ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.6 DOI https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2025.4.2.1

І. О. АСТІОНЕНКО
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри інформатики і комп'ютерних наук
Херсонський національний технічний університет
ORCID: 0000-0002-5831-6353

П. Й. ГУЧЕК
доктор технічних наук,
завідувач кафедри інформаційних технологій
та фізико-математичних дисциплін
Херсонський навчально-науковий інститут
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова,
професор Університету VIZJA, Варшава, Польща
ORCID: 0000-0002-6110-6816

О. М. ДУДЧЕНКО
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри інформаційних технологій
та фізико-математичних дисциплін,
заступник директора
Херсонський навчально-науковий інститут
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
ORCID: 0000-0002-7724-0892

О. І. ЛИТВИНЕНКО
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри інформаційних технологій
та фізико-математичних дисциплін
Херсонський навчально-науковий інститут
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
ORCID: 0000-0001-9890-6959

АПРОКСИМАЦІЇ НА СКІНЧЕННОМУ ЕЛЕМЕНТІ У ФОРМІ ПРАВИЛЬНОГО N-КУТНИКА

Елементи серендипової сім'ї утворюють корисний клас скінченних елементів. Вони поширені в практичних розрахунках незважаючи на те, що погано формалізуються. Головна проблема серендипових скінченних елементів (ССЕ) полягає в тому, що існуючі методи конструювання функцій форми (метод оберненої матриці, процедура систематичного генерування функцій форми) не дають можливості вийти за рамки стандартних моделей на ССЕ. В стандартних моделях кількість параметрів інтерполяційного полінома відповідає кількості вузлів на границі елемента. Відомо, що стандартні моделі СЕ вищих порядків мають певні недоліки (наприклад, від'ємні значення вузлових навантажень, кратні нулі у граничних вузлах). Тому існує потреба у використані інших методів конструювання функцій форми і удосконаленні існуючих.

У роботі проаналізована можливість побудови базисних функцій на дискретному елементі у формі n-кутника. Розглянуто скінчений елемент у формі правильного п'ятикутника, його можна використовувати як обчислювальний шаблон у колі. Наразі завдання побудови та дослідження унітарного базису на дискретному п'ятикутному елементі (пентагоні) не розглядалася. Для конструювання базисів дискретних елементів у формі n-кутників використовувався геометричний метод. ***Ц****е модифікація методу "product of planes", яка використовує техніку перемноження рівнянь площин і поверхонь другого порядку. Нові методи значно спрощують процедуру побудови базису (не виникає потреби розв'язувати СЛАР відповідного порядку на елементі) і дозволяють отримати альтернативні моделі ССЕ. Наявність "позавузлових" параметрів у моделях, що отримані за допомогою* *нових методів, дає можливість позбавитись від недоліків, які притаманні стандартним моделям (наприклад, від від'ємних значень навантажень у вузлах).*

Побудовано три системи базисних функцій на п'ятикутнику за допомогою матричного методу, геометричного моделювання і модифікованого методу "product of planes".

Подальша оптимізація властивостей базисних функцій може бути досягнута за допомогою зваженого усереднення функцій. Запропоновані методики можуть бути поширені на довільні n-кутники і узагальнені на випадок просторових дискретних елементів з основою в формі правильного n-кутника.

Ключові слова: *серендипові скінченні елементи, інтерполяція, функції форми, геометричне моделювання, альтернативний базис вищих порядків.*

I. O. ASTIONENKO
Ph.D., Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Informatics and Computer Science
Kherson National Technical University
ORCID: 0000-0002-5831-6353

P. Y. GUCHEK
Doctor of Technical Sciences,
Head of the Department of Information Technologies
and Physical and Mathematical Disciplines
Kherson Educational and Scientific Institute
of Admiral Makarov National University of Shipbuilding,
Professor at VIZJA University, Warsaw, Poland
ORCID: 0000-0002-6110-6816

O. M. DUDCHENKO
Ph.D., Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Information Technology
and Physical and Mathematical Disciplines
Kherson Educational and Scientific Institute
of Admiral Makarov National University of Shipbuilding
ORCID: 0000-0002-7724-0892

O. I. LYTVYNENKO
Ph.D., Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Information Technology
and Physical and Mathematical Disciplines
Kherson Educational and Scientific Institute
of Admiral Makarov National University of Shipbuilding
ORCID: 0000-0001-9890-6959.

