

О. Й. ВЕЙЦБЛІТ

доцент кафедри комп'ютерних наук та програмної інженерії
Херсонський державний університет
ORCID: 0009-0008-6057-5267

І. В. ВИГОДНЕР

старший викладач кафедри інформатики та комп'ютерних наук
Херсонський національний технічний університет
ORCID: 0000-0002-4476-557X

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА НА САЙТІ DJANGO

Метою роботи є демонстрація сайту, створеного для візуалізації процесів міжгалузевих зв'язків згідно з моделлю Леонт'єва. З часів Ньютона основою наукової відповіді на реальні, не зовсім прості проблеми завжди є побудова математичної моделі, тобто математичної теорії, що описує деякі об'єкти чи процеси реального світу. Як правило, потім будують програмну реалізацію цієї моделі, за допомогою якої чисельно отримують результати цієї теорії.

Правильність результатів теорії має бути перевірена експериментально. Аналіз економічних процесів та прийняття відповідних рішень, вивчення відповідних моделей в освітніх курсах математичного моделювання завжди значно вдосконалюються при їх візуалізації. І саме така візуалізація була реалізована для моделі Леонт'єва.

У нашому випадку математична модель – це математична задача з матричної алгебри, до вирішення якої завдяки дослідженням американського економіста В. Леонт'єва зводиться дана економічна задача. В результаті її розв'язання отримуємо не тільки числові значення характеристик, але також оцінки прибутковості та рентабельності галузей економіки та можливість детально переглянути їх фактори. Розробка сайту виконана на основі Python фреймворку для розробки веб-систем Django. Це високорівневий Python веб-фреймворк, який відкриває можливість створювати добре захищені сайти і підтримувати їх, він бере на себе більшу частину веб-розробки. Django надає розробникам буквально все необхідне, щоб розробити сайт з нуля – це є його основна філософія. Для отримання даних у вигляді табличних розрахунків матриць і відображення графіків застосовані відповідні Python бібліотеки NumPy та Chart.js. При створенні сайту застосовані також і інші традиційні інструменти веб-розробки: HTML (bootstrap), CSS, JavaScript (jQuery). Цей сайт був використаний при викладанні курсів «Математичне моделювання процесів та явищ», «Моделювання економічних процесів» і «Економіко-математичні методи та моделі» у Херсонському державному університеті та Херсонському національному технічному університеті.

Ключові слова: візуалізація процесів, економічна задача, математична модель, сайт, Python фреймворк.

A. Y. WEISSBLUT

Associated Professor at the Department
of Computer Science and Software Engineering
Kherson State University
ORCID: 0009-0008-6057-5267

I. V. VYGODNER

Senior Lecturer at the Department of Informatics and Computer Sciences
Kherson National Technical University
ORCID: 0000-0002-4476-557X

VISUALIZATION OF LEONTIEV'S MATHEMATICAL MODEL ON THE DJANGO WEBSITE

The purpose of the work is to demonstrate a site created to visualize the processes of inter-industry connections according to Leontiev's model. Since the time of Newton, the basis of a scientific answer to real, not entirely simple problems has always been the construction of a mathematical model, that is, a mathematical theory that describes some objects or processes of the real world. As a rule, a software implementation of this model is then built, with the help of which the results of this theory are numerically obtained.

The correctness of the results of the theory must be verified experimentally. The analysis of economic processes and the adoption of appropriate decisions, the study of appropriate models in educational courses on mathematical modeling are always significantly improved by their visualization. And it is precisely such visualization that was implemented for the Leontiev's model.

