

А. В. НЕСВІДОМІН

кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну
Національний університет біоресурсів і природокористування України

С. Ф. ПИЛИПАКА

доктор технічних наук, професор,
професор кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну
Національний університет біоресурсів і природокористування України
ORCID: 0000-0002-1496-4615

ФОРМОУТВОРЕННЯ СФЕРИЧНИХ ЕПІЦИКЛОЇД ПРИ ОБКочУВАННІ РУХОМОГО КОНУСА ПО НЕРУХОМОМУ

Багато плоских кривих мають сферичні аналоги. Їх об'єднують однакові способи утворення. Одним із таких прикладів є утворення поверхні евольвентного зубчастого зачеплення. Для циліндричної передачі утворення поверхні зубця відбувається слідом прямолінійної твірної циліндра, який котиться по площині. Ортогональним перерізом такої поверхні є евольвента кола. Для конічної передачі утворення поверхні зубця відбувається слідом прямолінійної твірної конуса, який теж котиться по площині. При такому коченні вершина конуса є нерухомою, а його основа – коло – утворює множини плоских перерізів сфери з центром у вершині конуса. При коченні конуса його основа всіма своїми точками лежить на сфері, отже нерухома точка кола опише сферичну криву – аналог евольвенти кола на площині. Цю криву можна отримати як результат перетину сфери із конічною поверхнею, яку утворює прямолінійна пряма конуса, що котиться по площині. Таким чином, утворення плоскої і сферичної евольвент подібне, при чому в одному випадку по площині котиться циліндр, а у другому – конус.

Існує також сферичний еліпс, утворення якого подібне до утворення еліпса на площині. В обох випадках це є множина точок, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок є величина стала. Відмінність полягає в тому, що в одному випадку відстані вимірюються відрізками прямих, а в іншому – дугами кіл, радіус яких дорівнює радіусу сфери. За аналогією можна побудувати сферичні аналоги циклоїди, гіпо- і епіциклоїди. Епіциклоїда утворюється слідом нерухомої точки рухомого кола при його зовнішньому перекочуванні по нерухомому колу. Відповідно для утворення сферичного аналогу епіциклоїди потрібно розглядати зовнішнє перекочування рухомого конуса по нерухомому. В статті здійснено аналітичний опис такого перекочування, який ґрунтується на тому, що основи конусів, які є колами, розташовані на поверхні сфери. За аналогією кочення кіл одне по одному у площині реалізовано кочення кіл одне по одному на поверхні сфери. Отримано параметричні рівняння сферичної епіциклоїди при такому перекочуванні. В частковому випадку, коли нерухомий конус має кут при вершині, рівний 180° , тобто перетворюється у площину, сферичною кривою є аналог циклоїди на площині. Здійснено візуалізацію отриманих результатів засобами комп'ютерної графіки.

Ключові слова: сферичні аналоги, конус, зовнішнє кочення, сферичні циклоїда, епіциклоїда, параметричні рівняння.

A. V. NESVIDOMIN

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Descriptive Geometry,
Computer Graphics and Design
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

S. F. PYLYPAKA

Doctor of Technical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Descriptive Geometry,
Computer Graphics and Design
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine
ORCID: 0000-0002-1496-4615

THE FORMATION OF SPHERICAL EPICYCLOIDS WHEN THE MOVING CONE IS ROLLED ON A NON-MOVING CONE

Many plane curves have spherical analog. They are united by the same methods of formation. One such example is the formation of an involute toothed surface. For a cylindrical transmission, the formation of the tooth surface occurs following a rectilinear generating cylinder that rolls along the plane. The orthogonal section of such surface is the

involute of a circle. For a bevel transmission, the formation of the tooth surface occurs following a rectilinear generating cone, which also rolls along the plane. With such rolling, the top of the cone is stationary, and its base – a circle – forms a set of plane sections of the sphere with the center at the top of the cone. When rolling a cone, its base lies on the sphere with all its points, so a fixed point of the circle describes a spherical curve – an analogue of the involute of a circle on a plane. This curve can be obtained as a result of the intersection of a sphere with a conical surface, which is formed by a straight line of a cone rolling on a plane. Thus, the formation of a flat and spherical involute is similar, and in one case, a cylinder rolls along the plane, and in the other, a cone.

