УДК 512.64 https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2023.1.4

М. І. КУЧМА
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики
Національний університет «Львівська політехніка»
ORCID: 0000-0002-5563-3847

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ І ФАКТОРИЗАЦІЯ ПОЛІНОМНИХ МАТРИЦЬ ЛОРАНА

За останні десятиріччя поліноміальні матриці Лорана та їхні факторизації мають багато потенційних застосувань в галузі систем керування та автоматичного керування, теорії керованих систем скінченного стану, теорії відтворення образів і теорії пристроїв передачі даних. Ці матриці використовуються для опису згорткового процесу змішування, який відбувається, наприклад, коли набір сигналів надходить до масиву датчиків за кількома трактами. Вивчення факторизацій поліноміальних матриць Лорана є актуальним, і застосовується у багатоканальній обробці сигналів. Ефективні алгебраїчні алгоритми, які базуються на елементарних перетвореннях поліноміальних матриць Лорана та їх факторизаціях, дозволяють здійснити повний аналіз динаміки системи. Багато задач в області цифрової обробки сигналів і зв'язку можна перетворити також на алгебраїчні задачі поліноміальних кілець Лорана, і вони можуть бути розв'язані за допомогою існуючих алгебраїчних методів.

У статті розглянуто задачу про регуляризацію поліноміальних матриць Лорана та отримано необхідні і достатні умови регуляризації таких матриць. Цей результат використовується для дослідження питання факторизації поліноміальних матриць над кільцем Лорана. Отримано критерій факторизації поліноміальних матриць над кільцем Лорана із регулярним множником з наперед заданою формою Сміта. Запропоновано метод побудови регуляризації і факторизації матриць над поліноміальним кільцем Лорана і наведено приклади регуляризації і факторизації матриць над кільцем Лорана.

Ключові слова: *регулярна поліноміальна матриця Лорана, верхній і нижній степінь поліноміальної матриці Лорана, регуляризація і факторизація поліноміальної матриці Лорана, канонічна форма Сміта, значення матриці на системі коренів діагональних елементів, матричне рівняння.*

M. I. KUCHMA
Ph.D., Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematics
Lviv Polytechnic National University
ORCID: 0000-0002-5563-3847

REGULARIZATION AND FACTORIZATION OF LAURENT POLYNOMIAL MATRICES

In recent decades, the Laurent polynomial matrices and their factorizations have many potential applications in the fields of control and automatic control systems, theory of finite-state controlled systems, theory of image reproduction, and theory of data transmission devices. These matrices are used to describe the convolutional mixing process that occurs, for example, when a set of signals arrives at a sensor array over multiple paths. The study of factorizations of Laurent polynomial matrices is relevant and is used in multi-channel signal processing. Effective algebraic algorithms, which are based on elementary transformations of Laurent polynomial matrices and their factorizations, allow a complete analysis of system dynamics. Many problems in the field of digital signal processing and communication can also be transformed into algebraic problems of polynomial Laurent rings, and they can be solved using existing algebraic methods.

The article considers the problem of regularization of the Laurent polynomial matrices and obtains the necessary and sufficient conditions for the regularization of such matrices. This result is used to study the factorization of polynomial matrices over the Laurent ring. A criterion for the factorization of polynomial matrices over the Laurent ring with a regular factor with a predetermined Smith form is obtained. A method of constructing matrix regularization and factorization over the Laurent ring of polynomials is proposed, and examples of matrix regularization and factorization over the Laurent ring are given.

Key words: *regular Laurent polynomial matrix, the upper and lower degrees of the Laurent polynomial matrix, regularization and factorization of the Laurent polynomial matrix, Smith normal form, matrix values on the system of roots of diagonal elements, matrix equation.*

Постановка проблеми

Нехай $M_n(\mathbf{F}[x])$ і $M_n(\mathbf{F}[x,x^{-1}])$ – кільце поліноміальних $n\times n$ матриць і кільце поліноміальних $n\times n$ матриць Лорана (кільце квазіполіномів) відповідно, а $GL_n(\mathbf{F}[x])$ і $GL_n(\mathbf{F}[x,x^{-1}])$ їхні відповідні групи оборотних елементів.

