

І. В. КРУШ

аспірант кафедри інформаційних технологій та аналітики даних
Національний університет «Острозька академія»
ORCID: 0009-0002-5838-5903

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТА ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ СТОХАСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЦІНОВИХ РУХІВ НА РИНКУ FOREX

У статті проведено поглиблений порівняльний аналіз трьох стохастичних моделей, що застосовуються для прогнозування валютних курсів та кількісної оцінки ризиків у фінансовій сфері. Об'єктом дослідження виступає валютна пара EUR/USD, яка є ключовим індикатором глобальних макроекономічних тенденцій, характеризується високою ліквідністю та формує орієнтир для широкого кола фінансових інструментів. Розглядаються геометричний броунівський рух (GBM), модель умовної гетероскедастичності GARCH(1,1) та стрибково-дифузійний процес Мертона, що репрезентують різні підходи до опису динаміки фінансових часових рядів і відображають як безперервні, так і дискретні характеристики зміни цін.

Методологія дослідження передбачає програмну реалізацію моделей у середовищі Python із використанням бібліотек `ufinance`, `numpy`, `arch` та `matplotlib`. Дані щоденних котирувань EUR/USD за 2015–2024 роки проходять стандартизований препроцесинг: побудову логарифмічних прибутків, перевірку стаціонарності (ADF), діагностику «важких хвостів» і асиметрії, а також відсіювання аномальних значень.

Симуляційний експеримент включає генерування 1000 імовірнісних траєкторій на горизонтах 1, 5 і 20 днів з подальшим обчисленням метрик точності (MSE, MAE) і ризику (VaR, CVaR) з емпіричного прогнозного розподілу. Для візуальної інтерпретації невизначеності побудовано віялоподібні графіки (*fan-charts*), які відображають симетрію/асиметрію та ширину довірчих інтервалів, а також дозволяють порівнювати охоплення інтервалами фактичних реалізацій. Окремо оцінено чутливість результатів до вибору довжини вікна, специфікації інновацій, інтенсивності стрибків і припущень щодо дрейфу/ризик-премії.

Додатково виконано бектестування ризикових оцінок: для VaR застосовано тести Купіца (безумовна частота порушень) і Христофферсена (незалежність порушень), що дозволяє кількісно оцінити надійність прогнозів ризику у стабільні та турбулентні періоди. Порівняльні результати свідчать, що GBM забезпечує просту й обчислювально ефективну процедуру короткострокового прогнозування, однак не відтворює кластеризацію волатильності та недооцінює екстремальні події. Модель GARCH(1,1) адекватно моделює змінність дисперсії, підвищує точність оцінок ризику й зменшує частоту порушень VaR, проте залишається відносно нечутливою до раптових новинних стрибків. Модель Мертона, поєднуючи броунівську та пуассонівську компоненти, описує рідкісні, але суттєві цінові зсуви та краще відтворює хвостові ризики; поєднання неперервної і дискретної динаміки робить її корисною в умовах різкої зміни ринкових режимів.

Зроблено висновок, що інтеграція стохастичних методів із сучасними програмними засобами створює надійну основу для розроблення адаптивних систем прогнозування валютних курсів. Наукова новизна полягає у цілісному зіставленні трьох підходів з позиції їх здатності відображати специфіку валютного ринку та у практичній валідації на тривалому часовому ряді, який охоплює майже десятиріччя з гетерогенними економічними режимами. Практичне значення полягає в можливості застосування результатів для алгоритмічного трейдингу, хеджування валютних ризиків, стратегічного фінансового планування й побудови інтегрованих СППР; додатково окреслено напрями подальших досліджень, зокрема розширення класу моделей за рахунок гібридизації стохастичних підходів і методів глибинного навчання та розроблення процедур автоматичного вибору моделі залежно від ринкового режиму.

Ключові слова: валютний курс, стохастичне моделювання, геометричний броунівський рух (GBM), GARCH(1,1), модель Мертона, *jump diffusion*, волатильність, симуляція, прогнозування, віялоподібні графіки, Python, фінансова математика, імовірнісне моделювання, *fan-chart*, ризикові метрики.

I. V. KRUSH

Postgraduate Student at the Department of Information Technology
and Data Analytics
National University of Ostroh Academy
ORCID: 0009-0002-5838-5903

FEATURES OF CONSTRUCTION AND SOFTWARE IMPLEMENTATION OF STOCHASTIC MODELS OF PRICE MOVEMENTS IN THE FOREX MARKET

The article presents an in-depth comparative analysis of three stochastic models applied for forecasting exchange rates and quantitative risk assessment in the financial sector. The object of study is the EUR/USD currency pair, which serves as a key indicator of global macroeconomic trends, is characterized by high liquidity, and functions as a benchmark for a wide range of financial instruments. The models under consideration include geometric Brownian motion (GBM), the generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model GARCH(1,1), and Merton's jump-diffusion process, which represent different approaches to describing the dynamics of financial time series and capture both continuous and discrete characteristics of price changes.

The research methodology involves the software implementation of models in the Python environment using the *yfinance*, *numpy*, *arch*, and *matplotlib* libraries. Daily EUR/USD quotes for the period 2015–2024 undergo standardized preprocessing: construction of logarithmic returns, stationarity testing (ADF), diagnostics of heavy tails and asymmetry, and outlier removal.

