

О. О. ЧУПРИНІН

кандидат технічних наук, доцент,

доцент кафедри міцності літальних апаратів

Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»

ORCID: 0000-0002-8757-559X

СКІНЧЕНОЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ АНАЛІЗІ ТРИВАЛОЇ МІЦНОСТІ ЦИЛІНДРИЧНИХ АНГАРІВ РІЗНОЇ ДОВЖИНИ

Розглянуто цілі та завдання досліджень повзучості та тривалої міцності захисних будівельних конструкцій для авіаційної техніки, виконаних з алюмінієвого сплаву, показано актуальність таких досліджень. Описано модель нелінійного деформування тонкостінних елементів при короткочасному та тривалому навантаженні, методику проведення розрахунків. Що дозволяє визначати несучу здатність та тривалу міцність захисних елементів на основі запропонованої варіаційного функціоналу. Розглядається накопичення незворотних деформацій повзучості та пов'язаний із цим процес деградації матеріалу. Наведено приклад розрахунків конструкції покриття та надано рекомендації щодо раціонального обрису циліндричної панелі ангару. Велика кількість накопичених матеріалів випробувань на повзучість дозволяє здійснити оцінку існуючих та нових моделей деформування, проводити калібрування та підбирати відповідні постійні у рівняннях повзучості та руйнування. Варіаційна постановка задачі необхідна для побудови рівнянь скінчених елементів. Використовується принцип типу Лагранжа, в якому варіаційний функціонал задається на переміщеннях. У задачах теорії повзучості варіаційне рівняння включає додаткові сили та моменти від незворотних деформацій повзучості. У довільний момент часу деформації повзучості приймаються відомими (їх варіації дорівнюють нулю), тому функції переміщення оболонок в даний момент часу відповідають додатковим значенням сили та моменту та будуть розв'язком варіаційного рівняння. Отримані дані використовуються для структурізації рівнянь стану математичних моделей. Використано метод для випадку повзучого згину в кінцевих оболонках. З урахуванням того, що велика кількість захисних будівельних конструкцій відповідають моделям тонкостінних тіл – пластин та оболонок. Такі конструкції повинні мати необхідну міцність і жорсткість. Таким чином, удосконалення конструкцій елементів складної форми є одним з пріоритетних практичних завдань при проектуванні захисних споруд.

Ключові слова: повзучість, ушкоджувальність, тривала міцність, залізобетонна конструкція, циліндрична панель, метод скінчених елементів.

О. О. CHUPRYNIN

PhD, Associate Professor,

Associate Professor at the Department of Aircraft Strength
National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute"

ORCID: 0000-0002-8757-559X

FINITE ELEMENT MODELING IN ANALYSIS OF LONG-TERM STRENGTH OF CYLINDRICAL HANGARS OF VARIOUS LENGTHS

The goals and objectives of research on creep and long-term strength of protective building structures for aviation equipment made of aluminum alloy are considered, the relevance of such research is shown. The model of nonlinear deformation of thin-walled elements under short-term and long-term loading, the calculation method are described. What allows determining the bearing capacity and long-term strength of protective structures. The implementation of the proposed model under long-term deformation by the finite element method based on the proposed variational functional is presented. The accumulation of irreversible creep deformations and the related process of material degradation are considered. An example of calculations of the coating structure is given and recommendations are given for the rational outline of the cylindrical panel of the hangar. A large number of accumulated creep test materials allows evaluating existing and new deformation models, performing calibrations and selecting appropriate constants in the creep and fracture equations. The obtained data are used to structure the equations of state of mathematical models. The variational formulation of the problem is necessary for constructing finite element equations. The Lagrange-type principle is used, in which the variational functional is given on the displacements. In problems of creep theory, the variational equation includes additional forces and moments from irreversible creep deformations. At an arbitrary moment in time, the creep deformations are taken as known (their variations are zero), therefore, the shell displacement functions at a given moment in time correspond to the additional values of the force and moment and will be the solution



© О. О. Чупринін, 2026

Стаття поширюється на умовах відкритої ліцензії CC BY 4.0

of the variational equation. The method was used for the case of creep bending in conical shells. Given that a large number of protective building structures correspond to models of thin-walled bodies – plates and shells. Such structures must have the necessary strength and rigidity. Thus, improving the structures of elements of complex shape is one of the priority practical tasks in the design of protective structures.

Key words: creep, damage, long-term strength, reinforced concrete structure, cylindrical panel, finite element method.