There is also a spherical ellipse, the formation of which is similar to the formation of an ellipse on a plane. In both cases, it is a set of points, the sum of the distances from which to two fixed points is a constant value. The difference is that in one case the distances are measured by segments of straight lines, and in the other by arcs of circles, the radius of which is equal to the radius of the sphere. By analogy, spherical analogues of cycloids, hypo- and epicycloids can be constructed. An epicycloid is formed by the trail of a fixed point of a moving circle during its outward rolling along a fixed circle. Accordingly, for the formation of a spherical analogue of an epicycloid, it is necessary to consider the external rolling of a moving cone on a stationary one. The article provides an analytical description of such rolling, which is based on the fact that the bases of cones, which are circles, are located on the surface of a sphere. By analogy with the rolling of circles one by one in a plane, the rolling of circles one by one on the surface of a sphere is realized. The parametric equations of the spherical epicycloid with such rolling were obtained. In the partial case, when a fixed cone has an angle at the top equal to 180° , i.e. it turns into a plane, the spherical curve is the analogue of the cycloid on the plane. The obtained results were visualized using computer graphics.

Key words: spherical analogues, cone, external rolling, spherical cycloid, epicycloid, parametric equations.

Постановка проблеми

На сферичні криві та їх зв'язок із плоскими кривими за способом утворення звернули увагу вчені-механіки. В.В. Добровольський такий зв'язок використовував для встановлення зв'язків між плоскими і сферичними механізмами. Швейцарець за походженням Л.І. Фусс увів у наукову термінологію назву «сферичний еліпс» і досліджував його властивості. В їх працях розглядалися сферичні аналоги деяких плоских фігур – трикутника, паралелограма, чотирикутника. За основу побудови цих фігур приймалося положення, згідно якого аналогом прямої на площині вважалося велике коло на сфері, тобто коло з радіусом, рівним радіусу сфери. Така аналогія між плоскими і сферичними фігурами сприяла дослідженню і розробці сферичних механізмів. Зважаючи на це дослідження сферичних аналогів відомих плоских кривих є подальшим внеском в розвиток сферичних механізмів, що і зумовлює актуальність знаходження способів формоутворення сферичних епіциклоїд.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

У сферичних механізмів точки всіх ланок описують траєкторії на сфері із спільним центром в точці перетину осей пар, що обертаються. Прикладом служить зубчаста конічна передача. Інший приклад – просторовий мальгійський механізм (сферичний). Із сучасних праць, в яких розглядається дослідження сферичних механізмів, можна навести працю [1]. Відображення рисунків на сферичні куполи є поширеною задачею при проектуванні культових споруд. В працях [2–4] пропонується цю задачу розв'язувати за допомогою нанесення на сферу ізометричних сіток, які найбільшою мірою відображають квадратні сітки площини. Праця [5] присвячена конструюванню конічних аксоїдів з допомогою сфери, які можуть бути основою для проектування зубчастих конічних зачеплень із змінним передавальним числом. Важливим також є відшукання сферичних кривих, які описуються у функції довжини власної дуги. Цій темі присвячені праці [6, 7].

Формулювання мети досліджень

З допомогою аналітичного опису зовнішнього кочення рухомого конуса по нерухомому вивести параметричні рівняння сферичної епіциклоїди.

Викладення основного матеріалу досліджень

Якщо два конуси сумістити вздовж спільної прямолінійної твірної так, щоб їх вершини збігалися, то основи цих конусів, якими є кола, будуть розташовані на поверхні сфери (рис. 1).

Будемо вважати конус із вертикальною віссю нерухомим, а із похилою – рухомим. Для подальших викладок скористаємося параметричними рівняннями сфери одиничного радіуса, які мають вигляд:

$$X = \sin \varepsilon \cos \gamma; \quad Y = \sin \varepsilon \sin \gamma; \quad \cos \varepsilon, \quad (1)$$

де ε, γ – криволінійні координати (незалежні змінні сфери), якими є кути, що задають величину меридіана і паралелі відповідно.