In our case, the mathematical model is a mathematical problem from matrix algebra, to the solution of which this economic problem can be reduced thanks to the research of the American economist V. Leontiev. As a result of its solution, we get not only the numerical values of the characteristics, but also estimates of the profitability and profitability of the sectors of the economy and the opportunity to review their factors in detail. The development of the site is based on the Python framework for the development of Django web systems. It is a high-level Python web framework that opens up the possibility of creating well-secured websites and maintaining them, it takes care of most of the web development. Django provides developers with literally everything they need to develop a website from scratch – this is its core philosophy. To obtain data in the form of matrix table calculations and display graphs, the corresponding Python libraries NumPy and Chart.js were used. Other traditional web development tools were also used when creating the site: HTML (bootstrap), CSS, JavaScript (jQuery).

This site was used in teaching the courses “Mathematical Modeling of Processes and Phenomena”, “Modeling of Economic Processes” and “Economic and mathematical methods and models” at Kherson State University and Kherson National Technical University.

Key words: visualization of processes, economic problem, mathematical model, site, Python framework.

Постановка проблеми

Зазвичай вироблені продукти (цвяхи, чіпи чи молоко) не цілком надходять до ринку для продажу, а частково використовуються для виробництва інших продуктів. Ці продукти, у свою чергу, зазвичай також частково надходять на відкритий ринок, а частково використовуються у виробництві інших продуктів (у тому числі можливо вихідних чипів або цвяхів). Усе це створює складну систему взаємозв'язків, де далеко не все та не завжди відомо з відкритого доступу [1]. В результаті лише обсяг товару, що надійшов на продаж на відкритому ринку, тобто сукупний обсяг кінцевого продукту є відомим із відкритого доступу, а весь сукупний вироблений продукт, тобто валовий продукт залишається прихованим. Але валовий продукт, ВВП – це найважливіша характеристика, вкрай необхідна фахівцям [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

З часів Ньютона основою наукової відповіді на реальні, не зовсім прості проблеми завжди є побудова математичної моделі, тобто математичної теорії, що описує деякі об'єкти чи процеси реального світу [3]. Як правило, потім будують програмну реалізацію цієї моделі, за допомогою якої чисельно отримують результати цієї теорії.

Формулювання мети дослідження

Правильність результатів будь-якої теорії має бути перевірена експериментально [4]. У нашому відносно простому прикладі математична модель – це математична задача з матричної алгебри, до вирішення якої завдяки дослідженням американського економіста В. Леонтєва зводиться дана економічна задача. В результаті її розв'язання отримуємо не тільки числове значення ВВП, але також оцінки прибутковості та рентабельності галузей економіки та можливість детально переглянути їх фактори.

Аналіз економічних процесів та прийняття відповідних рішень, вивчення відповідних моделей в освітніх курсах математичного моделювання завжди значно вдосконалюються при їх візуалізації. І саме така візуалізація була реалізована для моделі Леонтєва. Цей сайт був використаний при викладанні курсів «Математичне моделювання процесів та явищ», «Економіко-математичні методи та моделі» і «Моделювання економічних процесів» у Херсонському державному університеті та Херсонському національному технічному університеті.

Метою роботи є демонстрація сайту, створеного для візуалізації процесів міжгалузевих зв'язків згідно з моделлю Леонтєва.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо багатогалузеву економіку, що складається з n різних галузей і нехай x_i – загальний обсяг продукції i -ї галузі (тобто її валовий випуск), а x_{ij} – той обсяг продукції i -ї галузі, який використовується j -ї галуззю при виробництві продукції.

За часів другої світової війни В. Леонтєв, взявши за приклад економіку США встановив, що величини $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i}$ протягом довгого часу практично не змінюються і в середньостроковій перспективі їх можна розглядати як постійні числа. Це можна пояснити тим, що технологія виробництва залишається незмінною досить тривалий термін, і тому відносний обсяг споживання галуззю продукції іншої галузі при виробництві власної продукції є технологічною константою. Відповідно величини a_{ij} називають технологічними коефіцієнтами.