Постановка проблеми

У роботі досліджується довільна тонка оболонка обертання при несиметричному напружено деформованому стані в умовах накопичення деформацій повзучості. Використовується рівняння теорії оболонок. У скінченоеlementній постановці введені відповідні вектори для опису напружено деформованого стану. Використовуючи прийняті припущення та відповідні рівняння, деформації довільної точки тіла виражені через деформації її середньої поверхні та введений вектор, визначений у точках серединної поверхні оболонки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

З урахуванням особливостей компоненти сил та моментів на одиницю довжини від складових пружних деформацій, зміни обсягу та повзучості визначаються наступним чином [1]: $N_{ij}^{(C)}$, $N_{ij}^{(V)}$ це складові мембранних зусиль, які викликані незворотними деформаціями повзучості та зміни обсягу в матеріалі відповідно; $M_{ij}^{(C)}$ і $M_{ij}^{(V)}$ відповідають повзучості та зміни обсягу наведених до серединної поверхні моментів [2]. Уявимо об’ємну деформацію у вигляді:

$$\varepsilon_{kl}^{(V)} = \varepsilon_{kl}^{(T)} = \alpha_{ij} \Delta T. \tag{1}$$

Конкретизацію діаграми можна отримати у вигляді інкрементальної теорії з урахуванням накопиченої ушкодженості [1]:

$$\dot{c} = B \frac{(\sigma)^n}{(1-\omega)^k}; \quad \dot{\omega} = D \frac{(\sigma)^m}{(1-\omega)^l}, \tag{2}$$

де $c(t)$ – незворотні деформації повзучості; $\omega(t)$ – параметр пошкодження; B, D, n, k, r, l – константи, що описують поведінку ізотропного матеріалу при тривалому навантаженні.

Застосуємо відомий метод [3] з теорії варіаційних рівнянь [1], що встановлює еквівалентність між операторним рівнянням $R\bar{u} = \bar{f}$ та варіаційне рівняння $(R\bar{u}, \bar{v})_H - (\bar{f}, \bar{v}) = 0$, де $\bar{u} \in D(R)$, $\bar{v} \in V'$, V' щільний у H . У випадку симетричного та позитивного оператора R , варіаційний функціонал збігається з функціоналом енергії:

$$F(\bar{u}) = (R\bar{u}, \bar{u})_H - (\bar{f}, \bar{u}) = 2 \int_V W(\bar{u}) dV - \int_S \bar{f} \bar{u} dS,$$

де $(R\bar{u}, \bar{u})$ є звичайним скалярним добутком, $F(\bar{u})$ є лінійним функціоналом, і $W(\bar{u})$ – питома потенційна енергія деформації твердого тіла. Нехай $u(u, v, w)^T$ бути вектором переміщення у «відомій» точці $N_{ij}^{(T)}$, $N_{ij}^{(C)}$, $M_{ij}^{(T)}$, $M_{ij}^{(C)}$. Крім того, $u^{(0)}$ – вектор кінематично допустимих віртуальних переміщень, тобто функцій переміщень, що задовольняють геометричні рівняння.

Формулювання мети дослідження

Отримання скінченоеlementної моделі деформування тонкостінних циліндричних моделей на основі відповідного функціоналу в умовах накопичення деформацій повзучості. І аналіз довговічності захисних споруд аерокосмічної техніки.

Викладення основного матеріалу дослідження

Множачи рівняння рівноваги типу [2] (без сил інерції) на відповідні компоненти вектора $\bar{u} = (u^{(0)} - u)$, підсумовуючи та інтегруючи їх на поверхні оболонки, отримуємо:

$$\int_S \left[\left(N_{xx,x} + \frac{1}{r} N_{x0,0} - \frac{\cos \alpha}{r} N_{00} \right) (u^{(0)} - u) + \left(N_{0x,x} + \frac{1}{r} N_{00,0} + \frac{\cos \alpha}{r} N_{x0} + \frac{\sin \alpha}{r} M_{0x,x} + \frac{\sin \alpha}{r^2} M_{00,0} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} M_{x0} \right) (v^{(0)} - v) + \left(M_{xx,xx} + \frac{1}{r} M_{x0,x0} - \frac{\cos \alpha}{r} M_{00,x} + \frac{1}{r} M_{0x,x0} + \frac{1}{r^2} M_{00,00} + \frac{\cos \alpha}{r^2} M_{x0,0} - \frac{\sin \alpha}{r} N_{00} + \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{,x} + \frac{1}{r} \left(N_{x0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_{,x} + \frac{1}{r} \left(N_{0x} \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{,0} + \frac{1}{r^2} \left(N_{00} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_{,0} \right] (w^{(0)} - w) + p(w^{(0)} - w) \Big] dS = 0.$$

