

В. П. ЛЕГЕЗА

доктор технічних наук, професор,  
професор кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
ORCID: 0000-0003-0403-6142

А. І. ДИЧКА

кандидат технічних наук,  
асистент кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
ORCID: 0000-0003-0578-2788

О. М. НЕЩАДИМ

кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
ORCID: 0000-0003-2275-4797

## ПЕРЕСЛІДУВАННЯ ВТІКАЧА ЗА УМОВИ ЙОГО БРАХІСТОХРОННОГО РУХУ У ПЛОСКОМУ ВЕКТОРНОМУ ПОЛІ

*Розв'язано актуальну задачу дослідження процесу переслідування втікача, який здійснює втечу за брахістохронною траєкторією у плоскому векторному полі. Брахістохронна траєкторія втікача визначалась за допомогою варіаційних методів, виходячи з критерію мінімуму часу, витраченого на переміщення між стартовою і фінішною точками. Крім того, оптимальність вибору фінішної точки розглядалась в сенсі максимального переміщення втікача по горизонталі в напрямку «лінії життя». Припускалося, що переслідувач в кожен момент часу намагається рухатися по миттєвій лінії, яка візуально з'єднує дві поточні точки (його і втікача) на горизонтальній площині, тобто переслідувач під час переслідування «тримає курс на втікача». Мета втікача – просуватися якомога далі в напрямку «лінії життя» до моменту його перехоплення переслідувачем, обираючи оптимальну фінішну точку на «лінії життя». В свою чергу, переслідувач намагається наздогнати втікача до того, як той встигне досягти певної точки, яка знаходиться на «лінії життя».*

*Для дослідження процесу переслідування була побудована математична модель у вигляді системи чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку. Розроблено метод числового розв'язання отриманої системи рівнянь, який дозволив визначити рівняння оптимальної траєкторії втечі.*

*На основі числового аналізу з'ясовано вплив параметрів процесу переслідування на форму кривих переслідування і втечі. Встановлено залежність зміни горизонтального переміщення втікача в сторону «лінії життя» до моменту його захоплення в залежності від вибору фінішної точки на «лінії життя». Показано, що ця залежність має чітко виражений локальний максимум, який свідчить про існування певної фінішної точки на «лінії життя», яка забезпечує втікачу можливість досягти максимального просування по горизонталі в бік «лінії життя» до моменту перехоплення.*

**Ключові слова:** втікач, переслідувач, стартова та фінішна точки, процес переслідування, перехоплення, оптимальна траєкторія, «лінія життя», швидкість течії річки.

V. P. LEGEZA

Doctor of Technical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of Computer Systems Software  
National Technical University of Ukraine  
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”  
ORCID: 0000-0003-0403-6142



A. I. DYCHKA

Candidate of Technical Sciences,  
Assistant at the Department of Computer Systems Software  
National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"  
ORCID: 0000-0003-0578-2788

O. M. NESHCHADYM

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Computer Systems Software  
National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"  
ORCID: 0000-0003-2275-4797

## PURSUE OF A FUGITIVE UNDER THE CONDITIONS OF HIS BRACHISTOCRONIC MOTION IN A FLAT VECTOR FIELD

*The current problem of studying the process of pursuing a fugitive who escapes along a brachistochronous trajectory in a flat vector field was solved. The brachistochronous trajectory of the fugitive was determined using variational methods, based on the criterion of the minimum time spent on moving between the starting and finishing points. In addition, the optimality of choosing the finishing point was considered in the sense of the maximum horizontal movement of the fugitive in the direction of the "life line". It was assumed that the pursuer at each moment of time tries to move along an instantaneous line that visually connects two current points (his and the fugitive) on a horizontal plane, i.e. the pursuer during the pursuit "keeps a course for the fugitive". The fugitive's goal is to advance as far as possible in the direction of the "life line" until the moment of his interception by the pursuer, choosing the optimal finish point on the "life line". In turn, the pursuer tries to catch up with the fugitive before he has time to reach a certain point located on the "life line".*

*To study the pursuit process, a mathematical model was built in the form of a system of four first-order differential equations. A method for numerically solving the resulting system of equations was developed, which allowed determining the equation of the optimal escape trajectory.*

*Based on numerical analysis, the influence of the parameters of the pursuit process on the shape of the pursuit and escape curves was clarified. The dependence of the change in the horizontal movement of the fugitive towards the "life line" until the moment of his capture was established depending on the choice of the finish point on the "life line". It is shown that this dependence has a clearly expressed local maximum, which indicates the existence of a certain finish point on the "life line", which provides the fugitive with the opportunity to achieve maximum horizontal advancement towards the "life line" until the moment of interception.*

**Key words:** fugitive, pursuer, starting and finishing points, pursuit process, interception, optimal trajectory, "life line", river flow speed.

### Постановка проблеми

Теперішня робота є природним продовженням попередніх робіт авторів, направлених на вивчення певних парадоксальних властивостей процесів переслідування та втечі у змінних векторних полях.

Об'єктом дослідження є процес переслідування і можливого перехоплення катера-втікача катером-переслідувачем у плоскому векторному полі за умови оптимального руху втікача в сенсі мінімуму часу.

Предметом дослідження є створена математична модель та результати числового аналізу певних властивостей процесів переслідування-ухилення.

Новизна запропонованої постановки задачі полягає в тому, що для втечі обрано оптимальну (брахістохронну) криву, яка забезпечує втікачу мінімальний час для досягнення ним «лінії життя» до моменту перехвату його переслідувачем. Фінішна точка обирається втікачем за тої умови, щоб абсциса перехвату втікача (яка відповідає заданій «лінії життя») знаходилася якнайдалі від абсциси стартової точки.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Задачі переслідування-втечі виникли ще за часів Леонардо да Вінчі, який першим дослідив задачу, коли втікач рухається по горизонтальній прямій. Загальний випадок дослідив французький вчений П'єр Бугер у 1732 році [1 – 4]. Постановка задачі полягала в тому, щоби знайти криву переслідування торгового судна піратським кораблем. При цьому припускалося, що швидкості обох суден завжди знаходяться в однаковому співвідношенні, а характеристики середовища є стаціонарними.