Означення 1. *Верхнім і нижнім степенем* поліноміальної матриці Лорана $A(x)$ вигляду $A(x) = A_{-l}x^{-l} + \ldots + A_0 + \ldots + A_m x^m$, $A_i \in M_n(\mathbf{F})$ називають відповідно числа $m = \overline{\deg}\, A(x)$, якщо $A_m \neq O$, і $-l = \underline{\deg}\, A(x) = -\overline{\deg}\, A(x^{-1})$, якщо $A_{-l} \neq O$, де O – нульова матриця.

Степенем поліноміальної матриці Лорана $A(x)$ називають число $\deg A(x) = \overline{\deg}\, A(x) - \underline{\deg}\, A(x)$, тобто $s = m + l$.

Означення 2. Поліноміальну матрицю Лорана $A(x) = \sum_{i=-l}^{m} A_i x^i$, $A_i \in M_n(\mathbf{F})$ називають *регулярною*, якщо $\det A_{-l} \neq 0$, $\det A_m \neq 0$. Якщо матричний коефіцієнт $A_m = E$ (E – одинична матриця розміру $n \times n$), то матрицю $A(x)$ називають *унітальною*.

Метою роботи є дослідити питання регуляризації поліноміальних матриць над кільцем Лорана та використати отримані результати в розв'язанні проблеми факторизації для таких матриць. Інакше кажучи, встановити умови виділення регулярного множника з наперед заданою формою Сміта із неособливої поліноміальної матриці Лорана.

Завдяки введеному поняттю значення матриці на системі коренів діагональних елементів у [1] значно спрощується процес встановлення умов регуляризації матричного полінома та факторизації поліноміальної матриці Лорана.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У праці [2] введене поняття напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць максимального рангу над алгебраїчно замкнутим полем $\mathbf{F}$ характеристики 0 (зокрема, поле комплексних чисел $\mathbf{C}$) і встановлена там нижня трикутна форма матриць зіграли важливу роль у побудові теорії розкладності матричних поліномів на множники. Ці результати пізніше були узагальнені для поліноміальних матриць над довільним полем $\mathbf{F}$ [3, 4], і була встановлена так звана стандартна форма пар матриць відносно узагальненої еквівалентності [4, 5]. У роботі [6] доведено факт напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць над кільцем Лорана, а в [7] досліджено умови існування симетричної еквівалентності для симетричних матричних поліномів над кільцем з інволюцією.

Зауважимо, що подібна форма для однієї поліноміальної матриці над нескінченним полем з відповідною правою напівскалярною еквівалентністю матриць була отримана в [8].

Формування мети дослідження

Метою даної роботи є дослідження поліномних матриць та їх факторизацій над кільцем Лорана; отримання необхідних і достанніх умов регуляризації та факторизації таких матриць. Також вказати ефективний метод регуляризації та факторизації поліномних матриць Лорана.

Викладення основного матеріалу дослідження

Позначимо через $S_A(x)$ канонічну форму Сміта поліноміальної матриці $A(x) \in M_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$:

$$S_A(x) = P(x)A(x)Q(x) = \mathrm{diag}\ (\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)). \quad (1)$$

Доведемо теорему про регуляризацію поліноміальної матриці Лорана $A(x)$ в термінах значення матриці на системі коренів елементів діагональної матриці [1].

Означення 3 ([1]). *Значенням матриці $G(x)$ на системі коренів елементів діагональної матриці* $\Phi(x) = \mathrm{diag}(\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x))$ називають матрицю вигляду

$$M_{G(x)}(\Phi) = \begin{bmatrix} M_{g_1(x)}(\phi_1) \\ M_{g_2(x)}(\phi_2) \\ \ldots \\ M_{g_n(x)}(\phi_n) \end{bmatrix},$$

де $M_{g_i(x)}(\phi_i)$ – значення поліноміальної матриці на системі коренів полінома

$$\phi_i(x) = (x - \alpha_1)^{s_1}(x - \alpha_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_m)^{s_m},$$

введене в [1] так:

$$M_{g_i(x)}(\phi_i) = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \ldots \\ H_m \end{bmatrix}, \quad H_k = \begin{bmatrix} g_i(\alpha_k) \\ g_i'(\alpha_k) \\ \ldots \\ g_i^{(s_k-1)}(\alpha_k) \end{bmatrix},$$

де $g_i^{(j)}(x)$ – похідні порядку j від матриці $g_i(x)$.

