, так і внутрішньочастинковому просторах у вигляді функції від положення частинки в середовищі, радіуса частинки та загального часу.

Для покращення розуміння складних процесів нанофільтрації, що відбуваються в середовищах нанопористих частинки різного розміру, був розроблений спеціалізований програмний комплекс. Дотримання найкращих практик розробки програмного забезпечення зробило дизайн програмного забезпечення дуже адаптивним, дозволяючи легко розширювати та вдосконалювати його за потреби. Це, у свою чергу, надало програмному забезпеченню можливість безперешкодно включати нові функції та вдосконалення.

Як частина етапу моделювання, розроблений пакет програмного забезпечення використовувався для дослідження внутрішньої кінетики процесів фільтрації в багатовимірних нанопористих середовищах. Результати чисельного моделювання відкривають розуміння внутрішніх процесів, таких як падіння тиску всередині мережі частинок, що призводить до помітного уповільнення кінетики нанофільтрації, особливо щодо нанопористих частинок різного розміру. Зокрема, коефіцієнти консолідації вказують що частинки другого типу мають менш зруй-

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

новану клітинну структуру у порівнянні з частинками першого типу. Змодельовані профілі показують, що тиск рідини швидко падає на поверхні частинок на відміну від ділянок, розташованих ближче до центру частинок. Крім того, більш істотне загальне зниження відбувається, коли частинки різного розміру наближаються до краю середовища. З іншого боку, в мікропорах частинок можна спостерігати помітне уповільнення падіння тиску рідини.

Ключові слова: процеси фільтрації, чисельне моделювання, паралельні обчислення, середовища з нанопористими частинками.

Introduction

In various domains such as environmental protection, emission reduction, medicine, and the filtration of liquids or gases, the design of intricate systems and processes necessitates the creation of high-performance information systems. These systems are crucial for conducting research based on scientifically grounded mathematical models that provide a robust physical basis for understanding the composition of system elements, their interconnections, and the parameters that dictate their effectiveness and functionality.

The proposed information technology for the investigation of nanoporous filtration systems is founded on a phenomenological model previously developed by the authors. This model encapsulates the intricate dynamics of a two-phase and two-level transport process, known as "nanofiltration-consolidation", occurring within the system's "interparticle space – nanoporous particles". It comprehensively addresses the complex interplay between the internal flow of adsorbed substances from the nanopores of spherical particles and the mass flow of substances residing in the interparticle space [1, 2].

Problem Formulation

The nanoporous medium is characterized as a multi-level porous system featuring networks for swift fluid flows within both interparticle and intraparticle spaces. Within this context, we examine nanoporous particles containing a liquid substance comprised of various chemical constituents.

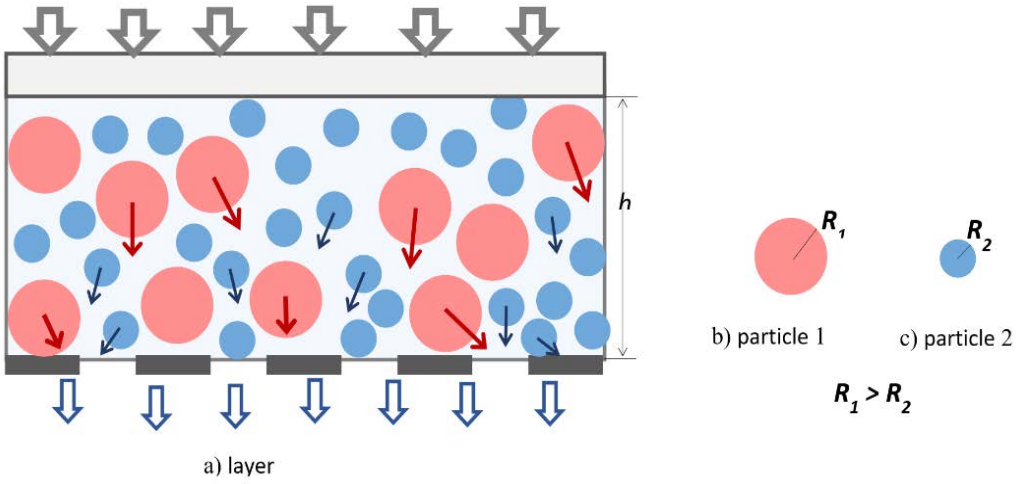


Fig. 1. Liqued flow interactions in a two-level nanopores system: (1) – intraparticle space and (2) – intraparticle space spaces

These particles collectively constitute a nanoporous layer, which undergoes one-dimensional compression (see Fig. 1). Substance flows intermingle across all the spaces under consideration. The separation of nanoporous particles is facilitated by a porous membrane. Each layer of particles is regarded as a two-pore medium.

In Figure 1, two levels of the elementary volume are depicted: Level 1(a) corresponds to the system of macropores in the interparticle space, while Level 2 (b and c) pertains to the system

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

of nanopores within intraparticle spaces. This second level encompasses two subspaces containing particles of different sizes: intraparticle space 1, which consists of nanoporous particles with a radius of at least R_1, and intraparticle space 2, encompassing nanoporous particles with a radius of at least R_2 (where $R_1 > R_2$).

Mathematical Model Definition

The intricate system of nanofiltration and nano diffusion within spaces containing nanoporous particles of varying sizes is described by a mathematical model. This model considers specific physical factors and feedback interactions, and it is expressed as a system of boundary value problems comprising partial differential equations. These equations pertain to the three interconnected spaces defined in relation to the liquid phase, encompassing the interparticle space and two intraparticle spaces.

Consolidation** equation **in interparticle space. To find the solution to the equation for layers with variable-sized nanoporous particles in the domain $D_1 = \{(t,z) : t > 0, \quad 0 < z < h\}$

$$\frac{\partial P_1(t,z)}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} - \beta_1 \frac{\varepsilon}{R_1} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_1} P_2(t, x_1, z) dx_1 - \beta_2 \frac{1-\varepsilon}{R_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_2} P_3(t, x_2, z) dx_2 \tag{1}$$

with initial condition

$$P_1(t,z)\big|_{t=0} = P_E \tag{2}$$

and boundary conditions

$$P_1(t,z)\big|_{z=0} = 0\ , \ \frac{\partial P_1}{\partial z}\big|_{z=h} = 0 \tag{3}$$

Consolidation equations for particle. To find the solutions of the equations for the nanoporous particles (radius R_i) in the domain

$$D_i = \{(t, x_i, z) : t > 0, \quad |x_i| < \mathrm{R}_i, \quad 0 < z < \mathrm{h}, \ i = 2,3\}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = b_i \frac{\partial^2 P_i}{\partial x_j^2}, \ i=\overline{2,3}, \ j=\overline{1,2} \tag{4}$$

with initial condition

$$P_i\big|_{t=0} = P_E(z), \ i = \overline{2,3} \tag{5}$$

and boundary conditions

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\Big|_{x_j=0} = 0\ , \ P_i(t, x_j, z)_{|x_j=R_j} = P_1(t,z) \tag{6}$$

Here: P_1 – liquid pressure in interparticle space, P_2, P_3 – liquid pressure in intraparticle space 1 and intraparticle space 2 (interior of spherical particles of various size) in accordance, b_1 – consolidation coefficient in interparticle space, b_2, b_3 – consolidation coefficients in intraparticle space for various particles, β_1, β_2 – elasticity factor of various particles, h – layer thickness, R_1, R_2 – radius of various particles.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

Finding Analytical Solution

To solve the defined mathematical problem analytically, we employ the operational Heaviside's method, Laplace integral, and Fourier integral transformations. The application of the finite integral Fourier transform (cos) is discussed in [3, 4].

$$F_c\left[P_i\left(t,x_j,z\right)\right]=\int_0^{R_j}P_i(t,x_j,z)\vartheta\left(x_j,\eta_{m_j}\right)dx_j=\int_0^{R_j}P_i(t,x_j,z)\cos\eta_{m_j}x_j dx_j\equiv P_{im_j}\left(t,z\right),$$

$$F_c^{-1}\left[P_{im_j}\left(t,z\right)\right]=\sum_{m_j=0}^{\infty}P_{im_j}\left(t,z\right)\frac{\vartheta\left(x_j,\eta_{m_j}\right)}{\left\|\vartheta\left(x_j,\eta_{m_j}\right)\right\|^2}=\frac{2}{R_1}\sum_{m_1=0}^{\infty}P_{im_j}(t,z)\cos\eta_{m_j}x_j\equiv P_i\left(t,x_j,z\right),$$

$$F_c\left[\frac{\partial P_i}{\partial x_j^{\,2}}\right]=\int_0^{R}\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_j^{\,2}}\vartheta\left(x_j,\eta_{m_j}\right)dx_j=-\eta_{m_j}^2P_{im_j}(t,z)+(-1)^{m_j}\,\eta_{m_j}P_1\left(t,z\right),$$

where: $\vartheta\left(x_j,\eta_{m_j}\right)=\cos\eta_{m_j}x_j$, $\eta_{m_j}=\dfrac{2m_j+1}{2R_j}\pi$, $\quad m_j=\overline{0,\infty}$ spectral functions and spectral numbers of the integral Fourier cos-transformation.

Consiquentionaly, solutions of the problems B_1, B_2 are obtained:

$$P_2\left(t,x,z\right)=P_E\left(z\right)\frac{2}{R_1}\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1}}{\eta_{m_1}}e^{-b_2\eta_{m_1}^2t}\cos\eta_{m_1}x+\frac{2}{R_1}\sum_{m_1=0}^{\infty}(-1)^{m_1}b_2\eta_{m_1}\int_0^t e^{-b_2\eta_{m_1}^2\left(t-\tau\right)}P_1\left(\tau,z\right)dz\cos\eta_{m_1}x,\quad |x|\le R_1$$

$$P_3\left(t,x,z\right)=P_E\left(z\right)\frac{2}{R_2}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_2}}{\eta_{m_2}}e^{-b_3\eta_{m_2}^2t}\cos\eta_{m_2}x+\frac{2}{R_3}\sum_{m_2=0}^{\infty}(-1)^{m_2}b_3\eta_{m_2}\int_0^t e^{-b_3\eta_{m_2}^2\left(t-\tau\right)}P_1\left(\tau,z\right)dz\cos\eta_{m_2}x,\ |x|\le R_2 \qquad (7)$$

By substituting the expressions from equation (7) into the consolidation equation (1), and through a sequence of transformations, and subsequently applying the integral Laplace transform as outlined in [3], and the finite integral Fourier transform (sin), the problem (1)–(3) is addressed.

$$F_s\left[P_1^*\left(s,z\right)\right]=\int_0^h P_1^*\left(s,z\right)\cdot V\left(z,\lambda_n\right)dz=\int_0^h P_1^*\left(s,z\right)\cdot\sin\lambda_n z dz=P_{1,n}^*(s)$$

$$F_s^{-1}\left[P_{1,n}^*\left(s\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}P_{1,n}^*\left(s\right)\frac{V(z,\lambda_n)}{\left\|V(z,\lambda_n)\right\|^2}=\frac{2}{h}\sum_{n=0}^{\infty}P_{1,n}^*\left(s\right)\sin\lambda_n z\equiv P_1^*\left(s,z\right)$$

$$F_s\left[\frac{d^2P_1^*\left(s\right)}{dz^2}\right]=-\lambda_n^2P_{1,n}^*\left(s,z\right)$$

where $V(z,\lambda_n)=\sin\dfrac{2n+1}{2h}\pi$ – are the spectral functions and $\lambda_n=\dfrac{2n+1}{2h}\pi$ are the spectral numbers of integral Fourier sin-transformation.