Дослідження, пов'язані з різними задачами переслідування-втечі, з'явилися на початку 1950-х років у рамках теорії ігор [5]. У загальному випадку метою переслідувачів є застосування стратегій оптимальної поведінки та дій, які мінімізують час захоплення, поки втікач намагається уникнути перехвату. Постановки задачі варіювалися в залежності від кількості конкурентів, однорідності та швидкості гравців (учасників), рівня доступності

інформації [6], моделі робочого простору (графічної або геометричної) або рівня взаємодії (кооперативного або некооперативного) [7]. Найважливішим результатом в цій галузі науки є теорія оптимального керування [8, 9]. Вперше задача переслідування рухомого об'єкта іншим керованим об'єктом була сформульована як задача оптимального керування в статті [10]. Стратегія паралельного переслідування була поставлена в [11] і використана для розв'язання простих задач переслідування за фазових обмежень на стани гравців. Значний внесок у теорію ігор переслідування-втечі, засновану на екстремальному методі прицілювання, було зроблено в [12, 13]. З розвитком технічних засобів та зі зростанням обчислювальних можливостей і потужностей сучасних комп'ютерів постановка задач переслідування уточнювалися та ускладнювалися, особливо у військовій галузі перехвату бойових цілей, наприклад, таких об'єктів, як БПЛА або АПА [14 – 17]. В переважній частині цих робіт враховувався вплив зовнішнього середовища на процес переслідування. Зупинимося на аналізі цих робіт детальніше.

У статті [14] зроблено першу спробу дослідити рівноважну стратегію реалістичної гри переслідування-втечі, в якій переслідувач використовує три ступені вільного керування, а втікач рухається вільно. Спочатку описано триступеневе керування переслідувача та відносну координату втікача. Потім строго виведено рівноважну стратегію на основі розв'язання рівняння ретрогресивного шляху відповідно до методу Гамільтона-Якобі-Беллмана-Ісаака (НЖВІ), який поділяє процес переслідування-втечі на фази навігації та прискорення. Також проаналізовано максимально допустиму швидкість для переслідувача, щоб успішно захопити втікача, та запропоновано стратегію, за допомогою якої втікач може втекти, коли швидкість переслідувача перевищує певний поріг. Крім того, проведено числові експерименти з різними односторонніми відхиленнями, щоб перевірити, чи запропонована стратегія формує рівновагу Неша.

В роботі [15] розглянуто важливу задачу планування дій для учасників гри переслідування-ухилення з кількома переслідувачами та одним високошвидкісним втікачем. Об'єктами дослідження є мобільні роботизовані системи та, зокрема, малі безпілотні літальні апарати (БПЛА). Зазначено, що розв'язання задачі було ускладнене наявністю значних вітрових навантажень, які впливають на траєкторію та стратегії руху гравців. Передбачалося, що БПЛА мають обмежені обчислювальні ресурси, що обумовило використання обчислювально швидких та евристичних підходів у реальному часі. Для поставленої задачі була застосована нова інтелектуально-геометрична теорія. Для точного розрахунку точок зближення учасників використано геометричний підхід, заснований на побудові кіл або сфер Аполлонія. Були застосовані інтелектуальні методи керування для синтезу складних стратегій руху учасників. Запропоновано метод швидкого прогнозування траєкторії втікача на основі двошарової нейронної мережі, що містить нову функцію активації типу «s-парабола». Розглянуто спеціальну схему навчання зворотного поширення для досліджуваної моделі. Розроблено та протестовано схему моделювання, яка включає математичні моделі динамічних об'єктів та вітрових навантажень. Були проведені симуляції ігор переслідування-втечі в умовах, наближених до реальних, які показали перспективність та доцільність представленого підходу.

В дослідженні [16] гетерогенна система БПЛА/БНТЗ поєднує перевагу в повітрі БПЛА (безпілотних літальних апаратів) та перевагу на землі БНТЗ (безпілотних наземних транспортних засобів). Система може виконувати низку складних завдань, одним з яких є прийняття рішень щодо переслідування-втечі, тому пропонується спільна стратегія гетерогенної системи БПЛА/БНТЗ для розробки гри переслідування-втечі у складному тривимірному (3D) полігональному середовищі, яке є достатньо великим, але з межами. Спочатку були введені гіпотези системи та завдання. Потім використана вдоскоалена крайова задача для об'єднання даних місцевості для прийняття рішень та планування шляху. За умови, що втікач знає позицію переслідувачів, що співпрацюють між собою у будь-який момент часу, але переслідувачі мають лише лінію видимості, аналізується найгірший випадок та вивчається стратегія між втікачем та переслідувачами. Залежно від стану втікача стратегія переслідувачів, що співпрацюють, розглядається у трьох ситуаціях: втікач знаходиться в полі зору переслідувачів, втікач просто зникає з поля зору переслідувачів, а позиція втікача повністю невідома переслідувачам. Результати моделювання показали, що стратегія не гарантує перемоги переслідувачів у грі в складному тривимірному полігональному середовищі, але вона є оптимальною в найгіршому випадку.

У статті [17] розглянуто диференціальну гру переслідування-втечі між кількома переслідувачами та кількома втікачами у тривимірному просторі за умови динамічних збурень навколишнього середовища (наприклад, вітру, підводних течій). Спочатку задачу було сформульовано з точки зору розбиття множини переслідувачів та призначено кожного переслідувача одному втікачу. Представлено два алгоритми для розбиття множини переслідувачів з точки зору переслідувача або з точки зору втікача. У межах кожного розбиття задача зводиться до гри кількох переслідувачів з одним втікачем. Потім ця задача розв'язується за допомогою підходу, заснованого на досяжності. Сформульовано умови для завершення гри з точки зору включення досяжних множин. Досяжні множини переслідувачів та втікача були отримані шляхом розв'язання їхніх відповідних рівнянь множин рівнів за допомогою методу вузькосмугових множин рівнів. Продемонстровано, чому схеми швидкого маршу або швидкого сканування не застосовні до цієї задачі для загального класу збурень. Оптимальні за часом траєкторії та відповідні оптимальні стратегії можна отримати пізніше, пройшовши ці множини рівнів. Запропонована схема реалізована на задачах як з простими, так і з реалістичними полями потоку.

