УДК 004.4 DOI https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2025.4.3.34

Я. В. ЧУМАЧЕНКО
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук
Львівський національний лісотехнічний університет
ORCID: 0000-0002-0447-4874

РОЗРОБКА КОМП'ЮТЕРНИХ АЛГОРИТМІВ В ПРОЄКТАХ ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ДИСКРЕТНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

У наданій статті була практично реалізована задача розвинути принципи граничного переходу від дискретних моделей до континуальних в задачах на динаміку пружних конструкцій; дослідити більш ретельно дискретні моделі та існуючі методи вирішення задач по даній тематиці; удосконалити вже існуючі рішення шляхом побудови таких дискретних моделей, які б були максимально наближені до відомих континуальних та мали б деякі суттєві переваги при розв'язках задач. Розробити для подальшого застосування програмний модуль для проєкту, що дозволяє побудувати такі дискретні моделі системи, що досліджується, які б забезпечували стабільність системи під дією прикладеної сили, незалежно від заданих початкових умов, а також відсутність похибки обчислень на етапі вирішення задачі.

Для досягнення мети було розглянуто усі характерні залежності сил, діючих на систему, зокрема сили, що залежать від часу, положення системи та швидкості. Відображена архітектура програмного продукту DiscretModels, що поєднує у собі підсистеми графічної візуалізації коливань системи, що вивчається, розрахункову підсистему, яка реалізує запропонований у роботі підхід для побудови дискретних моделей системи під динамічним навантаженням, та підсистему задання та редагування основних параметрів системи. Побудовані: підсистема Form – основна підсистема проекту, що є контейнером для графічної та розрахункової підсистем. Головною функцією даної складової є зв'язок користувача з усіма можливостями, що надає розроблений проект. Підсистема Param – підсистема проекту, що забезпечує введення та редагування основних параметрів системи, відповідно до обраної задачі. Підсистема Graf – розроблена динамічна бібліотека, що входить до складу програмного проекту, з метою формування нового типу графічного компоненту на основі System.Windows.Forms. Control. Під терміном „система, що вивчається" в даному контексті розуміється одномірний осцилятор та стержень, представлений у вигляді ланцюжка мас із дискретними пружинами, під динамічним навантаженням.

При виконанні даного дослідження на основі вже існуючих рішень було запропоновано новий підхід побудови дискретних моделей системи, що вивчається. Розроблено програмний продукт, який успішно реалізує запропонований підхід та порівнює отримані результати із результатами існуючих рішень для підтвердження ефективності проєкту. Будь-який програмний продукт має обмеженості у його використанні та обсягу розв'язуваних задач. У цьому методі доведено, що деякі обмеженості можна вирішити застосувавши до реалізації додаткові умови перевірки та критерії виявлення помилок.

Зроблено висновки про переваги та недоліки кожного з методів континуальних та дискретних моделей. Показано, що найбільш перспективним є метод дискретизації із постійним кроком зміни сил, що діють у системі. Але використання такого варіанту потребує відповідного програмного алгоритму для визначення моментів стрибкоподібної зміни сил, що обумовлює перспективи подальшого розвитку проекту.

Ключові слова: *хвильові процеси, дискретні моделі, континуальні моделі, механіка суцільного середовища, діюча сила, динамічне навантаження, дискретизація сили.*

YA. V. CHUMACHENKO
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Computer Science
Lviv National Forestry University
ORCID: 0000-0002-0447-4874

DEVELOPMENT OF COMPUTATIONAL ALGORITHMS FOR THE STUDY OF WAVE PROCESSES IN DISCRETE MEDIA

In the provided article, the task was practically implemented to develop the principles of limiting transition from discrete models to continual models in problems concerning the dynamics of elastic structures; to study discrete models and existing methods for solving problems on this topic more thoroughly; to improve already existing solutions by *constructing such discrete models that would be maximally close to known continual models and would have some significant advantages in problem solutions. To develop a software module for further application in the project, which allows for the construction of such discrete models of the system under study that would ensure system stability under the action of the applied force, regardless of the set initial conditions, as well as the absence of calculation errors at the stage of problem solution.*

To achieve the goal, all characteristic dependencies of forces acting on the system were considered, including forces that depend on time, system position, and velocity. The architecture of the DiscretModels software product is presented, which combines subsystems for the graphical visualization of the oscillations of the system under study, a calculation subsystem that implements the proposed approach for constructing discrete models of the system under dynamic loading, and a subsystem for setting and editing the main system parameters. The following were built: the Form subsystem – the main subsystem of the project, which is a container for the graphical and calculation subsystems. The main function of this component is the user's connection with all the possibilities provided by the developed project. The Param subsystem – a project subsystem that ensures the input and editing of the main system parameters, according to the selected problem. The Graf subsystem – a developed dynamic library that is part of the software project, intended for forming a new type of graphical component based on System.Windows.Forms.Control. The term "system under study" in this context refers to a one-dimensional oscillator and a rod, represented as a chain of masses with discrete springs, under dynamic loading.