APPROXIMATIONS ON A FINITE ELEMENT IN THE FORM OF A REGULAR N-GON

The serendipity family of elements constitutes a useful class of finite elements. They are widely employed in practical computations, despite being poorly formalized. The main difficulty with serendipity finite elements (SFE) lies in the fact that existing approaches to constructing shape functions (the inverse matrix method, the systematic shape function generation procedure) do not allow researchers to go beyond the framework of standard SFE models. In standard models, the number of parameters of the interpolation polynomial corresponds to the number of nodes on the element boundary. It is well known that standard higher-order finite element models possess certain drawbacks (e.g., negative values of nodal loads, multiple zeros at boundary nodes). Therefore, there is a need to employ alternative methods for constructing shape functions and to improve the existing ones.

This study analyzes the possibility of constructing basis functions on a discrete element in the form of an n-gon. A finite element in the form of a regular pentagon is considered, which can be used as a computational template within a circle. So far, the problem of constructing and investigating a unitary basis on a discrete pentagonal element (pentagon) has not been addressed. For constructing bases of discrete elements in the form of n-gons, a geometric method was applied. This method is a modification of the "product of planes" approach, which employs the technique of multiplying equations of planes and second-order surfaces. The new methods substantially simplify the procedure of basis construction (eliminating the need to solve a system of linear algebraic equations of the corresponding order on the element) and make it possible to obtain alternative SFE models. The presence of "extra-nodal" parameters in the models obtained by these new methods allows one to overcome the drawbacks inherent to standard models (such as negative nodal load values).

Three systems of basis functions on the pentagon have been constructed using the matrix method, geometric modeling, and a modified "product of planes" method.

Further optimization of the properties of basis functions can be achieved by means of weighted averaging of functions. The proposed techniques can be extended to arbitrary n-gons and generalized to the case of spatial discrete elements with bases in the form of regular n-gons.

Key words: *serendipity finite elements, interpolation, shape functions, geometric modeling, alternative higher-order basis.*

Постановка проблеми

Поява та розвиток методу скінченних елементів (МСЕ) стимулювали виникнення нових завдань у теорії інтерполяції функцій двох та трьох аргументів [1]. Найбільш розроблена на даний момент техніка трикутних та прямокутних (квадратних) елементів [2,3]. Задачі ядерної енергетики поставили проблему побудови унітарного базису для гексагону в областях із стільниковою геометрією [4]. Полігональні дискретні елементи становлять інтерес розрахунку електростатичних і стаціонарних температурних полів, наприклад, в областях п'ятикутної форми. Якщо дискретний елемент – правильний п'ятикутник, його можна використовувати як обчислювальний шаблон у колі. Наразі завдання побудови та дослідження унітарного базису на дискретному п'ятикутному елементі (пентагоні) не розглядалося.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Відомі три способи побудови базису скінченного елемента (СЕ): алгебраїчний, геометричний та ймовірнісно-геометричний.

Алгебраїчний спосіб полягає у складанні та розв'язанні системи лінійних рівнянь алгебри (СЛАР) для знаходження коефіцієнтів інтерполяційного полінома [3]. При цьому зручно використовувати відому властивість базисних функцій СЕ: базисна функція дорівнює одиниці в однойменному вузлі і дорівнює нулю в інших вузлах СЕ. Але, наприклад, коли елемент гексагональної форми, при розв’язанні СЛАР виникають непереборні труднощі: матриця побудованої системи є виродженою внаслідок надмірної симетрії правильного шестикутника [4].

Сингулярність матриці стала поштовхом для пошуку нових неалгебраїчних способів побудови базисів скінченних елементів. Уачспрес, використовуючи геометричне моделювання, вперше отримав унітарний базис на шестикутнику, функції форми якого дрібно-раціональні [4]. Геометричний спосіб побудови базису скінченого елемента дозволяє отримувати поліноміальні базиси. При геометричному моделюванні поліноміальна базисна функція конструюється з рівнянь нелінійних поверхонь і площин, які проходять через задані точки [5, 6].