В роботі [18] розроблено точну методологію на основі диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка прогнозує оптимальні за часом траєкторії автономних транспортних засобів, що рухаються в будь-яких безперервних, сильних та динамічних океанських течіях, усуваючи необхідність використання евристики. Мета полягала в тому, щоб передбачити послідовність напрямків руху, щоб транспортні засоби могли найкраще використовувати або уникати течій, мінімізуючи час подорожі. На основі методу набору рівнів введено та продемонстровано, що модифіковане рівняння набору рівнів визначає оптимальний за часом шлях у будь-якому безперервному потоці. Показано, що запропонований алгоритм є обчислювально ефективним і його було застосовано до низки експериментів. Спочатку перевірено цей підхід за допомогою простого еталонного застосування у вихровому потоці Ренкіна, для якого існує аналітичний розв’язок. Далі нову методологію було застосовано до більш складних, змодельованих полів потоку, таких як нестационарні потоки з подвійним кругообігом, зумовлені вітровим навантаженням, та потоки за круговим островом. Ці приклади показують, що оптимальні за часом траєкторії для кількох транспортних засобів можна планувати навіть за наявності складних потоків в областях з перешкодами. Насамкінець представлено та підтверджено ілюстраціями кілька зауважень, які описують конкретні особливості запропонованого методу.

В оглядовій статті [19] наведено ґрунтовний аналітичний огляд відкритих джерел, який дозволив отримати загальне уявлення про основні світові тенденції, що склалися на сьогодні в дослідженнях процесів переслідування-втечі у двовимірному та тривимірному просторах.

В низці робіт [20 – 23] розглядалися задачі, близькі за постановкою до представленої, в яких переслідування втікача здійснювалося одним переслідувачем у середовищі як зі стаціонарними, так і нестационарними характеристиками за умови, що втікач вільно рухався вздовж прямої у напрямку «лінії життя» (де йому вже нічого не загрожувало). Мета цих досліджень полягала у виборі оптимального кута нахилу прямої втечі, яка дозволяє втікачу максимально наблизитися до «лінії життя» до перехоплення. Встановлені певні парадоксальні властивості траєкторії втечі в залежності від кута нахилу лінії втечі. Для дослідження в цих статтях, як робочий інструмент, використовувалися методи класичного варіаційного числення.

Виконаний аналітичний огляд відкритих джерел дозволяє отримати загальне уявлення про основні світові тенденції, що склалися на сьогодні в дослідженнях процесів переслідування-втечі у двовимірному та тривимірному просторах. По-перше, розглянуті дослідження практично в однаковій мірі засновані на використанні двох підходів до моделювання процесів переслідування-втечі: як підходу, що ґрунтується на теорії диференціальних ігор, так і мультиагентного підходу. По-друге, як об’єкти досліджень в переважній більшості випадків виступають безпілотні літальні апарати (БПЛА) та автономні підводні апарати (АПА). По-третє, у значній кількості проаналізованих робіт враховувався вплив зовнішнього середовища на процес переслідування втікача.

**Формулювання мети дослідження**

Потрібно знайти: 1) траєкторію  $L_U : \{y = y(x)\}$  переслідування катером  $U$  катера  $V$  в рухомій воді; 2) оптимальну траєкторію  $L_V : \{\eta = \eta(\xi)\}$  руху катера-втікача  $V$ ; 3) час  $\square$ , за який катер  $U$  наздожене катер  $V$ ; 4) точку на площині  $OXY$ , в якій він наздожене катер  $V$ ; 4) координати фінішної точки, яка забезпечує таку оптимальну траєкторію втечі, що переміщення катера  $V$  вздовж осі  $OX$  в напрямку «лінії життя»  $AD$  буде максимальним.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

**Вихідні дані для побудови математичної моделі.** Опишемо процес перехоплення втікача переслідувачем більш детально. Розглянемо стартову позицію двох рухомих точок (катерів) (рис. 1). На одному березі (позначеному на рис. 1 як вісь ординат  $OY$ ) річки зі швидкою поздовжньою течією на відстані  $y_0$  один від одного стоять два катери – катер-переслідувач  $U$  і катер-втікач  $V$ . Річка розділяє дві країни, як природна перешкода між ними.

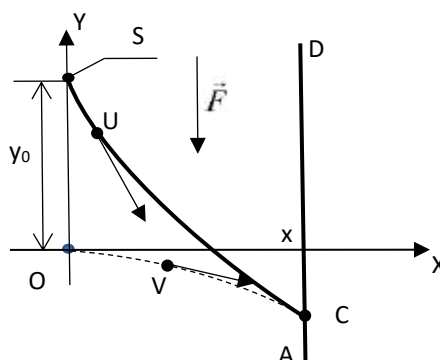


Рис. 1. Криві втечі та переслідування

При цьому катер-втікач  $V$  намагається якнайшвидше перетнути річку, рухаючись в напрямку межі – «лінії життя»  $AD$ . Вважаємо, що лінія  $AD$  є паралельною береговій лінії старту двох катерів. Переслідуювач  $U$  намагається наздогнати втікача  $V$  до того, як останній встигне досягти певної точки, яка знаходиться на «лінії життя»  $AD$  або поза нею. Точка  $C$  на рис. 1 – це крайня точка можливого затримання втікача  $V$  переслідуювачем  $U$ . Отже, в початковий час  $t=0$  втікач  $V$  починає рухатись зі стартової точки  $O(0,0)$  по оптимальній траєкторії (в сенсі мінімуму часу) в задану фінішну точку  $C$  (рис. 1) зі швидкістю, модуль якої є сталим  $\gamma_V = \sqrt{p^2 + q^2} = const$ . Тут змінні величини  $p$  та  $q$  є горизонтальною і вертикальною проєкціями швидкості  $\gamma_V$  катера  $V$  відповідно, яку він може максимально розвинути в нерухомій воді. Переслідуювач  $U$  стартує з точки  $S(0, y_0)$  одночасно з втікачем  $V$  і в процесі переслідування обирає напрям руху на поточну точку розташування катера  $V$  на площині  $OXY$ . При цьому переслідуювач  $U$  також має сталий модуль швидкості  $\gamma_U = \sqrt{u^2 + v^2} = const$ . Тут змінні величини  $u$  та  $v$  є горизонтальною і вертикальною проєкціями швидкості  $\gamma_U$  переслідуювача  $U$  відповідно, яку він може максимально розвинути в стоячій воді. Очевидно, що сталі величини  $\gamma_U$  та  $\gamma_V$  певним чином залежать від потужності двигунів обох катерів. Як було вище сказано, зазначені модулі швидкостей обох катерів задані відносно нерухомої поверхні води без врахування переносної швидкості течії річки. Але в даній задачі рух катерів розглядається в рухомій воді, причому модуль швидкості течії річки задано функцією  $f(x)$  від горизонтальної координати  $x$ , а вектор швидкості напрямлений в протилежному напрямку по відношенню до додатного напрямку осі ординат.