During the execution of this research, a new approach to constructing discrete models of the system under study was proposed, based on already existing solutions. A software product was developed that successfully implements the proposed approach and compares the obtained results with the results of existing solutions to confirm the project's effectiveness. Any software product has limitations in its use and the scope of solvable problems. In this method, it is proven that some limitations can be overcome by applying additional checking conditions and error detection criteria to the implementation.

Conclusions were drawn regarding the advantages and disadvantages of each of the methods of continual and discrete models. It is shown that the most promising is the discretization method with a constant step change of forces acting in the system. However, the use of this option requires a corresponding software algorithm to determine the moments of abrupt force changes, which defines the prospects for the project's further development.

Key words: *wave processes, discrete models, continual models, mechanics of the continuous environment, operating force, dynamic loading, force digitization.*

Постановка проблеми

У сучасній механіці суцільного середовища використовуються два підходи. Найбільш розповсюджений континуальний, з використанням ДУ. Також широко розповсюдженні дискретні моделі, які більш зручно використовувати для чисельних розрахунків на сучасних комп'ютерах. При цьому передбачається, що моделі двох видів тісно зв'язані між собою і дають якісно однакову інформацію про процеси, що вивчаються. Але розповсюдженою є точка зору, що дискретні моделі є зіпсованим варіантом континуальних моделей.

У класичній механіці суцільного середовища фізично нескінченно малий об'єм розглядається як матеріальна точка, що не має розмірів. Відповідна континуальна модель вельми успішно описує рух суцільного середовища, а також розподіл напруги і деформацій в досить гладких областях при досить плавних навантаженнях.

У тих же випадках, коли характерний розмір збурення має порядок характерного розміру мікроструктури, класичні континуальні моделі стають або не зовсім адекватними, або їх використання приводить до значних математичних труднощів. Так, облік мікроструктурних ефектів важливий при моделюванні ультрадисперсних і нанокристалічних матеріалів, при описі високочастотних вібрацій в складних кристалічних решітках органічних речовин, у вершинах тріщин і на фронті хвилі руйнування, при структурних перетвореннях і виникненні дефектів. У подібних ситуаціях в тій або іншій мірі доводиться враховувати дискретний характер структури речовини.

Але виявляється, що не завжди виконується граничний перехід між результатами, отриманими на ґрунті дискретних та континуальних моделей. Вирішення цієї проблеми можливе двома способами. Перший – вдосконалення відповідних континуальних моделей. Такий підхід, здатний відображати специфіку внутрішньої структури речовини, запропонований, наприклад, у роботі Андріанова І.В. Другий – передбачає вдосконалення дискретної моделі, як запропоновано у роботі Шамровського О.Д [1].

