

А. О. ЯРОШ

аспірантка кафедри програмної інженерії  
Запорізький національний університет  
ORCID: 0009-0003-3495-9009

О. В. КУДІН

кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
професор кафедри програмної інженерії  
Запорізький національний університет  
ORCID: 0000-0002-5917-9127

## НЕЙРОМЕРЕЖЕВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРУЖНОСТІ

Значущість розвитку наближених методів у вирішенні диференціальних рівнянь визначається їх широким застосуванням у ключових галузях науки та техніки. Оскільки багато фізичних та інженерних явищ можна математично описати диференціальними рівняннями, але знаходження їх аналітичних розв'язків часто є складним завданням, чисельні методи для наближеного розв'язання стають критично важливими. Ці методи необхідні для комп'ютерного моделювання та симуляції складних технічних систем. Ураховуючи різноманітність диференціальних рівнянь, наближені методи виступають універсальним інструментом, придатним для вирішення важливих завдань у різних галузях, і дозволяють краще враховувати вимоги сучасних обчислювальних технологій. Використання нейронних мереж для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь є перспективним напрямком у галузі наукового моделювання. Інноваційний підхід полягає в включенні в мережу фізичної інформації у вигляді складної функції втрат, що поєднує традиційні методи розв'язання фізичних задач із передовими техніками глибокого навчання. У такому підході нейронна мережа, призначена для апроксимації функції, отримує на вхід не лише вхідні дані, але й фізичну інформацію про систему чи процес, яку вона моделює. Цю фізичну інформацію можна включити у вигляді додаткових параметрів, обмежень чи рівнянь. Складна функція втрат враховує якість апроксимації нейронною мережею, а також фізичні принципи задачі. Це дозволяє нейронним мережам адаптуватися до фізичних обмежень і забезпечує наближене розв'язання задач, враховуючи важливі аспекти фізичної структури. Зазвичай використовуються прості архітектури, наприклад мережі прямого поширення сигналу з невеликою кількістю шарів. У даній роботі досліджується можливість розв'язання нелінійних задач пружності нейромережевим підходом.

**Ключові слова:** чисельні методи, нейронні мережі, диференціальні рівняння, апроксимація.

А. О. YAROSH

Postgraduate Student at the Department of the Software Engineering  
Zaporizhzhia National University  
ORCID: 0009-0003-3495-9009

O. V. KUDIN

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Software Engineering Department  
Zaporizhzhia National University  
ORCID: 0000-0002-5917-9127

## NEURAL NETWORK METHODS FOR SOLVING ELASTICITY PROBLEMS

The significance of the development of approximate methods in solving differential equations is determined by their wide application in key fields of science and technology. Since many physical and engineering phenomena can be mathematically described by differential equations, but finding their analytical solutions is often a difficult task, numerical methods for an approximate solution become critically important. These methods are necessary for computer modeling and simulation of complex technical systems. Given the variety of differential equations, approximate methods are a universal tool suitable for solving important problems in various fields, and allow better consideration of the requirements of modern computing technologies. The use of neural networks for the approximate solution of differential equations is a promising direction in the field of scientific modeling. An innovative approach is to include in the network physical information in the form of a complex loss function, which combines traditional methods of solving physical problems with advanced techniques of deep learning. In this approach, a neural network designed to approximate functions receives not only input data, but also physical information about the system or process it models. This physical information can be included as additional parameters, constraints, or equations. The complex loss function takes into account the quality of

approximation by the neural network, as well as the physical principles of the problem. This allows neural networks to adapt to physical constraints and provides an approximate solution of problems, taking into account important aspects of the physical structure. Usually, simple architectures are used, for example, direct signal propagation networks with a small number of layers. This paper investigates the possibility of solving non-linear elasticity problems using a neural network approach.

**Key words:** numerical methods, neural networks, differential equations, approximation.

### Постановка проблеми

Розробка ефективного математичного забезпечення систем аналізу інженерних задач є актуальним напрямом досліджень. Разом із класичними підходами, наприклад, методом скінченних елементів, використовуються також нейронні мережі при прогнозуванні та оптимізації, обробці сигналів тощо [1]. Інженерні задачі часто зводяться до аналізу математичних моделей, які описуються диференціальними рівняннями як лінійними, так і нелінійними [2].

На даний час розвинуто потужні наближені методи розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь та систем з частинними похідними, такі як метод Рітца, Гальоркіна, колокації або скінченних елементів [3]. Альтернативою їм є напрям “scientific machine learning” (SciML) або “Physics-informed machine learning” (PIML) [4; 5], особливістю якого є застосування методів машинного навчання у моделюванні вимогливих до ресурсів наукових задач. Основою для таких методів є теореми про збіжність апроксимації нейронними мережами [6]. Ідея цих підходів полягає у заміні невідомої функції та її похідних нейронною мережею та застосування додаткової інформації з диференціальних рівнянь та граничних умов при навчанні мережі. Так були розроблені, так звані, глибинні варіанти методів Рітца, Гальоркіна, колокації тощо [7–17]. Результатом роботи цих алгоритмів є нейронна мережа з параметрами, що відповідають диференціальному рівнянню та крайовим умовам.