Applying the integral operator of the inverse integral Laplace transformation to expression (8) we obtain in [5] and taking into account series [3] we finally obtain solution for pressure P_1

$$P_{1_n}^*(s)=\left(b_1\lambda^n+s+\beta_1\varepsilon\frac{\sqrt{b_2}}{R_1}\sqrt{s}\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1\right)+\beta_2\left(1-\varepsilon\right)\frac{\sqrt{b_3}}{R_2}\sqrt{s}\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2\right)\right)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left(2+\frac{\beta_1\varepsilon}{R_1}\sqrt{\frac{b_2}{s}}th\left(\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1\right)+\frac{\beta_2\left(1-\varepsilon\right)}{R_2}\sqrt{\frac{b_3}{s}}th\left(\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2\right)\right)P_E\frac{1}{\lambda_n} \qquad (8)$$

After introducing the notation

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

$$\phi\left(s,\lambda^n\right)=s+b_1\lambda^n+\beta_1\varepsilon\frac{\sqrt{b_2}}{R_1}\sqrt{s}\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1\right)+\beta_2\left(1-\varepsilon\right)\frac{\sqrt{b_3}}{R_2}\sqrt{s}\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2\right)$$

and applying the integral operator of the inverse Laplace transformation, we obtain the formula for making the transition to the original in equation (8):

$$\begin{aligned}P_{1,n}(t)=P_E\frac{2}{\lambda_n}L^{-1}\left[\frac{1}{\phi\left(s,\lambda^n\right)}\right]+P_E\frac{\beta_1\varepsilon}{\lambda_n}L^{-1}\left[\frac{1}{\phi\left(s,\lambda^n\right)}\right]*L^{-1}\left[\frac{sh\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1}{\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1ch\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1}\right]+\\+P_E\frac{\beta_2(1-\varepsilon)}{\lambda_n}L^{-1}\left[\frac{1}{\phi\left(s,\lambda^n\right)}\right]*L^{-1}\left[\frac{sh\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2}{\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2ch\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2}\right]\end{aligned}\tag{9}$$

here L^{-1} is integral operator of inverse Laplce transformation and * is an operator of both functions convolution. As follows, by making replacements $i\sqrt{s}=\nu$ and $s=-\nu^2$, we obtain next equation:

$$\nu^2-b_1\lambda_n^2-\beta_1\varepsilon\nu\frac{\sqrt{b_2}}{R_1}tg\left(\frac{\nu R_1}{\sqrt{b_2}}\right)-\beta_2(1-\varepsilon)\nu\frac{\sqrt{b_3}}{R_2}tg\left(\frac{\nu R_2}{\sqrt{b_3}}\right)=0\tag{10}$$

And based on Heviside's theorem one get the equation of back to original [4]:

$$\begin{aligned}\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s+b_1\lambda^n+\beta_1\varepsilon\frac{\sqrt{b_2}}{R_1}\sqrt{s}\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1\right)+\beta_2\left(1-\varepsilon\right)\frac{\sqrt{b_3}}{R_2}\sqrt{s}\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2\right)}\right]=\\=\sum_{\square=0}^{\infty}\frac{e^{st}}{\frac{d}{ds}\left[s+b_1\lambda^n+\beta_1\varepsilon\frac{\sqrt{b_2}}{R_1}\sqrt{s}\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1\right)+\beta_2\left(1-\varepsilon\right)\frac{\sqrt{b_3}}{R_2}\sqrt{s}\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2\right)\right]}\Bigg|_{s=-\nu_{\square n}^2}\end{aligned}\tag{11}$$

where ν_{jn}, $j=\overline{1,\infty}$; $n=\overline{0,\infty}$ are roots of the transcendental equation above.

After transforming the denominator, expression (11) will have the final form:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\nu_{jn}^2t}}{1+\Phi\left(\nu_{jn}\right)}$$

Finally, the analytical solution fort P_1 has a form of equation:

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

$$P_1(t,z) = P_E \frac{2}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\nu_{jn}^2 t}}{\Phi(\nu_{jn})}\left[1-\beta_1\varepsilon\frac{2}{R_1^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-b_2\left(\eta_k^2-\frac{\nu_{jn}^2}{b_2}\right)t}}{\left(\eta_k^2-\frac{\nu_{jn}^2}{b_2}\right)}-\right.$$
$$\left.-\beta_2(1-\varepsilon)\frac{2}{R_2^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-b_3\left(\mu_k^2-\frac{\nu_{jn}^2}{b_3}\right)t}}{\left(\mu_k^2-\frac{\nu_{jn}^2}{b_3}\right)}\right]\frac{\sin\lambda_n z}{\lambda_n} \qquad (12)$$

The equation represent liquid pressure distribution in the interparticle space.

ν_{jn}, j=$\overline{1,\infty}$; $n = \overline{0,\infty}$ are the roots of the transcendental equation (10).

$\eta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2R_1}$, $k = \overline{0,\infty}$ are the roots of equation $ch\left(\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1\right) = 0$, ($s=i\eta$, i- imaginary unit),

$\mu_k = \frac{(2k+1)\pi}{2R_2}$, $k = \overline{0,\infty}$ are the roots of equation $ch\left(\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2\right) = 0$, ($s=i\mu$)

$\lambda_n = \frac{2n+1}{2h}\pi$ are the spectral numbers of integral Fourier transformation (Sin-Fourier).

Numerical modelization and discussion

During the simulation phase, a dedicated software suite was created to explore the internal kinetics of filtration processes within multidimensional nanoporous particle media. This software complex was developed in adherence to modern software design principles and best practices in software engineering [6, 7].

The simulation results of the filtration kinetics process are presented below. The simulations employed the following parameters: h = 0.01 m, R_1 = 0.008 m, R_2 = 0.004 m, $b_1 = 10^{-7}$ m^2/s, $b_2 = 2\ 10^{-7}$ m^2/s, $b_3 = 10^{-8}$ m^2/s, β_1 = 0.1, β_2 = 0.15, and ε = 0.5. It was assumed in the simulations that the media under investigation comprised two types of multidimensional nanoporous particles with distinct kinetic properties.

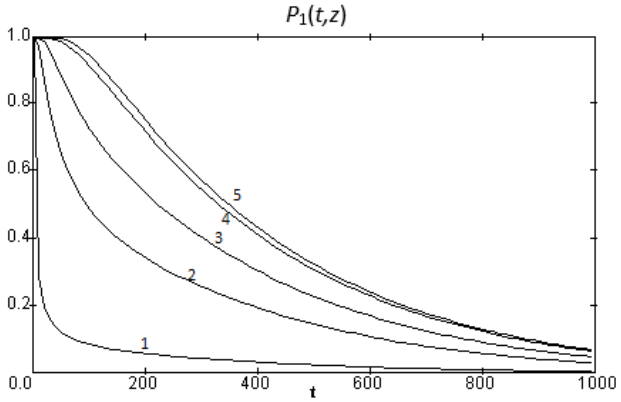


Fig. 2. Distribution of dimensionless pressure in interparticle space $P_1(t,z)$: 1 – Z = 0.05, 2 – Z = 0.3, 3 – Z = 0.5, 4 – Z = 0.7; 5 – Z = 1.0 (Z=z/h)

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

Figure 2 presents pressure profile distributions within the interparticle space, denoted as $P_1(t, z)$, across various sections of nanoporous media. Five profiles were simulated, each corresponding to different sections of the porous media. It's essential to note that pressures in all these layers initiate from a state of full saturation and gradually progress toward near-complete depletion.

It's evident from the figures that the pressure profiles are not uniformly distributed. The most significant pressure drop occurs at Z = 0.05, near the lower part of the filtration media. In contrast, layers situated higher up maintain pressure for a more extended duration, signifying a higher level of saturation in those regions.

Figure 3 illustrates dimensionless liquid pressure profiles within porous particles of the first type, denoted as $P_2(t, x, z)$, as a function of time (t [s]). The temporal pressure profiles were simulated for various layer sections, including Z = 1 (at the top of the layer), Z = 0.5, and Z = 0.25 (representing middle sections of the layer), and Z = 0 (at the surface of the filter medium).

From the provided images, it is evident that the liquid pressure is highest at the center of the particles (X = 0.05) and decreases as it moves towards the liquid expulsion point on the particle surface at X = 1. Notably, at the edge of the particles, the pressure in the micropores approaches the pressure in the macropores, denoted as $P_1(t, z)$. Additionally, it's noteworthy that the liquid pressure experiences a more rapid decline on the particle's surface (X = 1) compared to the middle sections (X = 0.4, 0.6, 0.8) or the central axis of the particles (X = 0.05).

