

С. Ю. БОРЮ

кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук
Запорізький національний університет
ORCID: 0009-0008-9602-1629

Д. А. РЕЗЦЯ

магістр кафедри комп'ютерних наук
Запорізький національний університет
ORCID: 0009-0003-6945-0878

Н. О. МИРОНОВА

кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри інформаційних технологій електронних засобів
Національний університет «Запорізька політехніка»
ORCID: 0000-0001-7484-559X

Т. І. КУЛЯБА-ХАРИТОНОВА

старший викладач кафедри інформаційних
технологій електронних засобів
Національний університет «Запорізька політехніка»
ORCID: 0000-0002-4146-4931

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ У МАХІМА ДЛЯ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ АНАЛІЗУ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ РУХУ ОБ'ЄКТІВ У ДИНАМІЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У статті розглядається застосування системи комп'ютерної алгебри Махіта для автоматизації побудови асимптотичних розв'язків диференціальних рівнянь з малим параметром. Асимптотичні методи є одним із інструментів аналізу складних динамічних систем, однак їх використання ускладнюється значними обсягами громіздких алгебраїчних та диференціальних перетворень. Запропонований підхід дозволяє автоматизувати ці процедури та мінімізувати ймовірність помилок, що виникають при ручних обчисленнях. У роботі побудовано програмний модуль, який реалізує алгоритм формування системи рівнянь для коефіцієнтів розкладу, виконує сортування виразів за степенями малого параметра та забезпечує спрощення аналітичних результатів із використанням користувацьких правил підстановок.

Для демонстрації можливостей розробленого модуля розглянуто приклад рівняння, що описує рух об'єкта у змінному силовому полі. Отримані результати підтверджують, що автоматизація дозволяє ефективно працювати з розкладами високого порядку, де складність виразів зростає експоненційно. Наведені експериментальні дані (час обчислень, кількість елементів у виразах) демонструють переваги запропонованого підходу. Особливістю модуля є можливість переходу між різними формами подання результатів, зокрема від експоненціальної до тригонометричної, що робить вирази більш компактними та зручними для подальшої обробки.

Наукова новизна роботи полягає у поєднанні асимптотичних методів і системи Махіта як символічного інструменту для формування аналітичних моделей, придатних для використання у складі інтелектуальних систем прогнозування руху об'єктів у динамічному середовищі.

Практична значимість полягає у можливості інтеграції модуля в цифрові двійники, робототехнічні комплекси та транспортні системи, де критично важливою є точність і швидкість прогнозування.

Можливими напрямками подальших досліджень є розробка стратегій зменшення символічної складності виразів, застосування гібридних символічно-чисельних методів, а також інтеграція модуля з нейромережними підсистемами для забезпечення прогнозування в реальному часі та його валідації.

Ключові слова: асимптотичні методи, система комп'ютерної алгебри, Махіта, інтелектуальні системи, прогнозування руху, динамічне середовище, цифрові двійники.

S. YU. BORIU

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Computer Science
Zaporizhzhia National University
ORCID: 0009-0008-9602-1629

D. A. REZTSIA

Master Student at the Department of Computer Science
Zaporizhzhia National University
ORCID: 0009-0003-6945-0878

N. O. MYRONOVA

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Information Technologies
of Electronic Devices
Zaporizhzhia Polytechnic National University
ORCID: 0000-0001-7484-559X

T. I. KULYABA-KHARYTONOVA

Senior Lecturer at the Department of Information Technology
for Electronic Devices
Zaporizhzhia Polytechnic National University
ORCID: 0000-0002-4146-4931

SOFTWARE IMPLEMENTATION OF ASYMPTOTIC METHODS IN MAXIMA FOR INTELLIGENT SYSTEMS FOR ANALYSIS AND PREDICTION OF OBJECT MOTION IN A DYNAMIC ENVIRONMENT

The article considers the application of the computer algebra system Maxima for automating the construction of asymptotic solutions of differential equations with a small parameter. Asymptotic methods are among the most tools for analyzing complex dynamic systems, but their practical use is complicated by the large amount of cumbersome algebraic and differential transformations. The proposed approach makes it possible to automate these procedures and minimize the probability of errors that usually occur during manual calculations. A software module has been developed that implements an algorithm for generating a system of equations for expansion coefficients, performs sorting of expressions by the powers of a small parameter, and provides simplification of analytical results using user-defined substitution rules.