Це означення буде вірним і для випадку поліноміальних матриць Лорана $G(x)$ і $\Phi(x)$, зважаючи на те, що елементи вигляду x^l є оборотними в кільці $\mathbf{F}[x, x^{-1}]$.

Означення 4 ([9, 10]). Діагональну матрицю

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x))$$

називають d *-матрицею*, якщо $\phi_i(x) \mid \phi_{i+1}(x), \ i = 1, \dots, n$.

Теорема 1. *Нехай матриця* $A(x) \in M_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$ *має форму Сміта* $S_A(x)$. *Для матриці* $A(x)$ *існує оборотна* $R(x)$ *над* $\mathbf{F}[x, x^{-1}]$ *така, що матриця* $A(x)R(x)$ *є регулярною степеня* s *тоді і тільки тоді, коли*

1) $\deg \det S_A(x) = ns$,

2) $\det M_{P(x) \| Ex^{-s+1}, \dots, Ex^{-1}, \ E \|}(S_A) \neq 0$, (2)

де матриця $P(x) \in GL_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$ *із співвідношення (1).*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $A(x)$ регуляризується справа, тобто зображається у вигляді

$$A(x) = (A_{-s_1} x^{-s_1} + \dots + A_0 + \dots + A_{s_2} x^{s_2}) R(x)^{-1}, \tag{3}$$

де $R(x) \in GL_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$, $s_1 + s_2 = s$ – степінь поліноміальної матриці Лорана $A(x)R(x)$.

Якщо справджується (3), то очевидно, що існують матриці $N_1, N_2, \dots, N_s$ над $\mathbf{F}$ такі, що

$A(x) = (Ex^{-s_1} - N_1 x^{-s_1+1} - \dots - N_s x^{s_2}) x^{-s_2} x^{s_2} R_1(x),$

де $R_1(x) = A_{-s_1} R(x)^{-1}$ оборотна над $\mathbf{F}[x, x^{-1}]$ матриця. Зважаючи, що $Ex^{\pm s}$ оборотні над $\mathbf{F}[x, x^{-1}]$ матриці, маємо

$$A(x) = (Ex^{-s} - N_1 x^{-s+1} - \dots - N_{s-1} x^{-1} - N_s) R_2(x),$$

де $R_2(x) = x^{s_2} R_1(x) \in GL_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$.

Домножуючи $A(x)$ зліва на $P(x)$ із співвідношення (1) і зважаючи, що $P(x)A(x) = S_A(x)Q(x)^{-1}$, отримаємо

$P(x)(Ex^{-s} - N_1 x^{-s+1} - \dots - N_{s-1} x^{-1} - N_s) = S_A(x) Q(x)^{-1} R_2(x)^{-1}$

або

$$\| P(x)x^{-s}, -P(x)x^{-s+1}, \dots, -P(x)x^{-1}, -P(x) \| \begin{bmatrix} E \\ N_1 \\ \vdots \\ N_s \end{bmatrix} = S_A(x) Q_1(x),$$

де $Q_1(x) = Q(x)^{-1} R_2(x)^{-1} \in GL_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}]).$

Беручи певну кількість похідних у лівій і правій частинах останньої рівності (яка залежить від кратності коренів елементів діагональної матриці $S_A(x)$ і враховуючи означення 3), одержимо матричну рівність

$$M_{P(x)x^{-s}}(S_A) - M_{P(x) \| Ex^{-s+1}, \dots, Ex^{-1}, E \|}(S_A) \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_s \end{bmatrix} = 0.$$

Це означає, що лінійне неоднорідне матричне рівняння

$$\left[M_{P(x) \| Ex^{-s+1}, \dots, Ex^{-1}, E \|}(S_A) \right] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_s \end{bmatrix} = M_{P(x)x^{-s}}(S_A),$$

де $X_1, X_2, \dots, X_s$ – невідомі матриці порядку n , має розв'язок.

Розв'язок $\begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_s \end{bmatrix}$ відмінний від нуля $(\det N_s \neq 0)$ і визначається однозначно $S_A(x)$ та $R(x)$. Отже, виконується умова (2).