При $\varepsilon = \text{const}$ на поверхні сфери буде описане коло з центром на осі OZ . Повернемо його навколо осі OY на кут φ . Після цього параметричні рівняння повернутого кола запишуться:

$$\begin{aligned} x &= \cos \varepsilon \cos \varphi - \sin \varepsilon \cos \gamma \sin \varphi; \\ y &= \sin \varepsilon \sin \gamma; \\ z &= \cos \varepsilon \sin \varphi + \sin \varepsilon \cos \gamma \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

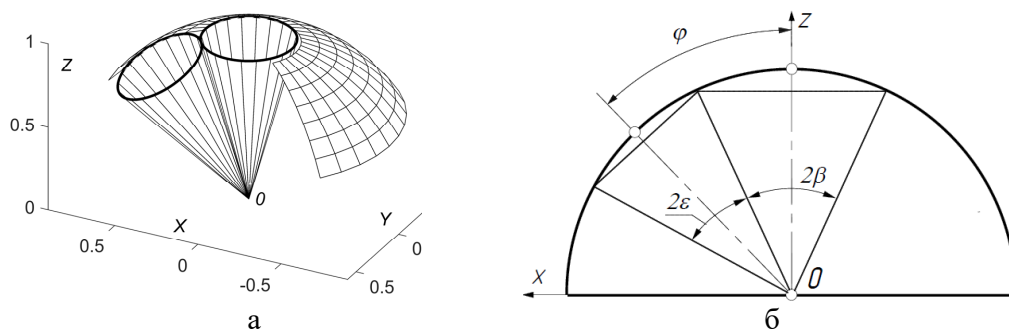


Рис. 1. Графічні ілюстрації до кочення рухомого конуса по вертикальному нерухомому:
а – конуси із суміщеними вершинами і фрагментом сфери в аксонометрії;
б – фронтальна проекція конусів із позначенням кутів

Отримане коло буде основою конуса із кутом 2ε при вершині (рис. 1, б). Здійснимо обкочування цього конуса навколо конуса із вертикальною віссю і кутом 2β при вершині. Із рис. 1, б видно, що $\varphi = \varepsilon + \beta$. При такому обкочуванні утвориться множина кіл, центр яких буде рухатися по паралелі на сфері. Цю множину кіл ми отримаємо обертанням похилого кола навколо осі OZ . Здійснимо поворот кола (2) навколо осі OZ на кут ψ :

$$\begin{aligned} x &= (\cos \varepsilon \cos \varphi - \sin \varepsilon \cos \gamma \sin \varphi) \cos \psi - \sin \varepsilon \sin \gamma \sin \psi; \\ y &= (\cos \varepsilon \cos \varphi - \sin \varepsilon \cos \gamma \sin \varphi) \sin \psi + \sin \varepsilon \sin \gamma \cos \psi; \\ z &= \cos \varepsilon \sin \varphi + \sin \varepsilon \cos \gamma \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Надаючи кутові ψ конкретних значень із певним інтервалом, ми отримаємо множину кіл. Їх можна вважати положенням основи рухомого конуса в певний момент часу при його обкочуванні по нерухомому конусі. Символічне позначення координат в рівняннях (2) і (3) виконане строчними літерами, а у рівнянні (1) – прописними. Це зроблено для того, щоб було легко відрізнити рівняння поверхні (1) від рівнянь (2) і (3) кривих (кіл) на ній. В рівняннях (2) і (3) змінною є кут γ . При зміні γ від 0 до 2π точка робить повний оберт, описуючи коло. Із трикутника із кутом 2ε при вершині рухомого конуса на рис. 1, б знаходимо його радіус: $r_1 = \sin \varepsilon$. При поточному значенні кута γ довжина дуги рухомого кола визначиться із відомої формули: $s_1 = \gamma \cdot \sin \varepsilon$. При побудові нерухомого кола приймемо незалежною змінною кут α . Аналогічно, при поточному значенні кута α довжина дуги нерухомого кола буде: $s_2 = \alpha \cdot \sin \beta$. При перекочуванні рухомого кола по нерухомому без ковзання пройдені шляхи мають бути рівними. Прирівнявши довжини s_1 і s_2 , знаходимо взаємозв'язок між незалежними змінними α і γ :

$$\gamma = -\frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} \alpha. \quad (4)$$