Нехай y_i – кінцевий обсяг продукції i -ї галузі, який використовується для реалізації на відкритому ринку. Тоді балансове співвідношення між обсягами виробництва в різних галузях економіки має вигляд:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Враховуючи гіпотезу лінійності $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$; $x_{ij} = a_{ij}x_j$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$), отримаємо звідси таку систему n лінійних рівнянь:

[illegible]

Напишемо цю систему у матричній формі. Розглянемо вектори-стовпці обсягу виробленої валової продукції $\bar{X}$, обсягу продукції кінцевого споживання $\bar{Y}$ і матрицю технологічних коефіцієнтів A :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Тоді система рівнянь в матричній формі буде виглядати так:

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{v}.$$

Це співвідношення називається рівнянням лінійного міжгалузевого балансу.

Звичайно, знаючи обсяг валової продукції $\bar{x}$, з цього рівняння можна дізнатись обсяг кінцевого продукту: $\bar{y} = \bar{x} - A\bar{x}$. Проте наша справжня реальна задача – знайти $\bar{x}$ з відомого $\bar{y}$. Для цього рівнянню лінійного міжгалузевого балансу можна надати вигляд

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y},$$

де E – одинична матриця. Звідси

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{y}, \quad (2)$$

якщо існує зворотна матриця $(E - A)^{-1}$.

Технологічну матрицю A та модель Леонтьєва називають продуктивними (за змістом реальними), якщо існує зворотна матриця $(E - A)^{-1}$ та для кожного $\bar{y}$ з додатними компонентами y_i вектор $\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{y}$ також має всі додатні компоненти x_i . Саме так і буде, якщо суми компонентів по стовпцям або по рядкам технологічної матриці A менші за одиницю. У такому випадку зворотну матрицю можна розкласти в суму геометричної прогресії:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n + \dots$$

Тоді

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{y} = \bar{y} + A\bar{y} + A^2\bar{y} + A^3\bar{y} + \dots + A^k\bar{y} + \dots \quad (3)$$

Ця формула дозволяє проаналізувати фактори, на які розкладається валовий продукт $\bar{x}$. Тут $\bar{y}$ – кінцевий продукт, $A\bar{y}$ – продукція, що йде на виготовлення $\bar{y}$, її називають першою похідною продукцією, продукт $A^2\bar{y}$ йде на виготовлення $A\bar{y}$ та називається другою похідною продукцією, ..., $A^k\bar{y}$ – це k -та похідна продукція, вона йде на виготовлення продукту $A^{k-1}\bar{y}$.

Сайт «Балансова модель Леонтьєва»

Розробка сайту виконана на основі фреймворку для розробки веб-систем Django [5]. Це високорівневий Python веб-фреймворк, який відкриває можливість створювати добре захищені сайти і підтримувати їх, він бере на себе більшу частину веб-розробки. Django надає розробникам буквально все необхідне, щоб розробити сайт з нуля – це є його основна філософія. Для отримання даних у вигляді табличних розрахунків матриць і відображення графіків застосовані відповідні Python бібліотеки NumPy та Chart.js [6], [7]. При створенні сайту застосовані також і інші традиційні інструменти веб-розробки: HTML (bootstrap), CSS, JavaScript (jQuery).



Рис. 1. Головна сторінка сайту

Це головна сторінка сайту. Робота починається з вибору конкретної моделі серед декількох прикладів. Після цього автоматично відкривається наступна сторінка.