The simulation experiment includes generating 1000 probabilistic trajectories at horizons of 1, 5, and 20 days, followed by computing accuracy metrics (MSE, MAE) and risk measures (VaR, CVaR) from the empirical predictive distribution. To visualize uncertainty, fan charts are constructed that display symmetry/asymmetry, the width of confidence intervals, and the overall character of risk dispersion, while also allowing for comparison between interval coverage and realized observations. Sensitivity analysis examines the influence of window length, innovation specification, jump intensity, and assumptions regarding drift and risk premium.

Additional backtesting of risk forecasts is conducted: for VaR, the Kupiec unconditional coverage test and Christoffersen independence test are applied, enabling quantitative assessment of forecast reliability under both stable and turbulent conditions. Comparative results show that GBM provides a simple and computationally efficient framework for short-term forecasting but fails to reproduce volatility clustering and underestimates extreme events. The GARCH(1,1) model adequately models time-varying variance, improves risk evaluation accuracy, and reduces the frequency of VaR breaches, yet remains relatively insensitive to sudden news-driven jumps. Merton's model, by combining Brownian and Poisson components, captures rare but significant price shifts and better reflects tail risks; the integration of continuous and discrete dynamics makes it particularly useful under abrupt regime shifts.

It is concluded that integrating stochastic approaches with modern software tools establishes a reliable foundation for the development of adaptive currency-forecasting systems. The scientific novelty lies in a comprehensive comparison of three approaches with respect to their ability to reflect the specifics of the FX market, as well as in the practical validation of models on an extended time series covering nearly a decade with heterogeneous economic regimes. The practical significance is defined by the potential use of the results for algorithmic trading, currency risk hedging, strategic financial planning, and the design of integrated decision-support systems. In addition, directions for further research are outlined, including the expansion of the model class through hybridization of stochastic approaches with deep learning methods and the development of procedures for automatic model selection depending on prevailing market regimes.

Key words: exchange rate, stochastic modeling, geometric Brownian motion (GBM), GARCH(1,1), Merton model, jump diffusion, volatility, simulation, forecasting, fan charts, Python, financial mathematics, probabilistic modeling, fan-chart, risk metrics.

Постановка проблеми

Ринок Forex характеризується безперервним потоком котирувань і високою ліквідністю, а цінові коливання на ньому зумовлюються впливом макроекономічних новин, геополітичних подій та поведінкових факторів, що визначає такі його особливості:

- Нерегулярна волатильність. Валютні курси демонструють кластери високої та низької дисперсії, що порушує припущення про сталість σ у класичних моделях.
- «Важкі хвости» та екстремальні події. Емпіричні розподіли прибутків помітно відхиляються від нормального, зростає ймовірність великих стрибків, які недооцінює геометричний броунівський рух [1].
- Новинні стрибки. Оприлюднення ключових макроіндикаторів здатне зумовити миттєвий зсув курсу на десятки базисних пунктів, що вимагає явної стрибкової компоненти в моделі [2].

Традиційно у фінансах широко використовується геометричний броунівський рух (GBM), який передбачає постійну волатильність і нормально розподілені лог-прибутки. Проте емпіричні дослідження демонструють наявність автокореляції квадратів прибутків, кластеризації волатильності, а також «важких хвостів» та асиметрії розподілу – ефектів, які не враховуються моделлю GBM [3]. Це призводить до недооцінки ризиків і неточних прогнозів, особливо в періоди ринкової турбулентності.

У відповідь на це було розроблено більш гнучкі моделі, такі як GARCH [4; 5], які дозволяють моделювати умовну волатильність, та стрибково-дифузійні моделі, зокрема процес Мертона [2], які враховують нечасті, але значні стрибки цін. Кожна з цих моделей має власні переваги та обмеження, і питання вибору адекватного підходу залежить від горизонту прогнозу, умов ринку та цілей дослідження.

Сучасний рівень розвитку інформаційних технологій відкриває можливість програмної реалізації таких моделей у середовищах наукових обчислень, зокрема в Python, із застосуванням спеціалізованих бібліотек (numpy, arch, yfinance, matplotlib) для завантаження даних, оцінювання параметрів, симуляцій та візуалізації результатів.

Таким чином, актуальною задачею є комплексне програмне порівняння GBM, GARCH(1,1) та моделі Мертон за точністю прогнозування, оцінкою ризиків і поведінкою на різних часових горизонтах, із подальшою інтерпретацією отриманих результатів для практичного використання в ризик-менеджменті та торгових стратегіях.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Останні два десятиліття проблема точного моделювання та прогнозування валютних курсів привертає дедалі більше уваги через зростання обсягів електронної торгівлі на ринку Forex і підвищені вимоги до управління ринковими ризиками. Дослідження можна умовно згрупувати у три напрями.

По-перше, класичні підходи ґрунтуються на геометричному броунівському русі (GBM) і його варіаціях. Ці моделі історично застосовувалися до валютних серій завдяки аналітичній простоті, але численні праці [1; 4] засвідчили, що припущення про постійну волатильність і нормальний розподіл прибутків призводять до хронічного недооцінювання «важких хвостів» і крайніх подій.

Другий напрям – моделі умовної гетероскедастичності (ARCH/GARCH). Роботи [5; 2] започаткували цей підхід, а численні його розширення (EGARCH, FGARCH, GARCH-X) успішно відтворюють кластери волатильності у валютних рядах. Наприклад, дослідження [6] показали, що функціональні FGARCH-моделі з регресорами макроекономічних новин підвищують точність прогнозів VaR для EUR/USD на хвилинних даних. Однак GARCH-сімейство залишається малочутливим до раптових цінових стрибків, викликаних позаплановими новинами.