Введемо позначення $(u^{(0)} - u) = \delta u$, $(v^{(0)} - v) = \delta v$, $(w^{(0)} - w) = \delta w$ і перетворимо це рівняння за допомогою формул Гріна [3]. Ми припускаємо, що граничні умови мають вигляд затиснутого, вільно опертого або вільного краю, для яких контурні інтеграли дорівнюють нулю. Тоді, з умови симетрії, $N_{x0} = N_{0x}$, $M_{x0} = M_{0x}$, це рівняння набуває вигляду:

$$\int_S \left[N_{xx} \left(-\delta u_{,x} - \frac{1}{2} \delta w_{,x}^2 \right) + N_{00} \left(-\frac{1}{r} \delta v_{,0} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta u - \frac{\sin \alpha}{r} \delta w - \frac{1}{2r^2} \delta w_{,0}^2 \right) + N_{x0} \left(-\frac{1}{r} \delta u_{,0} - \delta v_{,x} + \frac{\cos \alpha}{r} \delta v - \frac{1}{r} \delta (w_{,x} w_{,0}) \right) + M_{xx} (\delta w_{,xx}) + M_{00} \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta w_{,x} - \frac{1}{r^2} \delta w_{,00} - \frac{\sin \alpha}{r^2} \delta v_{,0} \right) + M_{x0} \left(\frac{2}{r} \delta w_{,x0} - \frac{\cos \alpha}{r^2} \delta w_{,0} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} \delta v - \frac{\sin \alpha}{r} \delta v_{,x} \right) \right] dS + \int_S p \delta w dS = 0.$$

З урахуванням геометричних співвідношень [2], отримуємо $(i, j = x, \theta)$:

$$-\int_S (N_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij}^{[0]} - M_{ij} \cdot \delta k_{ij}) dS + \int_S p \cdot \delta w dS = 0. \tag{3}$$

Зрештою, підставляючи вирази з фізичних рівнянь [2], ми можемо переписати (3) у такому вигляді $(i, j = x, \theta; k, l = x, \theta)$:

$$\int_S (b_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{[0]} \delta \varepsilon_{kl}^{[0]} - d_{ijkl} k_{ij} \delta k_{kl}) dS - \int_S p \cdot \delta w dS - \int_S (N_{ij}^{(V)} + N_{ij}^{(C)}) \delta \varepsilon_{ij}^{[0]} dS + \int_S (M_{ij}^{(V)} + M_{ij}^{(C)}) \delta k_{ij} dS = 0. \tag{4}$$

Отже, алгоритм розв’язання задач повзучості в конічних оболонках обертання у випадку несиметричного навантаження можна представити такими кроками. У довільний момент часу сили та моменти, що залежать від об’ємних деформацій та деформацій повзучості $(N_{ij}^{(V)}, N_{ij}^{(C)}, M_{ij}^{(V)}, M_{ij}^{(C)})$ визначаються числовим інтегруванням через товщину оболонки.

Перший інтеграл у рівнянні (4) має квадратичну форму, що дозволяє нам визначити $u_{(k)}$ як точку функціонального мінімуму прямим методом для розв’язків варіаційних задач. Представимо алгоритм скінченно-елементного моделювання (МСЕ) з використанням векторно-матричного представлення [4]. Використовуючи рівняння (2). Зв’язок між напруженнями та деформаціями визначається рівнянням (4):

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}^{(n)} - \underline{\sigma}^{(V)} - \underline{\sigma}^{(C)}, \tag{5}$$

де $\underline{\sigma}^{(V)} = (N_{xx}^{(V)}, N_{00}^{(V)}, N_{x0}^{(V)}, M_{xx}^{(V)}, M_{00}^{(V)}, M_{x0}^{(V)})^T$ – вектор сил, що виникають внаслідок об’ємних деформацій, а \underline{E} – матриця пружних властивостей. Введемо вектори додаткових сил від деформації повзучості та нелінійної складової пружної деформації: $\underline{\sigma}^{(C)} = (N_{xx}^{(C)}, N_{00}^{(C)}, N_{x0}^{(C)}, M_{xx}^{(C)}, M_{00}^{(C)}, M_{x0}^{(C)})^T$; $\underline{\sigma}^{(n)} = (N_{xx}^{(n)}, N_{00}^{(n)}, N_{x0}^{(n)}, 0, 0, 0)^T$.