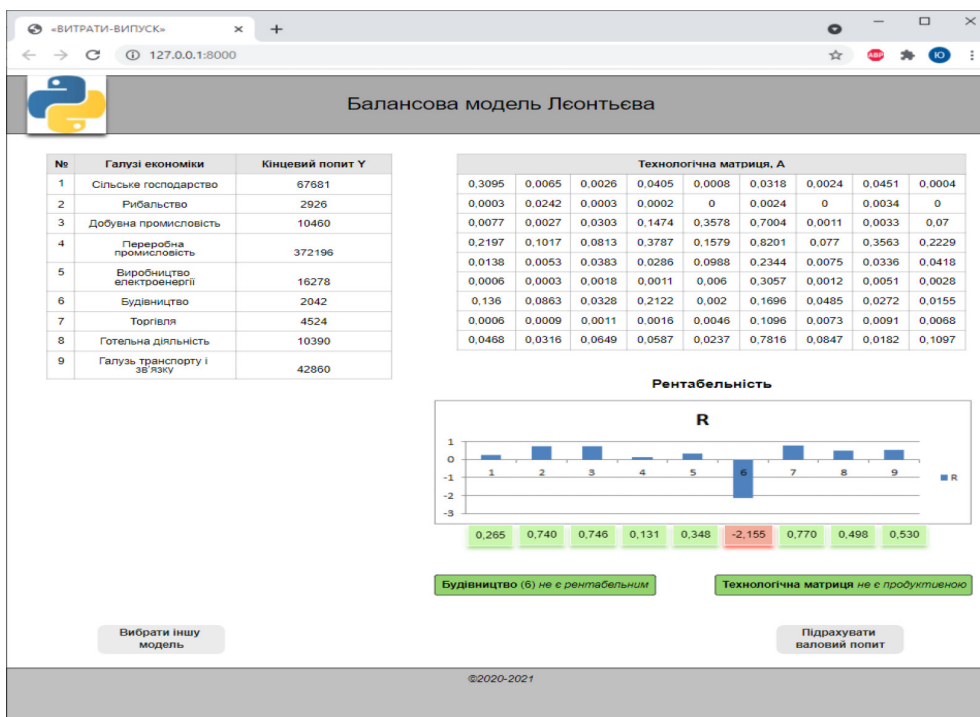


Рис. 2. Сторінка вибору моделі галузевої економіки

Для обраної моделі економіки наведені зліва її 9 галузей та вектор кінцевого споживання $\bar{Y}$ цих галузей, а зправа відповідна технологічна матриця A порядку 9. Нижче можна побачити гістограму рентабельностей.

Скажімо, для галузі 6 (будівництво) її рентабельність b_6 визначається за формулою $b_6 = 1 - \sum_{i=1}^9 a_{i6}$, де a_{i6} – це технологічні коефіцієнти з A (див. (1)). Галузь є рентабельною, якщо її рентабельність додатна; в цьому випадку

такими є всі галузі окрім будівництва. Але оскільки це так для будівництва, то технологічна матриця A не є продуктивною. Можливо це є вказівкою на необхідність перетворення та покращення міжгалузевого балансу для цієї моделі, а нам доцільно обрати іншу модель. Так чи інакше це створює формальні перешкоди: не гарантується, що подальший економічний аналіз обраної моделі на сайті є можливим і чи це насправді можливо перевірити лише безпосереднім застосуванням відповідних обчислень? Саме так і зробимо. Натиснувши кнопку «Підрахувати валовий попит», переходимо до відповідної сторінки сайту.