Третій, активно зростаючий пласт літератури присвячений стрибково-дифузійним схемам і процесам Леві. Піонерська модель Мертон [2] уперше об'єднала безперервну броунівську динаміку та пуассонівські стрибки. Подальші дослідження [7; 8] показали, що включення стрибків суттєво покращує опис хвостових ризиків у мультивалютних портфелях. У роботі [9] доведено, що комбінована jump-GARCH-модель дає статистично значуще поліпшення прогнозної здатності порівняно з «чистим» GARCH.

Водночас формуються гібридні рішення, які поєднують стохастичні процеси з глибинними мережами. Дослідження [10] показало, що ініціалізована GARCH-оцінками модель CNN-LSTM знижує середньоквадратичну похибку одноденного прогнозу волатильності EUR/USD на 10 %. Попри це, автори зауважують відсутність прозорості інтерпретації ризикових метрик у «чистих» ML-системах, що зберігає актуальність стохастичної компоненти.

Отже, література демонструє послідовний розвиток від простих гаусових моделей до гібридних архітектур «GARCH + стрибки + ML». Невирішеними залишаються питання обчислювальної стабільності складних Леві-моделей, їх калібрування на високочастотних вибірках і створення уніфікованої СППР, здатної автоматично обирати адекватну модель залежно від ринкового режиму.

Формулювання мети дослідження

Мета дослідження – порівняти можливості та точність різних стохастичних моделей (GBM, GARCH(1,1), Мертон) для прогнозування курсу EUR/USD, з акцентом на застосуванні сучасних IT-інструментів для обробки фінансових даних і моделювання ризиків.

Для реалізації цієї мети поставлено такі **завдання**:

- Реалізувати алгоритми GBM, GARCH(1,1) та Мертон в середовищі Python;
- Оцінити параметри моделей на основі історичних лог-прибутків за 2015–2024 рр.;
- Провести 1000 симуляцій цінових траєкторій на горизонтах 1, 5 і 20 днів;
- Побудувати fan-charts для візуалізації ймовірнісних прогнозів;
- Розрахувати метрики точності (MSE, MAE) та ризику (VaR, CVaR) для кожної моделі;
- Провести порівняльний аналіз результатів та визначити оптимальні сценарії застосування кожного підходу у фінансовій аналітиці.

Викладення основного матеріалу дослідження

Інформаційно-обчислювана реалізація та результати

Динаміка валютних курсів на ринку Forex має низку особливостей, які зумовлюють потребу у використанні складніших стохастичних моделей. Зокрема, ціни характеризуються відсутністю тренду в лог-прибутках, змінною волатильністю, економічно обумовленими стрибками, а також нормальним або асиметричним розподілом з важкими хвостами. У даному дослідженні було обрано три підходи для моделювання курсу EUR/USD: геометричний броунівський рух (GBM), GARCH(1,1) та стрибково-дифузійний процес Мертон (як окремий випадок процесів Леві).

Моделювання виконано у середовищі Python 3.10. Основні бібліотеки:

- yfinance – автоматизоване завантаження ринкових даних з Yahoo Finance;
- pandas, numpy – обробка та аналіз часових рядів;
- scipy – метод максимальної правдоподібності (MLE), статистичні функції;
- arch – оцінка параметрів GARCH(1,1);

- matplotlib – побудова візуалізацій;
- scipy.stats – обчислення асиметрії, куртозису та інших характеристик.

Для забезпечення відтворюваності результатів зафіксовано генератор випадкових чисел:

```
np.random.seed(42)
```

(Фіксує стохастичність симуляцій для повторюваних результатів.)

Щоденні котирування валютної пари EUR/USD за період 01.01.2015–31.12.2024 завантажено з Yahoo Finance та перетворено у логарифмічні прибутки:

```
data = yf.download("EURUSD=X", start="2015-01-01", end="2024-12-31")
data.dropna(inplace=True)
data['log_returns'] = np.log(data['Close']/data['Close'].shift(1))
data.dropna(inplace=True)
```

(Завантаження, очищення та побудова лог-прибутків.)

Таблиця 1

Статистичні характеристики лог-прибутків EUR/USD

Показник	Значення	Висновок
Середнє значення	-0.000057	Середнє ≈ 0 – прибутковість в середньому близька до нуля, що типово для валютного ринку.
Стандартне відхилення	0.004974	Стандартне відхилення ≈ 0.005 – свідчить про досить помірну щоденну волатильність ($\approx 0.5\%$)
Мінімум	-0.028144	Мінімум $\approx \pm 2.8\%$ – показують можливі екстремальні коливання (ризик)
Максимум	0.028145	Максимум $\approx \pm 2.8\%$ – показують можливі екстремальні коливання (ризик)
Асиметрія (Skewness)	-0.051617	Асиметрія ≈ -0.05 – майже симетричний розподіл, дуже слабка лівостороння асиметрія
Куртозис (Kurtosis)	2.605534	Куртозис ≈ 2.6 – трохи менше 3 (нормального розподілу), що не свідчить про heavy tails, але може бути результатом вирівнювання у великому періоді

Динаміка лог-прибутків EUR/USD за останні 10 років демонструє властивості близькі до нормального розподілу, однак слабка лівостороння асиметрія та трохи знижений куртозис можуть свідчити про наявність періодів стабільності з окремими викидами. Це обґрунтовує потребу перевірки на кластеризацію волатильності (GARCH) і застосування моделей з урахуванням екстремальних подій (jump-diffusion, Леві).

Для оцінки волатильності побудовано часовий ряд абсолютних логарифмічних прибутків валютної пари EUR/USD за період дослідження:

```
abs_log = np.abs(data['log_returns'])
plt.figure(figsize=(8,3)); plt.plot(abs_log); plt.grid(True)
```

(Візуалізація періодів підвищеної/зниженої мінливості).