Застосування нейронної архітектури додає чисельним методам такі переваги [5]: штучні нейронні мережі дозволяють апроксимувати нелінійні залежності довільної складності, налаштування параметрів мережі відбувається під час навчання; такі методи є загальними і можуть бути застосованими до звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних; ефективно працюють на задачах високої розмірності; глибинні методи можуть бути ефективно реалізовані на паралельних архітектурах.

До недоліків можна віднести: необхідність налаштування гіперпараметрів нейромереж, що може бути обчислювально складною задачею; недостатня точність глибинних методів у порівнянні з класичними.

Актуальною задачею є розвиток обчислювальних методів розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем у напрямі розширення застосування нейромереж для розв'язання фізичних та інженерних задач, сформульованих у вигляді диференціальних рівнянь.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Статтю [7] присвячено розробці загального метода розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних, який використовує нейронні мережі для апроксимації невідомої функції. Використовується мережа прямого поширення сигналу, параметри якої налаштовуються при мінімізації відповідної функції втрат. В свою чергу, функція втрат складається з двох частин. Перший член відповідає початковим або граничним умовам задачі. Другий член задає нейронну мережу, яка повинна задовольняти диференціальному рівнянню. Особливість цього методу полягає в тому, що розв'язок представляється у замкнутій диференційованій формі, яку можна використовувати у подальших обчисленнях. В той час як традиційні методи пропонують дискретний розв'язок (метод Рунге-Кутта, послідовних наближень тощо). Демонструється збіжність запропонованого метода з точними розв'язками модельних задач.

В роботі [8] розробляється підхід до навчання нейронних мереж на основі даних, що описують деякий фізичний процес. Автори пропонують використовувати апріорні знання про відповідні фізичні закони та гіпотетичні залежності як регуляризатори функції втрат нейромережі. В залежності від характеристик наявних даних, розроблено два типи моделей: з неперервною та дискретною часовою шкалою. Перший тип може використовуватись для апроксимації просторово-часових функцій. Моделі другого типу передбачають ітераційний процес з кроком за часом. В роботі розглянуто параметричні та нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних.

Стаття [9] присвячена розробці нейромережевого варіанта метода Гальоркіна розв'язання багатовимірних параболічних диференціальних рівнянь. Цей варіант метода в цілому відповідає класичному підходу та має такі основні етапи: невідома функція замінюється нейронною мережею, із застосуванням метода автоматичного диференціювання обчислюються необхідні похідні; формується цільова функція, яка є комбінацією квадратичних відхилень значень рівняння та граничних умов; генерується випадкова множина пробних точок з області визначення шуканої функції та граничних умов; обчислюється значення нев'язок цільової функції у випадкових точках; застосовується крок градієнтного спуску до значень параметрів нейронної мережі, причому параметр швидкості навчання зменшується зі зростанням кількості ітерацій алгоритму. Отже, нейромережевий варіант метода Гальоркіна замінює базисні функції на нейронну мережу. Під час навчання мережі стохастичним градієнтним спуском налаштовуються параметри нейромережі з урахуванням диференціального рівняння та крайових умов.

Нейромережевий варіант метода Рітца пропонується в роботі [10]. Основна ідея цього підходу також схожа на попередні з врахуванням того, що цей метод застосовується для варіаційних задач. Функції апроксимації замінюються на нейромережу з параметрами, які налаштовуються під час навчання методом градієнтного спуску.

Робота [11] присвячена адаптації нейромереж до метода колокації на прикладі розв'язання задачі згину тонких квадратних та круглих пластин. Результати обчислювальних експериментів демонструють узгодженість прогнозованої деформації пластини з точним розв'язком. Зазначається, що збільшення кількості шарів нейронної мережі прямого поширення сигналу та кількості нейронів в них, прогнозоване значення наближається до точного. При цьому, використовувались випадкові точки колокації, середня квадратична похибка для оцінки функції втрат та варіант метода градієнтного спуску з адаптивною швидкістю навчання.

Бібліотека розв'язання диференціальних рівнянь DeepXDE, яка є Python реалізацією підходу на основі нейронних мереж з додатковою фізичною інформацією розглядається в статті [12]. Пропонується метод адаптивного уточнення та основні залишків. Результати моделювання порівнюються з методом скінченних елементів. Розглядається задачі апроксимації заданої функції нейронною мережею, розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних, а також обернена проблема диференціальних рівнянь в частинних похідних. Бібліотека широко застосовується у наукових дослідженнях, зокрема в [13] фізично-інформовані нейронні мережі застосовуються в задачах оптимізації.