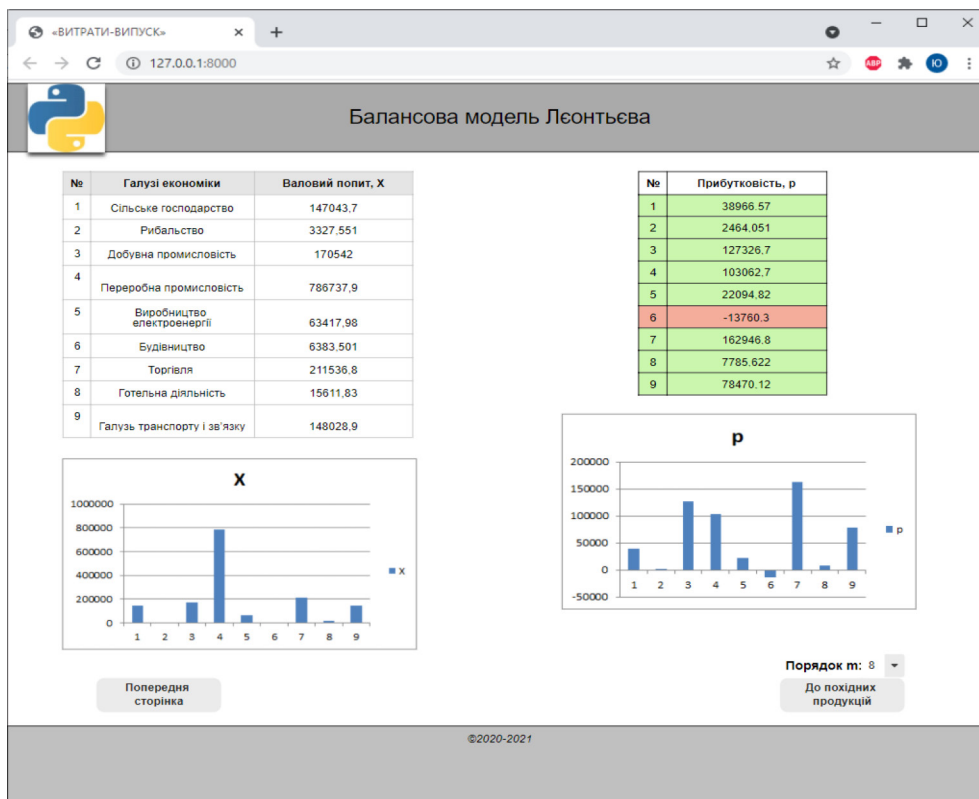


Рис. 3. Сторінка підрахунку валового попиту

На цій сторінці зліва наведені дані валового продукту X по галузям економіки для обраної моделі, підраховані за формулою (2), знизу від них відповідна гістограма. Справа на сторінці наведені значення прибутковості P галузей, які дорівнюють добутку значень рентабельності з попередньої сторінки на відповідні значення валового продукту, та відповідна гістограма. Звичайно, для цієї моделі прибуток галузі будівництва виявляється від'ємним, тобто, насправді збитком. Нижче можна задати максимальний порядок похідної, який ми збираємось досліджувати далі та, натиснувши на кнопку «до похідних продукції», переходимо до наступної сторінки.

На наступній сторінці для кожної галузі можна побачити отримані раніше кінцевий та валовий продукт, а між ними значення похідних продукції за формулою (3) з першої до обраної на попередній сторінці максимальної, до восьмої в даному випадку.

Для кожної галузі можна отримати графіки похідних, що надає можливість візуалізувати та покращити більш детальний аналіз міжгалузевого балансу. Натискаємо на кнопку «до графіку» та обраємо номер галузі, графік якої необхідно отримати. Наступна сторінка:

Тут зверху значення похідних для обраної галузі та відповідний графік, знизу для кожного номеру k від 1 до 8 накопичені значення, тобто сума кінцевого продукту та всіх похідних від 1 до k . На графіку накопичених похідних можна побачити, як вони сходяться до валового продукту. Ці графіки надають можливість оцінити значущість похідних у спільному міжгалузевому балансі. Якщо натиснути кнопку «попередня сторінка», можемо обрати іншу галузь, а з цим повернутись до сторінки графіків. Натискаємо на кнопку «до даних» та повертаємось на головну сторінку, де можна обрати якусь іншу модель.

Тут обрано нову модель галузевої економіки з умовною назвою «витрати – випуск», де на відміну від попередньої технологічна матриця є продуктивною.

Висновки

Метою роботи є демонстрація сайту, створеного для візуалізації процесів міжгалузевих зв'язків згідно з моделлю Леонтьєва.