Для побудови інтерполяційних поліномів зручно використовувати метод ймовірносно-геометричного моделювання, заснований на геометричній ймовірності. Геометрична ймовірність є природним узагальненням поняття класичної ймовірності на випадок незліченної множини елементів і обчислюється як відношення довжин, площ, або об’ємів в одно-, дво- та тривимірних випадках. Цей метод успішно застосовується під час побудови базисів серендипових скінченних елементів (серендиповий елемент – це довільний чотирикутник чи квадрат з вузлами інтерполяції лише на границі елемента) [7].

Формулювання мети статті

Мета статті – проаналізувати можливість побудови базисних функцій на дискретному елементі у формі n-кутника за допомогою алгебраїчного та геометричного підходів.

Викладення основного матеріалу дослідження

У роботі розглянуто елемент у формі правильного п'ятикутника, вписаний у коло одиничного радіусу (рис. 1). На даному елементі побудовано три системи базисних функцій за допомогою алгебраїчного та геометричного підходів.

Перший базис (5ПБ_1) побудований за допомогою алгебраїчного підходу з використанням інтерполяційної гіпотези Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik},\ i,k = 1,2,...,5, \tag{1}$$

де δ_{ik} – символ Кронекера.

У якості інтерполяційного поліному була використана функція:

$$N(x, y) = 0,2 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 . \tag{2}$$

Для визначення коефіцієнтів α_i складемо систему:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 0,2 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ 0,2 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \\ 0,2 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 \\ 0,2 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} . \tag{3}$$

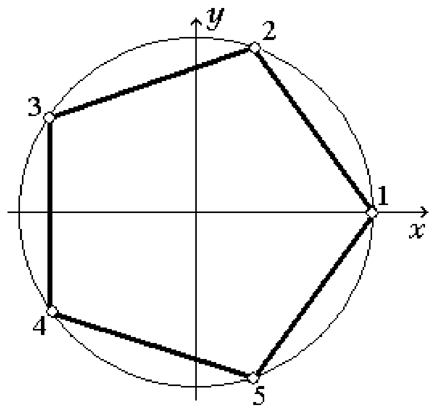

Рис. 1. Дискретний елемент у формі правильного п’ятикутника

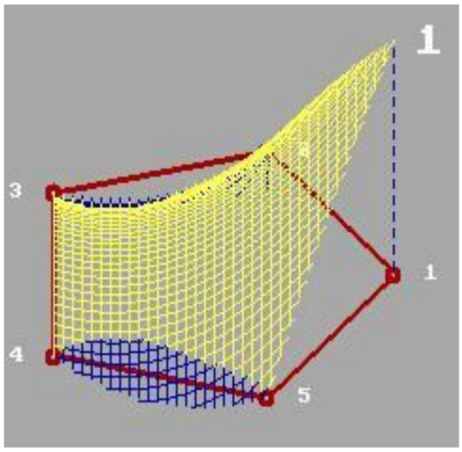

Рис. 2. Візуалізація базисної функції N_1 в 5ПБ_1

Вибір вільного коефіцієнта продиктований геометрією п'ятикутника. Це значення аплікати поверхні, яку задає базова функція у центрі дискретного елемента.

Базисна функція для вузла 1 має вигляд (рис. 2):

$$N_1 = 0,2 + 0,4x + 0,4x^2 - 0,4y^2 . \tag{4}$$

Інші базисні функції поліноміального базису (5ПБ_1) можуть бути отримані з N_1 обертанням на кут 72^0 :

$$N_2 = \frac{1}{5} + \left(\frac{(\sqrt{5}\text{-}1)}{10}\, x + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}\, y \right) + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{10} x + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10} y \right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10} x + \frac{\sqrt{5}-1}{10} y \right)^2 \tag{5}$$

$$N_3 = \frac{1}{5} - \left(\frac{(\sqrt{5}+1)}{10}\, x - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}\, y \right) + \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{10} x + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10} y \right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10} x - \frac{\sqrt{5}+1}{10} y \right)^2 \tag{6}$$

$$N_4 = \frac{1}{5} - \left(\frac{(\sqrt{5}+1)}{10}\, x + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}\, y \right) + \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{10} x - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10} y \right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10} x + \frac{\sqrt{5}+1}{10} y \right)^2 \tag{7}$$

$$N_5 = \frac{1}{5} + \left(\frac{(\sqrt{5}\text{-}1)}{10}\, x - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}\, y \right) + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{10} x - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10} y \right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10} x - \frac{\sqrt{5}-1}{10} y \right)^2 \tag{8}$$