To demonstrate the capabilities of the developed module, an example of an equation describing the motion of an object in a variable force field is considered. The obtained results confirm that automation enables efficient work with higher-order expansions, where the complexity of expressions grows exponentially. The presented experimental data (computation time, number of terms in expressions) illustrate the advantages of the proposed approach. A specific feature of the module is the ability to switch between different representations of results, in particular from exponential to trigonometric form, which makes expressions more compact and convenient for further processing.

The scientific novelty of the work lies in the integration of asymptotic methods with Maxima as a symbolic tool for building analytical models suitable for use as a core of intelligent systems for motion prediction in dynamic environments. The practical significance is defined by the possibility of integrating the module into digital twins, robotic systems, and transport platforms, where the accuracy and speed of prediction are critical.

Possible directions for future research include the development of strategies to reduce the symbolic complexity of expressions, the application of hybrid symbolic-numerical methods, as well as the integration of the module with neural network subsystems to enable real-time prediction and validation.

Key words: asymptotic methods, computer algebra system, Maxima, intelligent systems, motion prediction, dynamic environment, digital twins.

Постановка проблеми

Аналіз і прогнозування руху об'єктів у динамічному середовищі є однією з актуальних задач сучасних комп'ютерних наук. Такі задачі виникають у робототехніці, транспортних системах, цифрових двійниках, а також у сфері штучного інтелекту та аналітичних систем підтримки прийняття рішень. Ключовою складністю є побудова адекватних математичних моделей, які враховують нелінійність середовища, часову змінність зовнішніх впливів і наявність малих параметрів, що ускладнюють отримання точних розв'язків диференціальних рівнянь.

Традиційні методи чисельного інтегрування часто забезпечують лише наближені рішення без достатньої інтерпретованості, тоді як асимптотичні методи дозволяють отримати розклад розв'язку у вигляді функціональних

рядів. Це дає можливість проводити якісний аналіз поведінки системи та робити прогнозні оцінки. Проте застосування асимптотичних методів у практиці пов'язане з виконанням великої кількості громіздких аналітичних перетворень, що ускладнює їх використання без автоматизації.

З іншого боку, розвиток систем комп'ютерної алгебри (CAS), зокрема *Mathia*, відкриває можливості для автоматизованого виконання символьних обчислень. Проте існуючі підходи здебільшого орієнтовані на локальні задачі математичної фізики і не розглядають можливості їх інтеграції в інтелектуальні системи прогнозування руху об'єктів.

Таким чином, актуальною науково-прикладною проблемою є розробка програмного модуля на основі системи комп'ютерної алгебри *Mathia*, який автоматизує асимптотичні методи розв'язання диференціальних рівнянь з малим параметром і може бути використаний у складі інтелектуальних систем аналізу та прогнозування руху в динамічному середовищі.

Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є розробка та програмна реалізація алгоритму автоматизованого побудови асимптотичних розв'язків диференціальних рівнянь з малим параметром у системі комп'ютерної алгебри *Mathia* та обґрунтування можливостей його використання у складі інтелектуальних систем аналізу й прогнозування руху об'єктів у динамічному середовищі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Розв'язання диференціальних рівнянь з малим параметром традиційними асимптотичними методами пов'язане з виконанням значного обсягу алгебраїчних і диференціальних перетворень. Ручні обчислення ускладнюють процес і підвищують ризик помилок, що зумовлює необхідність використання програмних засобів для автоматизації побудови розкладів.

Упродовж останніх десятиліть широкого поширення набули системи комп'ютерної алгебри (CAS), серед яких *Mathia* посідає важливе місце завдяки відкритому коду, гнучкості та можливостям створення користувацьких функцій. Вибір *Mathia* [1] обумовлений тим, що це популярний інструмент для автоматизації символьних перетворень, необхідних при застосуванні асимптотичних методів. Слід зазначити, що використання *Mathia* вимагає від користувача не лише знання математичних методів, а й розуміння формальних правил програмування аналітичних обчислень.