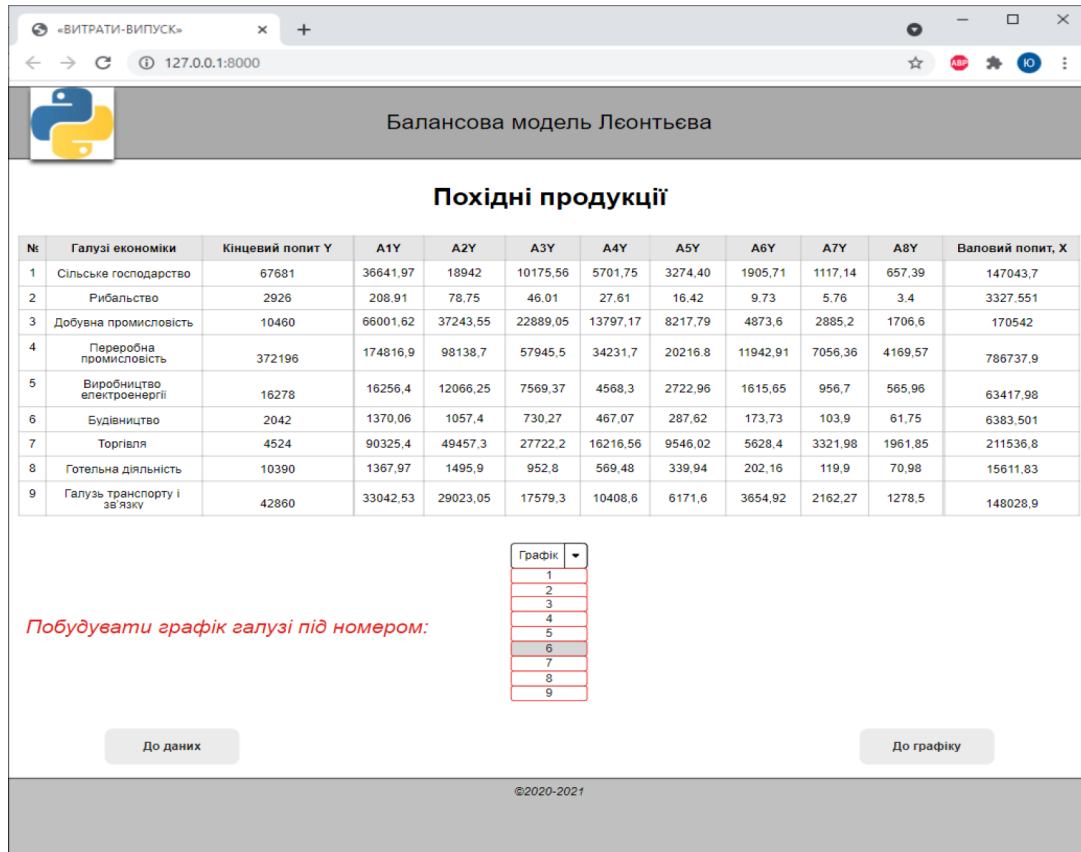


Рис. 4. Сторінка обчислення похідних продукції

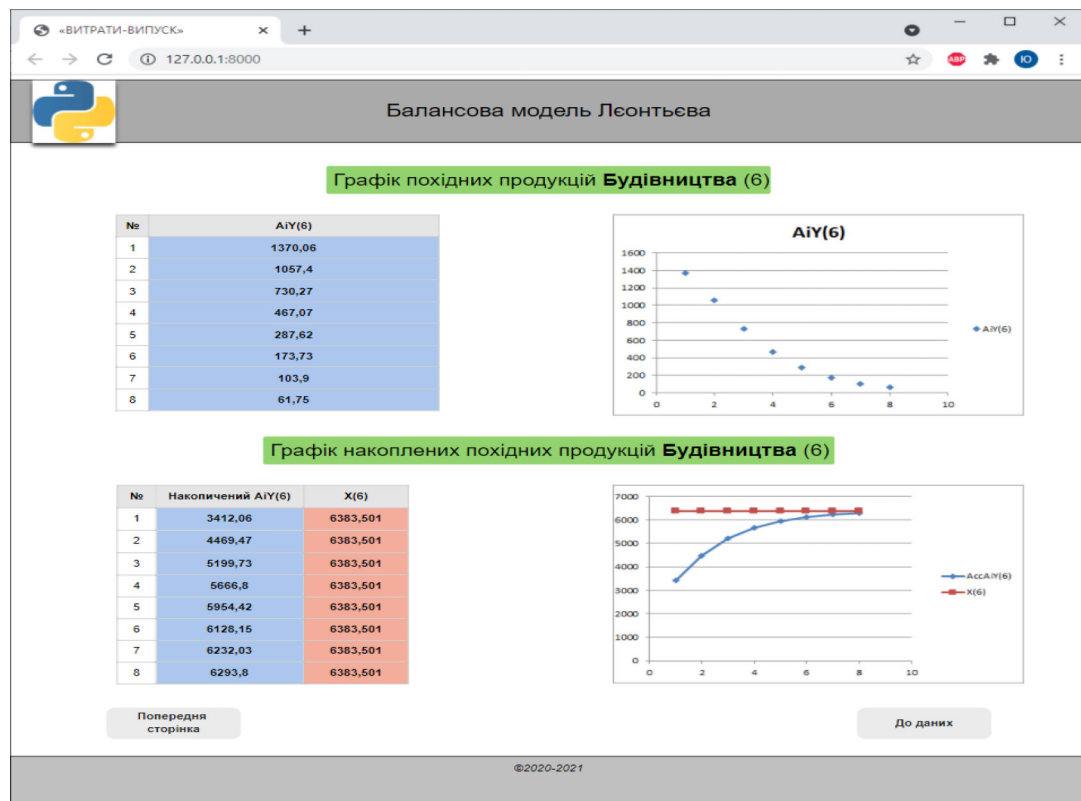


Рис. 5. Сторінка візуалізації графіків похідних

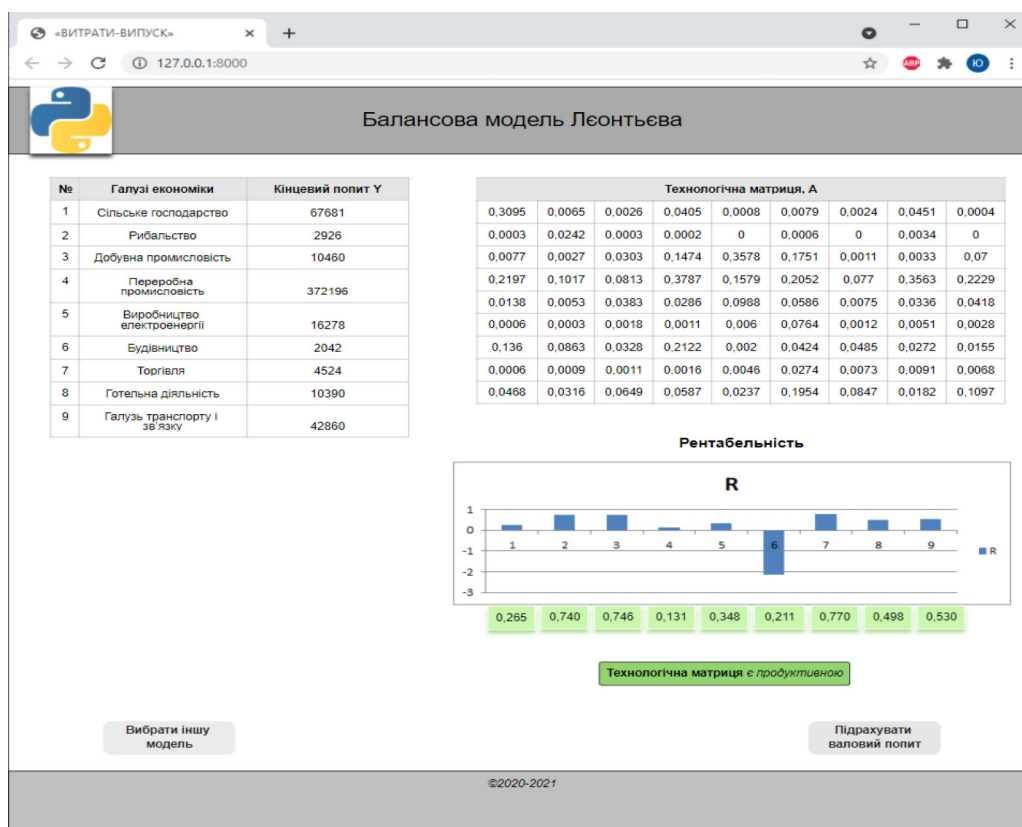


Рис. 6. Сторінка вибору нової моделі галузевої економіки

В наведеному випадку математична модель – це задача з матричної алгебри, до вирішення якої завдяки дослідженням американського економіста В. Леонтьєва зводиться дана економічна задача. В результаті її розв'язання отримуємо не тільки числове значення ВВП, але також оцінки прибутковості та рентабельності галузей економіки та можливість детально переглянути їх фактори.

Розробка сайту виконана на основі фреймворку для розробки веб-систем Django. Це високорівневий Python веб-фреймворк, який дає можливість зручно створювати добре захищені сайти і підтримувати їх використання. Для отримання даних у вигляді табличних розрахунків матриць і відображення графіків застосовані відповідні Python бібліотеки NumPy та Chart.js. При створенні сайту застосовані також і інші традиційні інструменти веб-розробки: HTML (bootstrap), CSS, JavaScript (jQuery).