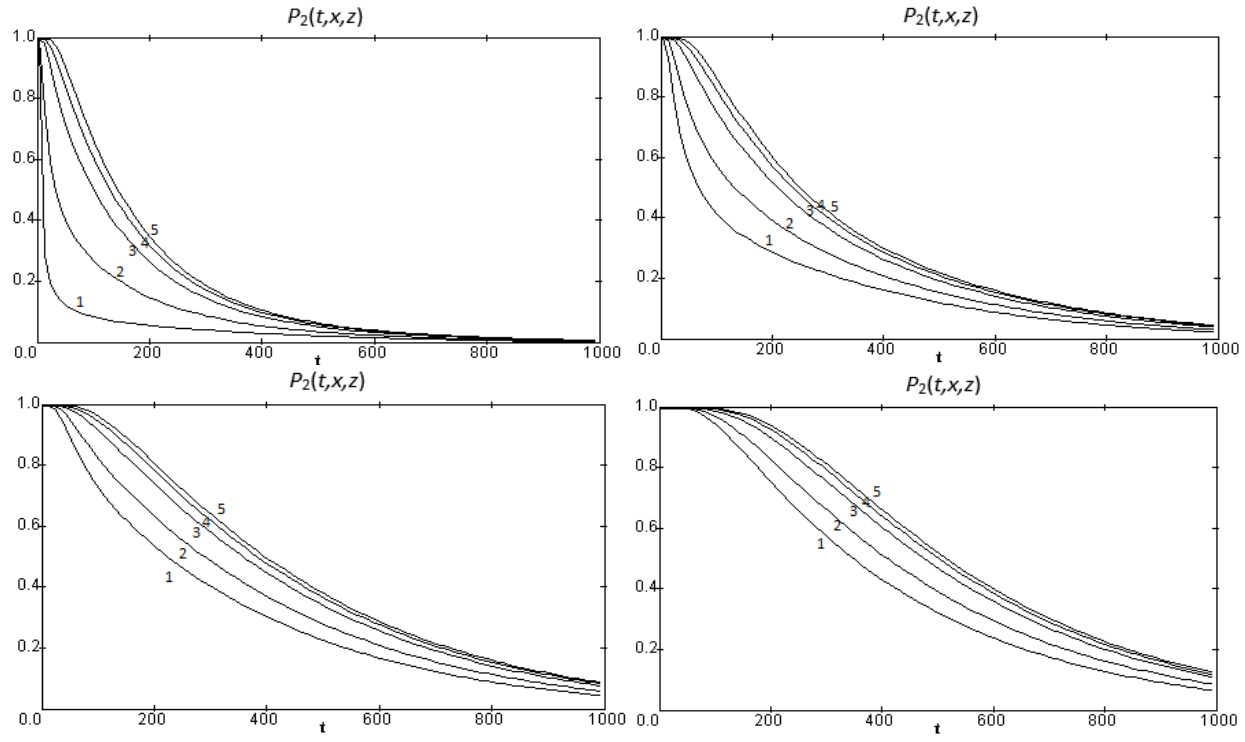


Fig. 3. Distribution of dimensionless pressure in intraparticles space $P_2(t,x,z)$ in time (t [s]) for sections: a) Z = 0.05; b) Z = 0.25; c) Z = 0.5; d) Z = 1 (Z = z/h); 1 – X = 1.0; 2 – X = 0.8; 3 – X = 0.6; 4 – X = 0.4; 5 – X= 0.05 ($X = x_1/R_1$)

The discrepancy in temporal pressure profiles becomes more pronounced for particles situated at the top of the layer (Z = 0). However, even in sections near the central axis of the particles (X = 0), the liquid pressure decreases rather swiftly.

In Figure 4, we depict the temporal profiles of dimensionless liquid pressure within porous particles of the second type (small). Similar to the previous example, these temporal pressure profiles were simulated for four distinct sections of the media layer: Z = 1, 0.25, 0.5, and 0.05.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

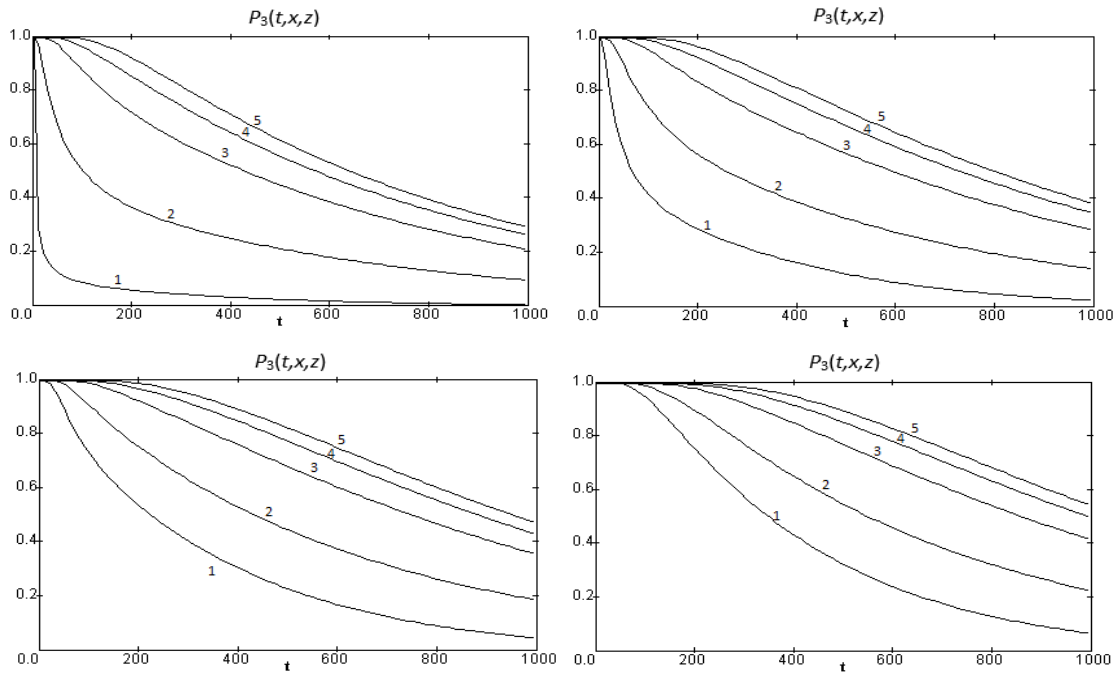


Fig. 4. Distribution of dimensionless pressure in the intraparticles space $P_3(t,x,z)$ in time (t [s]) for sections: a) Z = 0.05; b) Z = 0.25; c) Z = 0.5; d) Z = 1 (Z = z/h); 1 – X = 1.0; 2 – X = 0.8; 3 – X = 0.6; 4 – X = 0.4; 5 – X = 0.05 (X = x_2/R_2)

The consolidation coefficient for these second-type particles signifies a less disrupted cellular structure compared to the first-type particles. As observed in the previous instance, the presented profiles illustrate that liquid pressure experiences rapid drops at the surface of the particles (X = 1) in contrast to the sections closer to the center of the particles (X = 0.05). Furthermore, a more substantial overall decline occurs as Z approaches 0. Nonetheless, it's worth noting that a noticeable slowing down of the liquid pressure drop can be observed in the micropores of the particles.

Conclusions

The mathematical solution has been constructed for the liquid pressure distribution and consolidation coefficient in a real nanoporous material characterized by distinct compressibility and permeability properties. These results indicate a deceleration in pressure drop within the intraparticle network and a corresponding slowdown in nanofiltration kinetics for nanoporous particles of different sizes.

To facilitate the study of complex nanofiltration processes within media featuring various-sized nanoporous particles, a specialized software complex was developed using cutting-edge science-intensive information technologies, closely aligned with the described mathematical model. Key objectives in designing this software complex included enabling rapid research into nanofiltration processes for scientists, compatibility with modern platforms, high-performance numerical modeling, and a user-friendly interface

Bibliography

1. Theory of fluid flows through natural rocks / G. Barenblatt, V. Entov, V. Ryzhik. Dordrecht: Kluwer, 1990. 396 c.
2. Numerical and Analytical Modelling of Solid-Liquid Expression from Soft Plant Materials / Petryk M., Vorobiev E. AIChE J. Wiley USA. 2013. vol. 59, issue 12, pp. C. 4762–4771.
3. Doetsch G. Handbuch der Laplace-Transformation: Band I: Theorie der Laplace-Transformation. G. Doetsch. Springer Basel AG. 2013. 438 c.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

4. Інтегральні перетворення Фур'є-Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах. М.П. Ленюк, М.Р. Петрик. Наукова думка. 2000. 360 с.
5. Methods of Mathematical Modeling and Identification of Complex Processes and Systems on the basis of High-performance Calculations. M. Petryk, T. Gancarczyk, O. Khimich. Scientific Publishing University of Bielsko-Biala. Bielsko-Biala, Poland. 2021. 195 c.
6. Intellectual information technologies for the study of filtration in multidimensional nanoporous particles media. D. Mykhalyk, M. Petryk, I. Boyko, Y. Drohobytskiy, V. Kovbashyn. CEUR Workshop Proceedings. ITTAP'2022: 2nd International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems. 2022. С. 175–185.
7. Automated Parallelization of Software for Identifying Parameters of Intraparticle Diffusion and Adsorption in Heterogeneous Nanoporous Media. M. Petryk, A. Doroshenko, D. Mykhalyk, O. Yatsenko. Mathematical Modeling and Simulation of Systems, selected papers of 17th International Conference MODS'2022 – 2023. С. 33–47

References

1. Barenblatt, G., Entov, V., & Ryzhik, V. (1990). Theory of fluid flows through natural rocks. Dordrecht: Kluwer [in English]
2. Petryk, M., & Vorobiev, E. (2013). Numerical and Analytical Modelling of Solid-Liquid Expression from Soft Plant Materials. AIChE,59(12).4762–4771 [in English]
3. Doetsch, G. (2013). Handbuch der Laplace-Transformation: Band I: Theorie der Laplace-Transformation. Springer Basel AG [in English]
4. Lenyuk, M., & Petryk, M. (2000). Integral Fourier-Bessel transformations with a spectral parameter in problems of mathematical modeling of mass transfer in heterogeneous media [Integral Fourier, Bessel transforms with spectral parameters in problems of mathematical modeling of mass transfer in heterogeneous media]. Kyiv: Naukova Dumka [in Ukrainian]
5. Petryk, M., Gancarczyk, T., & Khimich, O. (2021). Methods of Mathematical Modeling and Identification of Complex Processes and Systems on the basis of High-performance Calculations. Scientific Publishing University of Bielsko-Biala. Bielsko-Biala, Poland [in English]
6. Mykhalyk, D., Petryk, M., Boyko, I., Drohobytskiy, Y, & Kovbashyn, V. (2022). Intellectual information technologies for the study of filtration in multidimensional nanoporous particles media. CEUR Workshop Proceedings. ITTAP 2022. pp. 175–185 [in English]
7. Petryk, M., Doroshenko, A., Mykhalyk, D., & Yatsenko, O. (2023). Automated Parallelization of Software for Identifying Parameters of Intraparticle Diffusion and Adsorption in Heterogeneous Nanoporous Media. Mathematical Modeling and Simulation of Systems, selected papers of 17th International Conference MODS'2022. pp. 33–47 [in Ukrainian]

Петрик Михайло Романович – д.ф.-м.н., завідувач кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. E-mail: Mykhaylo_Petryk@tu.edu.te.ua, ORCID: 0000-0001-6612-7213.

Михалик Дмитро Михайлович – к.т.н., доцент кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. E-mail: D.Mykhalyk@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9032-695X.

Бревус Віталій Миколайович – к.т.н., доцент кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. E-mail: v_brevus@tntu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7055-9905.

Гоянюк Іван Васильович – здобувач кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. E-mail: ivan.goyanyuk@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3760-1929.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

Petryk Mykhaylo Romanovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Software Engineering Department of Ternopil National Ivan Pul'uj Technical University. E-mail: Mykhaylo_Petryk@tu.edu.te.ua, ORCID: 0000-0001-6612-7213.