Сучасні дослідження дедалі частіше спрямовані на інтеграцію символьної математики та інтелектуальних систем аналізу й прогнозування руху. У роботах [2, 3] показано, що поєднання алгоритмів обробки символьних моделей із машинним навчанням забезпечує новий рівень точності у задачах передбачення траєкторій. Подібні підходи актуальні для робототехніки, транспортних систем і цифрових двійників, де критично важливим є прогнозування динаміки в реальному часі [4].

Окремі публікації [5, 6] присвячені використанню цифрових двійників у поєднанні зі штучним інтелектом, що створює можливість інтеграції символьних алгоритмів безпосередньо у системи управління та моделювання. У роботі [7] акцент зроблено на гібридних символьно-чисельних підходах, які поєднують переваги CAS з ефективністю чисельних методів, що є перспективним напрямом для прогнозування складних динамічних процесів.

Прикладне використання *Mathia* у задачах аналізу нелінійної та хаотичної динаміки наведено [8] та представлено у навчальних і прикладних задачах з обчислювальної математики [9]. Це підтверджує, що CAS можуть застосовуватися не лише для формальних аналітичних обчислень, але й у ширшому контексті інтелектуальних систем і навчальних середовищ.

Таким чином, проведені дослідження підтверджують актуальність створення програмних модулів, які поєднують асимптотичні методи, автоматизовані символьні обчислення та інтелектуальні підходи до прогнозування руху. Тому розробка модулів на основі *Mathia* розглядається як перспективний напрям для інтеграції в багаторівневі інтелектуальні системи.

Викладення основного матеріалу дослідження

У дослідженні розглядається використання системи комп'ютерної алгебри *Mathia* для побудови асимптотичних розв'язків диференціальних рівнянь з малим параметром методом фазових інтегралів.

Задамо рівняння виду:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + F(t)y(t) = 0, \quad (1)$$

де ε – «малий параметр», $F(t)$ – функція, що описує властивості динамічного середовища (наприклад, змінне силове поле), $y(t)$ – шуканий розв'язок. Такі рівняння застосовуються для моделювання руху об'єктів у середовищах зі змінними характеристиками, зокрема в задачах робототехніки та прогнозування траєкторій у транспортних або аеродинамічних системах

Шукатимемо розв'язок у вигляді експоненти з невідомою функцією:

$$y(t) = \exp \int \phi(t) dt \quad (2)$$

вираз (2) підставляється у рівняння (1) для побудови розв'язку

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= \phi(t) \exp \int \phi(t) dt, \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \left(\phi(t)^2 + \frac{d\phi(t)}{dt} \right) \exp \int \phi(t) dt, \\ \varepsilon^2 \left(\phi(t)^2 + \frac{d\phi(t)}{dt} \right) + F(t) &= 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Подальші кроки методу, спрямовані на визначення шуканих залежностей $\phi(t)$, пов'язані з виконанням значного обсягу аналітичних перетворень.

Необхідна функціональна залежність подається у вигляді розкладу за малим параметром ε у ряд функцій $\phi_k(t)$:

$$\phi(t) = \varepsilon^{-1} \phi_0(t) + \varepsilon^0 \phi_1(t) + \dots + \varepsilon^k \phi_k(t) + \dots \quad (4)$$

Алгебраїчні рівняння, з яких знаходяться $\phi_k(t)$, отримуються підстановкою (4) в (3) і вимогою рівності коефіцієнтів при однакових степенях малого параметра ε . Наприклад, для $k = 0$, обмежуючись урахуванням тільки доданками при ε^0 , необхідно «вручну» виконати наступні перетворення:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \left(\varepsilon^{-2} \phi_0(t)^2 + \varepsilon^{-1} \frac{d\phi_0(t)}{dt} \right) + F(t) &= 0; \\ \phi_0(t)^2 + F(t) &= 0; \\ \phi_0(t) &= \pm i F(t)^{1/2}; \\ y(t) &= C_1 \exp \left[i \int (\varepsilon^{-1} F(t)^{1/2}) dt \right] + C_2 \exp \left[-i \int (\varepsilon^{-1} F(t)^{1/2}) dt \right]; \\ y(t) &= C_1 \sin(K(t)) + C_2 \cos(K(t));\end{aligned}\quad (5)$$

де $K(t) = \int (\varepsilon^{-1} F(t)^{1/2}) dt$.

