УДК 519.85 DOI https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2025.4.2.16

М. В. НОВОЖИЛОВА
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Харківський національний університет міського господарства
імені О. М. Бекетова
ORCID: 0000-0002-9977-7375

О. І. ЧУБ
кандидат економічних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
ORCID: 0000-0002-1216-856X

О. Б. КОСТЕНКО
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Харківський національний університет міського господарства
імені О. М. Бекетова
ORCID: 0000-0001-9744-4377

ПОБУДОВА ТА РЕАЛІЗАЦІЯ БАГАТОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ З УРАХУВАННЯМ ЧАСОВОГО ВІКНА

Розглянуто багатопродуктову задачу розподілу скінченої множини ресурсів, що забезпечуються різними постачальниками, на скінченій множині пунктів призначення за умови наявності двобічних обмежень на час використання ресурсів – так званого часового вікна. Актуальність задачі розподілу ресурсів, що розглядається, обумовлюється надзвичайно широким спектром практичних застосувань як в класичній постановці, так і нових модифікаціях, запит на які постійно генерується динамічним зовнішнім середовищем. Проведено аналіз наукових литературних джерел, який показав, що основна увага при моделюванні приділяється врахуванню часу доставки ресурсів, тоді як значно менша менша кількість досліджень присвячена розв'язанню багатопродуктових задач розподілу ресурсів у визначеній постановці. Побудовано математичну модель задачі як багатовимірної оптимізаційної задачі геометричного проєктування, тобто задачі оптимізаційного розміщення прямокутних об'єктів, що моделюють запити пунктів призначення, у багатовимірному просторі просторі ресурсів, який згенеровано сумарним запасом постачальників. Виявлено основні харатеристики запропонованої математичної моделі, зокрема обгрунтовано властивість сепарабельності математичної постановки, що дозволило представити вихідну математичну модель в якості скінченого набору однопродуктових багатовимірних оптимізаційних розміщення прямокутних об'єктів в просторі ресурсів. Метою роботи є побудова математичної моделі та проведення на цій основі чисельного дослідження задачі розподілу ресурсів з урахуванням двобічних обмежень на час використання ресурсів. Методичне забезпечення основано на властивості сепарабельності функції мети задачі ч, як наслідок, можливості подання похідних однопродуктових задач як оптимізаційних задач прямокутного розміщення. Визначено умови, за яких задача може не мати рішення, та запропоновано метод знаходження наближеного розв'язку задачі з оцінкою штрафу за порушення деяких обмежень часового вікна. Проведено реалізацію запропонованих інструментальних засобів основної задачі дослідження на основі створення програмного симулятора мовою C# із застосуванням візуального середовища проєктування Visual Studio.

Ключові слова: *математичне та комп'ютерне моделювання, оптимізаційна задача розподілу ресурсів, розміщення прямокутних об'єктів, геометричне проєктування.*

M. V. NOVOZHYLOVA
Doctor of Sci (Math), Professor,
Head of the Department of Computer Science and Information Technologies
O. M. Beketov Kharkiv National University of Urban Economy
ORCID: 0000-0002-9977-7375

O. I. CHUB
Candidate of Economic Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Computer Sciences
and Information Technologies
V. N. Karazin Kharkiv National University
ORCID: 0000-0001-9744-4377

O. B. KOSTENKO
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Computer Science
and Information Technologies
O. M. Beketov Kharkiv National University of Urban Economy
ORCID: 0000-0001-9744-4377

MODELLING AND REALIZING A MULTIDIMENSIONAL RESOURCE ALLOCATION PROBLEM WITH TIME WINDOW CONSTRAINTS

The multi-product resource allocation problem is considered, involving the distribution of a finite set of resources, supplied by various vendors, to a finite set of destinations, subject to two-sided time window constraints on resource utilization. The relevance of the considered resource allocation problem is substantiated by an extremely wide range of practical applications, both in its classical formulation and in new modifications, which are constantly necessitated by the dynamic external environment. An analysis of scientific literature has shown that the primary focus in modeling is placed on accounting for resource delivery time, while a significantly smaller number of studies are dedicated to solving multi-product resource allocation problems in the specified formulation. A mathematical model of the problem is constructed as a multi-dimensional optimization problem of geometric programming, specifically, a problem of optimal placement of rectangular objects, which model the destination requests, in a multi-dimensional resource space generated by the total supply of the vendors.