Знак « \rightarrow » у рівності (4) означає, що при обкочуванні рухомого кола по нерухомому його обертання відбувається у протилежному напрямі. Крім того, кути ψ і α збігаються як за величиною, так і за напрямом зростання, тобто $\psi = \alpha$. Нарешті, при повороті рухомого кола на кут $\varphi = \varepsilon + \beta$ навколо осі OY згідно формул (2) потрібно мати на увазі, що відлік кута φ починається не від осі OZ , а від осі OX . У зв'язку з цим для коректної роботи отриманих рівнянь (3) потрібно в них підставити $\varphi = \pi/2 - (\varepsilon + \beta)$. Із врахуванням всіх цих уточнень рівняння (3) остаточно запишуться у функції кута α :

$$\begin{aligned} x &= \left[\cos \varepsilon \sin(\beta + \varepsilon) - \sin \varepsilon \cos\left(\frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} \alpha\right) \cos(\beta + \varepsilon) \right] \cos \alpha + \sin \varepsilon \sin\left(\frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} \alpha\right) \sin \alpha; \\ y &= \left[\cos \varepsilon \sin(\beta + \varepsilon) - \sin \varepsilon \cos\left(\frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} \alpha\right) \cos(\beta + \varepsilon) \right] \sin \alpha - \sin \varepsilon \sin\left(\frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} \alpha\right) \cos \alpha; \\ z &= \cos \varepsilon \cos(\beta + \varepsilon) + \sin \varepsilon \cos\left(\frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} \alpha\right) \sin(\beta + \varepsilon). \end{aligned} \quad (5)$$

До параметричних рівнянь (5) входять два сталих кути ε і β , які задають рухомий і нерухомий конуси, і незалежна змінна α . Суть побудови сферичної кривої за рівняннями (5) полягає в тому, що при умовному коченні рухомого кола по нерухомому точка рухомого кола рухається по ньому в зворотну сторону від точки контакту кіл на величину пройденого шляху. Це означає, що точка на рухомому колі є фіксованою, тобто вона описує траєкторію, якою є сферична епіциклоїда.

Форма епіциклоїди залежить від співвідношення кутів ε і β . Через них визначаються радіуси кіл на поверхні сфери одиничного радіуса – основ конусів: $r_1 = \sin \varepsilon$, $r_2 = \sin \beta$. При зовнішньому коченні кіл однакового радіуса у площині епіциклоїда має форму замкненої кривої із точкою звороту, яка завдяки своєму зображенню отримала назву кардіоїди. Аналогічна ситуація відбувається на сфері, причому сферичний аналог кардіоїди за формою подібний до плоского образу. На рис. 2, а побудовано сферичні кардіоїди при рівних за величиною кутах ε і β . При $\varepsilon = \beta = 30^\circ$ сферична кардіоїда в нижній частині торкається екватора, що відповідає кутів $\varphi = 30^\circ$ (рис. 1, б). Інші сферичні кардіоїди побудовано при $\varepsilon = \beta = 20^\circ$ і $\varepsilon = \beta = 10^\circ$. На рис. 2, б за рівняннями (5) побудовано епіциклоїду при $\beta = 40^\circ$ і $\varepsilon = 20^\circ$. В такому випадку крива може бути незамкненою, як і для плоского аналогу при довільному співвідношенні радіусів кіл. При $\beta = 90^\circ$ конус із вертикальною віссю перетворюється у площину, тобто рухомий конус котиться по своїй розгортці. Плоским аналогом є кочення кола по прямій, що відповідає утворенню циклоїди. На рис. 2, в побудовано сферичний аналог циклоїди, яка теж може бути незамкненою.

Для сферичної кардіоїди, тобто при $\varepsilon = \beta$ параметричні рівняння (5) значно спрощуються і мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} x &= (2 - \cos \alpha) \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \beta + \cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin 3\beta; \\ y &= 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \cos^2 \beta \sin \beta; \\ z &= \cos \alpha \sin \beta \sin 2\beta + \cos \beta \cos 2\beta. \end{aligned} \tag{6}$$

Можна поставити умову, щоб при обкочування рухомого конуса по нерухомому при досягненні змінної величини $\alpha = 2\pi$ сферична епіциклоїда повернулася у вихідну точку, тобто була замкненою. Для цього позначимо через n кількість повних обертів рухомого конуса при його одного повного обкочування по нерухомому. В такому випадку встановлюється залежність між радіусами кіл – основами рухомого і нерухомого конусів. Цю залежність можна записати через співвідношення кутів ε і β :

$$\varepsilon = \text{Arcsin} \frac{\sin \beta}{n}. \tag{7}$$

При $n=1$ згідно (7) $\varepsilon = \beta$ і ми отримуємо рівняння сферичної кардіоїди (6). Якщо ми хочемо отримати замкнену епіциклоїду, то потрібно кут ε у рівняннях (5) задати згідно (7). При цьому задається тільки нерухомий конус кутом β . На рис. 3 за рівняннями (5) із врахуванням (7) побудовані сферичні епіциклоїди при $n=3$ і різних значеннях кута β :