При другому підході відпадає необхідність вживання процедури дискретизації, неминучої при застосуванні стандартних чисельних методів до вирішення задач в рамках континуальних моделей. У вказаному напрямі отримані певні результати, проте, в цілому, розвиток дискретних моделей механіки суцільних середовищ істотно відстає від розвитку континуальних моделей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дослідження останніх років у механіці суцільного середовища зосереджені на побудові узагальнених континуумів та мультимасштабному моделюванні для подолання обмежень класичних теорій. Наприклад у роботі Meng Z., Zhang S. A. [2] представлено уніфіковану схему для моделювання як суцільних, так і розривних матеріалів (наприклад, з тріщинами) за допомогою неявного поєднання методу дискретних елементів (DEM) та методу скінченних елементів (FEM). Монографія Neff, P. [3] присвячена теоретичному дослідженню та порівнянню дискретних і континуальних моделей для аналізу складних метаматеріалів та їхніх незвичайних механічних властивостей. Зокрема, активізувався інтерес до мікрополярних (Коссера) та нелокальних моделей, які дозволяють враховувати обертальні ступені свободи та взаємодію на відстані, що критично важливо для наноматеріалів. Проблема граничного переходу між дискретними ґратковими моделями (наприклад, моделями частинок) та континуальними (МГД, Коссера, Коші) залишається ключовою. Дослідження показують, що гомогенізація (усереднення) дискретних моделей з обертальними ступенями свободи часто призводить до континууму типу Коссера, а не простішого типу Коші, як це добре показано в роботі Wang R., Fan F., Sun J. [4]. Це підкреслює необхідність уточнення принципів континуалізації. У сфері чисельних методів розвиваються гібридні та монолітні схеми, що поєднують метод скінченних елементів (МСЕ) та метод дискретних елементів (МДЕ), відомі як FDEM (Finite Discrete Element Method). Такі методи необхідні для моделювання переходу матеріалу з континуального стану (до руйнування) у дискретний (після фрагментації). Вони демонструють, що дискретні підходи можуть бути інтегровані в єдиний варіаційний фреймворк, що свідчить про їхню рівноправність з континуальними як це було впроваджено в роботі Liu Q., Li Q., Shi D. [6]. Як показали публікації Bedair O. K., El-Sayed O. E. [8] також активно розробляються покращені континуальні моделі для дискретних середовищ, які враховують нелокальну взаємодію та вирішують проблему нескінченності амплітуди коливань. Це підтверджує актуальність роботи з побудови стійких дискретних моделей, які завдяки вдосконаленому оцифруванню сили можуть досягати високої точності, характерної для узагальнених континуальних теорій.

Формулювання мети дослідження

Дослідити принципи граничного переходу від дискретних моделей до континуальних в задачах динаміки пружних конструкцій. Удосконалити вже існуючі рішення шляхом побудови таких дискретних моделей, які б були максимально наближені до відомих континуальних та мали б деякі переваги при рішення задач.

Розробити програмний продукт, який дозволяє будувати такі дискретні моделі системи, що вивчається, які б забезпечували стабільність системи під дією прикладеної сили, незалежно від заданих початкових умов, а також забезпечує відсутність росту похибки обчислень на етапі вирішення задачі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Дослідивши предметну область серед усіх представлених методів вирішення подібної проблеми, запропоновано видозмінювати дискретну модель, використовуючи дискретизацію пружної сили, що веде до ліквідації ефекту Гібсу на фронті хвилі. Завдяки цьому було отримано на основі дискретної моделі результати, аналогічні результатам континуальної моделі.

Розроблена система являє собою програмний продукт *DiscretModels*, що поєднує у собі підсистеми графічної візуалізації коливань системи, що вивчається, розрахункову підсистему, яка реалізує запропонований у роботі підхід для побудови дискретних моделей системи під динамічним навантаженням, та підсистему задання та редагування основних параметрів системи. Підсистема *Form* представляю собою основний інтерфейс програми, що дозволяє користувачу задавати основні параметри системи, розраховувати та відображати результати рішення відповідних задач. Підсистема *Param* – підсистема проекту, що забезпечує введення та редагування основних параметрів системи, відповідно до обраної задачі. Підсистема *Graf* – розроблена динамічна бібліотека, що входить до складу програмного проекту, з метою формування нового типу графічного компоненту на основі *System.Windows.Forms.Control.*

До можливостей бібліотеки *Graf* відноситься: автоматичне масштабування вхідного набору точок для розміщення їх на екрані; розподіл набору точок на об’єкти з можливістю персоналізувати вивід кожного об’єкту на екран; відображення результатів як у вигляді ізометрії, так і у Декартовій площині; анімаційне відображення контенту.

Специфікація даних описує наступні сутності: сутність «Сила від швидкості» представлена класом *"DiscretSpeed",* який призначено для виконання дискретизації сили, що залежить від швидкості, що змінюється за лінійним законом, сутність «Сила за часом» представлена класом *„DiscretFunc"*, який призначено для дискретизації сили за часом, що змінюється за нелінійним законом $F = A\sin(kt)$, сутність «Одномірний осцилятор» представлена класом *„DiscretOsc"*, який призначено для дослідження поведінки системи одномірного осцилятору під дією тільки пружної сили, тобто вільних коливань системи, сутність «Ланцюжок мас під зміною силою» представлена класом *„DiscretSteel"*, який призначено для дослідження розповсюдження хвилі уздовж стержня під дією постійної та змінної сили.