Фізично рух обох катерів можна ототожити з рухом матеріальних точок в горизонтальному векторному полі  $\vec{F}$  швидкостей рухомої води. Тоді компоненти векторного поля рухомого середовища матимуть вигляд (рис. 1):

$$\vec{F} = (0, -f(x), 0).$$

**Побудова моделі у вигляді системи диференціальних рівнянь для визначення траєкторій руху переслідуювача і втікача.**

Ототожнимо місцеположення катерів на площині  $OXY$  з точками  $U(x, y)$  (переслідуювач) і  $V(\xi, \eta)$  (втікач) в поточний момент часу  $t$  в рухомій воді. Побудуємо систему диференціальних рівнянь в загальному вигляді для встановлення кривої переслідування  $L_U$  та кривої втечі  $L_V$  з урахуванням переносної швидкості течії річки:

$$\begin{cases} \dot{x} = u; \\ \dot{y} = v - f(x); \\ \dot{\xi} = p; \\ \dot{\eta} = q - f(\xi). \end{cases} \quad (1)$$

В системі (1) потрібно визначити горизонтальні і вертикальні складові швидкостей переслідуювача і втікача, виходячи з постановки задачі. На першому етапі знайдемо змінні горизонтальну  $u$  і вертикальну  $v$  швидкості переслідуювача  $U$ , виходячи з умов, які окреслено нижче. Математично сформулюємо умови переслідування. Встановимо вираз для кутового коефіцієнту  $y'_x$  дотичної до кривої  $L_U$  в поточній точці  $U(x, y)$ :

$$y'_x = [v - f(x)]/u. \quad (2)$$

Переслідуювач в кожний момент часу намагається рухатись вздовж миттєвої лінії, яка візуально з'єднує дві поточні точки  $U(x, y)$  і  $V(\xi, \eta)$  на площині  $OXY$  (тобто переслідуювач  $U(x, y)$  «тримає курс на втікача»  $V(\xi, \eta)$ ). Одночасно цей напрям має збігатися з напрямом дотичної  $y'_x$  до шуканої кривої  $L$  переслідування. Опишемо це математично, врахувавши вираз (2). В результаті отримаємо рівність двох кутових коефіцієнтів:

$$[v - f(x)]/u = (\eta - y)/(\xi - x). \quad (3)$$

Звільнімося в системі (1) від змінних  $u$  та  $v$  за допомогою рівності (3) та співвідношення для  $\gamma_U$ .

Для цього з рівняння (3) спочатку виразимо змінну  $v$  через решту змінних  $(u, x, y, \xi, \eta)$ :

$$v = f(x) + u \cdot \omega(x, y, \xi, \eta), \quad (4)$$

де  $\omega(x, y, \xi, \eta) = (\eta - y)/(\xi - x)$ . В подальших перетвореннях і позначеннях аргументи функції  $\omega$  опустимо. Тепер скористаємося співвідношеннями  $\gamma_U = \sqrt{u^2 + v^2}$  та виразом (4) для визначення змінної  $u$ . В результаті дістанемо квадратне рівняння відносно змінної  $u$

$$u^2 \cdot (1 + \omega^2) + 2f(x)\omega u + f^2(x) - \gamma_U^2 = 0, \quad (5)$$

розв'язками якого є пара співвідношень:

$$\tilde{u}_{1,2} = [-f(x)\omega \pm \sqrt{\gamma_U^2(1 + \omega^2) - f^2(x)}]/(1 + \omega^2). \quad (6)$$

Відповідні два розв'язки для  $v$  мають вигляд:

$$\tilde{v}_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma_V^2 - u_{1,2}^2}. \quad (7)$$

На другому етапі визначимо змінні складові  $p$  та  $q$  швидкості втікача  $V(\xi, \eta)$ , виходячи з умови його брахістохронного руху.

Для цього треба розв'язати варіаційну задачу з мінімізації часу руху втікача в рухомій воді. Визначимо функціонал, який потрібно мінімізувати:

$$T = \int_0^L p^{-1} d\xi \rightarrow \min_{\eta(\xi)}. \quad (8)$$

Скористаємося другою парою диференціальних рівнянь в системі (1), утворивши систему

$$\begin{cases} \dot{\xi} = p; \\ \dot{\eta} = q - f(\xi). \end{cases} \quad (9)$$

та розділимо в системі (9) друге рівняння на перше:

$$\eta'_\xi = [q - f(\xi)]/p. \quad (10)$$

Нагадаємо, що горизонтальна  $p$  і вертикальна  $q$  складові швидкості втікача обмежені співвідношенням  $\gamma_V = \sqrt{p^2 + q^2}$ .