Рис. 1. Абсолютні лог-прибутки EUR/USD

Отриманий графік абсолютних лог-прибутків EUR/USD за 2015–2024 роки свідчить про наявність кластерів волатильності: періоди високої та низької активності змін чергуються і тримаються купно. Цей феномен підтверджує доцільність застосування моделей з умовною гетероскедастичністю, зокрема GARCH(1,1), яка дозволяє моделювати змінну волатильність у часі.

Модель геометричного броунівського руху (GBM)

Стохастичне рівняння:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (1)$$

Код оцінювання параметрів μ , σ методом MLE:

```
result = minimize(neg_log_likelihood, initial_params,
args=(data['log_returns'],), bounds=bounds)
```

(Оцінка μ , σ методом максимальної правдоподібності.)

Симуляція ціни виконано за дискретизованою схемою:

```
price[t] = price[t-1] * np.exp((mu_mle - 0.5*sigma_mle**2)*dt
+ sigma_mle*np.sqrt(dt)*Z)
```

(Оновлення ціни в GBM для одного кроку.)

Для візуалізації ймовірнісних траєкторій побудовано 1000 симуляцій:

```
for i in range(0, N, 50):
plt.plot(paths[:, i], alpha=0.1)
plt.plot(paths.mean(axis=1), linewidth=2)
plt.grid(True)
```

(Побудова віялоподібного графіка із середньою траєкторією.)

Було отримано наступні параметри:

- середній приріст (μ): 0.010000;
- волатильність (σ): 0.050000;
- лог-правдоподібність моделі: -5342.41;
- остання ціна (S_0) на момент прогнозу: 1.04294.

За результатами 1000 ймовірнісних сценаріїв розраховано наступні статистики точності та ризику:

Горизонт	MSE	MAE	VaR (95 %)	CVaR (95 %)
1 день	0.000010	0.002562	-0.004772	-0.006035
5 днів	0.000054	0.005915	-0.011651	-0.014475
20 днів	0.000228	0.012008	-0.022874	-0.028294

Рис. 2. Метрики точності та ризику прогнозу курсу EUR/USD за моделлю GBM (MLE) на різних горизонтах

На горизонті 1 день модель геометричного броунівського руху (GBM) демонструє дуже низькі значення похибок: середньоквадратична помилка (MSE) становить 0.000010, а середня абсолютна похибка (MAE) – 0.00256. Це вказує на високу стабільність короткострокового прогнозу, що властиво GBM, яка моделює ціни без урахування змінної волатильності. Значення Value at Risk (VaR) на рівні 95 % становить -0.00477, тобто з 5 % ймовірністю курс може впасти більше ніж на 0.48 %. Conditional VaR (CVaR), що оцінює середню втрату в найгірших 5 % випадків, дорівнює -0.00604, що свідчить про обмежене урахування ризиків екстремальних коливань.

На горизонті 5 днів модель фіксує зростання похибок: MSE підвищується до 0.000054, а MAE – до 0.00592. Значення VaR (95 %) становить -0.01165, тобто у 5 % найгірших сценаріїв втрати можуть перевищити 1.17 %. CVaR при цьому дорівнює -0.01448, що свідчить про середню втрату у крайніх випадках понад 1.45 %. Модель зберігає симетричність прогнозів, однак починає проявляти ознаки обмеженості в оцінці «хвостів» розподілу.

На горизонті 20 днів GBM демонструє зростання невизначеності: MSE збільшується до 0.000228, MAE – до 0.01201. Прогнозоване значення VaR (95 %) досягає -0.02287, тобто модель очікує зниження курсу більш ніж на 2.29 % у 5 % випадків. Значення CVaR становить -0.02829, тобто в найгірших сценаріях середня втрата перевищує 2.83 %. Хоча модель і демонструє поступове розширення розподілу, вона не враховує змінної волатильності чи стрибків, що обмежує її здатність моделювати екстремальні події на довгих горизонтах.

Віялоподібні графіки ілюструють зростання розкиду можливих цін із подовженням горизонту прогнозу. На 1 день більшість траєкторій залишаються близько до поточного рівня; на 5 днів зберігається симетрія розподілу; на 20 днів з'являються крайні траєкторії. Таким чином, GBM підходить для швидкої базової оцінки ризиків та побудови стартових торгових стратегій, але для складних ринкових режимів варто використовувати моделі зі змінною волатильністю (GARCH) або стрибково-дифузійні підходи.

Модель умовної гетероскедастичності GARCH(1,1)

Модель GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) описує серії, де волатильність змінюється з часом, тобто залежить від попередніх значень.