Достатність. Нехай для поліноміальної матриці Лорана $A(x)$ існують матриці $P(x), \ Q(x) \in GL_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$ такі, що виконується (1), тобто $A(x) = P(x)^{-1} S_A(x) Q(x)^{-1}.$ Умова (2) означає, що матриця $P(x)^{-1} S_A(x)$ регуляризується справа, тобто існує матриця $Z(x) \in GL_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$ така, що $P(x)^{-1} S_A(x) Z(x) = B(x)$ є регулярною над $\mathbf{F}[x, x^{-1}]$ матрицею степеня s .

Тоді із співвідношення (1) маємо, що $A(x)R(x) = B(x),$ де $R(x) = Q(x)Z(x)$ оборотна над $\mathbf{F}[x, x^{-1}]$ матриця.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Поліноміальна матриця Лорана* $A(x)$ *регуляризується справа однозначно.*

Доведення. Нехай матриця $A(x)$ регуляризується справа, причому не єдиним чином. Тоді для $A(x)$ існують матриці $R_1(x), \ R_2(x) \in GL_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$ такі, що

$$A(x) = (A_{-s_1}^{(1)} x^{-s_1} + \ldots + A_0^{(1)} + \ldots + A_{s_2}^{(1)} x^{s_2}) R_1(x)^{-1} \tag{4}$$

і

$$A(x) = (A_{-s_1}^{(2)} x^{-s_1} + \ldots + A_0^{(2)} + \ldots + A_{s_2}^{(2)} x^{s_2}) R_2(x)^{-1}. \tag{5}$$

Якщо справджуються (4) і (5), то існують матриці $N_1, N_2, \ldots, N_s \in M_n(\mathbf{F})$ і $H_1, H_2, \ldots, H_s \in M_n(\mathbf{F})$ такі, що

$$A(x) = (Ex^{-s} - N_1 x^{-s+1} - \ldots - N_s)\ \tilde{R}_1(x)$$

і

$$A(x) = (Ex^{-s} - H_1 x^{-s+1} - \ldots - H_s)\ \tilde{R}_2(x),$$

де матриці $R_i(x) = x^{s_2} A_{-s_1}^{(i)} R_i(x)^{-1} \in GL_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$, $i = 1, 2$.

Враховуючи теорему 1, отримаємо лінійні неоднорідні матричні рівняння

$$M_{P(x)\| Ex^{-s+1}, \ldots, Ex^{-1}, E \|}(S_A) \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_s \end{bmatrix} = M_{P(x)x^{-s}}(S_A) \tag{6}$$

і

$$M_{P(x)\| Ex^{-s+1}, \ldots, Ex^{-1}, E \|}(S_A) \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_s \end{bmatrix} = M_{P(x)x^{-s}}(S_A), \tag{7}$$

розв'язками яких є матриці $N_1, N_2, \ldots, N_s$ і $H_1, H_2, \ldots, H_s$ відповідно.

Віднімаючи відповідно ліві і праві частини рівнянь (6) і (7), одержуємо однорідне матричне рівняння, в якому $\det M_{P(x)\| Ex^{-s+1}, \ldots, Ex^{-1}, E \|}(S_A) \neq 0$. Це означає, що матриці $N_i = H_i$, $i = 1, \ldots, s$.

Теорему доведено.

Означення 5. Умову (2) називають *умовою регуляризації* поліноміальної матриці Лорана.

На підставі теореми 1 отримуємо метод знаходження коефіцієнтів регулярного множника, що виділяється. Матричні коефіцієнти $N_1, N_2, \ldots, N_s$ регулярного множника

$B(x) = Ex^{-s} - N_1 x^{-s+1} - \ldots - N_s$

знаходимо за формулою:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_s \end{bmatrix} = [M_{P(x)\| Ex^{-s+1}, \ldots, Ex^{-1}, E \|}(S_A)]^{-1} \cdot M_{P(x)x^{-s}}(S_A). \tag{8}$$

Зазначимо, що регуляризацію поліноміальної матриці Лорана $A(x)$ не можна отримати з регуляризації відповідної поліноміальної матриці $A(x)x^l$ ($l = -\underline{\deg} A(x)$) над $\mathbf{F}[x]$, оскільки не завжди виконується умова $n \,|\, \deg \det A(x) x^l$, де n – порядок матриці $A(x)$.