При $\beta = 90^\circ$ нерухомий конус перетворюється у площину і рухомий котиться по розгортці. В цьому частковому випадку кривою є сферична циклоїда, яка розташована в нижній півкулі сфери (рис. 2, в). Для наочності на рис. 4 всі криві симетрично відображені на верхню півкулю сфери. На рис. 3, криві побудовані для кута $\beta < 90^\circ$, а на рис. 4 – при подальшому його зростанні. Форма кривих на рис. 3 і рис. 4 значно відрізняється, хоча побудовані вони одними і тими ж рівняннями.

Можна поєднати ці два типи кривих. На рис. 5 побудовані сферичні епіциклоїди при $n=6$ і різних кутах β . Якщо сума кутів β складає 180° , то криві утворюють рисунок, який справляє враження замкнених фігур.

Завдяки співвідношенню (7) між кутами ε і β можна будувати замкнені епіциклоїди для будь-якого цілого числа n .

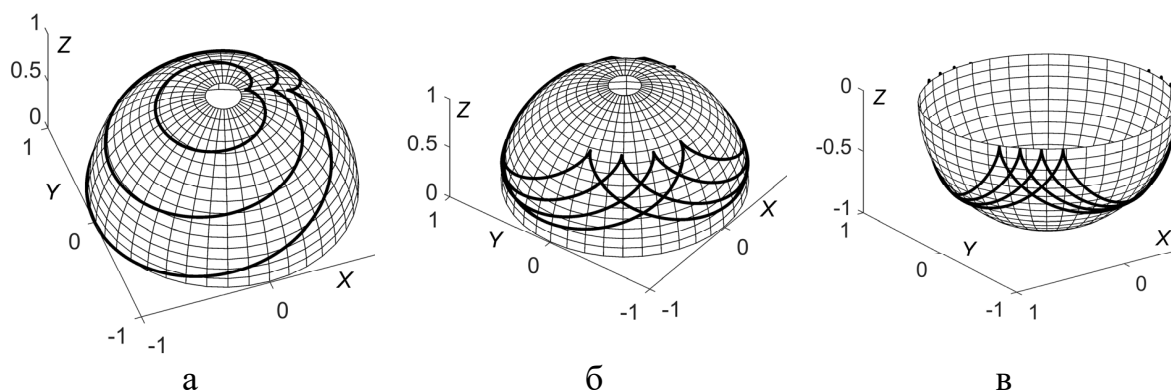


Рис. 2. Різні випадки сферичних епіциклоїд, побудованих за рівняннями (5):
а – частковий випадок для рівних кутів ε і β , при яких утвореною кривою є сферична кардіоїда;
б – сферична епіциклоїда, побудована при $\beta = 40^\circ$ і $\varepsilon = 20^\circ$;
в – сферична циклоїда, побудована при $\beta = 90^\circ$ і $\varepsilon = 20^\circ$

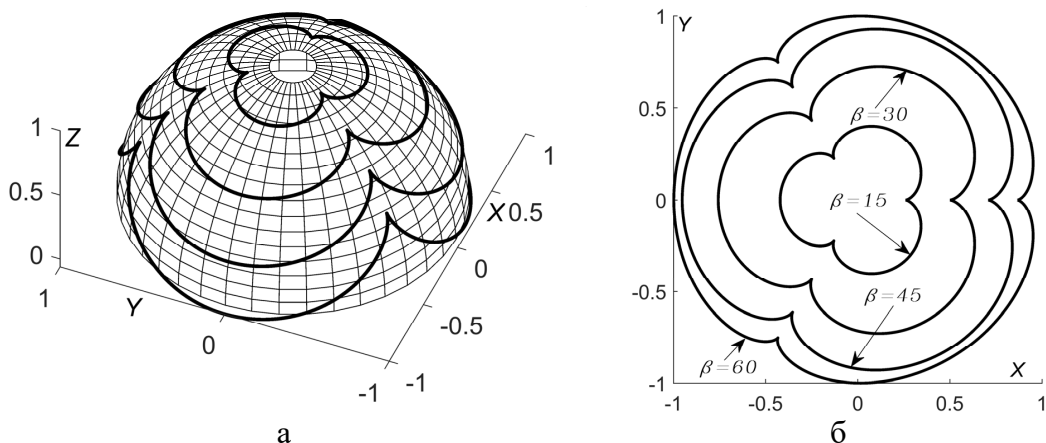


Рис. 3. Сферичні епіциклоїди з трьома вітками і різними значеннями кута β , величина якого зазначена в градусах:
а – аксонометричне зображення сферичних епіциклоїд на поверхні сфери;
б – горизонтальна проекція сферичних епіциклоїд із зазначенням величини кута β