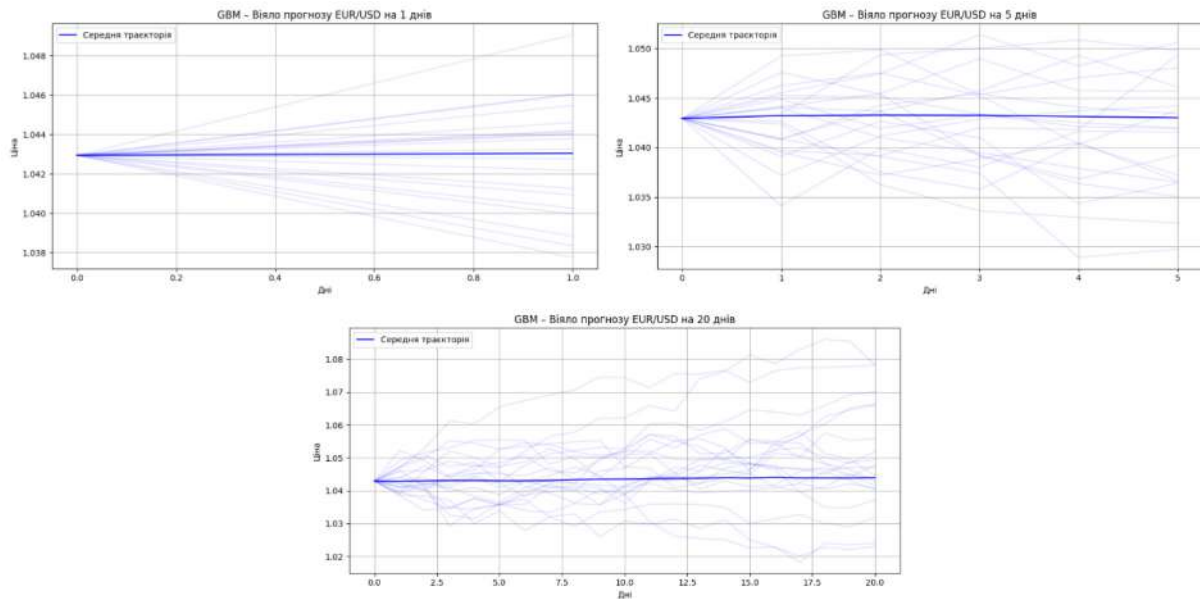


Рис. 3. GBM – Віялоподібна симуляція імовірного прогнозу курсу EUR/USD на X днів

$$r_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, h_t), \quad h_t = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}. \quad (2)$$

Параметри моделі оцінено методом максимальної правдоподібності на відсоткових лог-прибутках (розподіл інновацій – нормальний).

```
model = arch_model(100*data['log_returns'], vol='GARCH', p=1, q=1, dist='normal')
res = model.fit(dis='off')
```

(Оцінювання GARCH(1,1) пакетом arch.)

Із оцінки беремо необхідні параметри для симуляцій:

```
mu = res.params['mu']/100; omega = res.params['omega']
alpha = res.params['alpha[1]']; beta = res.params['beta[1]']
```

(Зсув μ та параметри волатильності ω , α , β .)

Налаштовуємо експеримент (горизонти та кількість траєкторій):

```
horizons = [1, 5, 20]; n_paths = 1000; np.random.seed(42)
```

(Єдність налаштувань для порівняння з GBM/Мертоном.)

Симуляція однієї траєкторії (рекурсія дисперсії та крок ціни):

```
z = np.random.normal(); sigma2 = omega + alpha*(z**2)*sigma2 + beta*sigma2
ret = mu + np.sqrt(sigma2)*z; price *= np.exp(ret)
```

(Оновлення σ^2 за GARCH(1,1) і приріст лог-ціни.)

Fan-chart (віяло) для кожного горизонту:

```
for i in range(n_paths): plt.plot(simulated_paths[:, i], alpha=0.05)
plt.plot(simulated_paths.mean(axis=1), linewidth=2); plt.grid(True)
```

(Багато траєкторій + середня траєкторія.)

Метрики точності та хвостового ризику (по кінцевому кроці):

```
returns = np.log(simulated_paths[horizon, :]/S0)
var_95 = np.percentile(returns, 5); cvar_95 = returns[returns <= var_95].mean()
```

(VaR95 і CVaR95; MSE/MAE – як у GBM, по цінах кінцевого дня.)

Було отримано наступні параметри:

- середній приріст (μ): -0.00527 ;
- $\omega = 0.00133$ – базова волатильність у спокійному стані;
- $\alpha: 0.0264$ – реакція волатильності на нові шоки;

- β : 0.9675 – інерція волатильності (пам'ять у процесі);
- лог-правдоподібність: -1718.87 ;
- остання ціна (S_0): 1.04294.

Сума параметрів $\alpha + \beta = 0.994$, що свідчить про високу стійкість волатильності до згасання – ефекти потрясінь довго зберігаються в системі (типова риса валютних ринків).

За результатами 1000 імовірнісних сценаріїв розраховано наступні статистики точності та ризику:

Горизонт	MSE	MAE	VaR (95 %)	CVaR (95 %)
1 день	0.335724	0.410128	-0.773324	-1.076854
5 днів	5.187341	1.253515	-1.659854	-2.136406
20 днів	1670.806	8.820422	-3.256442	-4.202612

Рис. 4. Метрики точності та ризику прогнозу курсу EUR/USD за моделлю GARCH(1,1) на різних горизонтах

На горизонті 1 день модель GARCH(1,1) демонструє значно вищі значення похибок порівняно з GBM. Середньоквадратична помилка (MSE) становить 0.3357, а середня абсолютна похибка (MAE) – 0.4101, що свідчить про врахування змінної волатильності вже на короткому проміжку. Значення VaR (95 %) дорівнює -0.7733 , тобто з імовірністю 5 % очікується падіння курсу більш ніж на 0.77. Середня втрата у найгірших 5 % сценаріїв, тобто CVaR (95 %), досягає -1.0769 , що вказує на наявність більш глибоких втрат у крайніх випадках. Це результат здатності моделі враховувати «турбулентність» – кластери високої волатильності.