Цей сайт був використаний при викладанні курсів «Математичне моделювання процесів та явищ», «Економіко – математичні методи та моделі» і «Моделювання економічних процесів» у Херсонському державному університеті та Херсонському національному технічному університеті.

Список використаної літератури

1. Сафрончук М. В. Економічне зростання. Курс економічної теорії / М. В. Сафрончук. К. : АСА, 2004. 605–644 с.
2. Schulz, A. W.: Beyond the Hype: The Value of Evolutionary Theorizing in Economics. Philosophy of the social sciences / A. W. Schulz. 43(1). (2013) 46 – 72 с.
3. G. Dubois, Modeling and Simulation / Dubois G., Taylor F, 2018., CRC Press.
4. Morrison, M. Models, measurement and computer simulation: the changing face of experimentation. Philosophical Studies, (2012), 143, 33–57.
5. Офіційна документація Django. URL: <https://docs.djangoproject.com/en/3.2/>
6. Офіційна документація NumPy. URL: <https://numpy.org/doc/stable/user/whatisnumpy.html>
7. Офіційна документація chart.js. URL: <https://www.chartjs.org/docs/latest/>

References

1. Safronchuk, M., (2024). Economic growth. Course of economic theory. K. : ASA [in Ukraine].
2. Schulz, A. (2013). Beyond the Hype: The Value of Evolutionary Theorizing in Economics. Philosophy of the social sciences. 43(1). (2013) 46 – 72 с.

3. Dubois, G., Taylor, F., (2018). Modeling and Simulation, CRC Press [in USA].
4. Morrison, (2012). M. Models, measurement and computer simulation: the changing face of experimentation. Philosophical Studies, 143, 33–57 [in Canada].
5. Django documentation. URL [Ofitsiyna dokumentatsiya Django]. URL: <https://docs.djangoproject.com/en/3.2/>
6. Official documentation NumPy. [Ofitsiyna dokumentatsiya NumPy]. URL: <https://numpy.org/doc/stable/user/whatisnumpy.html>
7. Official documentation chart.js. [Ofitsiyna dokumentatsiya chart.js.]. URL: <https://www.chartjs.org/docs/latest/>