Використовуючи це співвідношення, знайдемо вираз для дробу:

$$q/p = \sqrt{\gamma_V^2 p^{-2} - 1}. \quad (11)$$

Після підстановки виразу (11) в рівняння (10) отримаємо квадратне рівняння відносно невідомої змінної  $z = p^{-1}$ :

$$(f^2(\xi) - \gamma_V^2)z^2 + 2f(\xi) \cdot \eta'(\xi) \cdot z + (\eta'^2(\xi) + 1) = 0. \quad (12)$$

Рівняння (12) має два розв'язки:

$$z_{1,2} = (p^{-1})_{1,2} = [-\eta'(\xi) \cdot f(\xi) \pm \sqrt{\gamma_V^2 (\eta'^2(\xi) + 1) - f^2(\xi)}] / [f^2(\xi) - \gamma_V^2]. \quad (13)$$

Підставимо знайдений вираз (13) у функціонал (8):

$$T = \int_0^L \frac{-\eta'(\xi) \cdot f(\xi) \pm \sqrt{\gamma_V^2 \cdot (\eta'^2(\xi) + 1) - f^2(\xi)}}{f^2(\xi) - \gamma_V^2} d\xi. \quad (14)$$

Вираз (13) є підінтегральною функцією  $F(\xi, \eta'(\xi))$  у функціоналі (14). Скористаємося рівнянням Ейлера-Лагранжа для побудови диференціального рівняння оптимальної траєкторії руху втікача:

$$F'_\eta - \frac{d}{d\xi}(F'_\eta) = 0. \quad (15)$$

Оскільки функція  $F(\xi, \eta'(\xi))$  не залежить від функції  $\eta(\xi)$ , то в рівнянні (15) похідна  $F'_\eta = 0$ . Через це диференціальне рівняння (15) спрощується і перетворюється на рівняння першого порядку:  $F'_\eta = C_1$ , де  $C_1$  - перша довільна стала. Тепер можна визначити диференціальне рівняння брахістохронної траєкторії руху втікача:

$$\eta'^2(\xi) \cdot \gamma_V^4 = [C_1 \cdot (f^2(\xi) - \gamma_V^2) + f(\xi)]^2 \cdot \{\gamma_V^2 \cdot [\eta'^2(\xi) + 1] - f^2(\xi)\}. \quad (16)$$

Визначимо з (16) явний вираз похідної  $\eta'(\xi)$ :

$$\eta'(\xi) = \pm \frac{C_1 \cdot (f^2(\xi) - \gamma_V^2) + f(\xi)}{\gamma_V} \cdot \sqrt{\frac{f^2(\xi) - \gamma_V^2}{[C_1 \cdot (f^2(\xi) - \gamma_V^2) + f(\xi)]^2 - \gamma_V^2}}. \quad (17)$$

Після інтегрування (17) дістанемо рівняння шуканої оптимальної кривої втечі  $\eta(\xi, C_1, C_2)$  - брахістохрони для втікача, яка залежить від двох сталих:

$$\eta(\xi, C_1, C_2) = \pm \frac{1}{\gamma_V} \int [C_1 \cdot (f^2(\xi) - \gamma_V^2) + f(\xi)] \cdot \sqrt{\frac{f^2(\xi) - \gamma_V^2}{[C_1 \cdot (f^2(\xi) - \gamma_V^2) + f(\xi)]^2 - \gamma_V^2}} d\xi + C_2, \quad (18)$$

де  $C_2$  - друга довільна стала.

Формула (18) визначає остаточний вигляд рівняння шуканої кривої втечі  $\eta(\xi, C_1, C_2)$ , до якої потрібно приєднати дві граничні умови варіаційної задачі:

$$\eta(0, C_1, C_2) = 0; \eta(L, C_1, C_2) = \eta_L. \tag{19}$$

Розв'яжемо поставлену крайову задачу. Позначимо підінтегральну функцію в (18) через  $g(\xi, \gamma_V, C_1)$ . Оскільки інтеграл (18) не береться в явній формі, то скористаємося розкладом функції  $g(\xi, \gamma_V, C_1)$  в ряд Тейлора за змінною  $\xi$  в околі точки  $\xi = 0$ , врахувавши сім перших членів ряду. Для прикладу наведемо лише чотири коефіцієнти степеневого ряду  $g^{(0)}(0, \gamma_V, C_1)$ ,  $g^{(1)}(0, \gamma_V, C_1)$ ,  $g^{(2)}(0, \gamma_V, C_1)$ ,  $g^{(3)}(0, \gamma_V, C_1)$ , оскільки їхні вирази є достатньо громіздкими:

$$\begin{aligned} g^{(0)}(0, \gamma_V, C_1) &= -\gamma_V \cdot C_1 / K(\gamma_V, C_1); \quad g^{(1)}(0, \gamma_V, C_1) = \pi / [L \cdot \gamma_V \cdot K^3(\gamma_V, C_1)]; \\ g^{(2)}(0, \gamma_V, C_1) &= \pi^2 \cdot \gamma_V \cdot C_1^3 \cdot [(\gamma_V \cdot C_1)^2 - 4] / [L^2 \cdot K^5(\gamma_V, C_1)]; \\ g^{(3)}(0, \gamma_V, C_1) &= \pi^3 \cdot [(\gamma_V \cdot C_1)^4 - 15\gamma_V^2 \cdot C_1^4 - 2(\gamma_V \cdot C_1)^2 + 1] / [\gamma_V \cdot L^3 \cdot K^7(\gamma_V, C_1)], \end{aligned}$$

де  $K(\gamma_V, C_1) = \sqrt{1 - (\gamma_V \cdot C_1)^2}$ . Використовуючи отримані вище вирази для коефіцієнтів ряду Тейлора наведемо функцію  $g(\xi, \gamma_V, C_1)$ :

$$g(\xi, \gamma_V, C_1) = \sum_{n=0}^6 g^{(n)}(0, \gamma_V, C_1) \cdot \xi^n / n! \tag{20}$$

Після інтегрування відрізка ряду Тейлора (20) отримаємо наближений розв'язок для шуканої функції:

$$\eta(\xi, C_1, C_2) = \pm \sum_{n=0}^6 g^{(n)}(0, \gamma_V, C_1) \cdot \xi^{n+1} / (n+1)! + C_2, \tag{21}$$

де  $C_1, C_2$  - невідомі сталі, які слід визначити з граничних умов (19). Після визначення констант  $C_1, C_2$  з граничних умов (19) функцію (21) будемо позначати стисло  $\eta(\xi)$ . Зазначимо, що виходячи з першої граничної умови  $C_2 = 0$ , а сталу  $C_1$  знайдено числовими методами з рівняння  $\eta(L, C_1, 0) = \eta_L$ .