На горизонті 5 днів MSE суттєво зростає до 5.1873, а MAE – до 1.2535, що вказує на накопичення волатильності з часом. Значення VaR (95 %) дорівнює -1.6599 , а CVaR – -2.1364 , тобто в найгірших випадках втрати можуть перевищувати 2.1. Це підтверджує, що GARCH краще враховує ризики на середньостроковому горизонті, ніж GBM, і дозволяє прогнозувати не лише центральні, але й крайні значення розподілу.

На горизонті 20 днів GARCH(1,1) демонструє різке зростання помилок: MSE досягає 1670.806, а MAE – 8.8204, що вказує на сильну дивергенцію траєкторій, характерну для умов із довготривалими ефектами волатильності. VaR (95 %) становить -3.2564 , тобто очікуване падіння в найгірших 5 % сценаріїв перевищує 3.25. CVaR (95 %) дорівнює -4.2026 – у таких випадках середня втрата перевищує 4.20. Це свідчить про здатність моделі GARCH(1,1) враховувати «важкі хвости» розподілу та високу чутливість до ризиків у довгостроковій перспективі.

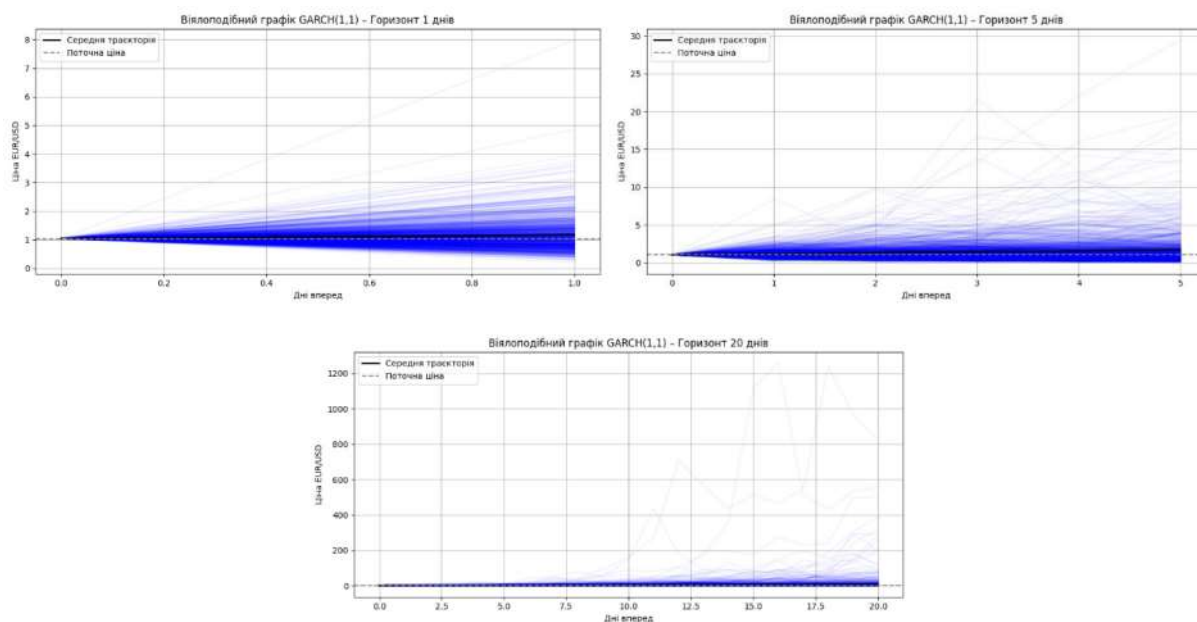


Рис. 5. GARCH(1,1) – Віялоподібна симуляція імовірнісного прогнозу курсу EUR/USD на X днів

На 1 день: траєкторії скупчені навколо поточної ціни, але вже видно вплив волатильності;

На 5 днів: зростає розкид, з'являються траєкторії з вибухами волатильності;

На 20 днів: сильна дивергенція, деякі траєкторії набувають екстремальних значень – характерна властивість GARCH.

Побудована модель GARCH(1,1) успішно відобразила динаміку змінної волатильності валютної пари EUR/USD. На відміну від GBM, ця модель:

- Вловлює кластери волатильності (періоди турбулентності та спокою),
- Реалістично оцінює ризики (VaR, CVaR) – особливо на довгих горизонтах,
- Не припускає симетричного розподілу – хвости розподілу стають важчими з часом.

Модель Мертона (jump-diffusion)

Стрижково-дифузійна модель (процес Мертона) є надбудовою над GBM, де додається пуассонівська компонента для опису раптових стрибків у динаміці цін:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t - (e^j - 1) dN_t. \quad (3)$$

Оцінка базових параметрів і задання характеристик стрибків:

```
mu = log_returns.mean(); sigma = log_returns.std()
lambda_j = 0.05; mu_j = -0.02; sigma_j = 0.03
```

(Середній дрейф μ , базова волатильність σ , інтенсивність λ , зсув μ_j та волатильність σ_j стрибка.)

Імітація динаміки для кожного горизонту:

```
z = np.random.normal()
jump_count = np.random.poisson(lambda_j)
jump_size = jump_count * (mu_j + sigma_j * np.random.normal())
ret = mu + sigma * z + jump_size
price *= np.exp(ret)
```

(На кожному кроці додається випадкова дифузійна складова та стрибок, якщо він відбувається.)

Побудова fan-chart:

```
for i in range(n_paths):
plt.plot(simulated_paths[:, i], color='blue', alpha=0.1)
plt.plot(np.mean(simulated_paths, axis=1), color='black', linewidth=2)
```

(Відображення всіх траєкторій та середнього сценарію.)