Другий базис (5ПБ_2) побудований за допомогою геометричного моделювання [6]. Для побудови базисної функції N_1 використана композиція прямої (3-4) та параболи, що проходить через 2-*P*-5 (рис. 3), де *P*(-0,809; 0):

$$N_1 = 0,2\ (0,8090169 + x)(1,2360679 + 1,5278641x - 1,8885438y^2) . \tag{9}$$

Базисна функція зображена на рис. 4.

Інші функції отримуємо поворотом на кут 72^0 :

$$\begin{aligned} N_2 = 0,2 &+ 0,1527864x + 0,4702282y - 0,2472136x^2 + 0,3592224xy + 0,2472136y^2 - \\ &- 0,1055728x^3 - 0,2563143x^2y + 0,1999999y^2 - 0,0343026y^3; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} N_3 = 0,2 &- 0,3999999x + 0,290617y + 0,0944272x^2 - 0,581234xy - 0,0944272y^2 + \\ &+ 0,1055728x^3 + 0,2139139x^2y - 0,0111456xy^2 - 0,1453085y^3; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} N_4 = 0,2 &- 0,3999999x - 0,290617y + 0,0944272x^2 + 0,581234xy - 0,0944272y^2 + \\ &+ 0,1055728x^3 - 0,2139139x^2y - 0,0111456xy^2 - 0,1453085y^3; \end{aligned} \tag{12}$$

$$N_5 = 0.2 + 0.1527864x - 0.4702282y - 0.2472136x^2 - 0.3592224xy + 0.2472136y^2 - \\ - 0.1055728x^3 + 0.2563143x^2y + 0.1999999y^2 + 0.0343026y^3. \qquad (13)$$

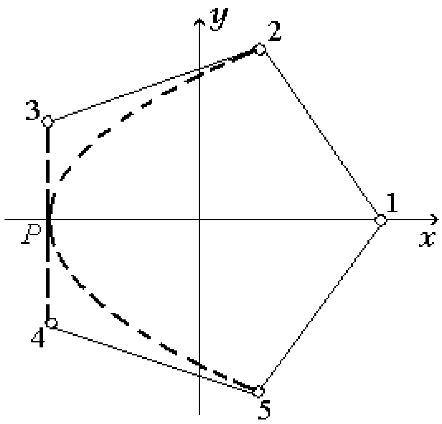

Рис. 3. Композиція ліній при побудові базисної функції N_1 в 5ПБ_2

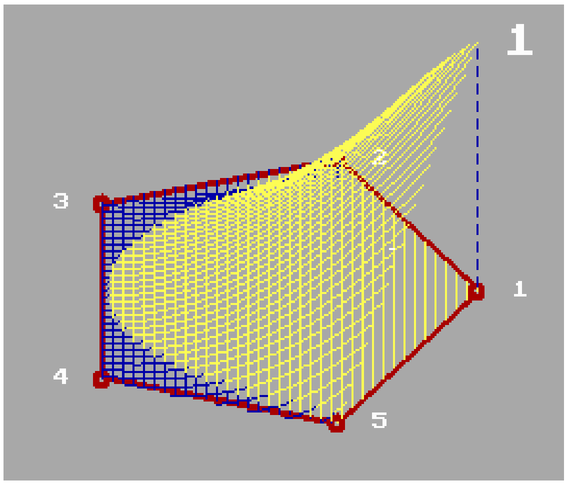

Рис. 4. Візуалізація базисної функції N_1 в 5ПБ_2

Методика побудови дробово-раціонального базису (5ДРБ) подібна до побудові ДРБ на гексагональному елементі [5]. П'ятикутник розбивається на 3 трикутники. Наприклад, при побудові N_1 використовується три трикутника за спільною вершиною: $\Delta 123$, $\Delta 134$ і $\Delta 145$. У кожному трикутнику використовується площина, яка проходить через сторону трикутника, що протилежна вузлу 1 і точку з координатами (1,0,1), а потім знаходять добуток рівнянь цих площин. При цьому отримуємо систему із п'яти поліномів, які не задовольняють умові збереження вагового балансу:

$$\sum_{i=1}^{5} N_i(x, y) = 1\,. \qquad (14)$$

Сума базисних функції дорівнює (рис. 5):

$$\sum_{i=1}^{5} N_i(x, y) = 1{,}17082 - 0{,}17082x^2 - 0{,}17082y^2\,. \qquad (15)$$