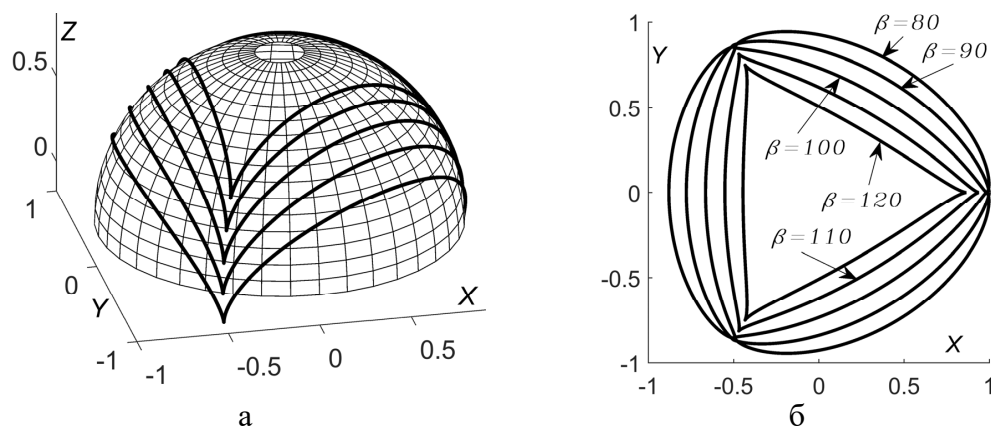


Рис. 4. Сферичні епіциклоїди з трьома вітками і різними значеннями кута β , величина якого зазначена в градусах:
а – аксонометричне зображення сферичних епіциклоїд на поверхні сфери;
б – горизонтальна проекція сферичних епіциклоїд із зазначенням величини кута β

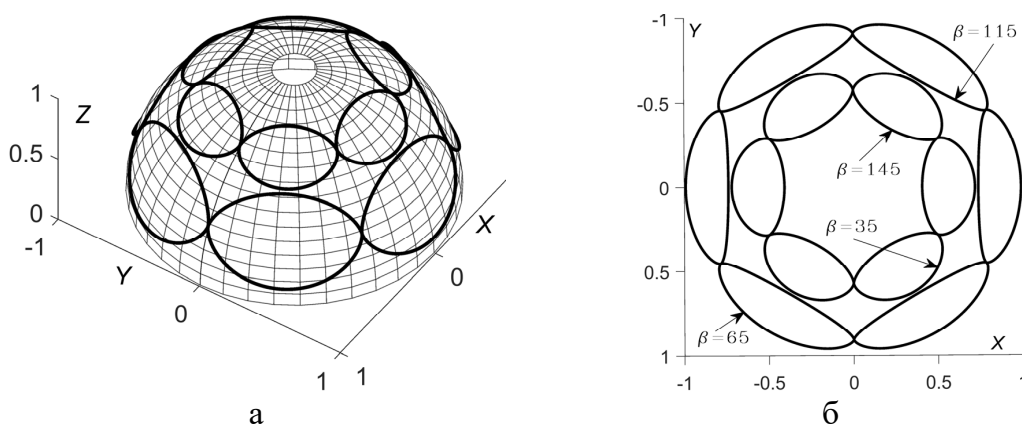


Рис. 5. Сферичні епіциклоїди із шістьма вітками і різними значеннями кута β , величина якого зазначена в градусах:
а – аксонометричне зображення сферичних епіциклоїд на поверхні сфери;
б – горизонтальна проекція сферичних епіциклоїд із зазначенням величини кута β

Висновки

Кочення рухомого циліндра по нерухомому можна розглядати на прикладі кочення рухомого кола по нерухомому. Ці кола є результатом ортогонального перерізу циліндрів площиною. Для кочення конусів по аналогії можна розглядати кочення кривих, які є результатом перетину цих конусів сферою, центр якої збігається із вершинами конусів. Саме за таким принципом отримано аналітичний опис кочення рухомого кола на поверхні сфери по нерухомому. За аналогією циклоїд і епіциклоїд на площині побудовано їх сферичні аналоги. Вихідними умовами для побудови цих кривих є величини кутів при вершині конусів. У випадку, коли половина кута при вершині нерухомого конуса рівна 90° , то слідом точки рухомого кола при його коченні по нерухомому на поверхні сфери буде сферична циклоїда, у інших випадках – сферичні епіциклоїди. Отримано співвідношення між кутами при вершині конусів, при якому сферичні криві будуть замкненими і мати задане число віток.