В [14] мережі з додатковою фізичною інформацією застосовуються для розробки системи неперервного моніторингу стану механічної системи на основі даних. Розв'язується задача прогину балки Ейлера-Бернуллі. Розглядається розподілене поперечне та точкове навантаження. Результати порівнюються з аналітичним та скінченно-елементним розв'язками, продемонстрована задовільна збіжність нейромережевого метода.

Роботу [15] присвячено адаптації нейронних мереж на основі фізики (Physics-Informed Neural Networks, PINN) для визначення вертикальних переміщень і кутів закручування балок з функціонально-градієнтних матеріалів. Особливість використання PINN в цій роботі полягає у використанні енергетичного підходу. Метод тестується на матеріалі з різними за напрямками властивостями. Наведено кілька чисельних прикладів, які показують гарну узгодженість із розв'язками закритої форми.

В статті [16] представлено застосування PINN для аналізу вигину та вільної вібрації тривимірних пористих балок з функціонально градієнтного матеріалу. Припускається, що властивості матеріалу балки безперервно змінюються в трьох вимірах відповідно до довільної функції. Основні рівняння руху отримані з використанням принципу Гамільтона та розв'язані за допомогою обчислювального підходу PINN. Прогин балки апроксимується за допомогою глибокої нейронної мережі прямого поширення сигналу, вхідною інформацією якої є просторова координата. Параметри мережі навчаються шляхом мінімізації функції втрат, що складається з керівного диференціального рівняння та граничних умов. Власна частота балки розглядається як невідомий параметр у керівному рівнянні; таким чином, його потрібно отримати, розв'язуючи обернену задачу. Ця процедура дозволяє знаходити вищі власні частоти мод, що неможливо за попередніми методами PINN.

Метод найменших квадратів у контексті методології PINN розглядається в роботі [17]. Ключова ідея підходу полягає в тому, щоб перетворити диференціальне рівняння вищого порядку в систему рівнянь нижчого порядку за допомогою додаткових змінних, тоді функція втрат, що складається з інтегралів відповідних квадратів залишків над проблемною областю, мінімізується. Запропонований підхід демонструє переваги порівняно з оригінальним методом PINN з точки зору точності розв'язування, обчислювальної вартості для кількох задач згинання балки, що мають неперервні та розривні розв'язки.

В статті [18] пропонується модель PINN-Stress, яка дозволяє зменшити витрати на обчислення, зберігаючи точність для задач визначення розподілу напруги на основі моделювання кінцевих елементів та з використанням розв'язуючих рівнянь у частинних похідних Використовуючи автоматичне диференціювання, диференціальне рівняння вбудовується у функцію втрат глибокої нейронної мережі. Модель PINN-Stress може прогнозувати послідовність розподілу напруг майже в реальному часі та може узагальнювати краще, ніж модель без PINN.

Неоднорідна балка, що спирається на пружну основу та піддається довільному зовнішньому навантаженню досліджується в [19]. Підхід з використанням нейромереж має на меті передбачити не лише саму шукану функцію, але й її старші похідні. У контексті цієї роботи основною змінною є прогин балки, тоді як її похідні вищого порядку пов'язані з напруженою зсуву та моментом балки.

В [20] розглядається задача нелінійного згину тривимірних функціонально градієнтних балок, що спирається на основу Вінклера-Пастернака, використовується платформа глибокого навчання TensorFlow спільно з бібліотекою DeepXDE для проектування мережі.

Статтю [21] присвячено застосуванню PINN у поєднанні зі функціями напружень Ейрі та рядами Фур'є для пошуку оптимальних розв'язків кількох еталонних бігармонічних задач пружності. В роботі виявлено, що збагачення простору ознак за допомогою функцій напружень Ейрі може значно підвищити точність розв'язання за допомогою PINN для бігармонічних диференціальних рівнянь.

В [22] представлено нову методологію для моделювання динаміки балок на пружних основах. Зокрема, моделі балок Ейлера-Бернуллі та Тимошенка на основі Вінклера моделюються з використанням підходу до з PINN

з урахуванням причинності. Звичайні PINN стикаються з проблемами при обробці великих просторово-часових областей, навіть для проблем із аналітичними рішеннями закритої форми. Для подолання цього обмеження використовується функція втрат PINN, яка враховує причинно-наслідковий зв'язок, ефективно фіксуючи базову фізику.

Фреймворк створення нейронної мережі з фізичною інформацією пропонується в [23] для аналізу поведінки нелінійного вигину тривимірної пористої тонкої балки з функціонально градієнтного матеріалу, яка спирається на основу Вінклера-Пастернака.

З огляду наведених статей можна зробити висновок, що нейронні мережі з фізичною інформацією з успіхом застосовуються для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних, зокрема, у задачах пружності. Менше висвітлено питання розв'язання нелінійних задач пружності з різною природою нелінійності (геометрична нелінійність або фізична). В той же час, практичні задачі, які виникають перед конструкторами та інженерами, дуже часто є нелінійними та відображають наближену до реальності поведінку конструкції з сучасних матеріалів.