The main characteristics of the proposed mathematical model were identified, including substantiating the property of separability of the mathematical formulation, which allowed the original mathematical model to be represented as a finite set of single-product multi-dimensional optimization problems of rectangular placement in the resource space. The goal of this work is to construct a mathematical model and, based on it, conduct a numerical study of the resource allocation problem considering two-sided constraints on resource utilization time. The methodical basis is grounded in the separability property of the objective function of the problem, and consequently, the possibility of representing the resulting single-product problems as optimal rectangular placement tasks. Conditions under which the problem may not have a solution are determined, and a method for finding an approximate solution to the problem is proposed, along with an assessment of the penalty for violating certain time window constraints. The proposed tools for the main research problem were implemented by creating a software simulator in c# using the visual studio visual design environment.

Key words: *mathematical and computer modeling, resource allocation optimization problem, placement of rectangular objects, geometric design.*

Постановка проблеми

Оптимальне використання виробничих потужностей і ресурсів для життєзабезпечення споживачів є однією з найгостріших проблем сучасності. Ця проблема набуває критичного значення, особливо в умовах ворожого зовнішнього середовища, надзвичайних ситуацій та військових операцій.

У практичній професійній діяльності, зокрема в логістиці, в реалізації хмарних обчислень, а також організації медичного обслуговування та постачання ліків, готельній справі, а також у транспортному, ремонтному обслуговуванні, у комунальному господарстві великих міст, сфері рітейлу, однією з ключових оптимізаційних задач є задача про розподіл ресурсів. Ця задача актуальна як у класичній постановці, так і у нових модифікаціях, що постійно генеруються реальними практичними запитами.

Теоретична та практична значущість цієї проблематики очевидна. При достатній кількості ресурсів задача, що розглядається, належить до теорії розкладів і є задачею про визначення допустимого розв'язку, можливо, не єдиного. У випадку, коли наявна кількість ресурсів є обмеженою і недостатньою для повного покриття запитів пунктів призначення, дана задача стає оптимізаційною. Але обидві постановки належать класу задач комбінаторної оптимізації і в загальному випадку є NP-складними, що обумовлює постійний науковий інтерес.

Об'єкт дослідження – процес розв'язання багатопродуктової задачі розподілу ресурсів в умовах змінного інтервалу постачання.

Предмет дослідження – оптимізаційний метод розв'язання багатопродуктової задачі розподілу ресурсів в умовах змінного інтервалу постачання як задачі прямокутного розміщення в просторі ресурсів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Різні підходи до розв'язання як детермінованих задач розподілу ресурсів, так і задач в умовах невизначеності, в однопродуктовій та багатопродуктовій постановках пропонуються в контексті різних галузей людської активності в роботах [1 – 5] та інших. При цьому розглядаються суміжні класи задач, такі як транспортні задачі в різних постановках, задачі про призначення, задачі теорії розкладів, задачі планування навантажень, задачі про призначення, але і похідні класи задач, наприклад, задача балансування навантаження [6]. Різноманіття практичних постановок як імітаційних, так і оптимізаційних, призвело до появи цілого спектру методів розв'язання, таких, наприклад як: «Перший прийшов, перший обслуговується» (FCFS), «Min-Min», «Найкоротша робота першою» (Shortest Job First – SJF) тощо [1]. Ці методи мають низьку складність, що іноді призводить до низької продуктивності. Інші підходи використовують складніші методи м'яких обчислень, такі як: генетичний алгоритм, рій частинок та інші [4] з кращою продуктивністю. В якості частинних цільових функцій виступають загальна вартість та якість виконання робіт, число виконавців та час виконання робіт.

В роботі [6] для задачі балансування навантаження для хмарних обчислень запропоновано модифікований угорський метод, який в порівнянні з двома добре відомими методами «Min-Min», і FCFS доводить свою ефективність.

Цікавим результатом є формулювання задачі про призначення у нечіткій постановці [7].