Нормуємо функції за допомогою функціонального множника $(1{,}17082 - 0{,}17082x^2 - 0{,}17082y^2)^{-1}$, і отримуємо дробово-раціональний базис (5ДРБ) на п'ятикутному елементі (рис. 6):

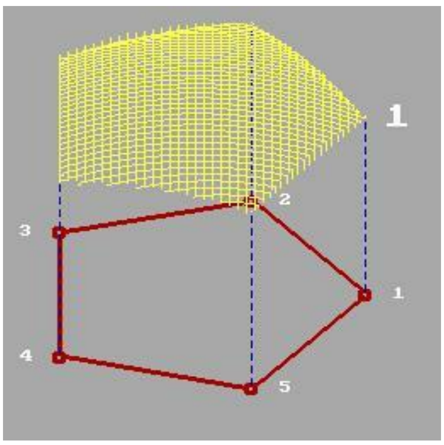

Рис. 5. Сума базисних функцій (формула 15)

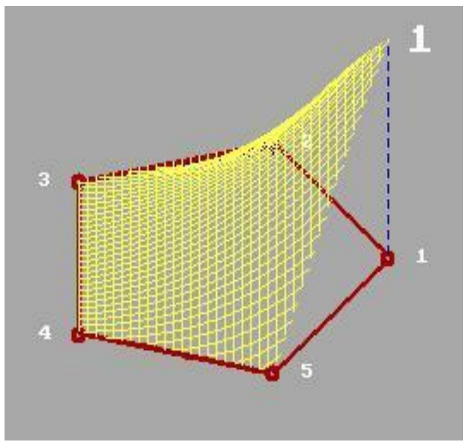

Рис. 6. Візуалізація функції N_1 в 5ДРБ

$$N_1 = \frac{0,23 + 0,46833x + 0,25527x^2 + 0,04223x^3 - 0,32361y^2 - 0,4xy^2}{1,17082 - 0,17082x^2 - 0,17082y^2}; \quad (16)$$

$$N_2 = \frac{0,23 + 0,14x + 0.45y - 0,27x^2 + 0,34xy - 0,21y^2 - 0,11x^3 + 0,25xy^2 - 0,26x^2 y}{1,17082 - 0,17082x^2 - 0,17082y^2};$$

$$N_3 = \frac{0,23 - 0,38x + 0,28y + 0,06x^2 - 0,55xy - 0,12y^2 + 0,09x^3 - 0,05xy^2 + 0,28x^2 y - 0,14y^3}{1,17082 - 0,17082x^2 - 0,17082y^2};$$

$$N_4 = \frac{0,23 - 0,38x - 0,28y + 0,06x^2 + 0,55xy - 0,12y^2 + 0,09x^3 - 0,05xy^2 - 0,28x^2 y + 0,14y^3}{1,17082 - 0,17082x^2 - 0,17082y^2};$$

$$N_5 = \frac{0,23 + 0,14x - 0,45y - 0,27x^2 - 0,34xy - 0,21y^2 - 0,11x^3 + 0,25xy^2 + 0,26x^2 y}{1,17082 - 0,17082x^2 - 0,17082y^2}.$$

Звернемо увагу на важливі властивості поліномів $N_i(x, y)$ у всіх трьох побудованих базисах [3].

Властивість 1. Кожен поліном $N_i(x, y)$ дорівнює одиниці в точці (x_i, y_i) і обертається в нуль у всіх інших вузлах.

Властивість 2. Апроксимуючі функції $N_i(x, y)$ локальні в межах елемента.

Умова збереження вагового балансу $\sum_{i=1}^{5} N_i(x, y) = 1$ у всіх базисах дотримана.