Отримані параметри моделі:

- Середній приріст (μ): -0.000057 – майже нульовий дрейф, що вказує на відсутність стабільного тренду.
- Базова волатильність (σ): 0.004974 – відносно низька щоденна волатильність за базовим дифузійним компонентом.

- Інтенсивність стрибків (λ): 0.05 – в середньому 1 стрибок кожні 20 торгових днів.
- Середній стрибок (μ_j): -0.0200 – негативний зсув стрибків (на ~2 %), що моделює падіння ціни.
- Волатильність стрибків (σ_j): 0.0300 – достатньо висока дисперсія розміру стрибка.
- Остання ціна (S_0): 1.04294 – базова ціна, від якої моделюється прогноз.

Горизонт	MSE	MAE	VaR (95 %)	CVaR (95 %)
1 день	0.000489	0.013335	-0.047305	-0.071546
5 днів	0.002238	0.036970	-0.092381	-0.127912
20 днів	0.008903	0.075606	-0.176692	-0.232963

Рис. 6. Метрики точності та ризику прогнозу курсу EUR/USD за методом Мертона на різних горизонтах

На горизонті 1 день модель Мертона демонструє помірну точність прогнозування: середньоквадратична помилка (MSE) становить 0.000489, а середня абсолютна похибка (MAE) – 0.0133. Це вищі значення, ніж у GBM та навіть GARCH, що пояснюється врахуванням стрибків у динаміці курсу. Значення VaR (95 %) становить -0.0473, тобто з імовірністю 5 % очікується падіння курсу більш ніж на 4.73 %. Середня втрата у цих найгірших випадках (CVaR) досягає -0.0715, що вказує на чутливість моделі до екстремальних змін ціни навіть на коротких горизонтах.

На горизонті 5 днів модель продовжує демонструвати зростання похибок: MSE дорівнює 0.002238, MAE – 0.0370. Значення VaR (95 %) зростає до -0.0924, що означає, що в 5 % випадків можливе зниження курсу більш ніж на 9.24 %. CVaR на цьому горизонті складає -0.1279, підтверджуючи, що модель ефективно враховує ризик глибоких падінь і передбачає потенційні екстремальні втрати краще, ніж GBM.

На горизонті 20 днів MSE досягає 0.008903, MAE – 0.0756, що свідчить про накопичення як базової волатильності, так і ефектів від стрибків. Значення VaR (95 %) становить -0.1767 – ймовірне падіння курсу більш ніж на

17.67 % у гірших сценаріях. Середня втрата в межах найгірших 5 % випадків (CVaR) ще глибша – -0.2330 , що чітко демонструє здатність моделі Мертона моделювати «жирні хвости» розподілу й описувати рідкісні, але суттєві падіння, характерні для валютного ринку під впливом новин або шоків.

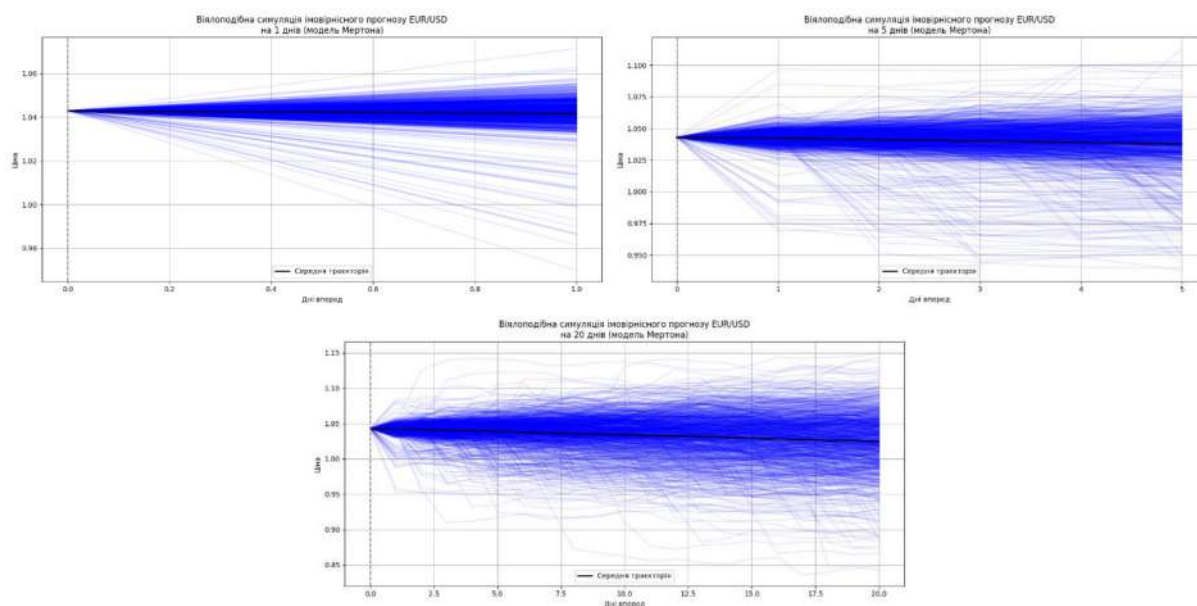


Рис. 7. Метод Мертона – Віялоподібна симуляція імовірного прогнозу курсу EUR/USD на X днів

На 1 день: більшість траєкторій близько до ціни, поодинокі стрибки вниз/вгору;

На 5 днів: зберігається симетрія, але зростає кількість траєкторій зі стрибками;

На 20 днів: чітко видно крайні траєкторії – результат накопичення стрибків і базової волатильності.

Модель Мертона забезпечує баланс між простотою GBM і гнучкістю GARCH.