В статті [8] досліджується проблема динамічного розподілу ресурсів для надання послуг на місцях у міських районах. Запити на послуги відбуваються спонтанно, поставки розподіляються динамічно. Реальні приклади таких застосувань включають відправку співробітників транспортної поліції на місця аварій і виїзд механіків на місця ремонтних робіт. Пропонується застосування так званого policy gradient підходу, за яким виконавці розподіляються за локаціями з метою мінімізації затримки.

Окреме місце займає підхід до розв'язання задач розподілу ресурсів оснований на ідеях оптимізаційного геометричного проєктування, тобто реалізації можливості подання цієї задачі як задачі прямокутного роміщення в просторі ресурсів [9, 10]. Необхідно відмітити, що власне задача прямокутного розміщення також викликає науковий та практичний інтерес у дослідників [11].

Формулювання мети дослідження

Метою роботи є побудова математичної моделі та проведення на цій основі чисельного дослідження оптимізаційної багатопродуктової задачі розподілу ресурсів в умовах змінного інтервалу постачання з урахуванням властивості сепарабельності математичної моделі за ресурсами.

Для досягнення цієї мети в роботі необхідно розв'язати наступні задачі:

– Побудувати математичну модель задачі як в імітаційній, так і в оптимізаційній постановках та провести формальний опис процедури зведення багатопродуктової за постановкою задачі до набору однопродуктових оптимізаційних задач;

– Розробити метод розвязання основної задачі дослідження як задачі прямокутого розміщення в просторі ресурсів;

– Розробити програмну реалізацію моделі та провести чисельні експеріменти.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо задачу у багатопродуктовій постановці як задачу постачання скінченого набору ресурсів на множинах постачальників та пунктів призначення. Отже, вихідними екзогенними параметрами задачі є множина $\Theta = \{\theta_i\}$, i=1,…,I пунктів призначення та множина $\Xi = \{\omega_j\}$, j=1,…,J, постачальників, в загальному випадку $I \neq J$.

Також є набір $W = \{w_1, w_2,\dots,w_N\}$ ресурсів, які необхідно доставити від постачальників до пунктів призначення на визначеному інтервалі часу [0, T], що є горизонтом планування.

Кожен з постачальників $\{\omega_j\}$, j=1,…,J, має вектор запасу $W_j = \{w_{1j}, w_{2j},\dots,w_{Nj}\}$, протягом часу $T_j = \{T_{1j}, T_{2j},\dots,T_{Nj}\}$, де величини w_{nj} задовольняють умови $0 \le w_{nj} \le W_{n\_max}$. Таким чином, сумарна оцінка запасу n-го продукту складає $W_n = \sum_{j=1}^{J} w_{nj}$, n=1,2,.,N.

У свою чергу, кожен пункт призначення $\{\theta_i\}$, i=1,…,I характеризується вектором попиту на ресурси $D_i = \{ d_{i1}, d_{i2},\dots, d_{iN} \}$, де кожна з оцінок d_{in} задовольняє умови $0 \le d_{in} \le D_{i\_max}$. Отже, сумарна оцінка попиту n-го продукту складає $D_n = \sum_{n=1}^{I} d_{in}$, n=1,2,.,N.

До того ж кожен пункт призначення $\{\theta_i\}$, i=1,…,I має отримати ресурс w_n на визначений інтервал часу t_{in}, причому часове вікно $[t_{in\_min}, t_{in\_max}]$ може бути більшим за інтервал t_{in},

$$(t_{in\_max} - t_{in\_min}) \ge t_{in},\ t_{in\_min} \in [0, T]. \quad (1)$$

Позначимо через $x_{ij\tau n} \ge 0$ кількість ресурсів n-го типу від j-го постачальника до i-го пункту призначення, який надходить в момент часу τ.

Необхідно визначити такий розподіл $X = \{x_{1111}, \dots, x_{ij\tau n}, \dots, x_{IJt_{IN\_max}N} \}$ ресурсів від постачальників до пунктів призначення так, щоб задовольнити потреби останніх:

$$\forall n \in 1,2,...,N; \forall i \in 1,2,...,I \sum_{\tau=t_{in\_min}}^{t_{in\_max}} \sum_{j=1}^{J} x_{ij\tau n} \le d_{in}, \quad (2)$$

зважаючи на обмеження щодо кількості наявних ресурсів постачальників

$$\forall n \in 1,2,...,N; \forall j \in 1,2,...,J \sum_{\tau=t_{in\_min}}^{t_{in\_max}} \sum_{i=1}^{I} x_{ij\tau n} \le w_{nj}. \quad (3)$$

За виконання обмежень $W_n \ge D_n, n=1,2,...,N$, задача стає задачею про визначення допустимого розв'язку. В противному випадку в якості цільової функції $F(X)$ можна розглядати функцію вигляду $F(X) = I_{placed}(X)$:

$$I_{placed}(X) \to \max, \quad (4)$$

де $I_{placed} \le I$ – це кількість обслужених пунктів призначення.