Висновки

За допомогою алгебраїчної та геометричної процедур вперше отримано три системи базисних функцій на дискретному елементі у формі правильного п'ятикутника та доведено, що задача відновлення функції за її значеннями у вершинах п'ятикутного елемента має безліч розв’язків. Подальша оптимізація властивостей базисних функцій може бути досягнута за формулою [6]:

$$N_i^{(k)} = (1-\alpha)N_i^{(m)} + \alpha N_i^{(n)}, \ 0 \le \alpha \le 1. \quad (28)$$

Методики побудови можуть бути застосовані до будь-яких полігональних дискретних елементів.

Список використаної літератури

1. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. New Jersey: Prentice-Hall. Inc, 1973. 306 p.
2. Mitchell A.R., Wait R. The Finite Element Method in Partial Differential Equations. London : John Wiley & Sons, 1977. 198 p.
3. Wachspress E.I. A rational finite element basis. Academic Press. New York, 1975, 342 p.
4. Ishiguro M. Construction of Hexagonal Basis Functions Applied in the Galerkin-Type Finite Element Method. *Journal of Information Processing.* 1984, Vol.7, № 2, P. 88-95.
5. Astionenko I.O., Litvinenko O.I., Osipova N.V., Tuluchenko G.Ya., Khomchenko A.N. Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences* : Proceedings of the AIP Conference, Albena. 22-27 June 2016. Albena, Bulgaria. **1773**. 040002. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4964965.
6. Guchek P., Litvinenko O., Astionenko I., Dudchenko O., Khomchenko A. Research of Alternative Models of Serendipity Finite Elements Using Model Problems. In: So In, C., Londhe, N.D., Bhatt, N., Kitsing, M. (eds). *Information Systems for Intelligent Systems*. Proceedings of the Conference ISBM’2023. 7-8 September 2023. Bangkok, Thailand. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, Vol. 379. Singapore : Springer, 2024. P. 471-481. https://doi.org/10.1007/978-981-99-8612-5_38.
7. Guchek P., Litvinenko O., Astionenko I., Dudchenko O. Multiparametric basis functions on the finite element Q12. *International Conference On Industry Sciences and Computer Sciences Innovation.* Proceedings of the Conference iSCSi’2024. 29-31 October 2024. Portugal. *Procedia Computer Science*, Vol. 263. Lisbon : Portugal, 2025. P. 608-618. https://doi.org/10.1016/j.procs.2025.07.073.

References

1. Strang, G., & Fix, G. J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. [In English].
2. Mitchell, A.R., & Wait, R. (1977). The Finite Element Method in Partial Differential Equations, London : John Wiley & Sons. [In English].
3. Wachspress, E.I. (1975). A rational finite element basis. New York : Academic Press. [In English].

4. Ishiguro, M. (1984). Construction of Hexagonal Basis Functions Applied in the Galerkin-Type Finite Element Method. *Journal of Information Processing.* **7**(2). 88-95. [In English].

5. Astionenko, I.O., Litvinenko, O.I., Osipova, N.V., Tuluchenko, G.Ya., & Khomchenko, A.N. (2016). Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences* : Proceedings of the AIP Conference. Albena, Bulgaria. **1773**. 040002. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4964965 [In English].

6. Guchek, P., Litvinenko, O., Astionenko, I., Dudchenko, O., & Khomchenko, A. (2024). Research of Alternative Models of Serendipity Finite Elements Using Model Problems. In: So In, C., Londhe, N.D., Bhatt, N., Kitsing, M. (eds). *Information Systems for Intelligent Systems*. Proceedings of the Conference ISBM'2023. Bangkok, Thailand. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, **379**. Singapore : Springer, 2024. 471-481. https://doi.org/10.1007/978-981-99-8612-5_38. [In English].

7. Guchek, P., Litvinenko, O., Astionenko, I., & Dudchenko, O. (2025). Multiparametric basis functions on the finite element Q12. *International Conference On Industry Sciences and Computer Sciences Innovation.* Proceedings of the Conference iSCSi'2024. Portugal. *Procedia Computer Science*, **263**. Lisbon : Portugal, 2025. 608-618. https://doi.org/10.1016/j.procs.2025.07.073. [In English].

Дата першого надходження рукопису до видання: 18.11.2025
Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 15.12.2025
Дата публікації: 31.12.2025