Mykhalyk Dmytro Mykhailovych – Ph.D in Technical Sciences, Senior Lecturer at the Software Engineering Department of Ternopil National Ivan Pul'uj Technical University. E-mail: D.Mykhalyk@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9032-695X.

Brevus Vitaly Mykolaiovych – Ph.D in Technical Sciences, Senior Lecturer at the Software Engineering Department of Ternopil National Ivan Pul'uj Technical University. E-mail: v_brevus@tntu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7055-9905.

Goyanyuk Ivan Vasylovych – Postgraduate Student of Software Engineering Department of Ternopil National Ivan Pul'uj Technical University. E-mail: ivan.goyanyuk@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3760-1929.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-15

УДК 004.75+004.67:681.5

С.М. ТКАЧЕНКО
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

КЕРУВАННЯ СКИДАЛЬНИМ ВІЗКОМ ПОРТОВОГО ЕЛЕВАТОРА ЯК НЕПОЗИЦІОНОВАНИМ МЕХАНІЗМОМ

У роботі розглядається модель керування розвантажувальним візком елеватора, яка доповнює існуючі загальні моделі керування транспортно-технологічним обладнанням що дозволяє формалізувати процес написання програми керування візком. У процесі досліджень сформульована проблема розробки і впровадження програмного забезпечення для систем керування транспортно-технологічними маршрутами зерна з точки зору побудови математичних моделей керування транспортуючими механізмами та маршрутами у частині керування розвантажувальним візком на портових елеваторах і залізобетонних елеваторах старих конструкцій. Показано причину і перспективу подальшого використання розвантажувального візка у технології переміщення зерна та обґрунтовано, чому раніше опубліковані моделі керування обладнанням не можуть застосовуватись до вирішення задачі як є. Проведено аналіз ймовірної технологічної схеми вивантаження зерна у залізобетонному силосному корпусі на ПрАТ «Херсонський комбінат хлібопродуктів» за фотоматеріалами з відкритих джерел. Обґрунтовано ймовірну кількість, схему розташування у надсилосному поверсі, умови експлуатації візків, кількість їх цільових позицій. Показано особливості використання розвантажувального візка під час керування транспортно-технологічним маршрутом. Розглянуто можливість використання уніфікованого представлення раніше відомої моделі керування непозиціонованими механізмами для керування скидальним візком у складі транспортно-технологічного маршруту зерна. Показано, як використати раніше відому загальну модель керування непозиціонованим механізмом для керування візком. Для цього запропоновано інкапсулювати у перехідний стан моделі керування непозиціонованим механізмом, віртуальний граф керування скидальним візком під час його переміщення. Перехідний стан моделі керування відповідає операції з переміщення візка по конвеєру на стадії підготовки маршруту до транспортування зерна. Граф керування переміщенням візка представлено у вигляді функціональної мережі Петрі та пояснювальної таблиці до нього. Показані переваги запропонованого графу з точки зору підвищення уніфікації підходу, надійності програмного рішення, можливостей тиражування, інтеграції у загальні підходи і моделі керування транспортно-технологічними маршрутами елеватора.

Ключові слова: портовий елеватор, керування розвантажувальним візком, керування транспортно-технологічним обладнанням, непозиціонований механізм, детерміновані стани маршруту, віртуальний граф, граф станів приводу скидального візка.

S.M. TKACHENKO
National Technical University “Dnipro Polytechnic”

CONTROLLING THE PORT ELEVATOR DISCHARGE TROLLEY AS A NON-POSITIONED MECHANISM

The paper considers the elevator unloading trolley control model, which complements the existing general transport and technological equipment control models, which allows formalizing the process of writing the trolley control program. In the process of research, the problem of developing and implementing software for control systems of grain transport and technological routes is formulated from the point of view of construction mathematical models of transport mechanisms and routes control in the part of control of the unloading trolley on port grain storages and reinforced concrete grain storages of old buildings. The reason and perspective of the further use of the unloading trolley in the technology of grain movement is shown, and it is justified why the previously published equipment control models cannot be applied to the solution of the problem as it is. An analysis of the probable technological scheme of grain unloading in a reinforced concrete silo at PrJSC "Kherson Bread Products Plant " was carried out based on photo materials from open sources. The probable number, location scheme in the under-silo floor, operating conditions of the trolley, and the number of their target positions are justified. Features of the use of the unloading trolley during the management of the transport and technological route are shown. The possibility of using a unified representation of a previously known control model of non-positioned mechanisms for controlling a dump trolley as part of a grain transport-technological route is considered. It is shown how to use the previously known general control model of a non-positioned mechanism to control a cart. For this purpose, it is proposed to encapsulate in the transition state of the control model of the non-positioned mechanism, a virtual graph of the control of the dump trolley during its movement. The transition state of the control model corresponds to the operation of moving the trolley along the conveyor at the stage of route preparation for grain transportation. The trolley movement control graph is presented in the form of a functional Petri net and an explanatory table to it. The advantages of the proposed graph from the point of view of increasing the unification of the approach, the reliability of the software solution, the possibilities of replication, integration into general approaches and the management model of the transport and technological routes of the grain storage are shown.

Key words: port grain storage, unloading trolley control, transport and technological equipment control, non-positioned mechanism, deterministic route states, virtual graph, dump trolley drive state graph.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-16

Постановка проблеми

В умовах діючої військової агресії росії суттєву роль для успішної економічної діяльності аграрних підприємств України та підтримки світової продовольчої безпеки є розвиток та підвищення продуктивності портових елеваторів, розташованих у Херсонеській, Миколаївській, а також Одеській областях. З подальшим звільненням територій виникне потреба у відновленні чи будівництві нових елеваторів у портах Бердянська, Маріуполя, Севастополя, Керчі. Спеціалізовані машинобудівні заводи України випускають повний перелік необхідного технологічного обладнання для елеваторів, а крім того, на ринку присутні й зарубіжні виробники, такі як GSI, Araj, Petkus, Neuero, Law і багато інших. Будь-яке обладнання, у тому числі, і для портових елеваторів, вимагає ефективного керування, яке на сьогодні неможливе без використання інформаційних та кіберфізичних систем різного рівня впливу – від окремого обладнання до керування ресурсами і підприємством. Одна з необхідних складових елеватора чи зерносховища будь-якого призначення – транспортно-технологічне обладнання із відповідними системами керування як окремим устаткуванням, так і технологічними маршрутами. Існують проблеми розробки програмного забезпечення до таких систем з точки зору побудови загальних математичних моделей керування маршрутами і транспортним обладнанням. Ці проблеми посилюється порівняно великою кількістю (до сотні й більше) маршрутів на кожному окремому підприємстві, транспортних механізмів (десятки), різноманітністю цих механізмів. Окремо серед них стоїть проблема побудови моделі керування розвантажувальним візком, який використовується переважно на портових елеваторах, а також на залізобетонних елеваторах старих конструкцій. При цьому процес експлуатації розвантажувального візка значною мірою відрізняється від експлуатації іншого транспортно-технологічного обладнання елеватора.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На сьогодні існує ряд наукових робіт з практичним впровадженням на елеваторах України, які надають універсальні математичні моделі керування загальним непозиціонованим обладнанням транспортно-технологічних маршрутів саме елеваторів: вентиляторами, норіями, транспортерами [1, 2]. Розроблено і апробовано на діючих елеваторах моделі керування позиціонованими механізмами, як мінімум, на рівні технологічного маршруту: засувками ланцюгових конвеєрів, розподільчих станцій [3]. Але портові елеватори працюють із збіжжям, яке має йти на експорт морським шляхом. Травмування під час переміщення такого збіжжя транспортним обладнанням елеватора призведе до підвищеної вірогідності псування у трюмах корабля й зниження його споживацьких характеристик. З іншого боку, силоси портових елеваторів мають більші обсяги, більшу висоту вертикальних сховищ та більш продуктивне транспортно-технологічне обладнання порівняно, наприклад, із лінійними чи елеваторами переробних підприємств [4]. Відповідно, зерно на таких елеваторах більш схильне до механічних пошкоджень під час переміщення. Тому для портових елеваторів проектанти сьогодні і у перспективі схильні застосовувати стрічкові, більш ощадні до зерна конвеєри. Підхід до керування ними не відрізняється від загальних підходів до транспортно-технологічного обладнання елеватора [2, 3], але тут на верхніх галереях та на надсилосних поверхах старих конструкцій елеваторів замість розвантажувальних засувок технологія вимагає застосувати скидальний візок. З точки зору побудови моделі керування рухом візку, як складової системи керування транспортно-технологічними маршрутами елеватора, його поведінка виявляється більш складною, ніж поведінка непозиціонованого чи простого позиціонованого механізму. Тому не можна її описати методом приведення задачі керування позиціонованого механізму до графу керування позиціонованим механізмом, показаним у роботі [3] для засувок, через велику варіативність цільових позицій. Таким чином, виникає задача побудови спеціалізованого графу керування скидальним візком.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-16

Мета дослідження

Полягає в розробці методу керування зерновим скидальним візком для елеватора, що дозволяє побудувати на його основі спеціалізовану кіберфізичну систему для подальшого інтегрування її у автоматизовану систему керування транспортно-технологічними маршрутами портового елеватора.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо будову елеваторів, де використовуються зерноскидальні візки на прикладі ПрАТ «Херсонський комбінат хлібопродуктів». Аналіз зображень з Google Maps [5] показує, що це портовий елеватор, який складається із залізобетонного силосного корпусу та металевих ємностей. Корпус має 6 рядів по 11 штук циліндричних зернових силосів, разом 11*6 = 66. Але, зазвичай, у бетонних елеваторах з циліндричними силосами під зберігання використовуються також і міжсилосні простори, так звані «зірки». Зірок на одну менше у ряду, ніж силосів, і рядів зірок на 1 менше (оскільки вони утворені внутрішніми) стінами силосів. Тобто, зірок 10*5 = 50. Разом маємо 116 силосів зберігання різної форми, у яких із надсилосної галереї має вивантажуватись зерно. Оцінка за зовнішнім виглядом фотографій, дозволяє припустити, що елеватор має в надсилосному поверсі 6 стрічкових конвеєрів з шістьма скидальними візками. Може бути й по 5 візків з конвеєрами, але приймаємо максимум. При цьому на 5 візках встановлено по одному перекидному клапану, які забезпечують вивантаження зерна на дві сторони. Шостий візок, нижній на рисунку 1, має одностороннє вивантаження.