Список використаної літератури

1. Косіюк М.М. Кінематичний аналіз сферичного кривошипно-повзунного механізму / М.М. Косіюк, В.С. Кравчук // Вісник Хмельницького національного університету, № 6, 2019 (279). С. 7–11. Режим доступу: <http://journals.khnu.km.ua/vestnik/?p=1929>
2. Пилипака С.Ф. Конструювання ізометричних сіток на поверхні кулі / С. Ф. Пилипака, І. Ю. Грищенко, О. В. Несвідоміна // Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2018. Вип. 94. С. 82–87.
3. Кремець Т.С. Конформне відображення написів на ізометричні сітки конуса та кулі. Технічна естетика і дизайн. К.: Віпол, 2011. Вип. 9. С. 112–117.
4. Кремець Т. С. Віднесення кулі до ізометричних координат на основі сферичного відображення мінімальних поверхонь / Т. С. Кремець, І. Ю. Грищенко, О. В. Несвідоміна // Сучасні проблеми моделювання. 2016. Вип. 7. С. 74–80.
5. Construction of conical axoids on the basis of congruent spherical ellipses / Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. // Archives of Materials Science and Engineering this link is disabled, 2022, 113(1), стр. 13–18. Режим доступу: <https://www.sciencegate.app/document/10.5604/01.3001.0015.6967>
6. Пилипака Т.С. Аналітичне конструювання просторових та сферичних кривих у функції власної дуги. Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків : ХДУХТ, 2008. Вип. 21. С. 100–105.
7. Захарова Т. М. Конструювання сферичних кривих у функції натурального параметра / С. Ф. Пилипака, Т. М. Захарова // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: Математика. Геометрія. Інформатика. Мелітополь : Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. Т. 1. С. 137–145.

References

1. Kosiuk M.M. (2019) Kinematychnyi analiz sferychnoho kryvoshypno-povzunnoho mekhanizmu / M.M. Kosiuk, V.S. Kravchuk // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu, № 6, (279). S. 7–11. Rezhym dostupu: <http://journals.khnu.km.ua/vestnik/?p=1929>
2. Pylypaka S.F. (2018) Konstruiuvannia izometrychnykh sitok na poverkhni kuli / S. F. Pylypaka, I. Yu. Hryshchenko, O. V. Nesvidomina // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Vyp. 94. S. 82–87.
3. Kremets T.S. (2011) Konformne vidobrazhennia napysiv na izometrychni sitky konusa ta kuli. Tekhnichna estetyka i dizain. K.: Vipol, Vyp. 9. S. 112–117.
4. Kremets T. S. (2016) Vidnesennia kuli do izometrychnykh koordynat na osnovi sferychnoho vidobrazhennia minimalnykh poverkhon / T. S. Kremets, I. Yu. Hryshchenko, O. V. Nesvidomina // Suchasni problemy modeliuвання. Vyp. 7. S. 74–80.
5. Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. (ed.) (2022) Construction of conical axoids on the basis of congruent spherical ellipses. Archives of Materials Science and Engineering this link is disabled, 113(1), str. 13–18. Rezhym dostupu: <https://www.sciencegate.app/document/10.5604/01.3001.0015.6967>
6. Pylypaka T.S. (2008) Analitychne konstruiuvannia prostоровykh ta sferychnykh kryvykh u funktsii vlasnoi duhy. Heometrychne ta kompiuterne modeliuвання. Kharkiv: KhDUKhT, Vyp. 21. S. 100–105.
7. Zakharova T. M. (2014) Konstruiuvannia sferychnykh kryvykh u funktsii naturalnoho parametra / S. F. Pylypaka, T. M. Zakharova // Naukovyi visnyk Melitopolskoho derzhavnogo pedahohichnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho. Seria: Matematyka. Heometriia. Informatyka. Melitopol: Vydavnytstvo MDPU im. B. Khmelnytskoho, T. 1. S. 137–145.