У довільний момент часу t , вектор напружень $\underline{\sigma}^{(z)}$ розраховується аналогічно до (5): $\underline{\sigma}^{(z)} = \underline{E}^z \underline{\varepsilon}^{(z)} + \underline{P}^{(z)} \cdot \underline{\varepsilon}^{(n)} - \underline{\sigma}^{(V)(z)} - \underline{P}^{(z)} \cdot \underline{c}$, де $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ у нас є:

$$\underline{E}^{(z)} = \underline{P}^{(z)} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & z & \nu z & 0 \\ \nu & 1 & 0 & \nu z & z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \underline{\sigma}^{(V)(z)} = \frac{E \varepsilon^{(V)}}{1-\nu} (1, 1, 0)^T.$$

Наведемо розв’язану остаточно форму рівнянь для конічного скінченного елемента [5]. Перетворення варіаційного функціоналу дає:

$$\delta J = \frac{1}{2} \int_S (\delta \underline{\varepsilon}^{(t)T} \cdot \underline{E} \cdot \delta \underline{\varepsilon}^{(t)} + \delta \underline{\varepsilon}^{(t)T} \cdot \underline{P}^{[0]} \cdot \underline{\varepsilon}^{[0(n)]} - \delta \underline{\varepsilon}^{(t)T} \cdot \underline{P}^{[0]} \cdot \underline{c}^{[0]} - \delta \underline{\varepsilon}^{(t)T} \cdot \underline{\sigma}^{[0(V)]}) dS - \int_S \left(\left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{,x} + \frac{1}{r} \left(N_{x0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_{,x} + \frac{1}{r} \left(N_{x0} \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{,0} + \frac{1}{r^2} \left(N_{00} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_{,0} \right) \delta w dS - \int_S \delta \underline{u}^T \cdot \underline{p} dS = 0. \tag{6}$$

Вище було показано, що для довільного моменту часу з відомими додатковими силами, викликаними деформаціями повзучості, задача зводиться до знаходження пружного розв’язку оболонки, навантаженої цими початковими та додатковими силами. Вся система рівнянь скінченних елементів виражається як:

$$[K] \{U\} = \{P^{(e)}\} + \{P^{(C)}\} + \{P^{(V)}\} + \{P^{(p)}\} + \{P^{(n)}\}, \tag{7}$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості; $\{U\}$ – вектор вузлових переміщень; $\{P^{(e)}\}$ – узагальнений вектор зовнішніх сил; $\{P^{(C)}\}$ – узагальнений вектор вузлових сил, спричинених незворотними деформаціями повзучості; $\{P^{(V)}\}$ – узагальнений вектор об’ємних сил; $\{P^{(p)}\}$ – узагальнений вектор вузлових сил, що виникають внаслідок проекцій

узагальнених сил на вектор нормалі; $\{P^{(n)}\}$ – узагальнений вектор вузлових сил, спричинених нелінійною складовою пружних деформацій.

Наведена модель та метод розрахунку використані для аналізу напруженого стану циліндричної панелі, яка є відкритою оболонкою, що деформується під дією власної ваги та, можливо, додатковим корисним навантаженням. Так, розглянемо, конструкцію завтовшки h зі стороною в поздовжньому напрямку ℓ і в поперечному b . У розрахунках варіювалася довжина покриття ℓ . Всі подальші розрахунки проводилися з наступним розбиттям на кінцеві елементи: 20 по довжині та 20 по колу.

Для такої панелі радіус кривизни в окружному напрямку дорівнює: $R = \frac{f}{2} + \frac{b^2}{8f}$, де f – стріла підйому, b – розмір у плані у поперечному напрямку. Що відповідає куту розкриття панелі, що визначається за формулою: $\alpha = 2 \arccos\left(1 - \frac{f}{R}\right)$.