Металевих ємностей поряд із залізобетонним корпусом два ряди по 7 штук. З огляду на те, що на фото з Google Maps над ними змонтовано дві закриті надсилосні галереї, ймовірно, що зерно до ємностей доставляється стрічковими конвеєрами. А це ще два візка з одностороннім вивантаженням. Така велика кількість візків (8 штук) притаманна саме портовим елеваторам. Залізобетонні силосні корпуси для тривалого зберігання зазвичай мають 4 або 2 візки в залежності від розташування силосної башти і можуть переміщуватись через кілька корпусів. Візки переміщуються за допомогою реверсивного електроприводу, мають привод перекидного клапану [6, 7, 8], а також (опціонально) систему аспірації.

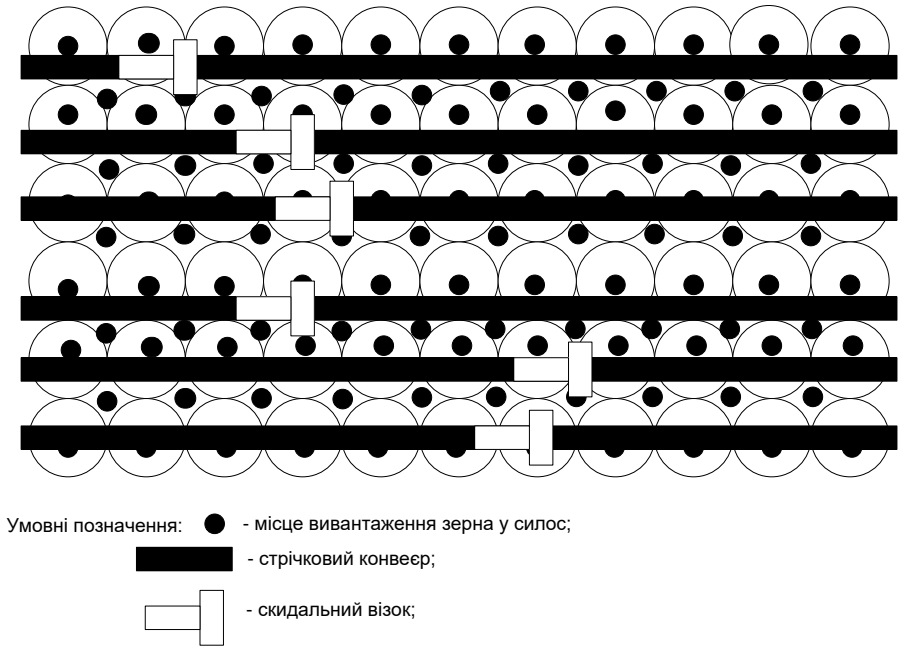


Рис. 1. Імовірна схема розвантаження зерна у силоси залізобетонного силосного корпусу на ПрАТ «Херсонський комбінат хлібопродуктів»

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-16

У будь-якому випадку керування силосним розвантажувальним візком відбувається за наступних умов:

1) позицій для зупинки візка може бути досить багато, до кількох десятків;

2) візок може вивантажувати зерно у двох напрямках, перпендикулярних стрічці конвеєра, для чого застосовується перекидний клапан з реверсивним приводом;

3) аспірація зернового пилу на візку є опційною, тому вентилятор аспірації може розглядатись як окремий пристрій на рівні транспортно-технологічного маршруту;

4) візків може бути декілька на один елеватор, що вимагає узагальненого підходу до вирішення задачі побудови моделі керування ними.

Розглянемо поведінку скидального візка як елемента транспортно-технологічного маршруту. Маршрут має наступні детерміновані стани [3]:

R0 – початковий невизначений стан, коли інформаційні ознаки від механізмів ще не надійшли;

R1 – стан готовності маршруту, коли всі механізми маршруту зупинені та справні;

R2 – стан запуску маршруту. Частина механізмів вже запущена чи запускається, а частина очікує своєї черги;

R3 – нормальна робота маршруту;

R4 – штатна зупинка маршруту, коли витримується час на зсипку зерна з механізму чи довитяжку пилу елементом аспірації;

R5 – нештатна зупинка маршруту, може настати під час запуску, роботи чи штатної зупинки у разі виникнення нештатної ситуації на одному з механізмів – аварійної або неочікуваної зупинки механізму. Нештатний механізм і всі механізми у напрямку, протилежному руху зерна, зупиняються миттєво і одночасно, а всі інші зупиняються послідовно, як у режимі штатної зупинки;

R6 – стан неготовності маршруту, коли маршрут зупинено і у нього є несправні механізми або такі, що запускаються, запущені чи зупиняються в складі іншого маршруту.

Візок можна віднести до окремої групи транспортно-технологічного обладнання елеватором [2], але на сьогодні більш перспективним шляхом видається привести його до уніфікованого представлення на рівні моделі маршрутів. Це представлення має бути таким, як і для непозиціонованих механізмів [3]:

M0 – початковий невизначений стан механізму. Існує під час запуску системи, коли інформаційні ознаки сигналів датчиків ще не надійшли;

M1 – початковий стан механізму, механізм справний і зупинений;

M2 – перехідний стан механізму, механізм запускається;

M3 – цільовий стан механізму, механізм працює;

M4 – перехідний стан механізму, механізм зупиняється;

M5 – початковий стан механізму, механізм несправний, видано керуючий вплив на його зупинку.

У наведеному переліку станів немає згадки ні про позицію скидального візка у надсилосній галереї, ні про положення перекидного клапану, ні про роботу електроприводів візка. Тим не менш, можливо привести модель керування візком до моделі керування транспортером, інкапсулювавши ряд специфічних інформаційних і функцій візка у вигляді підграфів станів M1…M5. Загальна умова переходу між станами непозиціонованого механізму виглядатиме:

$$M_r = \wedge_{i=1}^{k} X_i \,\&\, \vee_{j=k}^{n} \overline{X}_j, \tag{1}$$

де M_r – один зі станів M1…M5 непозиціонованого механізму (M0 не цікавить, бо це просто відсутність інформації); X_i – сукупність k обов'язкових факторів, які мають бути присутніми; X_j – сукупність $(n-k)$ ознак факторів нештатних подій, яких не має бути [2].

Розглянемо характеристики візка у стані M1. Тут всі електроприводи мають бути вимкнені і неважливо, де зараз знаходиться візок та яке положення його перекидного клапану. Тобто тут обов'язкові фактори X – це вимкнені електроприводи і відсутність команди на запуск.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-16

Тепер поглянемо на цільовий стан М3. Тут також всі електроприводи мають бути вимкнені, але візок та перекидний клапан мають знаходитись на цільових позиціях. Таким чином, до обов'язкових факторів тут додається знаходження у правильній позиції. Звичайно, має бути присутня і команда запуску візка, хоча його приводи й зупинені, оскільки лише команда запуску у даному випадку є відмінною ознакою між початковим М1 і цільовим станом М3 візка. Якщо процес визначення відповідності поточних позицій цільовим для візка і клапану винести в окремий функціональний блок, то умова входу у стан М3 аналогічна непозиціонованим механізмам.

Розглянемо стан М4. Він тут, як такий, відсутній, оскільки у стані М3 електроприводи візка були зупинені. Просто була знята команда на запуск, а у такому випадку М4 не відрізняється від М1. Тобто, затримка часу на перехід від М4 до М1 нульова. Для непозиціонованих пристроїв, якщо під час зупинки не відбулось нештатних подій, наприклад, сходження стрічки конвеєра або залипання контакту пускача, тривалість М4 не має значення і визначається лише інертністю механізму.

Стан М5 не передбачає активних дій. У цьому стані всі приводи мають бути виключені і лише надаються інформаційні ознаки механізмів для нештатної зупинки маршруту, подальшого аналізу й діагностики. До виконання, власне, діагностики не має значення, що за механізм перейшов у стан М5.

Найбільш складними залишається перехідний стан М2. Розглянемо лінійний рух візка по рейкам транспортера. Тут можливі варіанти:

1) візок знаходиться на позиції, меншій за номером від цільової;
2) візок знаходиться на позиції, більшій за номером від цільової;
3) візок знаходиться на цільовій позиції;
4) візок знаходиться на між позиціями, невідомо де.

У даному випадку граф керування приводом візка у стані М2 виглядатиме, як показано на рисунку 2.

Стосовно перекидного клапана візка – граф, представлений на рисунку 2 описує і його поведінку також, з тим лише зауваженням, що у перекидного клапана в основному є лише дві позиції, а також контроль зворотного зв'язку від пускачів приводу необов'язковий через короткочасність керуючого впливу (близько 1–2 секунд).

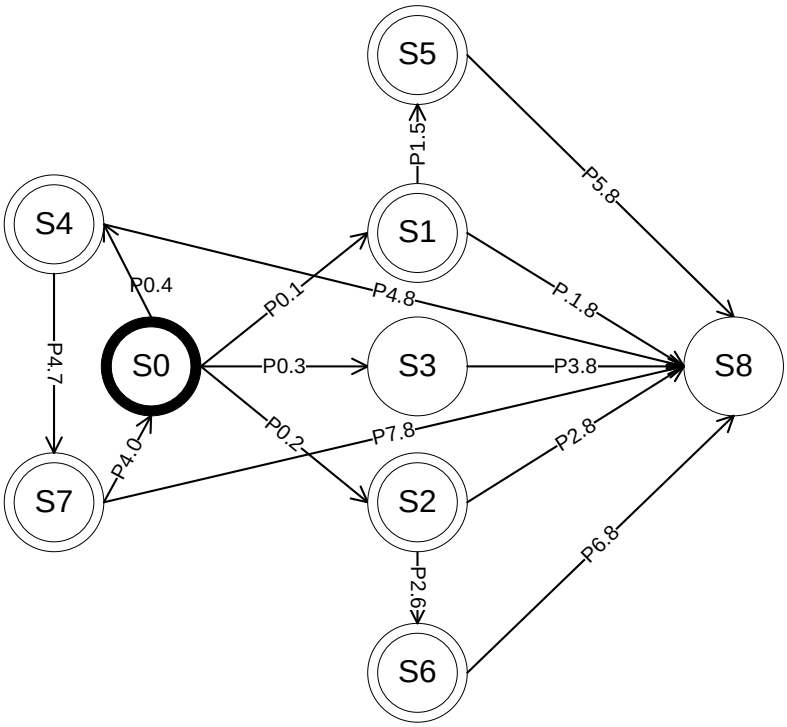


Рис. 2. Граф станів приводу переміщення скидального візка

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-16

Таблиця 1

Пояснювальна таблиця до графу станів приводу переміщення скидального візка

Позначення	Опис стану чи умови переходу
S0	Початковий стан. Головний граф керування візком у ввійшов у стан М2. Йде Визначення поточної позиції візка. Двигун зупинено
S1	Запуск двигуна у режимі прямого ходу. Очікування зворотного зв'язку
S2	Запуск двигуна у режимі реверсного ходу. Очікування зворотного зв'язку
S3	Надати головному графу одну з інформаційних ознак X_i для дозволу переходу у стан М3
S4	Запуск двигуна для позиціонування (прямий чи реверсний хід, не має значення). Очікування зворотного зв'язку
S5	Контроль зворотного зв'язку прямого ходу та граничного часу переміщення
S6	Контроль зворотного зв'язку реверсного ходу та граничного часу переміщення
S7	Візок запущено для позиціонування
S8	Нештатна ситуація. Надати головному графу одну з інформаційних ознак X_i для дозволу переходу у стан М5
P0.1	Візок у позиції, номер якої менше цільової
P0.2	Візок у позиції, номер якої більше цільової
P0.3	Візок у цільовій позиції
P0.4	Візок поза позиціями
P1.5	Прийшов зворотній зв'язок про роботу двигуна у режимі прямого ходу
P1.8, P2.8, P4.8	Час очікування зворотного зв'язку про роботу двигуна минув
P2.6	Прийшов зворотній зв'язок про роботу двигуна у режимі реверсного ходу
P3.8	Візок зійшов з цільової позиції
P4.0	З'явилась ознака досягнення деякої позиції
P4.7	Прийшов зворотній зв'язок про роботу двигуна у режимі позиціонування
P5.8, P6.8, P7.8	Втрачено зворотній зв'язок від двигуна або граничний час переміщення минув