Розглянемо приклад, який демонструє регуляризацію справа поліноміальної матриці Лорана.

Приклад 1. Нехай $A(x) = \begin{bmatrix} x^{-2} & x^{-2} - 2 \\ 1/(2x) & -1/(2x) \end{bmatrix}$ – поліноміальна матриця Лорана. Ця матриця не є регулярною.

Форма Сміта $S_A(x)$ матриці $A(x)$ дорівнює:

$$S_A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{-1} - x^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/(2x) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{-2} & x^{-2} - 2 \\ 1/(2x) & -1/(2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 2 - x^{-2} \\ -1/2 & x^{-2} \end{bmatrix}.$$

Перевіримо умову регуляризації (2) для матриці $A(x)$. Степінь квазіполінома $\det A(x) = x^{-1} - x^{-3}$ дорівнює 2, тому $s = 1$. Для системи коренів 1, -1 елементів діагональної матриці $S_A(x) = \operatorname{diag}(1,\ x^{-1} - x^{-3})$ обчислимо визначник матриці значень $M_{P(x)}(1, -1)$, взявши за перетворювальну матрицю $P(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/(2x) & 1 \end{bmatrix}$:

$$\det M_{P(x)}(1, -1) = \begin{vmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Оскільки визначник відмінний від нуля, то умова регуляризації (2) виконується. На підставі теореми 1 для матриці $A(x)$ існує оборотна $R(x)$ над $\mathbf{F}[x,\ x^{-1}]$ така, що поліноміальна матриця Лорана $A(x)R(x)$ є регулярною степеня $s=1$.

Регулярний множник $B(x)=Ex^{-1}-N_1$ знаходимо за формулою (8). Для цього обчислимо матрицю значень:

$$M_{P(x)x^{-1}}(1,-1)=\begin{bmatrix}-1/2 & 1\\ -1/2 & -1\end{bmatrix},$$

і розв'язком матричного рівняння (8) є матриця: $N_1=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -1/2 & 0\end{bmatrix}$.

Звідси $B(x)=\begin{bmatrix}x^{-1} & 2\\ 1/2 & x^{-1}\end{bmatrix}$ – шуканий регулярний множник і $A(x)R(x)=B(x)$, де $R(x)=\begin{bmatrix}x & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\in GL_n(\mathbf{F}[x,\ x^{-1}])$.

Теорему про регуляризацію поліноміальної матриці Лорана $A(x)$ використаємо до проблеми виділення регулярного множника із наперед заданою формою Сміта із неособливої поліноміальної матриці Лорана. Сформулюємо необхідні і достатні умови, що конструктивно перевіряють існування факторизації $A(x)=B(x)C(x)$, в якій $B(x)$ – регулярна поліноміальна матриця Лорана, і вкажемо ефективний метод фактичної їх побудови.

Нехай $\Phi(x)=\operatorname{diag}(\phi_1(x),\ \phi_2(x),\dots,\ \phi_n(x))-d$ -матриця, яка є дільником форми Сміта $S_A(x)$ з (1) поліноміальної матриці Лорана $A(x)$. Через

$$V(\Phi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \dfrac{\phi_2 k_{21}}{(\phi_2,\varepsilon_1)} & 1 & \dots & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\phi_n k_{n1}}{(\phi_n,\varepsilon_1)} & \dfrac{\phi_n k_{n2}}{(\phi_n,\varepsilon_2)} & \dots & \dfrac{\phi_n k_{nn-1}}{(\phi_n,\varepsilon_{n-1})} & 1\end{pmatrix} \tag{9}$$

позначимо матрицю, породжену d -матрицею $\Phi(x)$, у якій (ϕ_i,ε_j) – найбільший спільний дільник квазіполіномів $\phi_i(x)$ і $\varepsilon_j(x)$, $i,j=1,\dots,n$, $i\ge j$,

$$k_{ij}=\begin{cases}0, & \text{якщо } (\phi_i,\varepsilon_j)=\phi_j,\\ k_{ij_{h_{ij}}}x^{-h_{ij}}+\dots+k_{ij_1}x^{-1}+k_{ij_0}, & \text{якщо } (\phi_i,\varepsilon_j)\ne\phi_j,\end{cases}$$

$h_{ij}=\deg\dfrac{(\phi_i,\varepsilon_j)}{\phi_j}-1$, $i=2,\dots,n$, $j=1,\dots,n-1$, $i>j$, k_{ij_s} – попарно різні змінні величини, які приєднуються до поля $\mathbf{F}$, $s=0,1,\dots,h_{ij}$.