Визначимо змінні складові  $p$  та  $q$  швидкості втікача, виходячи з умови його брахістохронного руху:

$$\tilde{p}_{1,2} = \frac{f^2(\xi) - \gamma_V^2}{-\eta'(\xi) \cdot f(\xi) \pm \sqrt{\gamma_V^2 \cdot [\eta'^2(\xi) + 1] - f^2(\xi)}}, \tag{22}$$

$$\tilde{q}_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma_V^2 - \tilde{p}_{1,2}^2}. \tag{23}$$

Підставивши отримані вирази (6), (7), (22), (23) в систему (1), дістанемо нормальну систему чотирьох нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує процес переслідування-втечі в окресленій постановці задачі:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{u}(x, y, \xi, \eta); \\ \dot{y} = \tilde{v}(x, y, \xi, \eta) - f(x); \\ \dot{\xi} = \tilde{p}; \\ \dot{\eta} = \tilde{q} - f(\xi); \end{cases} \tag{24}$$

**Числовий аналіз процесу переслідування втікача.** Для графічної ілюстрації процесу переслідування (рис. 2) наведемо один із можливих варіантів перегонів, в якому для числового інтегрування системи (24) були використані наступні вихідні дані: 1). граничні умови руху катерів: старт  $x(0) = \xi(0) = \eta(0) = 0; y(0) = 2$ ; фінішна точка втікача  $\eta(1) = -3$ ; 2). параметри векторного потоку  $A_0 = 1$  та  $H = 1$ ; 3). максимальні модулі швидкості катерів:  $\gamma_U = 2,2$  та  $\gamma_V = 1,1$ ; 4) смуга переслідування обмежена відрізком  $0 \leq x \leq 1$ .

Отже, маємо такі стартові точки: для переслідувача це точка  $U(0, 2)$ , а для втікача –  $V(0, 0)$  відповідно. Фінішна точка для втікача є такою:  $C(1, -3)$ . Функція  $f(x)$ , яка задає модуль швидкості течії річки, має вигляд:

$$f(x) = A_0 \sin(\pi x / H). \tag{25}$$

На графіку рис. 2 пунктирна крива представляє собою траєкторію руху втікача  $V$ , а суцільна крива – траєкторію руху переслідувача  $U$ . Як бачимо з рис. 2, переслідувачу  $U$  вдалося затримати втікача  $V$  в межах заданої смуги переслідування  $0 \leq x \leq 1$ . Причому ця подія відбулася у точці  $C$  з координатами  $C(0,958; -2,859)$  в момент часу  $T = 1,814$  (од. часу). Тут як лінія «лінія життя» розглядалась вертикальна пряма  $x = 1$ .

Тепер дослідимо поведінку функції  $\xi(\eta_L)$  (а це є горизонтальна координата точки затримання втікача) в залежності від зміни вертикальної координати  $\eta_L$  фінісної точки руху втікача. В числовому експерименті горизонтальна координата фінісної точки руху втікача була фіксованою і дорівнювала одиниці, а вертикальна

$\eta_L$  – змінювалась. Мета цього дослідження полягала в тому, щоб показати, що на цій кривій існує така точка з деякою координатою  $\eta_L$ , що функція  $\xi(\eta_L)$  в ній досягає свого максимуму.

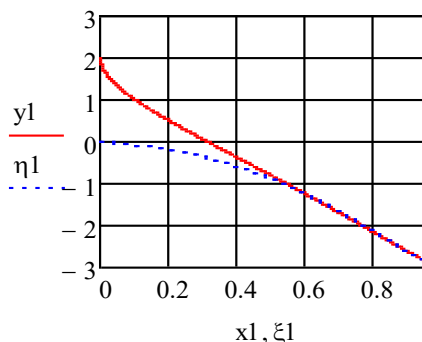


Рис. 2. Графіки втечі  $y1(x1)$  (пунктирна крива) і переслідування  $\eta1(\xi1)$  (суцільна крива)

На рис. 3 наведено зазначений графік, на якому спостерігається явно виражений локальний максимум, який за величиною наближено дорівнює  $\xi_{catch} = 0,922$  (од. довжини) та досягається при певному значенні стартової ординати  $\eta_L = -0,520$  (од. довжини). Ордината перехоплення втікача в цьому разі дорівнює  $\eta_{catch} = -0,418$  (од. довжини), а час перехоплення складає  $T = 0,8922$  (од. часу). Локальний максимум кривої на рис. 3 вказує на те, що існує певна фінішна точка на «лінії життя»  $AD$ , вибір якої втікачем дає йому можливість досягти максимального переміщення в бік лінії  $AD$  за умови його оптимального (брахістохронного) руху між стартовою і фінішною точками.

Отже, спостерігаємо певний парадокс: здавалося б, що для вдалої втечі треба було б за фінішну обрати точку з координатами  $(1;0)$ , яка лежить на осі абсцис найближче до стартової точки з координатами  $(0;0)$ . Проте це не так: вигляд кривої на рис. 3 як раз і пояснює, чому така стратегія вибору фінішної точки на «лінії життя»  $AD$  не є правильною для вдалої втечі. Для порівняння зазначимо, що якщо б «лінія життя»  $AD$  знаходилася, наприклад, на відстані у  $x_{AD} = 0,900$  (од. відстані) від осі ординат, то втеча катера  $V$  була би вдалою на відміну від випадку, якщо б для втечі було обрано фінішну точку з координатами  $(1;0)$  на «лінії життя»  $x_{AD} = 1$  (од. відстані). В останньому разі  $x(0) = 0,833 < x_{AD}$  і втікач був би однозначно затриманим.