Вона урахує випадкові стрибки, що робить її придатною для валютних пар із нечастими, але різкими рухами. Ризикові метрики (VaR, CVaR) свідчать, що модель краще відображає «хвости» розподілу, ніж GBM. Прогнозна точність (MAE/MSE) на горизонтах 1–5 днів є доволі стабільною і корисною для короткострокового ризик-менеджменту. На великих горизонтах (20 днів) GARCH переважає за точністю оцінки волатильності, але Мертон залишається релевантним, особливо в умовах очікуваних ринкових шоків.

Висновки

У результаті проведеного дослідження було здійснено програмну побудову та порівняльний аналіз трьох стохастичних моделей валютного курсу EUR/USD: геометричного броунівського руху (GBM), GARCH(1,1) та стрибково-дифузійної моделі Мертона. Реалізація здійснювалась у середовищі Python з використанням бібліотек `ufinance`, `numpy`, `arch` та `matplotlib`, що забезпечило автоматизоване завантаження даних, оцінювання параметрів, симуляцію імовірнісних траєкторій та розрахунок показників точності і ризику.

Аналіз показав, що модель GBM забезпечує простоту реалізації та прийнятну точність на коротких горизонтах прогнозування, але не здатна відобразити змінну волатильність та крайні значення розподілу. Натомість модель GARCH(1,1) успішно моделює кластеризацію волатильності, демонструє високу адаптивність до ринкових умов та забезпечує більш реалістичну оцінку ризиків, особливо на середньо- і довгострокових горизонтах.

Модель Мертона виступає проміжною ланкою між зазначеними підходами: вона дозволяє враховувати рідкісні, але значні стрибки цін, що особливо важливо в умовах високої невизначеності або під час економічних шоків. За точністю на коротких горизонтах вона дещо поступається GARCH, однак перевершує GBM у здатності відображати «важкі хвости» розподілу.

Отримані результати підтверджують, що доцільно комбінувати різні класи моделей залежно від завдань: GBM – для швидкої базової оцінки та хеджування, GARCH(1,1) – для детального аналізу волатильності, Мертон – для сценаріїв із високою ймовірністю шоківих подій. Інтеграція математичних моделей у Python дозволяє створювати адаптивні системи прогнозування валютних курсів, придатні для торгових стратегій, ризик-менеджменту та фінансового планування.

Список використаної літератури

1. Блек Ф., Шоулз М. Оцінка опціонів та корпоративних зобов'язань // Політична економія. 1973. Т. 81, № 3. С. 637–654.
2. Мертон Р. Ціноутворення опціонів у випадку дискретних дохідностей акцій // Журнал фінансової економіки. 1976. Т. 3, № 1–2. С. 125–144.
3. Кюпідон Р., Іполіт П. Стрибково-дифузійне моделювання валютних курсів: аналітичне ціноутворення опціонів та емпіричні докази // Міжнародний огляд фінансового аналізу. 2022. Т. 80. Стаття 101999.
4. Боллерслев Т. Узагальнена авторегресивна умовна гетероскедастичність // Журнал економетрики. 1986. Т. 31, № 3. С. 307–327.
5. Енгл Р. Авторегресивна умовна гетероскедастичність з оцінками дисперсії інфляції у Великій Британії // Економетрика. 1982. Т. 50, № 4. С. 987–1007.
6. Лі Дж., Пак С., Кім Х. Прогнозування внутрішньоденної волатильності валют за допомогою функціональних моделей FGARCH X // Журнал прогнозування. 2023. Т. 42, № 2. С. 273–291.
7. Конт Р., Танков П. Фінансове моделювання з процесами стрибків. Бока-Ратон : CRC Press, 2004. 535 с.
8. Гарсія А., Буено Р. Багатовалютні моделі на основі процесів Леві з режимним перемиканням волатильності // Кількісні фінанси. 2022. Т. 22, № 9. С. 1523–1542.
9. Цзен В., Ліу Ю., Хуан Ч. Ансамблеве моделювання jump-GARCH для управління валютними ризиками // Європейський журнал фінансів. 2024. Т. 30, № 1. С. 1–24.
10. Ліу Ю., Цзен В., Чень Ц. Гібридна модель CNN–LSTM–GARCH для прогнозування валютної волатильності // Експертні системи та застосування. 2023. Т. 215. Стаття 119215.

References

1. Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
2. Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1–2), 125–144.
3. Cupidon, R., & Hyppolite, P. (2022). Jump–diffusion modeling of FX rates: Analytical option pricing and empirical evidence. *International Review of Financial Analysis*, 80, 101999.
4. Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
5. Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
6. Lee, J., Park, S., & Kim, H. (2023). Forecasting FX intraday volatility using functional FGARCH-X models. *Journal of Forecasting*, 42(2), 273–291.
7. Cont, R., & Tankov, P. (2004). *Financial modelling with jump processes*. Boca Raton, FL: CRC Press.
8. García, A., & Bueno, R. (2022). Lévy driven multi-currency models with regime switching volatility. *Quantitative Finance*, 22(9), 1523–1542.
9. Zeng, W., Liu, Y., & Huang, C. (2024). Ensemble jump-GARCH modelling for FX risk management. *European Journal of Finance*, 30(1), 1–24.
10. Liu, Y., Zeng, W., & Chen, Q. (2023). Hybrid CNN–LSTM–GARCH model for currency volatility prediction. *Expert Systems with Applications*, 215, 119215.

Дата першого надходження рукопису до видання: 29.09.2025
Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 24.10.2025
Дата публікації: 28.11.2025