Розроблений граф має бути має бути інкапсульований у перехідний стан М2, що відповідає процесу запуску механізму у складі маршруту, що дозволяє інтерпретувати розвантажувальний візок як непозиціонований механізм із загальною моделлю керування [2], і використовувати його у моделі керування транспортно-технологічними маршрутами [3].

Висновки

В результаті дослідження запропоновано віртуальний граф керування скидальним візком для надсилосного стрічкового конвеєра елеватора, який інкапсулюється й виконується в якості підзадачі у перехідному стані запуску загального графу керування візком як непозиціонованим механізмом. Це дозволяє формалізувати створення програмного забезпечення кіберфізичної системи керування скидальним візком, що робить його більш надійним і збільшує можливості тиражування. Наново створюване програмне забезпечення для позиціювання візка матиме інтерфейс взаємодії із графом керування транспортно-технологічними маршрутами, аналогічний загальному для непозиціонованих механізмів, таких як вентилятори аспірації, транспортери чи норії. Таким чином, запропонований підхід спрощує інтеграцію кіберфізичної системи візка у розроблювані системи керування маршрутами елеватора, зокрема портові й лінійні, де такі візки застосовуються. Це забезпечує перевагу у застосуванні запропонованої моделі керування візком зокрема, а також перспективу подальшого розвитку і більш широкого застосування загальних моделей керування транспортно-технологічними механізмами й маршрутами зерна для створення й тиражування спеціалізованого програмного забезпечення під час відновлення і створення нових підприємств зберігання й переробки зерна.

Список використаної літератури

1. Тимчук О., Кунденко М., Мардзявко В. Аналіз автоматизованих систем управління обладнанням для транспортування зернової продукції на елеваторах. *Енергетика і автоматика.* 2021. т. 58, № 6. С. 18–32.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-16

2. Тимчук С. О., Сиротенко М. О., Мардзявко В. А. Підвищення ефективності технологічного процесу елеваторного комплексу за рахунок оптимальної маршрутизації. *Інженерія природокористування*, 2021. № 4(22). С. 82–88.
3. Serhii Tkachenko, Liliia Beshta. General model of a transport-technological grain store route node for control systems programs. *International scientific journal «Computer systems and information technologies»*. 2021, 1. P. 25–31.
4. Топ зернових елеваторів: які типи бувають /Матеріали компанії “Sojam”: офіц. сайт. URL: https://sojam.ua/top-zernovih-elevatoriv/. (дата звернення 16.11.2023).
5. ПрАТ «Херсонський комбінат хлібопродуктів» /Google Maps: офіц. сайт. URL: https://www.google.com/maps/place/ПрАТ+«Херсонський+комбінат+хлібопродуктів»/@46.6335988,32.6295434,17z/data=!4m14!1m7!3m6!1s0x40c4054bf0229443:0xdabc6daab042e3f1!2z0J_RgNCQ0KIgwqvQpdC10YDRgdC-0L3RgdGM0LrQuNC5INC60L7QvNCx0ZbQvdCw0YIg0YXQu9GW0LHQvtC_0YDQvtC00YPQutGC0ZbQssK7!8m2!3d46.6333244!4d32.6298659!16s%2Fg%2F11gfndl9kb!3m5!1s0x40c4054bf0229443:0xdabc6daab042e3f1!8m2!3d46.6333244!4d32.6298659!16s%2Fg%2F11gfndl9kb?entry=ttu (дата звернення 12.12.2023).
6. Розвантажувальний візок. /Виробнича фірма «Веда-Техно»”: офіц. сайт. URL: https://veda-techno.com.ua/ua/rozpodilniki-potokiv/rozvantajuvalniy-vizok/(дата звертання 28.03.2023).
7. Візок скидач ТСЗ. /ТОВ «Елеватор-Сервіс»: офіц. сайт. URL: https://elevator-service.trade/vizok-skidach-tsz/ (дата звернення 12.12.2023).
8. Система автоматичного керування розвантажувальним візком. /Компанія «Зернова Столиця»: офіц. сайт. URL: https://zeo.ua/article/noviy-poglyad-na-stare-obladnannya-avtomatizaciya (дата звернення 12.12.2023).

References

1. Tymchuk, O., Kundenko, M., & Mardziavko, V. (2021). Analiz avtomatyzovanykh system upravlinnia obladnanniam dlia transportuvannia zernovoi produktsii na elevatorakh [Analysis of automated equipment management systems for transporting grain products on grain storages]. *Enerhetyka i avtomatyka t. 58*, 6, 18–32. https://doi.org/10.31521/2313-092X/2021-4(112)-10 [in Ukrainian]
2. Tymchuk, S.O., Syrotenkom, M.O., & Mardziavko, V.A. (2021). Pidvyshchennia efektyvnosti tekhnolohichnoho protsesu elevatornoho kompleksu za rakhunok optymalnoi marshrutyzatsii [Increasing the efficiency of the technological process of the grain storage complex due to optimal routing]. *Inzheneriia pryrodokorystuvannia*. 4(22). 82–88. https://doi.org/10.37700/enm.2021.4(22) [in Ukrainian]
3. Tkachenko, S., & Beshta, L. (2021). General model of a transport-technological grain store route node for control systems programs *International scientific journal «Computer systems and information technologies»*. 1. 25–31. https://doi.org/10.31891/csit-2021-3-4 [in English]
4. Top zernovykh elevatoriv: yaki typy buvaiut (2023). [Top grain elevators: what types are there]. Sojam company. Ofitsiinyi sait [Official site]. Retrieved from: https://sojam.ua/top-zernovih-elevatoriv/ [in Ukrainian]
5. PrAT «Khersonskyi kombinat khliboproduktiv» [PjSC "Khersonsk Bread Products Factory"]. Google Maps (2023). Ofitsiinyi sait [Official site]. Retrieved from https://www.google.com/maps/place/ПрАТ+«Херсонський+комбінат+хлібопродуктів»/@46.6335988,32.6295434,17z/data=!4m14!1m7!3m6!1s0x40c4054bf0229443:0xdabc6daab042e3f1!2z0J_RgNCQ0KIgwqvQpdC10YDRgdC-0L3RgdGM0LrQuNC5INC60L7QvNCx0ZbQvdCw0YIg0YXQu9GW0LHQvtC_0YDQvtC00YPQutGC0ZbQssK7!8m2!3d46.6333244!4d32.6298659!16s%2Fg%2F11gfndl9kb!3m5!1s0x40c4054bf0229443:0xdabc6daab042e3f1!8m2!3d46.6333244!4d32.6298659!16s%2Fg%2F11gfndl9kb?entry=ttu [in Ukrainian]

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-16

6. Rozvantazhuvalnyi vizok [Unloading trolley]. Production company "Veda-Techno" (2023). Ofitsiinyi sait [Official site]. Retrieved from https://veda-techno.com.ua/ua/rozpodilniki-potokiv/rozvantajuvalniy-vizok/ [in Ukrainian]
7. Vizok skydach TSZ [Dump trolley TSZ]. "Elevator-Service" LLC (2023). Ofitsiinyi sait [Official site]. Retrieved from https://elevator-service.trade/vizok-skidach-tsz/ [in Ukrainian]
8. Systema avtomatychnoho keruvannia rozvantazhuvalnym vizkom [The system of automatic control of the unloading trolley]. "Zernova Stolytsia" company (2023). Ofitsiinyi sait [Official site]. Retrieved from https://zeo.ua/article/noviy-poglyad-na-stare-obladnannya-avtomatizaciya [in Ukrainian]

Ткаченко Сергій Миколайович – к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: sergntkach@gmail.com, tkachenko.s.m@nmu.one, ORCID: 0000-0003-1156-3151, Web of Science Researcher ID: AAI-7727-2020.

Tkachenko Serhii Mykolaiovych – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer at the Department of Information Technology and Computer Engineering of Dnipro University of Technology. E-mail: sergntkach@gmail.com, tkachenko.s.m@nmu.one, ORCID: 0000-0003-1156-3151, Web of Science Researcher ID: AAI-7727-2020.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-16

УДК 519.65

А.Н. ХОМЧЕНКО
Чорноморський національний університет імені Петра Могили
О.І. ЛИТВИНЕНКО
Херсонський навчально-науковий інститут Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
П. ГУЧЕК
Економіко-гуманітарна Академія у Варшаві (Польща)
І.О. АСТІОНЕНКО
Херсонський національний технічний університет

«ДУТА» МОДА КВАДРАТНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА: КОГНІТИВНО-ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ

У задачах відновлення функцій двох аргументів головним інструментом є стародавній метод перерізів. Традиційно вважається, що важливіші горизонтальні перерізи поверхонь (лінії рівня). В нашому аналізі лінії рівня відступили на другий план. Більш інформативні вертикальні перерізи утворили дивну шеренгу видатних вчених, таких як Бернуллі, Лагранж, Лежандр, Леонардо да Вінчі, Гаусс, Арнольд. Золота пропорція покроково повернула вузли екзотичної кубатури тригонометричного походження в традиційно звичні точки, які відкрили Я. Бернуллі і А. Лежандр. Виявляється, що незалежно від стереометрії моди для обчислення її об'єму кубатури Гаусса-Лежандра найкращі.