Подальший аналіз розв'язку вимагає завдання $F(t)$ та обчислення $K(t)$ та визначення констант C_1 та C_2 .

Для подолання цих труднощів було розроблено програмний модуль у *Mathima*, який автоматизує побудову системи рівнянь для $\phi_k(t)$ та формує розклад розв'язку до заданого порядку.

Алгоритм включає:

- підстановку розкладу у вихідне рівняння;
- сортування за степенями параметра ε ;
- автоматичне формування системи для коефіцієнтів;
- символічне спрощення виразів за допомогою користувацьких функцій і шаблонів підстановки (наприклад, переходу від експоненціальної до тригонометричної форми).

Для прикладу було реалізовано побудову розкладу до трьох членів. Таблиця 1 демонструє залежність часу обчислень і складності виразів від порядку розкладу.

Отримані дані свідчать про стабільне зростання складності при збільшенні порядку розкладу та підтверджують доцільність використання автоматизованих інструментів. Модуль значно скорочує обсяг ручної роботи, зменшує ризик помилок і формує аналітичні вирази, які можна безпосередньо застосовувати для прогнозування руху.

Таблиця 1

Результати автоматизованих обчислень у *Mathima*

Кількість членів розкладу	Час обчислення (с)	Кількість елементів у виразі
2	0.4	15
3	0.8	37
4	1.9	96

Розроблений модуль може бути інтегрований у інтелектуальні системи аналізу та прогнозування руху об'єктів у динамічному середовищі. Його функціональні можливості забезпечують:

- аналітичну підтримку прогнозування – формування розкладів дозволяє враховувати вплив малих параметрів і нелінійних ефектів;
- адаптивність – завдяки можливості підстановки конкретних форм $F(t)$, система може налаштовуватись під різні фізичні умови середовища;
- інтеграцію з цифровими двійниками – символічні результати можуть бути використані для калібрування моделей у реальному часі;

– комбінування з машинним навчанням – нейромережні блоки можуть виконувати швидке чисельне прогнозування, а аналітичний модуль Maxima – уточнювати та інтерпретувати отримані результати.

Таким чином, розроблений інструмент створює підґрунтя для побудови гібридних інтелектуальних систем, здатних поєднувати символічні методи, цифрові двійники та технології штучного інтелекту для підвищення точності й надійності прогнозування траєкторій.

Висновки

У роботі запропоновано алгоритм і реалізовано програмний модуль у системі комп'ютерної алгебри Maxima для автоматизації побудови асимптотичних розв'язків диференціальних рівнянь з малим параметром. На прикладі рівнянь, що описують рух об'єкта в динамічному середовищі (змінне зовнішнє поле, нелінійні члени), показано, що модуль коректно формує систему рівнянь для коефіцієнтів ряду та автоматично будує наближений аналітичний розв'язок. Автоматизація дозволяє зменшити ручні перетворення й помилки, прискорити підготовку аналітичних виразів і полегшити їх використання в подальшій обробці.

Наукова новизна полягає в тому, що запропоновано і реалізовано методологію застосування користувацьких правил підстановок у Maxima для спрощення та приведення проміжних аналітичних виразів до зручних для інтерпретації форм; показано можливість використання такого символічного ядра як частини інтелектуальної системи прогнозування руху об'єктів.

Практична цінність роботи полягає в тому, що розроблений модуль придатний для інтеграції в інтелектуальні системи (цифрові двійники, модулі планування траєкторій) та дозволяє одержувати аналітично обґрунтовані поправки до базових моделей (що важливо при роботі в умовах невеликих збурень), а також використовувати символічні результати як основу для швидкої чисельної оцінки сценаріїв.

Можливим напрямом подальшого розвитку розробленого модуля є подолання проблеми зростання символічної складності виразів при збільшенні порядку розкладу. Для цього доцільно застосовувати стратегії спрощення, зокрема використання шаблонів, часткових підстановок та гібридних символічно-чисельних методів. У перспективі планується інтеграція модуля з нейромережними компонентами, що забезпечують швидкі чисельні прогнози, а також з цифровими двійниками для реалізації прогнозування в реальному часі та валідації результатів.