Зауваження 1. Судячи з вигляду обмежень (2), (3), задача дослідження очевидно припускає декомпозицію на N незалежних однопродуктових задач розподілу окремих ресурсів за переліком $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_N\}$.

Тому надалі без втрати загальності розглянемо одну таку задачу, наприклад розподілу ресурсу w_n (один зріз у N-вимірному просторі ресурсів) та опустимо індекс n.

Тоді кожен запит d_i від i-го пункту постачання може бути представлений в якості прямокутника розмірів (d_i, t_i), який потрібно розмістити у замкненій допустимій області S простору ресурсів, що формується як об'єднання прямокутників (w_j, T). Положення прямокутника (d_i, t_i) області S задається вектором (τ_i, υ_i) параметрів розміщення, який пов'язаний з лівим нижнім кутом прямокутника (рис. 1).

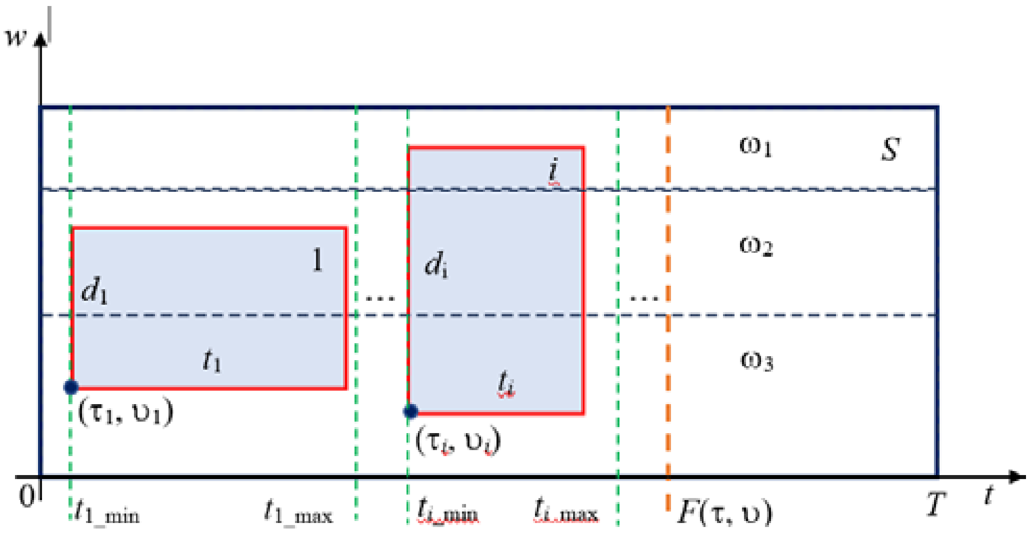

Рис. 1. Розміщення запитів пунктів призначення в допустимій області ресурсів S=ω₁∪ω₁∪ω₁

Зауваження 2. Функція цілі (4) припускає еквівалентну заміну фунцією цілі вигляду

$$\boldsymbol{min} \max_{i=1,2,...I} (\tau_i + t_i).$$

Тоді математична модель задачі розподілу ресурсів як задачі розміщення подається у вигляді:

$$\boldsymbol{min} \max_{i=1,2,...I} (\tau_i + t_i) \quad (5)$$

$$(\tau_i + t_i \le \tau_j \vee \tau_j + t_j \le t_i) \quad (6)$$

$$\vee(\omega_i + d_i \le \omega_j \vee \omega_j + d_j \le \omega_i); \quad (7)$$

$$t_{i\_min} \le \tau_i \le t_{i\_max}) \quad (8)$$

$$\omega_i \le W - d_i; \quad (9)$$

$$\tau_i,\ d_i \geq 0, i, j = 1,2,\ldots,I, i \neq j.$$

Задача (5-9) є задачею дослідження операцій з нелінійною функцією цілі (5) та множиною обмежень, упорядкованих в структуру (6-9).