Теорема 3. *Нехай* $\Phi(x)$ – d *-матриця,* $\deg\det\Phi(x)=nr$ *і* $\Phi(x)$ *є дільником форми Сміта* $S_A(x)$ *матриці* $A(x)\in M_n(\mathbf{F}[x,x^{-1}])$. *Для матриці* $A(x)$ *існує факторизація*

$$A(x)=B(x)C(x),$$

в якій $B(x)$ – *регулярна поліноміальна матриця Лорана степеня* r *з формою Сміта* $\Phi(x)$, *а* $C(x)$ – *неособлива поліноміальна матриця Лорана, тоді тільки тоді, коли*

$$\det M_{V(\Phi)P(x)\left\|Ex^{-r+1},\dots,\ Ex^{-1},\ E\right\|}(\Phi)\ne 0, \tag{10}$$

де матриці $P(x)\in GL_n(\mathbf{F}[x,\ x^{-1}])$ *і* $V(\Phi)$ *відповідно із співвідношень (1) і (9).*

Доведення теореми випливає із теореми 2 в [11] і теореми 1 даної роботи.

Теорема 4. *Нехай* $\Phi(x)$ – d *-матриця,* $\deg\det\Phi(x)=nr$ *і форма Сміта* $S_A(x)$ *матриці* $A(x)\in M_n(\mathbf{F}[x,x^{-1}])$ *зображається у вигляді* $S_A(x)=\Phi(x)\Psi(x)$.

Для матриці $A(x)$ *існує факторизація* $A(x)=B(x)C(x)$, *в якій* $B(x)$ – *регулярна поліноміальна матриця Лорана степеня* r *з формою Сміта* $\Phi(x)$, *а* $C(x)$ – *неособлива поліноміальна матриця Лорана з формою Сміта* $\Psi(x)$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\det M_{P(x)\left\|Ex^{-r+1},\dots,Ex^{-1},\ E\right\|}(\Phi)\ne 0,$$

де матриця $P(x)\in GL_n(\mathbf{F}[x,\ x^{-1}])$ *із співвідношення (1).*

Доведення випливає з теореми 3. Зважаючи на те, що виконуються умови $(\phi_i, \varepsilon_j) = \phi_j$ для $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$, $i > j$, тому матриця $V(\Phi) = E$ у співвідношенні (9).

Теорема 5. *У факторизації* $A(x) = B(x)C(x)$ *матриці* $A(x) \in M_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$ *регулярний множник* $B(x)$ *єдиний з формою Сміта*

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)),$$

тоді і тільки тоді, коли форма Сміта матриці $A(x)$ *дорівнює добутку форм Сміта її співмножників.*

Доведення випливає із теореми 1 в [11] із врахуванням теореми 4 даної роботи.

Метод побудови виділюваних множників $B(x)$ з формою Сміта $\Phi(x)$ із поліноміальної матриці Лорана $A(x)$ випливає з теореми 3.

Матричні коефіцієнти $B_1, B_2, \ldots, B_r$ регулярного множника

$$B(x) = Ex^{-r} - B_1 x^{-r+1} - \ldots - B_r$$

з наперед заданою формою Сміта $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x))$ знаходимо за формулою:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix} = [M_{V(\Phi)P(x) \| Ex^{-r+1}, \ldots, Ex^{-1}, E \|}(\Phi)]^{-1} \cdot M_{V(\Phi)P(x)x^{-r}}(\Phi). \tag{11}$$

Умова (10) теореми 3 забезпечує розв'язність матричного рівняння (11).