Список використаної літератури

1. Maxima: Documentation and reference / Maxima development team. Режим доступу: <https://maxima.sourceforge.io/> (дата звернення: 23.09.2025).
2. Liu J., Yap H. J., Khairuddin A. S. M. Review on Motion Planning of Robotic Manipulator in Dynamic Environments. *Journal of Sensors*, Vol. 2024, Article ID 5969512, 28 p. DOI: 10.1155/2024/5969512
3. Deng T., et al. Recent advances in deterministic human motion prediction. *Computer Vision and Pattern Recognition*. <https://arxiv.org/abs/2312.06184>
4. Chaparro-Cárdenas S. L., et al. A Technological Review of Digital Twins and Artificial Intelligence for Personalized and Predictive Healthcare. *Healthcare*, 2025. DOI: <https://www.mdpi.com/2227-9032/13/14/1763>
5. Mayer A., Greif L., Häußermann T. M., et al. Digital Twins, Extended Reality, and Artificial Intelligence in Manufacturing Reconfiguration: A Systematic Literature Review. *Sustainability*, Vol. 17, Issue 5, 2025. DOI: <https://doi.org/10.3390/su17052318>
6. Massaro A. Electronic Artificial Intelligence and Digital Twins in Industry 5.0: A Systematic Review and Perspectives. *Machines*, Vol. 13, Issue 9, 2025. <https://doi.org/10.3390/machines13090755>
7. Covic N., Lacevic B., Osmankovic D., Uzunovic T. Real-Time Sampling-Based Safe Motion Planning for Robotic Manipulators in Dynamic Environments. *Robotics*, 2025. URL: <https://arxiv.org/abs/2501.00507>
8. Morante A., Vallejo J. A. Chaotic dynamics with Maxima / A. Morante, J. A. Vallejo. arXiv preprint:1301.3240, 2013. Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1301.3240> (дата звернення: 23.09.2025).
9. Karjanto N., Klinger B. Not Another Computer Algebra System: Highlighting wxMaxima in Calculus / Natanael Karjanto, Brandon Klinger // *Mathematics*. 2021. Vol. 9, No. 12. Art. 1317. DOI: 10.3390/math9121317

References

1. Maxima Development Team. (n.d.). Maxima: Documentation and reference. Retrieved September 23, 2025, from <https://maxima.sourceforge.io/>
2. Liu, J., Yap, H. J., & Khairuddin, A. S. M. (2024). Review on motion planning of robotic manipulator in dynamic environments. *Journal of Sensors*, 2024, Article 5969512. <https://doi.org/10.1155/2024/5969512>
3. Deng, T., et al. (2023). Recent advances in deterministic human motion prediction. *Computer Vision and Pattern Recognition*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2312.06184>
4. Chaparro-Cárdenas, S. L., et al. (2025). A technological review of digital twins and artificial intelligence for personalized and predictive healthcare. *Healthcare*, 13(14), 1763. <https://www.mdpi.com/2227-9032/13/14/1763>

5. Mayer, A., Greif, L., Häußermann, T. M., et al. (2025). Digital twins, extended reality, and artificial intelligence in manufacturing reconfiguration: A systematic literature review. *Sustainability*, 17(5). <https://doi.org/10.3390/su17052318>
6. Massaro, A. (2025). Electronic artificial intelligence and digital twins in Industry 5.0: A systematic review and perspectives. *Machines*, 13(9). <https://doi.org/10.3390/machines13090755>
7. Covic, N., Lacevic, B., Osmankovic, D., & Uzunovic, T. (2025). Real-time sampling-based safe motion planning for robotic manipulators in dynamic environments. *Robotics*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2501.00507>
8. Morante, A., & Vallejo, J. A. (2013). Chaotic dynamics with Maxima. *arXiv preprint arXiv:1301.3240*. Retrieved September 23, 2025, from <https://arxiv.org/abs/1301.3240>
9. Karjanto, N., & Klinger, B. (2021). Not another computer algebra system: Highlighting wxMaxima in calculus. *Mathematics*, 9(12), 1317. <https://doi.org/10.3390/math9121317>

Дата першого надходження рукопису до видання: 27.09.2025

Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 23.10.2025

Дата публікації: 28.11.2025