Розглянемо звичайний одномірний осцилятор, що складається з вантажа маси m, з’єднаного пружним зв’язком жорсткості C із нерухомою опорою. Якщо матеріальна точка рухається під дією змінної сили, необхідно дискретизувати цю силу, тобто представити її у вигляді кусочно-постійного навантаження (Рис. 1). Вирішимо таку задачу. Нехай у момент часу t_i вантаж знаходиться в положенні x_i і має швидкість v_i. Треба знайти найближчий момент часу t_{i+1}, при якому або відбувається стрибкоподібна зміна сили, або відбувається зупинка вантажу.

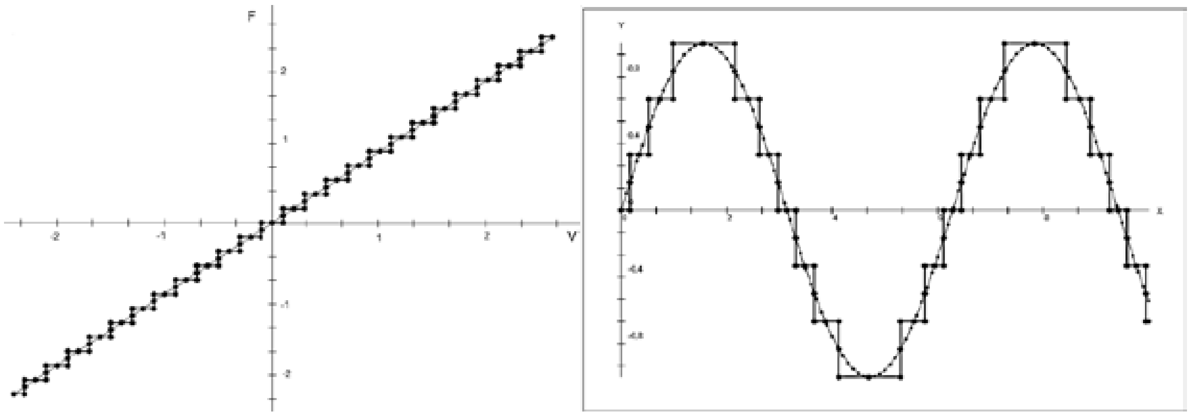

Рис. 1. Залежність пружної сили від деформації

Записавши рівняння руху вантажу:

$$v = v_i + a_i\left(t - t_i\right),\ \ a_i = -\frac{P}{m} round\left(\frac{x_i}{\Delta}\right).$$

$$x = x_i + v_i\left(t - t_i\right) + \frac{1}{2}a_i\left(t - t_i\right)^2. \qquad (1)$$

визначемо найближчу до x_i точку, в якій відбувається стрибкоподібна зміна сили, знаходячи середину відповідного відрізання. Якщо вантаж рухається з позитивною швидкістю v, то шуканою найближчою крапкою є права точка знайденого відрізання, а якщо з негативною – то ліва. Якщо в положенні x_i швидкість дорівнює нулю, то для визначення потрібної точки використовується знак прискорення. Позначимо її через x_i^+ і запишемо:

$$x_i^+ = x_i + v_i\left(t^+ - t_i\right) + \frac{1}{2}a_i\left(t^+ - t_i\right)^2. \qquad (2)$$

Вирішуючи це рівняння, ми знаходимо той момент часу t^+, в який вантаж досягає, з положення x_i, положення x_i^+. Знак плюс або мінус перед коренем вибирається так, щоб знайдене значення t^+ було більше, ніж t_i. Якщо таких значень виявляється два, то вибирається менше з них. Звернемо увагу на те, що попадання вантажу в положення x_i^+ супроводжується переходом вантажу з одного відрізку в сусідній – справа або зліва залежно від напряму руху. При цьому, природно, стрибкоподібно змінюється сила, що діє на вантаж, і відповідне прискорення.

Підставляючи знайдене значення часу в (1) знаходимо швидкість v_i^+, що досягається вантажем в положенні x_i^+. Негативне значення дискримінанта означає, що вантаж не може досягти кордону відрізку, тобто зупиняється по дорозі до цього кордону. Тоді момент зупинки знаходиться як:

$$t^+ = t_i - \frac{v_i}{a_i}. \qquad (3)$$

Координату зупинки знаходимо, підставляючи знайдене значення часу t^+ в (1). Повторюючи описані дії, починаючи з початкових умов, і задаючи нові початкові умови на кожному кроці, як результати кінця попереднього кроку, можна послідовно визначати ключові точки.