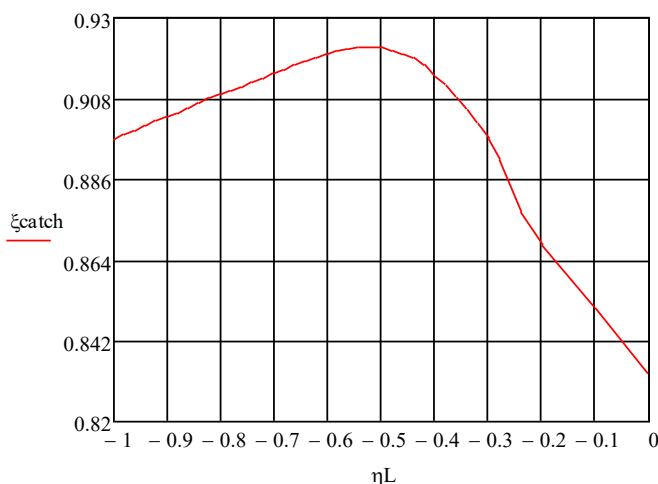


Рис. 3. Графік залежності  $\xi(\eta_L)$  горизонтальної координати  $\xi$  точки затримання втікача від зміни вертикальної координати  $\eta_L$  фінішної точки руху втікача

### Висновки

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що вперше побудовано математичну модель процесу «плоского» переслідування втікача, коли для втечі він обирає оптимальну траєкторію в сенсі мінімуму часу руху в умовах змінного векторного поля рухомої рідини.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що на основі розробленої математичної моделі та її програмної реалізації проведено числовий аналіз процесу переслідування втікача, який дозволив встановити

його важливі характеристики та неочевидні властивості. Проаналізовано зміну горизонтальної координати  $\xi(\eta_L)$  точки затримання втікача в залежності від зміни вертикальної координати  $\eta_L$  фінішної точки руху втікача на «лінії життя». Показано, що ця залежність має чітко виражений локальний максимум, який свідчить про існування певної фінішної точки на «лінії життя», яка забезпечує втікачу можливість досягти максимального просування по горизонталі в напрямку «лінії життя» до моменту його перехоплення. Було помічено парадоксальне явище: для успішної втечі стратегія вибору втікачем фінішної точки на горизонтальній прямій, яка з'єднує стартову і фінішну точки, є помилковою.

Результати числового експерименту дозволяють рекомендувати розроблену математичну модель та її програмну реалізацію для подальшого практичного використання при дослідженні процесів переслідування-втечі у змінному векторному полі рухомої рідини.

### Список використаної літератури

- Bernhart A. Curves of pursuit, Scripta Math. 20 (1954), 125-141.
- Bernhart A. Curves of pursuit-II, Scripta Math. 23 (1957), 49-65.
- Bernhart A. Polygons of pursuit, Scripta Math. 24 (1959), 23-50.
- Bernhart A. Curves of general pursuit, Scripta Math. 24 (1959), 180-206.
- Isaacs R. Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization; Dover Publications: Mineola, NY, USA, 1999; ISBN 978-0-486-40682-4.
- Yang, B.; Liu, P.; Feng, J.; Li, S. Two-Stage Pursuit Strategy for Incomplete-Information Impulsive Space Pursuit-Evasion Mission Using Reinforcement Learning. Aerospace 2021, 8(10), p.299. <https://doi.org/10.3390/aerospace8100299>
- Weintraub I.E., Pachter M., Garcia E. An Introduction to Pursuit-Evasion Differential Games. In Proceedings of the 2020 American Control Conference (ACC), Denver, CO, USA, 1–3 July 2020; IEEE: Piscataway, NJ, USA, 2020; pp. 1049–1066.
- Pesch H.J. Solving Optimal Control and Pursuit-Evasion Game Problems of High Complexity. In Computational Optimal Control; Bulirsch, R., Kraft, D., Eds.; Birkhäuser: Basel, Switzerland, 1994; pp. 43–61. ISBN 978-3-7643-5015-4.
- Wang Z., Gong B., Yuan Y., Ding X. Incomplete Information Pursuit-Evasion Game Control for a Space Non-Cooperative Target. Aerospace 2021, V.8, No.8, p. 211. <https://doi.org/10.3390/aerospace8080211>
- Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes; Pergamon: Oxford, UK, 1964.
- Petrosjan L.A. Differential Games of Pursuit. World Scientific: Singapore, 1993; ISBN 978-981-02-0979-7.
- Krasovskii, N.N.; Subbotin, A.I. Game-Theoretical Control Problems; Springer: New York, NY, USA, 2011. ISBN 978-1-4612-8318-8.
- Subbotin, A.I. Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective; System & Control: Foundations & Applications; Birkhäuser Boston: Boston, MA, USA, 1995; ISBN 978-1-4612-6920-5.
- Chen N., Li L., Mao W. Equilibrium Strategy of the Pursuit-Evasion Game in Three-Dimensional Space. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2024. Vol. 11, No. 2, pp. 446-458, <https://doi.org/10.1109/JAS.2023.123996Ya>
- Khachumov M., Khachumov V. Modeling the Solution of the Pursuit-Evasion Problem Based on the Intelligent-Geometric Control Theory. Mathematics, 2023. Vol. 11, Is. 23, 4869. <https://doi.org/10.3390/math11234869>
- Liang, Xiao, Wang, Honglun, Luo, Haitao, (2020). Collaborative Pursuit-Evasion Strategy of UAV/UGV Heterogeneous System in Complex Three-Dimensional Polygonal Environment, *Complexity*, 2020, 7498740, 13 p. <https://doi.org/10.1155/2020/7498740>
- Sun W., Tsiotras P., Yezzi A.J. Multiplayer Pursuit-Evasion Games in Three-Dimensional Flow Fields. Dynamic Games and Applications, 2019. Vol. 9, Is. 4, pp. 1188-1207, DOI: 10.1007/s13235-019-00304-4
- Lolla, T., Lermusiaux, P.F.J., Ueckermann, M.P. et al. Time-optimal path planning in dynamic flows using level set equations: theory and schemes. Ocean Dynamics, V. 64, 1373–1397 (2014). <https://doi.org/10.1007/s10236-014-0757-y>
- I.O. Романенко, А.Л. Яловець (2025). Аналітичний огляд стану досліджень з моделювання процесів переслідування/втечі у тривимірному просторі // *Проблеми програмування*. № 1, С. 3-12. <https://doi.org/10.15407/prp2025.01.003>
- Legeza V.P., Neshchadym O.M. The problem of fugitive interception on a plane in the one-dimensional vector field of a moving fluid. Scientific notes of the V.I. Vernadsky TNU. Series: Technical Sciences. V. 34 (73), № 3, 2023. <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2023.3.1/27>
- Legeza, V., Oleshchenko, L. (2023). Paradoxical Properties Research of the Pursuit Curve in the Intercepting a Fugitive Problem. In: Hu, Z., Dychka, I., He, M. (eds) Advances in Computer Science for Engineering and Education VI. ICCSEE 2023. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol.181. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-36118-0\\_60](https://doi.org/10.1007/978-3-031-36118-0_60)
- В.П. Легеца. Парадоксальні властивості лінії переслідування в задачі перехоплення втікача на горизонтальній площині. Наукові новини КПІ, 2025. Т. 138, № 1, С. 7-14. <https://doi.org/10.20535/kpissn.2025.1.321963>