Приклад 2. Нехай $A(x) = \begin{bmatrix} 2 & x^{-1}+x \\ x^{-1}+x & 2 \end{bmatrix}$ – поліноміальна матриця Лорана.

Характеристичний квазіполіном матриці $A(x)$:

$$\det A(x) = 4 - (x^{-1}+x)^2 = -(x^{-1}-x)^2.$$

Форма Сміта $S_A(x)$ матриці $A(x)$ дорівнює:

$$S_A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(x^{-1}-x)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(x+x^{-1})/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & x^{-1}+x \\ x^{-1}+x & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -x^{-1}-x \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

де $P(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(x+x^{-1})/2 & 1 \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbf{F}[x, x^{-1}])$ із співвідношення (1).

Оскільки форма Сміта $S_A(x)$ матриці $A(x)$ допускає факторизацію

$$S_A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(x^{-1}-x)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{-2}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2-1 \end{bmatrix}$$

і $\deg\det A(x) = 4$, то виділимо з матриці $A(x)$ регулярний множник $B(x)$ степеня $r = 1$ з формою Сміта $\Phi(x) = \operatorname{diag}(1, x^{-2}-1)$, $\deg\det\Phi(x) = 2 = nr$. За теоремою 4 маємо $V(\Phi) = E$.

Для системи коренів $1, -1$ елементів діагональної матриці $\Phi(x) = \operatorname{diag}(1, x^{-2}-1)$ обчислимо матриці значень:

$$M_{P(x)}(1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{P(x)x^{-1}}(1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

де $P(x)x^{-1} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 \\ -(1+x^{-2})/2 & x^{-1} \end{bmatrix}$.

Регулярний множник $B(x) = Ex^{-1} - B_1$ знаходимо за формулою (11). Для цього розв'яжемо матричне рівняння:

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Звідси $B(x) = \begin{bmatrix} x^{-1} & 1 \\ 1 & x^{-1} \end{bmatrix}$ – регулярний множник степеня $r = 1$ з формою Сміта $\Phi(x) = \operatorname{diag}(1, x^{-2}-1)$. Отже, $A(x) = \begin{bmatrix} x^{-1} & 1 \\ 1 & x^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ – шукана факторизація матриці $A(x)$.

Висновки

Отримані результати дослідження задач регуляризації і факторизації поліноміальних матриць можуть бути використані у сфері цифрової обробки сигналів та зв'язку [12, 13, 14]. Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць Лорана [6], а звідси, і зведення цих матриць до трикутного вигляду, а також ефективні алгоритми, засновані на елементарних перетвореннях поліноміальних матриць Лорана, дозволяють розширити алгебраїчний інструмент для дослідження повного аналізу динаміки системи [15].

Список використаної літератури

1. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. Львів: Інститут прикл. проблем механіки і матем. імені Я.С. Підстригача НАН України, 2015. 285 с.
2. Казімірський П.С., Петричкович В.М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. 1977. С. 61 – 66.
3. Петричкович В.М. О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриць// Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1987. 25. С. 13–16.
4. Petrychkovych V. Generalized equivalence of pair of matrices // Linear Multilinear Algebra, 2000. 48. P. 179–188.
5. Petrychkovych V. Standart form of pair of matrices with respect to generalized equivalence // Visnyk Lviv. Univ. 2003. 61. P. 153–160.
6. Kuchma M.I., Gatalevych A.I. Triangular form of Laurent polynomial matrices and their factorization // Mathematical modelling and computing, 2022. 9. No. 1, P. 119-129.
7. Кучма М.І. Симетрична еквівалентність матричних многочленів і виділення спільного унітального дільника із матричних многочленів // Укр. матем. журн. 2001. Т. 53. № 2. С. 211-219.
8. Dias da Silva J.A., Laffey T. J. On simultaneous similarity of matrices and related questions// Linear Algebra Appl. 1999, 291. P. 167–184.
9. Казимирський П. С., Щедрик В. П. О решениях матричных многочленных односторонних уравнений // Доклади АН СССР. 1989. 304, № 2. с. 271–274.
10. Shchedryk V. Arithmetic of matrices over rings. Kyiv, Akademperiodyka, 2021. 278 p.
11. Зеліско В.Р. Єдиність унітальних дільників матричних многочленів // Вісник львівськ. унів-ту. 1988. 30. С. 36–38.
12. Fornasini E., Valcher M.-E. nD-Polynomial Matrices with Applications to Multidimensional Signal Analysis // Multidimensional Systems and Signal Processing. 1997. 8(4). P. 387–408.
13. Foster J.A., McWhirter J.G., Davies M.R., Chambers J.A. An algorithm for calculating the QR and singular value decompositions of polynomial matrices // IEEE Trans. Signal Process. 2010. 58(3). P. 1263–1274.
14. Park H. Symbolic computation and signal processing, Journal of Symbolic Computation // 2004. 37. P. 209–226.
15. Kaczorek T. Polynomial and Rational Matrices: Applications in Dynamical System. Theory, Commun. and Control Eng. Ser. London (UK). 2007.