Таким чином, дискретна модель має самостійну цінність, причому в рамках даної моделі результати виходять без накопичення похибки. Результат дії даного алгоритму показано на рисунку 2.

Із результатів видно, що навіть при досить великому кроці дискретизації сили, дискретна модель є абсолютно стабільною, на відміну від моделей, що використовують диференційні рівняння та чисельні методи. Також це дуже економить ресурси комп'ютера.

Продовженням даної задачі є побудова дискретної моделі одномірного осцилятору за умов, при яких окрім пружної сили до нього прикладені ще дві змінні сили різної природи (тобто вимушені коливання): сила, залежна від швидкості або сила тертя (змінюється за лінійним законом) та сила залежна від часу(змінюється за періодичним законом). Дані залежності було дискретизовано за допомогою нового запропонованого методу, при якому використовуються стрибки сили постійного значення. Моменти часу стрибків сили вираховуються за відомими формулами (Рис. 3).

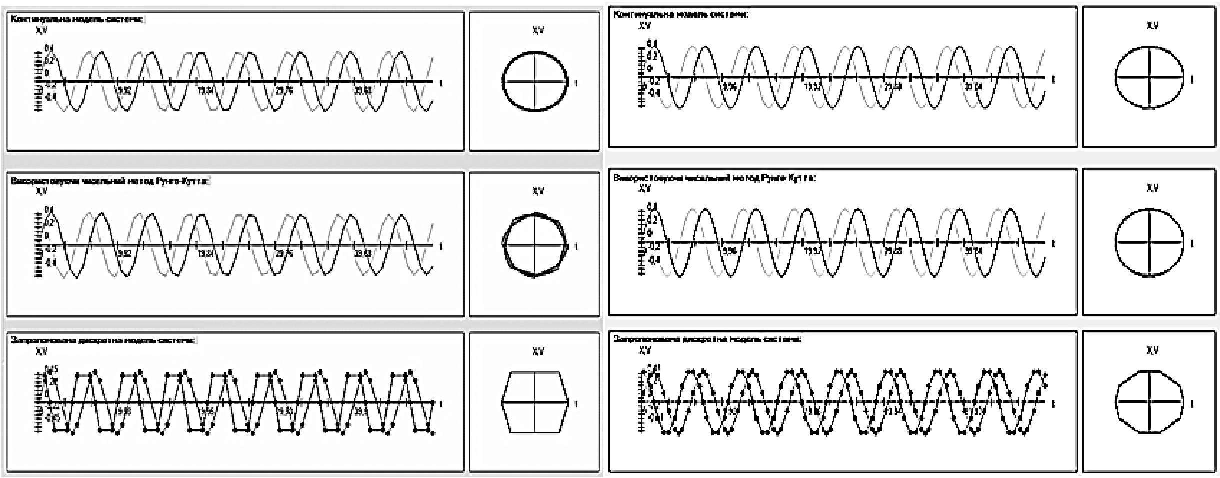

Рис. 2. Різні моделі поведінки системи під дією пружної сили: крок дискретизації 1 (зліва) та 0,1 (справа).

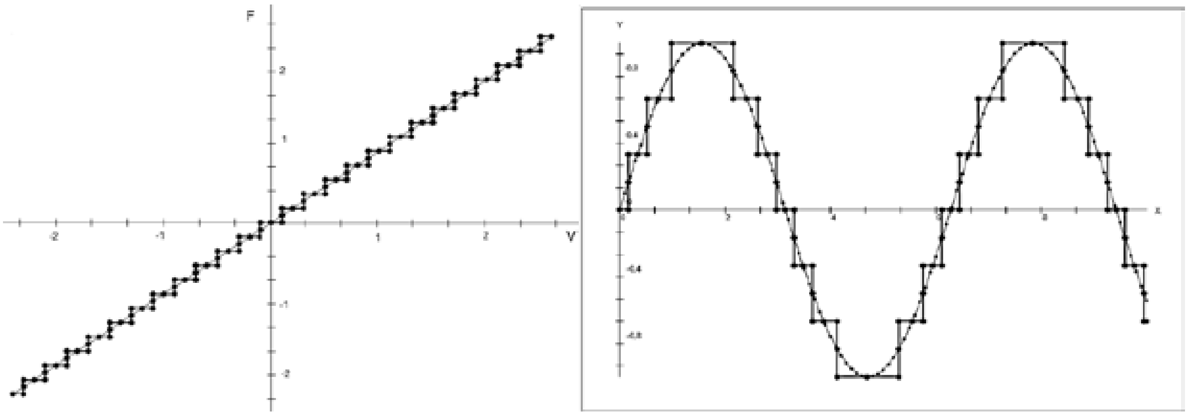

Рис. 3. Дискретизація сили тертя(зліва) та сили за часом(справа)