### Формулювання мети дослідження

Метою роботи є застосування нейромережових методів до нелінійних задач теорії пружності. В той же час, виконується тестування розроблених мереж на лінійних задачах та порівняння результатів з аналітичними розв'язками.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Нейромережу можна подати як складну нелінійну функцією, яка виконує завдання відображення вхідних даних у вихідні. Вона складається з нейронів, які організовані в шари, і кожен нейрон взаємодіє з іншими за допомогою зважених зв'язків та функцій активацій [24].

Припустимо, маємо одношарову нейронну мережу з вектором входу  $x$ , виходом  $y$  та матрицею ваг  $W$ , а також вектором зсуву  $b$ . Математично цю мережу можна описати наступним чином:

$$y = f(Wx + b),$$

де

–  $f(\cdot)$  – активаційна функція, яка додає нелінійність до моделі.

Наведене рівняння відображає просту трансформацію вхідних даних  $x$  у вихід  $y$ . Активаційна функція важлива для того, щоб дати нейронній мережі можливість навчатися складнішим взаємозв'язкам та нелінійним шаблонам у даних [24].

Для багатошарових нейронних мереж цей опис може бути розширений, додаючи додаткові шари та ваги. В такому випадку вираз може виглядати як послідовність функцій, де виходи одного шару є входами наступного. Такий підхід дозволяє нейронним мережам моделювати більш складні взаємозв'язки в даних.

Багатошарову нейронну мережу можна узагальнити як композицію функцій, де кожен шар є лінійною трансформацією вхідних даних, а активаційні функції надають нелінійність моделі. Для задач багатовимірних входів та виходів загальна математична форма може виглядати наступним чином.

Нехай маємо  $L$  шарів у багатошаровій нейронній мережі. Кожен шар має свою матрицю ваг  $W^{[l]}$  та зсув  $b^{[l]}$ , а також активаційну функцію  $f^{[l]}$ . Вхідний вектор позначений  $x$ , а вихідний вектор мережі –  $y$ . Опис функції мережі для одного прикладу може бути подано наступним чином [24]:

$$\begin{aligned} z^{[l]} &= W^{[l]} \cdot a^{[l-1]} + b^{[l]}, \\ a^{[l]} &= f^{[l]}(z^{[l]}), \end{aligned}$$

де

–  $l$  – індекс шару (від 1 до  $L$ ),

–  $z^{[l]}$  – лінійна комбінація входів та параметрів шару,

–  $a^{[l]}$  – вихідний вектор шару після застосування активаційної функції.

Для багатошарової мережі вивід буде остаточним результатом останнього шару:  $y = a^{[L]}$ . Отже, загальна функція, яка описує багатошарову нейронну мережу прямого поширення сигналу, може бути визначена як композиція функцій, представлена наступним чином [24]:

$$y = f^{[L]} \left( W^{[L]} \cdot f^{[L-1]} \left( W^{[L-1]} \cdot \left( \dots \cdot f^{[1]} \left( W^{[1]} \cdot x + b^{[1]} \right) + b^{[L-1]} \right) + b^{[L]} \right) \right),$$

де

–  $L$  – кількість шарів у нейронній мережі,



- $x$  – вхідний вектор,
- $W^{[l]}$  та  $b^{[l]}$  – ваги та зсуви шару  $l$ ,
- $f^{[l]}(\cdot)$  – функція активації шару  $l$ .

Ця функція представляє собою послідовність лінійних та нелінійних операцій для обробки вхідного вектора та отримання вихідного результату. Кожен шар мережі вносить власний вклад у зміну структури та формування складної залежності між вхідними та вихідними даними.

Ваги  $W^{[l]}$  та  $b^{[l]}$  мережі є параметрами, які оптимізуються під час навчання для досягнення певного вихідного результату.

У багатошаровій мережі прямого поширення сигналу кожен нейрон у шарі пов'язаний з кожним нейроном в попередньому та наступному шарах. В процесі тренування мережі використовується функція втрат для визначення різниці між прогнозованими та фактичними значеннями. Мета оптимізації – мінімізувати функцію втрат для досягнення точного прогнозу.

Оптимізатор у контексті нейронних мереж – це ключовий елемент тренування, що відповідає за адаптацію параметрів мережі при мінімізації функції втрат. Процес оптимізації розпочинається з обчислення градієнтів функції втрат, які вказують напрямком найшвидшого зменшення втрат. Зазвичай, використовуються такі методи оптимізації, як градієнтний спуск, стохастичний градієнтний спуск та різні варіації, що визначаються задачею та властивостями даних.

Наведені компоненти дозволяють нейромережі моделювати складні та нелінійні залежності в даних. Складність функції може зростати з кількістю шарів, нейронів та загальною складністю архітектури. Тренування нейромережі полягає в підборі оптимальних ваг та зсувів для вирішення конкретної задачі.