References

1. Kazimirskii P. S. (2010). *Rozklad matrychnykh mnohochleniv na mnozhnyky* [Factorization of matrix polynomials]. Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, 2-nd edition, 282 pp. (in Ukrainian).
2. Kazimirskii P.S., Petrychkovych V.M.(1977) Pro ekvivalentnist polinomialnykh matryts [On the equivalence of polynomial matrices]. Lviv: *Theoretical and Applied Problems of Algebra and Differential Equations*, pp. 61–66. (in Ukrainian).
3. Petrychkovych V.M. (1987) O poluskalyarnoj ekvivalentnosti i normalnoj forme Smita mnogochlennyh matric [On semiscalar equivalence and the Smith normal form of polymomial matrices] *Mat. Met. i Fiz. -Mekh. Polya.*, no. 25, pp. 13–16. (in Russian).
4. Petrychkovych V.(2000) Generalized equivalence of pair of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, no. 48, pp. 179–188.
5. Petrychkovych V. (2003) Standart form of pair of matrices with respect to generalized equivalence. *Visnyk Lviv. Univ.*, no. 61, pp. 153–160.
6. Kuchma M.I., Gatalevych A.I. **(**2022**)** Triangular form of Laurent polynomial matrices and their factorization. *Mathematical modelling and computing*, vol.9, no. 1, pp. 119-129. doi: 10.23939/mmc2022.01.119.
7. Kuchma M.I. (2001) Symetrychna ekvivalentnist matrychnykh mnohochleniv i vydilennia spilnoho unitalnoho dilnyka iz matrychnykh mnohochleniv [Symmetric equivalence of matrix polynomials and isolation of a common unital divisor in matrix polynomials]. *Ukrainian Mathematical Journal,* vol. 53, no. 2, pp. 238–248. (in Ukrainian).
8. Dias da Silva J.A., Laffey T. J. (1999) On simultaneous similarity of matrices and related questions. *Linear Algebra Appl.*, no. 291, pp. 167–184.

9. Kazimirskiy P.S., Shchedryk V.P. (1989) O resheniyah matrichnyh mnogochlennyh odnostoronnih uravnenij [On solutions of matrix polynomials sides equations]. *Doklady AN SSSR*. vol. 304, no 2, pp. 271–274. (in Russian).

10. Shchedryk V. (2021) Arithmetic of matrices over rings. Kyiv, Akademperiodyka, 278 pp.

11. Zelisko V.R. (1988) Yedynist unitalnykh dilnykiv matrychnykh mnohochleniv [Unity of unital divisors of matrix polynomials]. *Visnyk Lviv. Univ*., no. 30, pp. 36–38. (in Ukrainian).

12. Fornasini E., Valcher M.-E.(1997) nD-Polynomial Matrices with Applications to Multidimensional Signal Analysis. *Multidimensional Systems and Signal Processing*. vol. 8, no. 4, pp. 387–408.

13. Foster J.A., McWhirter J.G., Davies M.R., Chambers J.A. (2010) An algorithm for calculating the QR and singular value decompositions of polynomial matrices. *IEEE Trans. Signal Process*. vol.58, no. 3, pp. 1263–1274.

14. Park H.(2004) Symbolic computation and signal processing, Journal of Symbolic Computation, no 37, pp. 209–226.

15. Kaczorek T. (2007) Polynomial and Rational Matrices: Applications in Dynamical System. *Theory, Commun. and Control Eng. Ser.* London (UK).