Обмеження (7) задають вигляд часового вікна. Зазначимо, що ці обмеження можуть перетворювати область припустимих значень задачі на порожню множину, тому пропонується такий ітераційний підхід до розвязання задачі (5-9).

1. Генерація переставлення Π_k номерів об'єктів розміщення з урахуванням логіки обмеження (8).
2. Розвязання редукованої задачі розміщення, де обмеження (8) надається в ослабленій формі (тільки ліва частина нерівності (8)):

$$(\mathrm{t}_{\mathrm{i\_min}} \leq \tau_{\mathrm{i}}),$$

визначення вектору оптимальних значень параметрів розміщення

$$(\tau^*_{red}, d^*_{red}).$$

3. Перевірка виконання правосторонніх обмежень $(\tau^*_{red\_i} \leq t_{i\_max})$. Визначення величини нев'язки P_k, тобто штрафу

$$P_k = \sum_{i=1}^{I} min(t_{i\_max} - \tau^*_{red\_i}, 0)$$

Кроки 1-3 можуть повторюватися скінчену кількість разів на різних переставленнях. Оптимальним є розв'язок, на якому досягається max P_k.

Програмну реалізацію здійснено мовою програмування C# у середовищі проєктування Visual Studio.

Проведені чисельні експерименти з кількістю обєктів розміщення $I \leq 40$ на згенерованій множині 1000 переставлень Π_k. Час виконання складав менше 5 с. На рис. 2. наведено приклад розвязку задачі редукованої задачі розміщення 20 об'єктів за умови $t_{i\_min} = 0$, $i=1,2,\ldots I$.

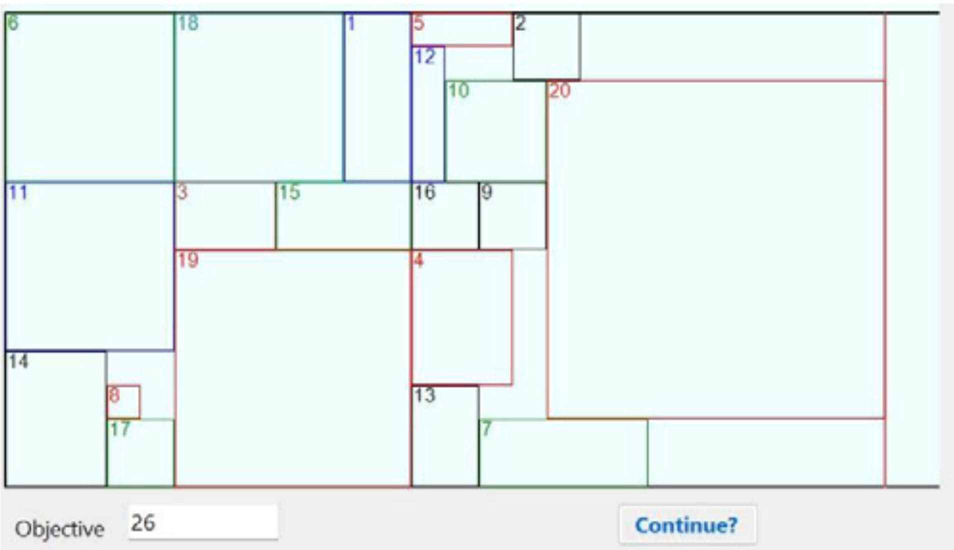

Рис. 2. Розвязок редукованої задачі розміщення 20 об'єктів

На рис. 3 наведено приклад розвязку тієї ж задачі з урахуванням умови $(\mathrm{t}_{\mathrm{i\_min}} \leq \tau_{\mathrm{i}})$, i=1,2,…I.

Висновки

В результаті проведеного дослідження побудовано інструментальні засоби моделювання та розвязання задачі розподілу ресурсів з урахуванням часового вікна як багатовимірної оптимізаційної задачі геометричного проєктування. Проведено програмну реалізацію запропонованого методу на основі створення програмного симулятора мовою C# із застосуванням візуального середовища проєктування Visual Studio. Проведені чисельні експерименти на множинах наборів вхідних даних показали, що запропоновані конструктивні засоби математичного моделювання та створене інформаційне середовище є гнучкою методологією дослідження інших типів оптимізаційних задач розподілу ресурсів.