PINN представляють собою підхід в області машинного навчання та фізичного моделювання, який поєднує потужність нейронних мереж з диференціальними рівняннями для розв'язання завдань, пов'язаних із фізичними процесами. У контексті PINN, нейронна мережа навчається на основі даних, де вхідні та вихідні пари відображають точки в домені  $(x, u)$ , де  $x$  – це точка в просторі, а  $u$  – відповідне значення фізичної величини. Однак відмінність PINN полягає в тому, що до функції витрат додаються фізичні рівняння, такі як диференціальні рівняння та граничні умови. Це дозволяє моделі не лише апроксимувати дані, а й враховувати фізичні обмеження та відомі закони. Під час оптимізації, PINN шукає розв'язок, який відповідає фізичним законам та навчальним даним, забезпечуючи таким чином фізичну правдоподібність та ефективність у вирішенні задач фізики та інженерії [11].

Розглянемо загальну формулювання для диференціального рівняння  $n$ -го порядку з граничними умовами. Нехай  $u(x)$  – шукана функція, яка задовольняє рівняння та граничні умови.

У загальному випадку диференціальне рівняння, що описує фізичний процес:

$$F(u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots, \nabla^n u, x, t) = 0,$$

де

- $u(x)$  – функція, яка залежить від  $n$  змінних  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,
  - $\nabla$  – градієнт,
  - $x$  – просторові координати,
  - $t$  – час. Функція  $F$  виражає диференціальне рівняння з урахуванням похідних до  $n$ -го порядку.
- Граничні умови виглядають так:

$$G(u(a), u(b)) = 0,$$

де

- $a$  та  $b$  – вектори, представляють нижню та верхню границі домену.
- Функція втрат (Loss Function) нейромережі, яка використовується при оптимізації ваг мережі [11]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{data}} + \mathcal{L}_{\text{physics}},$$

де

- $\mathcal{L}_{\text{data}}$  відображає середньоквадратичну помилку на основі навчальних даних (в точках колокації),
- $\mathcal{L}_{\text{physics}}$  відображає фізичну помилку, яка включає у себе вирази, що впливають з диференціального рівняння та граничних умов.

Отже, під час оптимізації нейронної мережі визначається функція  $u(x)$ , яка задовольняє як навчальні дані, так і фізичні закони, що описують систему. Фізичні рівняння та граничні умови включаються безпосередньо в функцію витрат для забезпечення фізичної правдоподібності розв'язку [11].

Розглянемо декілька модельних задач лінійного та нелінійного згину круглих пластин та балок.

**Приклад 1.** Згин круглої пластини з защемленим контуром. Диференціальне рівняння прогину  $w(r)$  [25]:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}$$

де

- $q$  – значення розподіленого поперечного навантаження,
- $D$  – циліндрична жорсткість пластини,
- $r$  – просторова координата в полярній системі координат.

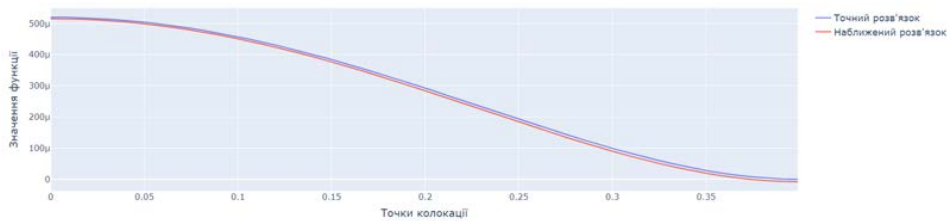
Граничні умови мають вигляд [25]:

$$\frac{dw}{dr}(a) = 0, \frac{d^2 w}{dr^2}(0) = 0, w(a) = 0,$$

де

- $a$  – радіус круглої пластини.

Розглянемо поперечний згин круглої одношарової пластини з такими параметрами: товщина пластини  $h = 18 \cdot 10^{-3}$  м, радіус  $a = 0.4$  м, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу –  $G = 2.77 \cdot 10^4$  МПа та  $\nu = 0.3$  відповідно, розподілене навантаження  $q = 0.5$  МПа. Результати порівняння отриманого нейромережевого розв’язку з точним [25; 26] наведено на рисунку 1.