У роботі аналізуються геометричні особливості і маловідомі властивості моделей «дутої» моди поліноміального та тригонометричного походження. «Дутою» модою в англомовних джерелах називають базисну унімодальну поверхню, що асоціюється з центральним вузлом інтерполяції квадратного або трикутного скінченного елемента. Ця поверхня зустрічається в задачах відновлення функцій двох аргументів і нагадує мильну плівку. Французькі інженери віддають перевагу назві «купа піску». Порівняння стереометричних характеристик моделей ілюструє цікавий приклад «м'якого» та «жорсткого» математичного моделювання (за термінологією В. Арнольда). Метод перерізів поліноміальної поверхні дає простий спосіб визначення вузлів квадратури Гаусса-Лежандра (Бернуллі). У випадку тригонометричної моди звичне розташування вузлів квадратури порушується («жорстка» модель), об'єм «дутої» моди невиправдано збільшується. Точне значення об'єму відновлюється за допомогою «золотої» пропорції.

Робота фактично продовжує і суттєво доповнює тему «дутої» моди трикутного скінченного елемента третього порядку. Тепер мильна плівка охоплює скінченний елемент квадратної форми. Розглядається два канонічних квадрата-носія.

Ключові слова: поліноміальна модель, тригонометрична модель, метод перерізів, об'єм «дутої» моди, кубатура Гаусса, вузли Лежандра (Бернуллі), оптимізація тригонометричної моделі.

A.N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
O.I. LYTVYNENKO
Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding
P. GUCHEK
University of Economics and Human Sciences in Warsaw (Poland)
I.O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

"BLOWN" MODE OF A SQUARE FINITE ELEMENT: A COGNITIVE AND GRAPHICAL ANALYSIS

In the problems of restoring functions of two arguments, the main tool is the ancient method of sections. It is traditionally believed that horizontal sections of surfaces (level lines) are more important. In our analysis the level lines have receded into the background. More informative vertical sections formed a strange chain of prominent scientists, such as Bernoulli, Lagrange, Legendre, Leonardo da Vinci, Gauss, Arnold. The golden proportion has step by step returned the nodes of the exotic cubature of trigonometric origin to the traditionally familiar points discovered by Bernoulli and Legendre. It turns out that regardless of the stereometry of the mode Gauss-Léjeandre cubatures are the best for calculating its volume.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-17

In this paper we analyze the geometric features and little-known properties of the "blown" mode models of polynomial and trigonometric origin. In English-language sources the "blown" mode refers to a basic unimodal surface associated with the central interpolation node of a square or triangular finite element. This surface is found in problems of restoring functions of two arguments and resembles a soap film. The French engineers prefer the name "pile of sand". Comparison of the stereometric characteristics of the models illustrates an interesting example of "soft" and "hard" mathematical modeling (in V. Arnold's terminology). The method of sections of a polynomial surface provides a simple way to determine the nodes of the Gauss-Lejeune (Bernoulli) quadrature. In the case of the trigonometric mode the usual arrangement of the quadrature nodes is disturbed (the "hard" model), and the volume of the "blown" mode unjustifiably increases. The exact value of the volume is restored using the "golden" proportion.

In fact the work continues and significantly complements the theme of the "blown" mode of the third-order triangular finite element. Now the soap film covers a square-shaped finite element. Two canonical square-carriers are considered.

Key words: polynomial model, trigonometric model, method of sections, volume of the "blown" mode, Gauss cubature, Legendre (Bernoulli) nodes, optimization of the trigonometric model.

Постановка проблеми

Проблема полягає в тому, що стереометричні особливості унімодальних поверхонь типу «дутої» моди, особливо тригонометричного походження, недостатньо вивчені. Йдеться про скінченні елементи квадратної форми, конкретно, про $Q9$ і $Q17$. З розвитком серендипових апроксимацій інженери втратили інтерес до унімодальних поверхонь, хоча математики продовжують добувати латентну інформацію. Когнітивно-графічний аналіз «дутої» моди трикутного елемента несподівано відкрив прямий зв'язок критичних точок поверхні з вузлами квадратури Гаусса. Цікаво дізнатися, яку інформацію «приховують» унімодальні поверхні на квадратних носіях, які властивості «дутої» моди поліноміального походження успадковує тригонометрична мода.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Наша робота фактично продовжує і суттєво доповнює тему «дутої» моди трикутного скінченного елемента третього порядку [1]. Тепер мильна плівка охоплює скінченний елемент квадратної форми. Розглядається два канонічних квадрата-носія. Носій $-1 \le x, y \le 1$ найчастіше зустрічається в публікаціях інженерно-орієнтованих фахівців [2, 3, 4], а носій $0 \le x, y \le 1$ подобається математикам [5, 6]. Популярність метода скінченних елементів неухильно зростає, з'явилися нові неполіноміальні базиси, наприклад, тригонометричні [4, 5, 7]. У нашій роботі ми порівнюємо поліноміальні і тригонометричні «дуті» моди. Результати аналізу несподівано похитнули довіру до тригонометричної апроксимації щодо її зв'язку з кубатурою Гаусса. Ситуація нагадує парадокс Бертрана в теорії ймовірностей. Відновлення зв'язку тригонометричної моди з кубатурою Гаусса відбувається за допомогою методу «золотої» пропорції [8].

Мета дослідження

За допомогою метода перерізів поліноміальних та тригонометричних унімодальних поверхонь проілюструвати приклади «м'якого» і «жорсткого» математичного моделювання. Показати роль «золотої» пропорції в задачах підвищення ефективності квадратур типу Гаусса.

Викладення основного матеріалу дослідження

На канонічному квадраті $-1 \le x, y \le 1$ рівняння дутої моди має вигляд [2, 4]:

$$z = f(x, y) = \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right). \tag{1}$$

Як базисна функція «дута» мода (1) використовується на елементі другого порядку $Q9$ (лагранжева версія). Це природно і обґрунтовано. На елементі четвертого порядку (серендипові версія) [2, 3] використання «дутої» моди виглядає неприродно. Навпаки, у 2009 році доведено [9],

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-17

що 17-й вузол в барицентрі квадрата в елементі четвертого порядку зовсім не потрібний. Але «дута» мода як унімодальна симетрична поверхня заслуговує на увагу. Когнітивно-графічний аналіз «дутої» моди трикутника [1] показав цікаві результати. Ми сподіваємося, що метод перерізів поверхні (1) відкриє нові ознаки побічної адекватності цієї моделі та стереометричні особливості. Переріз поверхні (1) координатними площинами $y = 0$ $(x = 0)$ скоріше ілюстративний, ніж когнітивний. Цікаво зробити діагональний переріз $y = x$ і показати проекцію діагонального перерізу на координатну площину $y = 0$ (рис. 1).

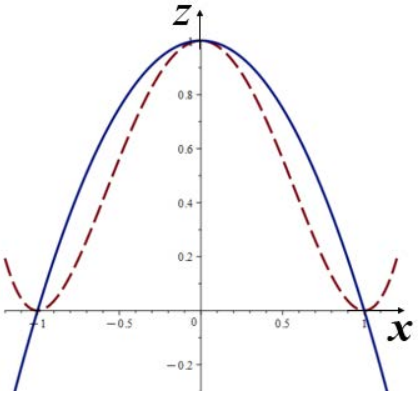


Рис. 1. Суцільна крива – переріз поверхні (1) площиною $y = 0$; пунктир – проекція на $y = 0$ перерізу $y = x$

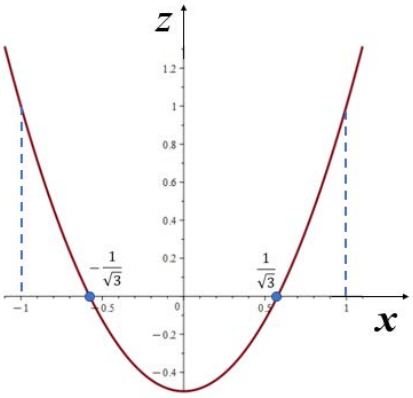


Рис. 2. Графік полінома Лежандра другого порядку

Аналіз поведінки поліноміальної «дутої» моди починається з підстановки $y = x$:

$$f(x) = \left(1 - x^2\right)^2. \tag{2}$$

Поліном четвертого порядку має п’ять критичних точок. За допомогою першої похідної $f'(x) = 0$ визначаються точки екстремумів. Більш інформативні точки перегину графіка $f(x) = \left(1 - x^2\right)^2$ визначаються за допомогою другої похідної $f''(x) = 0$.

Цікаво, що нулі другої похідної $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ співпадають з нулями класичного поліному Лежандра другого порядку (рис. 2):

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right).$$

Саме в цих точках Гаусс розташував вузли квадратури найвищого алгебраїчного ступеня точності інтегрування. Це була справжня революція в історії наближеного інтегрування. До речі, поліноми Лежандра ортогональні на інтервалі [–1; 1].

Читач розуміє, що можна говорити про кубатуру Гаусса (чотири вузли), якщо виконати другий діагональний переріз $y = –x$.

Треба підкреслити, що когнітивно-графічний аналіз «дутої» моди на правильному трикутнику [1] і квадраті дає простий і наочний спосіб визначення координат вузлів квадратури Гаусса. Такий підхід краще процедури складання і розв’язування системи із чотирьох алгебраїчних рівнянь, два з яких нелінійні.

Щоб переконатися, що отримані результати не випадкові, розглянемо «дуту» моду на одиничному квадраті $0 \le x, y \le 1$.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-17

Поверхня має рівняння [5]:

$$z = f(x,y) = 16(1-x)(1-y)xy. \tag{3}$$

Стереометричні особливості спостерігаються в діагональних перерізах $y = x$ та $y = 1-x$.

Поверхня (3) отримана шляхом центрально-симетричного стиснення поверхні (1) та паралельного перенесення барицентра носія із $(0, 0)$ в $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Таким чином, фігура (3) – це витончена копія фігури (1). Діагональний переріз дає залежність

$$f(x) = \left(1-x^2\right)^2.$$

Тепер нулі ортогонального полінома другого порядку (вузли квадратури Гаусса)

$$f''(x) = 6x^2 - 6x + 1 = B_2(x) = 0$$

співпадають з нулями класичного полінома Я. Бернуллі другого порядку

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \qquad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

На рис. 3 нормуючий множник вибрано так, щоб $B_2(1) = 1$.