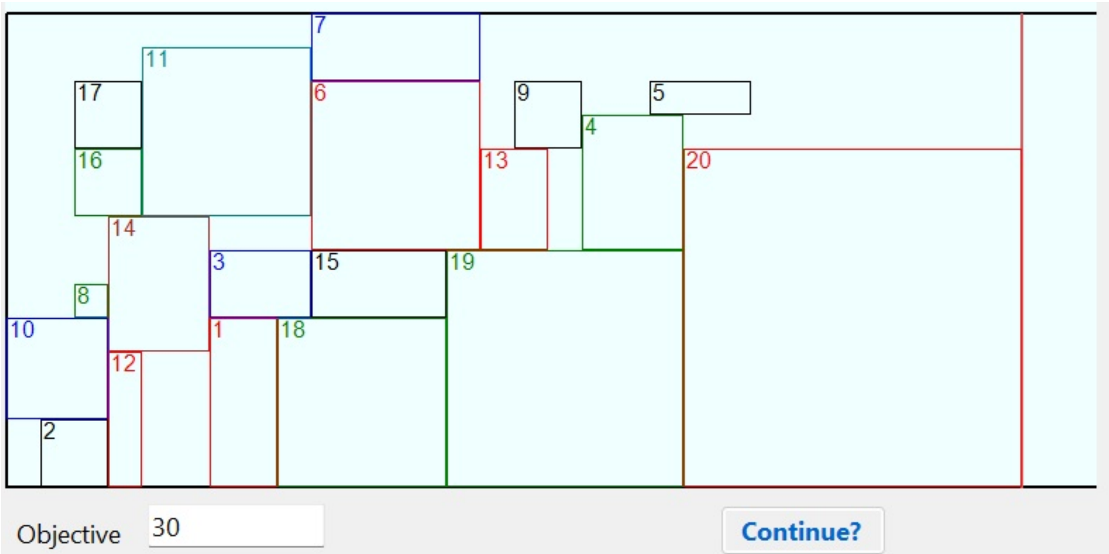

Рис. 3. Розвязок задачі розміщення 20 об'єктів з урахуванням умови ($t_{i\_min} \le \tau_i$).

Список використаної літератури

1. Ibraheem A. K. An effective load balancing algorithm based on deadline constraint under cloud computing. *2nd International Scientific Conference of Al-Ayen University* (ISCAU-2020)*, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2020, vol. 928, 032070. DOI: 10.1088/1757-899X/928/3/032070

2. Babu K. R. R. Samuel Ph., Enhanced Bee Colony Algorithm for Efficient Load Balancing and Scheduling in Cloud. *Innovations in Bio-Inspired Computing and Applications* (IBICA 2015), Proceedings *of the 6th International Conference*. 2015, 588p., pp. 67–78.

3. Mills-Tettey G.A., Stentz A., Dias M.B. The Dynamic Hungarian Algorithm for the Assignment Problem with Changing Costs. *Naval Research Logistics Quarterly*. № July. 2007. Pp.83–87.

4. Sultana F., Nizam M. An Alternative Proposed Method for Solution of Assignment Problem. *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research* Vol. 52(1). 2020. Pp. 40–50.

5. Saroit I. A., Tarek D. LBCC-Hung: A load balancing protocol for cloud computing based on Hungarian method. *Egyptian Informatics Journal.* № 24. 2023. 100387. DOI:10.1016/j.eij.2023.100387

6. Song M., Cheng L. Solving the Reliability-Oriented Generalized Assignment Problem by Lagrangian Relaxation and Alternating Direction Method of Multipliers. *Expert Systems with Applications*. Vol. 205. 2022. 117644. DOI: 10.1016/j.eswa.2022.117644

7. Acar E. H. S., Aplak A. Model Proposal for a Multi-Objective and Multi-Criteria Vehicle Assignment Problem: An Application for a Security Organization. *Mathematical and Computational Applications*. Vol. 21(4). 2016. Pp. 39-47. DOI: 10.3390/mca21040039