Орієнтуючись на практичне застосування при проектуванні будівель та споруд, зручніше буде використання наведеної стріли підйому \hat{f} . Т. е., віднесеної до ширини покриття $\hat{f} = f/b$. Розглянемо вплив довжини оболонки на особливості його деформування та характеристик міцності. Розглядалася оболонка товщини $h = 5$ см (1/200 від розмірів у площині), виконана із алюмінієвого сплаву Д16АТ [6]. Для даного матеріалу при кімнатній температурі $T = 20$ °С фізико-механічні характеристики: модуль пружності [7] $E = 0,65 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, масова щільність $\rho = 2,8 \cdot 10^3$ кг/м³. $B = 3,19 \cdot 10^{-17}$ МПа⁻ⁿ/год, $D = 1,76 \cdot 10^{-17}$ МПа^{-m}/год, $n = m = 2,93$, $k = l = 1,38$.

Для панелі завдовжки $\ell = 1$ м встановлено, що найменша інтенсивність напруження буде в панелі, наведена стріла підйому якої дорівнює $\hat{f} = 0,309$. Крім того, розглядалася оболонка, довжиною $\ell = 5$ м з таким самим розбиттям (20 × 20). В даному випадку найменша інтенсивність напруги буде в панелі, наведена стріла підйому якої дорівнює $\hat{f} = 0,278$. Аналогічні розрахунки були проведені для оболонки завдовжки $\ell = 20$ м. Встановлено, що найменша інтенсивність напружень буде в панелі, наведена стріла підйому якої дорівнює $\hat{f} = 0,276$, що повністю збігається з оболонкою $\ell = 10$ м. Отримані результати розрахунків дозволяють стверджувати, що довжина покриття істотно не впливає на максимальну напругу в циліндричній панелі. І, отже, не сильно впливає на міцність та довговічність конструкцій, а також на вибір раціонального контуру. За певної довжини ($\ell \approx 0,65$ м) інтенсивність напруження з точністю до значущих цифр не змінюється зі збільшенням довжини. Так, зі збільшенням довжини спостерігається асимптотичне наближення раціональної стріли підйому до значення 0,276.

Рівень накопичення ушкоджуваності можна оцінити з величини інтенсивності напруження в початковий момент часу. Аналогічні результати отримано й у період експлуатації 100 років. Залежність раціональної стріли підйому від довжини оболонки наведено на рисунку 2 (крива 1). Подібні залежності спостерігаються і у випадку, коли панель сприймає корисне навантаження. Проаналізуємо деформування циліндричної панелі під дією власної ваги конструкції та вдесятеро більше за величину корисного навантаження $q = 10p$, де p – власну вагу оболонки на одиницю площі. У розрахунках також, як і для експлуатації тільки під власною вагою, варіювалася висота підйому f . Розглянемо циліндричну панель із розмірами 10 × 10 м ($\ell = 10$ м і $b = 10$ м), та завтовшки $h = 5$ см. Встановлено, що найменша інтенсивність напружень буде в панелі, відносна висота якої дорівнює $\hat{f} = 0,269$.

Розглядається миттєве деформування та зміна інтенсивності напружень через 10 та 100 років. Залежність раціональної стріли підйому від довжини оболонки наведено на рисунку 2 (крива 2). Також дослідження були проведені і для деформування панелі під дією власної ваги конструкції та корисного навантаження у двадцять разів більше за власну вагу $q = 20p$. Встановлено, що найменша інтенсивність напруги буде в панелі, відносна висота якої по асимптоті прагне $\hat{f} = 0,259$ зі збільшенням довжини. Залежність раціональної стріли підйому від довжини оболонки наведено на рисунку 2 (крива 3).