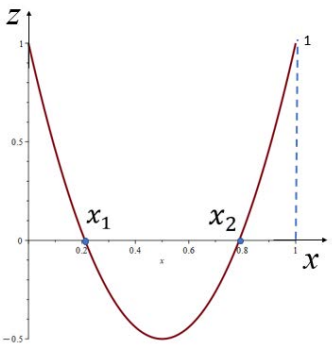


Рис. 3. Графік полінома Бернуллі другого порядку

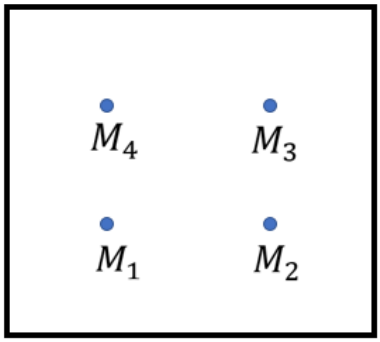


Рис. 4. Двовимірний обчислювальний шаблон Гаусса

Як бачимо, поліноміальні моделі «дутої» моди приховують цікаву інформацію щодо зв'язків з кубатурами Гаусса. На рис. 4 показано двовимірний обчислювальний шаблон Гаусса, який використовують для оцінки подвійного інтегрування функцій двох аргументів. В нашому випадку об'єм моди можна обчислити точно за формулою

$V = f_d(x,y)\,dxdy$, D – область інтегрування.

Можна наближено оцінити V за формулою Гаусса-Лежандра:

$$V \approx \sum_{i=1}^{4} f(M_i), \tag{4}$$

або за формулою Гаусса-Бернуллі:

$$V \approx \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} f(M_i). \tag{5}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-17

Вузли інтегрування M_i (рис. 4) мають наступні координати:

а) за версією Лежандра $x_i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y_i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) за версією Бернуллі $x_i = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$; $y_i = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Як і передбачалося, формули (4), (5) показують абсолютно точні результати інтегрування поліноміальних поверхонь (1) і (3). Для моделі (1): $V_1 = \frac{16}{9}$. Для моделі (3): $V_3 = \frac{4}{9}$. До речі, $\frac{4}{9}$ – це точне значення середньої аплікати цих поверхонь.

Про використання в МСЕ тригонометричних поверхонь спочатку писали, що це можливо [4, 6], згодом, що це необхідно [2, 3]. Здається, що тригонометричні «дуті» моди ще не досліджували когнітивно-графічно. Нижче ми розглядаємо з цієї точки зору дві моделі: на $-1 \le x, y \le 1$ і $0 \le x, y \le 1$. Алгоритм дослідження стандартний. Спостерігається поведінка діагонального перерізу поверхні. На квадраті $-1 \le x, y \le 1$ поверхня має вигляд:

$$f(x,y) = \cos\frac{\pi x}{2} \cdot \cos\frac{\pi y}{2} \quad . \tag{6}$$

На квадраті $0 \le x, y \le 1$ маємо:

$$f(x,y) = \sin \pi x \cdot \sin \pi y \, . \tag{7}$$

Метод вертикальних перерізів показав, що графіки тригонометричних кривих мало чим відрізняються від графіків поліномів четвертого порядку. Критичні точки першого роду співпадають. Друга похідна зберігає властивість ортогональної функції, але нулі другої похідної не співпадають з нулями поліномів Лежандра і Бернуллі другого порядку. На рис. 5, 6 показано нормовані графіки другої похідної функцій (6) і (7) на діагональному перерізі.

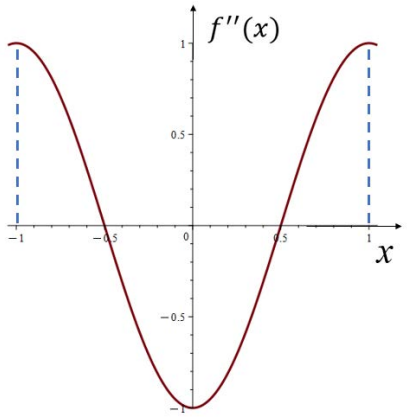


Рис. 5. Друга похідна функції (6)

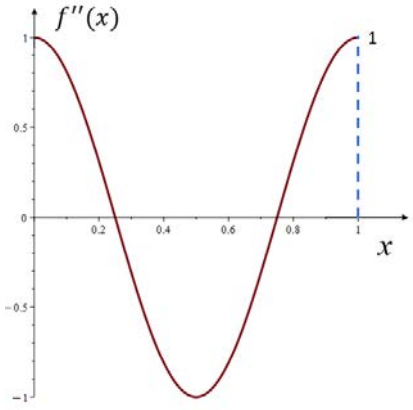


Рис. 6. Друга похідна функції (7)

Це яскравий приклад «жорсткого» математичного моделювання. Обов'язкова періодичність тригонометричних функцій спричинила зменшення відстані між вузлами шаблона. Така кубатура дає збільшений об'єм моди. «Жорстка» модель руйнує фундамент ідеї Гаусса – нерівномірність розташування вузлів. З іншого боку, несподівано збільшений і свідомо зменшений об'єми можна використати в процедурах оптимізації цільової функції (об'єму).

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-17

Щоб оцінити ефективність процедури оптимізації, знайдемо точний об'єм моди. Для моделі (6): $V = \frac{16}{\pi^2}$; для моделі (7): $V = \frac{4}{\pi^2}$. Детальніше розглянемо модель (6) з об'ємом $V \approx 1,623$. Візьмемо зручний інтервал невизначеності $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$ і скористаємося методом «золотої» пропорції. Граничні значення функції: $V = 2$ при $x = \frac{1}{2}$; $V = 1$ при $x = \frac{2}{3}$. Привертає увагу натяк на золоту пропорцію з коефіцієнтами $\frac{2}{3}$ *і* $\frac{1}{3}$, більш точна пара $\frac{3}{5}$ *і* $\frac{2}{5}$, ще краще $\frac{5}{8}$ *і* $\frac{3}{8}$. Покажемо, як змінюється об'єм моди в процесі оптимізації.

Перша пара: $2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 1,667 = V_1$.

Друга пара: $2 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = 1,6 = V_2$.

Третя пара: $2 \cdot \frac{5}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} = 1,625 = V_3$.

Ми зупинилися на цьому результаті, хоча потенціал метода іще не вичерпано. Для моделі (7) уточнення об'єму моди виконується аналогічно.

Висновки

У задачах відновлення функцій двох аргументів головним інструментом є стародавній метод перерізів. Традиційно вважається, що важливіші горизонтальні перерізи поверхонь (лінії рівня). В нашому аналізі лінії рівня відступили на другий план. Більш інформативні вертикальні перерізи утворили дивну шеренгу видатних вчених, таких як Бернуллі, Лагранж, Лежандр, Леонардо да Вінчі, Гаусс, Арнольд. Золота пропорція покроково повернула вузли екзотичної кубатури тригонометричного походження в традиційно звичні точки, які відкрили Я. Бернуллі (1713 р.) і А. Лежандр (1785 р.). Виявляється, що незалежно від стереометрії моди для обчислення її об'єму кубатури Гаусса-Лежандра найкращі.

Список використаної літератури

1. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. «Дута» мода як когнітивна модель побудови трикутника третього порядку. *Прикладні питання математичного моделювання*. Т. 2, № 2. 2019. С. 110–117. DOI: 10.32782/2618-0340/2019.2-2.10
2. Akin I. E. Finite Element Analysis with Error Estimators. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. 477 p.
3. Onate E. Structural Analysis with the Finite Element Method. Vol. 1. Springer Netherlands, 2009.
4. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
5. Mitchell A. R., Wait R. The Finite Element Method in Partial Differential Equations, London, Wiley, 1977.
6. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1973.
7. Norrie D. H., de Vries G. An Introduction to Finite Element Analysis. Academic Prees. N.Y., 1978.
8. Shoup T. E. A Practical Guide to Computer Methods for Engineers. Prentice-Hall, EngLewood Cliffs, 1979.
9. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. Формоутворення серендипових поверхонь з «прихованими» параметрами. *Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці. Таврійський державний агротехнологічний університет*. Вип. 4, т. 48. Мелітополь: ТДАТУ, 2010. С. 55–62.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-17

References

1. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I., & Astionenko, I.O. (2019). «Duta» moda yak kohnityvna model pobudovy trykutnyka tretoho poriadku [«Blown» mode as cognitive model of building the triangle of third order]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. 2 (2), 110–117 DOI: 10.32782/2618-0340/2019.2-2.10 [in Ukrainian].
2. Akin, I.E. (2005). Finite Element Analysis with Error Estimators. Elsevier, Butterworth-Heinemann [in English]
3. Onate, E. (2009). Structural Analysis with the Finite Element Method. Vol. 1. Springer Netherlands [in English]
4. Zienkiewicz, O.C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill [in English]
5. Mitchell, A.R., & Wait, R. (1977). The Finite Element Method in Partial Differential Equations, London, Wiley [in English]
6. Strang, G., & Fix, G.J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. [in English]
7. Norrie, D.H., & de Vries, G. (1978). An Introduction to Finite Element Analysis. Academic Prees. N.Y. [in English]
8. Shoup, T.E. (1979). A Practical Guide to Computer Methods for Engineers. Prentice-Hall, EngLewood Cliffs [in English]
9. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I., & Astionenko, I.O. (2010). Formoutvorennia serendypovykh poverkhon z «prykhovanymy» parametramy [Shaping of serendipity surfaces with "hidden" parameters]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Pratsi*. Tavriiskyi derzhavnyi ahrotekhnolohichnyi universytet. Melitopol: TDATU, 48 (4), 55–62 [in Ukrainian].

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету імені Петра Могили. E-mail: khan@chmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. E-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Гучек Петро – д.т.н., доцент факультету комп'ютерних наук Економіко-гуманітарної Академії у Варшаві (Польща). ORCID: 0000-0002-6110-6816.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри загальноосвітніх, гуманітарних та природничих дисциплін Херсонського національного технічного університету. E-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.

Khomchenko Anatolij Nykyforovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Intelligent Information Systems of the Petro Mohyla Black Sea National University. E-mail: khan@chmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Lytvynenko Olena Ivanivna – Ph.D., Associate Professor, Associate Professor at the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines of the Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding. E-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Guchek Petro – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor at the Faculty of Computer Sciences of University of Economics and Human Sciences in Warsaw (Poland). ORCID: 0000-0002-6110-6816.

Astionenko Ihor Oleksandrovych – Ph.D., Associate Professor, Associate Professor at the Department of General Education, Humanities and Natural Science Disciplines of Kherson National Technical University. E-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2023-6-2-17

НОТАТКИ

ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Технічний редактор Литвиненко Олена Іванівна
к.т.н., доцент

Верстка Наталія Кузнєцова

Здано до набору 12.12.2023 р. Підписано до друку 27.12.2023 р.
Гарнітура Times New Roman. Формат 60×84/8.
Друк офсетний. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 17,21. Зам. № 0124/061. Наклад 100 прим.

Видавництво і друкарня – Видавничий дім «Гельветика»
65101, Україна, м. Одеса, вул. Інглезі, 6/1
Телефон +38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08
E-mail: mailbox@helvetica.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК No 7623 від 22.06.2022 р.