**Рис. 1.** Защемлення круглої пластини: точний та наближений нейромережевий розв’язки

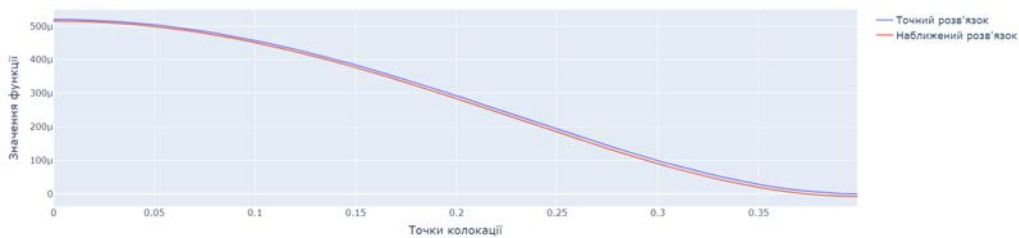
Програмну реалізацію із використанням бібліотеки Torch у Google Colab наведено <https://t.ly/CA1Rq>

**Приклад 2.** Згин круглої пластини з шарнірно опертим контуром. Диференціальне рівняння співпадає з рівнянням прикладу 1, а граничні умови:

$$w(a) = 0, -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0,$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Параметри пластини співпадають з прикладом 1. На рисунку 2 наведено результати обчислювальних експериментів. Програмний розв’язок – [https://t.ly/\\_Qaj2](https://t.ly/_Qaj2).



**Рис. 2.** Вільне опирання круглої пластини: точний та наближений нейромережевий розв’язки

Відносна помилка отриманих наближених розв’язків в задачах згину круглої пластини становить до 2%.

**Приклад 3.** Згин балки з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння має вигляд [26]:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{EI}$$

де

- $q$  – значення розподіленого поперечного навантаження,
  - $E$  – модель Юнга,
  - $I$  – момент інерції балки.
- Граничні умови:

$$w(L) = 0, w(0) = 0, \frac{dw}{dx}(0) = 0, \frac{dw}{dx}(L) = 0,$$

де

- $L$  – довжина балки.

Результати обчислень наведено в таблиці 1. Розглянуто задачу згину балки з круговим перерізом з такими параметрами: довжина  $L = 2$  м, розподілене поперечне навантаження  $q = 1$  МПа, модуль зсуву  $G = 2.77 \cdot 10^4$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ , діаметр  $d = 0.5$  м.

Таблиця 1

Згин балки. Порівняння значень точного та наближеного розв’язку

Точка колокації	Точний розв’язок	Нейромережевий розв’язок
0	0	0
0.2	1.4396·10 <sup>-4</sup>	1.1106·10 <sup>-4</sup>
0.4	4.5498·10 <sup>-4</sup>	4.2581·10 <sup>-4</sup>
0.6	7.8378·10 <sup>-4</sup>	7.6258·10 <sup>-4</sup>
0.8	10.237·10 <sup>-4</sup>	10.133·10 <sup>-4</sup>
1	11.108·10 <sup>-4</sup>	11.127·10 <sup>-4</sup>

Як можна побачити, похибка максимального прогину становить менше 1%. Програмну реалізацію наведено за посиланням <https://t.ly/sOXtt>

**Приклад 4.** Згин балки з одним закріпленим кінцем і одним вільним кінцем [26].

Граничні умови мають вигляд:

$$w(0) = 0, \frac{dw}{dx}(0) = 0.$$

Згідно з результатами обчислень, наведеними у Google Colab <https://t.ly/TKVSf> відносна помилка для цієї задачі не перевищує 1%

**Приклад 5.** Згин балки з одним закріпленим кінцем в геометрично нелінійній постановці [27]. Нелінійне диференціальне рівняння в даному випадку набуває вигляду

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \left( 1 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}.$$

Розглядається задача з згину балки коцентрованим навантаженням на вільному кінці з такими параметрами: довжина  $L = 1$  м, коцентроване навантаження  $q = 30$  Н, модуль Юнга  $E = 70$  ГПа, діаметр кругового перерізу  $d = 10$  мм. Результати порівняння з лінійного та нелінійного випадків наведено на рисунку 3.

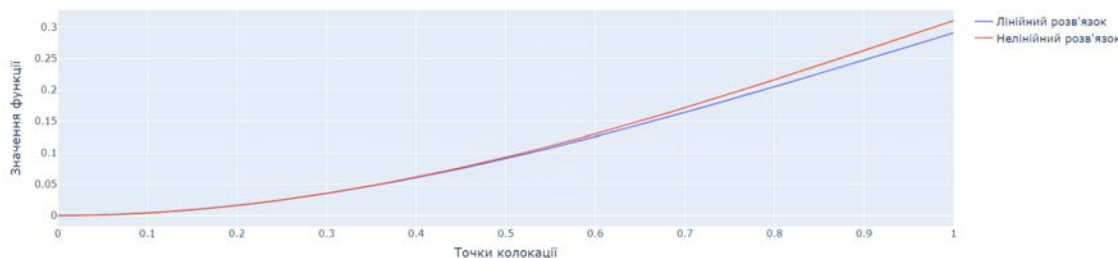


Рис. 3. Геометрично нелінійний згин балки

Максимальний прогин в нелінійному випадку на 6.6% більше лінійного випадку, що відповідає результатам [27]. Приклад програмної реалізації наведено <https://t.ly/XNjNA>.