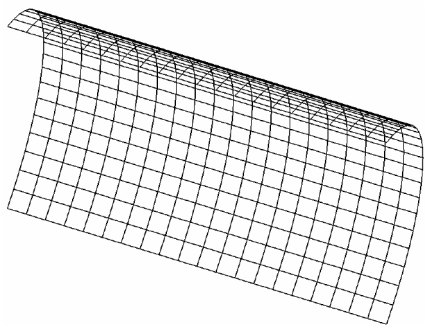


Рис. 1. СЕ представлення циліндричної панелі

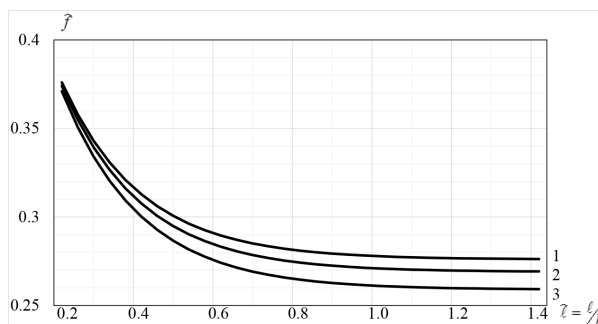


Рис. 2. Залежність раціональної стріли підйому від довжини оболонки

Висновки

Показано, що отриманий, на основі запропонованої теоретичної моделі повзучості з ушкоджуваністю, метод розрахунку дозволяє проводити дослідження тонкостінних будівельних конструкцій, виконаних з різних матеріалів за різних умов експлуатації [8] з урахуванням повзучості. Це дає можливість проводити адекватний аналіз надійності та довговічності будівельних конструкцій, а також вибирати раціональне контур залізобетонних елементів та виробляти рекомендації проектувальникам.

Список використаної літератури

1. Breslavsky D., Chuprynin A, Morachkovsky O, Tatarinova O. and Pro W. (2019). Deformation and damage of nuclear power station fuel elements under cyclic loading / *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. Volume 54, Issue 5-6, 1 July 2019. 348-359.
2. Шутенко, Л. Н., Засядько, Н. А., & Чупринін, О. О. (2007). Основи теорії пружності та пластичності: навчальний посібник для студентів будівельних спеціальностей. *Харків : ХНАГХ*. 135 с.
3. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., and Wood D. D. (2014). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Butterworth-Heinemann.
4. Herisanu, N., Marinca. V. A. (2021). Solution procedure combining analytical and numerical approaches to investigate a two-degree-of-freedom vibro-impact oscillator. *Mathematics*. 9(12), 1374.
5. Mao, XY., Zheng, HT., Ding, H. et al. (2024). An analytical method for nonlinear and nonhomogeneous boundary value problems of plates. *Nonlinear Dyn*, 112, 1691–1711.
6. Zhu, Z. et al. (2024). Design and Development of New Copper-Aluminum Composite Materials. *The Proceedings of the 19th Annual Conference of China Electrotechnical Society. ACCES 2024*. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 1312.
7. Xinke Xiao, Qianqian Ma, Yifan Kong et al. (2025). An Experimental and Numerical Investigation on Enhancing the Ballistic Resistance of 316L Stainless Steel Plates Against Blunt Projectiles by Covering with 2024-T351 Aluminum Alloy Thin Plates. *Advancing Open Science*, 18(18), 4264.
8. Shpachuk V., Chuprynin A., Daleka V., Suprun T. (2020). “Simulation of impact interaction of rail transport carriage in a butt roughness zone”. *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport* 106: 141–152.

References

1. Breslavsky D., Chuprynin A, Morachkovsky O, Tatarinova O. and Pro W. (2019). Deformation and damage of nuclear power station fuel elements under cyclic loading / *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. Volume 54, Issue 5–6, 1 July 2019. 348-359.
2. Shutenko, L. N., Zasyadko, N. A., & Chuprynin, A. A. (2007). Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity: student manual. *Kharkov : HNAGH*, 135 p. [in Ukrainian].
3. Zienkiewicz O. C., Taylor R.L., and Wood D.D. (2014). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Butterworth-Heinemann.
4. Herisanu, N., Marinca. V. A. (2021). Solution procedure combining analytical and numerical approaches to investigate a two-degree-of-freedom vibro-impact oscillator. *Mathematics*. 9(12), 1374.
5. Mao, XY., Zheng, HT., Ding, H. et al. (2024). An analytical method for nonlinear and nonhomogeneous boundary value problems of plates. *Nonlinear Dyn*, 112, 1691–1711.
6. Zhu, Z. et al. (2024). Design and Development of New Copper-Aluminum Composite Materials. *The Proceedings of the 19th Annual Conference of China Electrotechnical Society. ACCES 2024*. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol. 1312.
7. Xinke Xiao, Qianqian Ma, Yifan Kong et al. (2025). An Experimental and Numerical Investigation on Enhancing the Ballistic Resistance of 316L Stainless Steel Plates Against Blunt Projectiles by Covering with 2024-T351 Aluminum Alloy Thin Plates. *Advancing Open Science*, 18(18), 4264.
8. Shpachuk V., Chuprynin A., Daleka V., Suprun T. (2020). “Simulation of impact interaction of rail transport carriage in a butt roughness zone”. *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport* 106: 141–152.

Дата першого надходження статті до видання: 19.01.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 23.02.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 30.04.2026