23. Viktor Legeza, Liubov Oleshchenko (2025). Simulation of Fugitive Interception Strategies for a Mobile Object on a Surface in a Vector Field of Moving Fluid. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, 242, p.p. 75-85; DOI: 10.1007/978-3-031-84228-3\_7

#### References

1. Bernhart A. (1954). Curves of pursuit, Scripta Math. 20, 125-141.
2. Bernhart A. (1957). Curves of pursuit-II, Scripta Math. 23, 49-65.
3. Bernhart A. (1959). Polygons of pursuit, Scripta Math. 24, 23-50.
4. Bernhart A. (1959). Curves of general pursuit, Scripta Math. 24, 180-206.
5. Isaacs R. (1999). Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization; Dover Publications: Mineola, NY, USA, 1999; ISBN 978-0-486-40682-4.
6. Yang, B.; Liu, P.; Feng, J.; Li, S. (2021). Two-Stage Pursuit Strategy for Incomplete-Information Impulsive Space Pursuit-Evasion Mission Using Reinforcement Learning. Aerospace 2021, 8(10), p.299. <https://doi.org/10.3390/aerospace8100299>
7. Weintraub I.E., Pachter M., Garcia E. (2020). An Introduction to Pursuit-Evasion Differential Games. In Proceedings of the 2020 American Control Conference (ACC), Denver, CO, USA, July 2020; IEEE: Piscataway, NJ, USA; pp.1049–1066.
8. Pesch H.J. (1994). Solving Optimal Control and Pursuit-Evasion Game Problems of High Complexity. In Computational Optimal Control; Bulirsch, R., Kraft, D., Eds.; Birkhäuser: Basel, Switzerland; pp. 43–61. ISBN 978-3-7643-5015-4.
9. Wang Z., Gong B., Yuan Y., Ding X. (2021). Incomplete Information Pursuit-Evasion Game Control for a Space Non-Cooperative Target. Aerospace 2021, V.8, No.8, p. 211. <https://doi.org/10.3390/aerospace8080211>
10. Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. (1964). The Mathematical Theory of Optimal Processes; Pergamon: Oxford, UK, 1964.
11. Petrosjan L.A. (1993). Differential Games of Pursuit; World Scientific: Singapore, 1993; ISBN 978-981-02-0979-7.
12. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. (2011). Game-Theoretical Control Problems; Springer: New York, NY, USA. ISBN 978-1-4612-8318-8.
13. Subbotin A.I. (1995). Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective; System & Control: Foundations & Applications; Birkhäuser Boston: Boston, MA, USA; ISBN 978-1-4612-6920-5.
14. Chen N., Li L., Mao W. (2024). Equilibrium Strategy of the Pursuit-Evasion Game in Three-Dimensional Space. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, Vol. 11, No. 2, pp. 446-458. <https://doi.org/10.1109/JAS.2023.123996Ya>
15. Khachumov M., Khachumov V. (2023). Modeling the Solution of the Pursuit-Evasion Problem Based on the Intelligent-Geometric Control Theory. Mathematics, 2023. Vol. 11, Is. 23, 4869. <https://doi.org/10.3390/math11234869>
16. Liang Xiao, Wang Honglun, Luo Haitao (2020). Collaborative Pursuit-Evasion Strategy of UAV/UGV Heterogeneous System in Complex Three-Dimensional Polygonal Environment, *Complexity*, 2020, 7498740, 13 p. <https://doi.org/10.1155/2020/7498740>
17. Sun W., Tsiotras P., Yezzi A.J. (2019). Multiplayer Pursuit-Evasion Games in Three-Dimensional Flow Fields. Dynamic Games and Applications. Vol. 9, Is. 4, pp. 1188-1207, DOI: 10.1007/s13235-019-00304-4
18. Lolla T., Lermusiaux P.F.J., Ueckermann M.P. et al. (2014). Time-optimal path planning in dynamic flows using level set equations: theory and schemes. Ocean Dynamics. V. 64, p.p.1373–1397. <https://doi.org/10.1007/s10236-014-0757-y>
19. I.O. Romanenko, A.L. Yalovets (2025). Analytical review of the state of research on modeling pursuit/escape processes in three-dimensional space // Programming Problems. No. 1, p.p. 3-12. <https://doi.org/10.15407/pp2025.01.003>
20. Legeza V.P., Neshchadym O.M. (2023). The problem of fugitive interception on a plane in the one-dimensional vector field of a moving fluid. Scientific notes of the V.I. Vernadsky TNU. Series: Technical Sciences. V. 34 (73), № 3. <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2023.3.1/27>
21. Legeza, V., Oleshchenko, L. (2023). Paradoxical Properties Research of the Pursuit Curve in the Intercepting a Fugitive Problem. In: Hu, Z., Dychka, I., He, M. (eds) Advances in Computer Science for Engineering and Education VI. ICCSEE 2023. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol.181. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-36118-0\\_60](https://doi.org/10.1007/978-3-031-36118-0_60)
22. Viktor Legeza (2025). Paradoxical properties of the line of pursuit in the problem of intercepting a fugitive on a horizontal plane. KPI Science News. V. 138, № 1, p.p. 7-14; <https://scinews.kpi.ua/article/view/321963>.
23. Viktor Legeza, Liubov Oleshchenko (2025). Simulation of Fugitive Interception Strategies for a Mobile Object on a Surface in a Vector Field of Moving Fluid. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, 242, p.p. 75-85; [https://doi.org/10.1007/978-3-031-84228-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-031-84228-3_7)

*Дата першого надходження статті до видання: 21.02.2026*

*Дата прийняття статті до друку після рецензування: 24.03.2026*

*Дата публікації (оприлюднення) статті: 07.05.2026*