Поведінка системи під дією результуючої сили показано на рисунках 4-5:

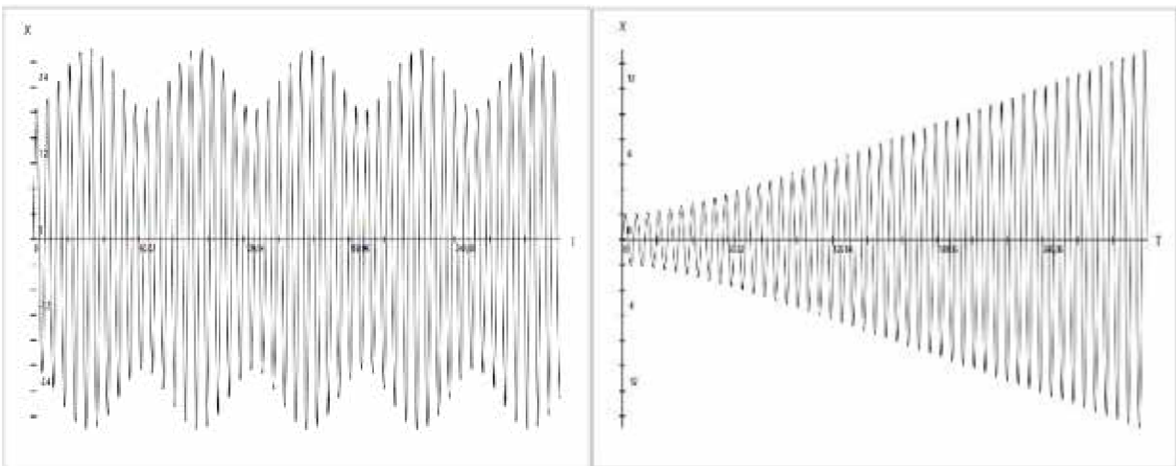

Рис. 4. Графік вимушених коливань на основі *континуальної моделі*:
результуюча сила випадок $k \neq \omega$ (зліва) і $k = \omega$ (справа)

При порівнянні отриманих результатів досліджень, бачимо що результати на основі дискретної моделі практично аналогічні результатам на основі континуальної моделі.

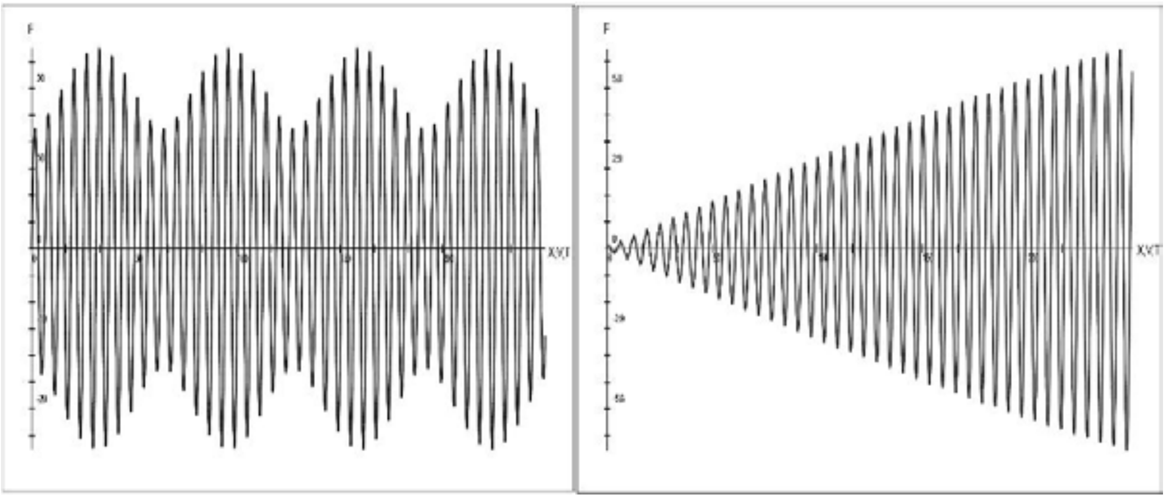

Рис. 5. Графік вимушених коливань на основі *дискретної моделі*:
результуюча сила випадок $k \neq \omega$ (зліва) і $k = \omega$ (справа)