8. Kwak Yo, Deal B. Multi-Scaled Green Infrastructure Optimization: Spatial Projections and Assessment for Dynamic Planning and Design. *Landscape and Urban Planning*. Vol. 249. 2024. 105128. DOI:10.1016/j.landurbplan.2024.105128

9. Chub I.A., Novozhylova M.V., Murin M.N. Optimization problem of allocating limited project resources with separable constraints. *Cybernetics and Systems Analysis*. Vol. 49(4). 2013. Pp. 632 – 642. DOI: 10.1007/s10559-013-9550-z

10. Novozhylova M.V., Karpenko M.Yu. Solution of a Multicriteria Assignment Problem Using a Categorical Efficiency Criterion. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. № 4. 2024. Pp. 75-84. DOI: 10.15588/1607-3274-2024-4-7

11. Бугаєва І. Г. Аналіз параметрів генетичного алгоритму розв'язання двовимірної задачі упаковки. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Т. 2. 2025. № 2(93). С. 53-59. DOI: 10.35546/kntu2078-4481.2025.2.2.6

References

1. Ibraheem A. K. (2020) An effective load balancing algorithm based on deadline constraint under cloud computing. *2nd International Scientific Conference of Al-Ayen University* (ISCAU-2020)*, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. vol. 928, 032070. DOI: 10.1088/1757-899X/928/3/032070

2. Babu K. R. R., Samuel Ph. (2015) Enhanced Bee Colony Algorithm for Efficient Load Balancing and Scheduling in Cloud. *Innovations in Bio-Inspired Computing and Applications* (IBICA 2015), Proceedings *of the 6th International Conference*. 588p., pp. 67–78.

3. Mills-Tettey G.A., Stentz A., Dias M.B. (2007) The Dynamic Hungarian Algorithm for the Assignment Problem with Changing Costs. *Naval Research Logistics Quarterly*. № July. Pp.83–87.

4. Sultana F., Nizam M. (2020) An Alternative Proposed Method for Solution of Assignment Problem. *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research* Vol. 52(1). Pp. 40–50.

5. Saroit I. A., Tarek D. (2023) LBCC-Hung: A load balancing protocol for cloud computing based on Hungarian method. *Egyptian Informatics Journal.* № 24. 100387. DOI:10.1016/j.eij.2023.100387

6. Song M., Cheng L. (2022) Solving the Reliability-Oriented Generalized Assignment Problem by Lagrangian Relaxation and Alternating Direction Method of Multipliers. *Expert Systems with Applications*. Vol. 205. 117644. DOI: 10.1016/j.eswa.2022.117644

7. Acar E. H. S., Aplak A. (2016) Model Proposal for a Multi-Objective and Multi-Criteria Vehicle Assignment Problem: An Application for a Security Organization. *Mathematical and Computational Applications*. Vol. 21(4). Pp. 39-47. DOI: 10.3390/mca21040039

8. Kwak Yo, Deal B. (2024) Multi-Scaled Green Infrastructure Optimization: Spatial Projections and Assessment for Dynamic Planning and Design. *Landscape and Urban Planning*. Vol. 249. 105128. DOI:10.1016/j.landurbplan.2024.105128

9. Chub I.A., Novozhylova M.V., Murin M.N. (2013) Optimization problem of allocating limited project resources with separable constraints. *Cybernetics and Systems Analysis*. Vol. 49(4). Pp. 632 – 642.DOI: 10.1007/s10559-013-9550-z

10. Novozhylova M.V., Karpenko M.Yu. (2024) Solution of a Multicriteria Assignment Problem Using a Categorical Efficiency Criterion. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. № 4. Pp. 75-84. DOI: 10.15588/1607-3274-2024-4-7

11. I. H. Buhaieva (2025) Analiz parametriv henetychnoho alhorytmu rozviazannia dvovymirnoi zadachi upakovky [Analysis of parameters of genetic algorithmfor solving two-dimensional packing problem]. *Visnyk of Kherson National Technical University*. Vol. 2. № 2(93). P. 53-59. [in Ukrainian]. DOI: 10.35546/kntu2078-4481.2025.2.2.6

Дата першого надходження рукопису до видання: 24.11.2025
Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 22.12.2025
Дата публікації: 31.12.2025