**Приклад 6.** Згин балки на фізично нелінійній основі. Розглядається задача згину балки на нелінійно-пружній основі Вінклера під дією концентрованого навантаження в центрі. Нелінійне диференціальне рівняння наведено в роботі [28]:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + \frac{4w}{1 + \mu w} = \frac{4}{k} p(z),$$

де

- $z$  – безрозмірна просторова координата,
- $\mu$  – коефіцієнт нелінійності основи Вінклера,
- $k$  – коефіцієнт навантаження.

Функція навантаження визначається через дельта функцію Дірака:

$$p(z) = \bar{P} \delta(z - \alpha),$$

де

- $\bar{P}$  – безрозмірне значення концентрованого навантаження,
- $\alpha$  – точка прикладення концентрованого навантаження.

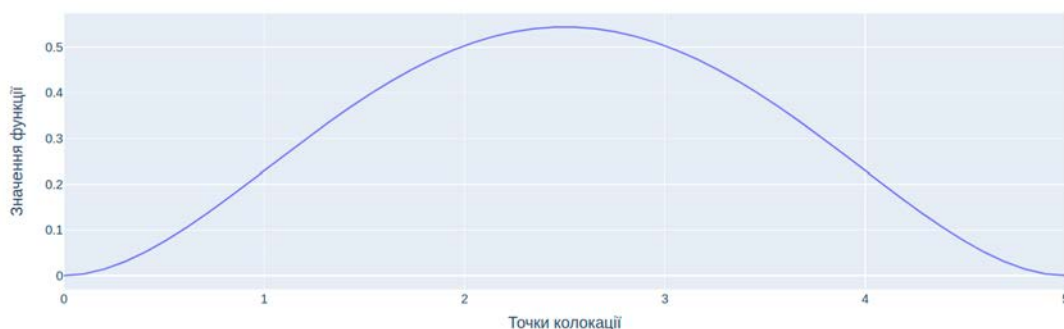
Граничні умови:

$$w(\beta) = 0, w(0) = 0, \frac{dw}{dx}(0) = 0, \frac{dw}{dx}(\beta) = 0,$$

де

- $\beta$  – безрозмірна довжина балки.

Розглянемо задачу згину з такими параметрами: довжина балки  $\beta = 5$ , коефіцієнт нелінійності  $\mu = 6$ , фактор навантаження  $\bar{P}/k = 0.5$ . Результати обчислень наведено на рисунку 4, що відповідає роботі [29].



**Рис. 4.** Згин балки на нелінійній основі

Програмна реалізація <https://t.ly/6KxxJ>.

### Висновки

Розглянуто застосування нейронних мереж з фізичною інформацією для розв'язання лінійних та нелінійних задач пружності. Перевагами даного підходу є те, що подібні нейромережі можуть автоматично апроксимувати шукані функції, оскільки при навчанні використовується інформація про диференціальне рівняння та граничні умови. В той же час, суттєвим етапом методів Гальоркіна, колокації або Рітца є вибір базисних або пробних функцій. Цього не потрібно робити при використанні нейромережевого підходу, однак постає питання оптимального налаштування гіперпараметрів мереж. Продемонстрована збіжність з результатами інших робіт з геометрично та фізично нелінійною постановкою задач. Перспективи подальших досліджень полягають у розробці методів розв'язання більш широкого кола нелінійних задач пружності, в тому числі, динамічних.

### Список використаної літератури

1. Vladov S., Shmelov Yu., Kotliarov K., Hrybanova S., Husarova O., Derevyanko I., Chyzhova L. Onboard parameter identification method of the TV3-117 aircraft engine of the neural network technologies. Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського. Випуск 5/2019 (118), 2019. Р. 90–96.