Висновки

Побудовано новий спосіб створення дискретних моделей динамічних систем, який не потребує використання диференціальних рівнянь. Вивчено умови, за яких використання дискретної моделі не приводить до зростання похибки обчислень. Розроблено дискретні моделі для конкретних прикладів рішення динамічних задач, що містять у собі не тільки опис системи, а й одночасно й алгоритм розв'язку задач за допомогою таких моделей. Отриманий спосіб побудови дискретних моделей дозволяє використовувати ці моделі разом із відповідними континуальними із забезпеченням граничного переходу для результатів, отриманих двома підходами. Розроблено програмний продукт, що дозволяє будувати дискретні та континуальні моделі окремих задач та порівнювати результати отримані на основі цих моделей.

Список використаної літератури

1. Шамровський О. Д. До динаміки пружних конструкцій: застосування дискретних моделей на основі граничного переходу / О. Д. Шамровський // Вісник Запорізького національного технічного університету. 2010. Вип. 2(55). С. 132–138.
2. Meng Z., Zhang S. A unified scheme for continuous and discontinuous materials using implicit Discrete Element Method and Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2025. Vol. 433. Art. 117365. DOI: 10.1016/j.cma.2024.117365.
3. Neff, P. Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials. Cambridge University Press, 2024. 345 p.
4. Wang R., Fan F., Sun J. Homogenization of discrete fine-scale mechanical models with rotational degrees of freedom into a Cosserat or a Cauchy continuum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2025. Vol. 182. Art. 105470. DOI: 10.1016/j.jmps.2024.105470.
5. Zeng F., Zhang P. A micro-polar continuum model for the dynamic analysis of nanocrystalline materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2023. Vol. 280. Art. 112440. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2023.112440.
6. Liu Q., Li Q., Shi D. A unified implicit framework for the combined Finite/Discrete Element Method (FDEM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2023. Vol. 134, Iss. 10. e02927. DOI: 10.1002/nme.6927.
7. Коваленко О. М. Комп'ютерне моделювання як один із сучасних методів геокосмічних досліджень / О. М. Коваленко // Вісник ХНУРЕ. 2023. № 1. С. 57–65.
8. Bedair O. K., El-Sayed O. E. Comparison of discrete and continuum models for wave propagation in periodic structures. *Applied Mathematical Modelling*. 2024. Vol. 129. Art. 106399. DOI: 10.1016/j.apm.2024.106399.

References

1. Shamrovsky, O. D. (2010). To the dynamics of elastic structures: Application of discrete models based on limiting transition. *Visnyk Zaporizhzhia National Technical University*, *(2)*55, 132–138.
2. Meng, Z., & Zhang, S. (2025). A unified scheme for continuous and discontinuous materials using implicit Discrete Element Method and Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *433*, 117365. https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117365
3. Neff, P. (2024). *Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials*. Cambridge University Press.

4. Wang, R., Fan, F., & Sun, J. (2025). Homogenization of discrete fine-scale mechanical models with rotational degrees of freedom into a Cosserat or a Cauchy continuum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *182*, 105470. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105470
5. Zeng, F., & Zhang, P. (2023). A micro-polar continuum model for the dynamic analysis of nanocrystalline materials. *International Journal of Solids and Structures*, *280*, 112440. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112440
6. Liu, Q., Li, Q., & Shi, D. (2023). A unified implicit framework for the combined Finite/Discrete Element Method (FDEM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *134*(10), e02927. https://doi.org/10.1002/nme.6927
7. Kovalenko, O. M. (2023). Computer modeling as one of the modern methods of geospace research. *Visnyk KhNURE*, (1), 57–65.
8. Bedair, O. K., & El-Sayed, O. E. (2024). Comparison of discrete and continuum models for wave propagation in periodic structures. *Applied Mathematical Modelling*, *129*, 106399. https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.106399

Дата першого надходження рукопису до видання: 17.11.2025
Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 15.12.2025
Дата публікації: 31.12.2025