2. Edwards C.H., Penney D.E., Calvis D.T. *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling*. Boston: Pearson, 2014. 797p.
3. Pinder G.F. *Numerical Methods for Solving Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc., 2018.
4. Karniadakis G.E., Kevrekidis I.G., L.Lu, P. Perdikaris, Wang S., Yang L., Physics-informed machine learning, *Nat Rev Phys*, vol. 3, no. 6, pp. 422–440, 2021, doi: 10.1038/s42254-021-00314-5.
5. Willard J., Jia X., Xu S., Steinbach M., Kumar V. Integrating Scientific Knowledge with Machine Learning for Engineering and Environmental Systems. *ACM Comput. Surv.*, 2022, <https://doi.org/10.1145/3514228>
6. Cybenko G.V. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, , 1989, vol. 2 no. 4 pp. 303–314.
7. Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations. *arXiv:physics/9705023v1*, 1997, <https://doi.org/10.1109/72.712178>
8. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics* 378, 2019, 686–707.
9. Sirignano J., Spiliopoulos K. DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations. *arXiv:1708.07469v5*, 2018.
10. Weinan E, Bing Yu. The Deep Ritz Method: A Deep Learning-Based Numerical Algorithm for Solving Variational Problems. *Commun. Math. Stat.*, 2018, 6:1–12. <https://doi.org/10.1007/s40304-018-0127-z>
11. Hongwei Guo, Timon Rabczuk, and Xiaoying Zhuang. A Deep Collocation Method for the Bending Analysis of Kirchhoff Plate. *arXiv:2102.02617v1*, 2021.
12. Lu Lu, Xuhui Meng, Zhiping Mao, George Em Karniadakis. DEEPXDE: A Deep Learning Library For Solving Differential Equations. *arXiv:1907.04502v2*, 2020.
13. Seo J. Solving real-world optimization tasks using physics-informed neural computing. *Scientific Reports*, 14(1), 202, 2024.
14. Radbakhsh S.H., Zandi K., Nikbakht M. Physics-informed neural network for analyzing elastic beam behavior. *Structural Health Monitoring*, 2023.
15. Duy T.N. Trinh, Khang A. Luong, Jaehong Lee, An analysis of functionally graded thin-walled beams using physics-informed neural networks, *Engineering Structures*, Volume 301, 2024, 117290, ISSN 0141-0296, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117290>.
16. Fallah A., Aghdam M.M. Physics-informed neural network for bending and free vibration analysis of three-dimensional functionally graded porous beam resting on elastic foundation. *Engineering with Computers* 40, 437–454 (2024). <https://doi.org/10.1007/s00366-023-01799-7>
17. Khang A. Luong, Thang Le-Duc, Jaehong Lee, Deep reduced-order least-square method—A parallel neural network structure for solving beam problems, *Thin-Walled Structures*, Volume 191, 2023, 111044, ISSN 0263-8231, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111044>
18. Bolandi, H., Sreekumar, G., Li, X. et al. Physics informed neural network for dynamic stress prediction. *Appl Intell* 53, 26313–26328 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10489-023-04923-8>
19. Faroughi, S., Darvishi, A. & Rezaei, S. On the order of derivation in the training of physics-informed neural networks: case studies for non-uniform beam structures. *Acta Mech* 234, 5673–5695 (2023). <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03676-2>
20. Maziyar Bazmara, Mohammad Silani, Mohammad Mianroodi, Mohsen Sheibanian. Physics-informed neural networks for nonlinear bending of 3D functionally graded beam. *Structures* 49 (2023) 152–162, <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.01.115> 21. Vahab M., Haghighat E., Khaleghi M., Khalili N. A Physics Informed Neural Network Approach to Solution and Identification of Biharmonic Equations of Elasticity. *arXiv:2108.07243*, 2021
22. Kapoor T., Wang H., Núñez A., Dollevoet R. Transfer Learning For Improved Generalizability In Causal Physics-Informed Neural Networks For Beam Simulations. <http://arxiv.org/abs/2311.00578>, 2023.
23. M. Bazmara, M. Mianroodi, and M. Silani, Application of physics-informed neural networks for nonlinear buckling analysis of beams, *Acta Mech. Sin.* 39, 422438 (2023), <https://doi.org/10.1007/s10409-023-22438-x>
24. S. Haykin, *Neural Networks and Learning Machines* (3rd Edition), Prentice Hall, 2009
25. Reddy J.N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells* (3rd Edition), CRC Press, 2007.
26. Кудін О.В., Сторожук С.А., Чопоров С.В. Наближені аналітичні та чисельні методи аналізу міцності тришарових тонкостінних конструкцій: монографія. Херсон : Видавничий дім “Гельветика”, 2019. 160 с.
27. Vinson J.R. *The Behavior of Thin Walled Structures: Beams, Plates, and Shells*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
28. Wang Z.-Q., Jiang J., Tnag B.-T., Zheng W. High Precision Numerical Analysis of Nonlinear Beam Bending Problems Under Large Deflection. *Applied Mechanics and Materials Vols. 638-640*. P. 1705–1709, 2014. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.638-640.1705>

29. Mohammadpour A., Rokni E., Fooladi M., Kimiaefar A. Approximate Analytical Solution For Bernoulli-Euler Beams Under Different Boundary Conditions With Non-Linear Winkler Type Foundation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 50, 2, pp. 339–355, 2012.

#### References

1. Vladov S., Shmelov Yu., Kotliarov K., Hrybanova S., Husarova O., Derevyanko I., Chyzhova L. (2019) Onboard parameter identification method of the TV3-117 aircraft engine of the neural network technologies. *Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського*. Випуск 5/2019 (118). pp. 90–96.
2. Edwards C.H., Penney D.E., Calvis D.T. (2014) *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling*. Boston: Pearson. 797 p.
3. Pinder G.F. (2018) *Numerical Methods for Solving Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc.
4. Karniadakis G.E., Kevrekidis I.G., L.Lu, P. Perdikaris, Wang S., Yang L. (2021) Physics-informed machine learning, *Nat Rev Phys*, vol. 3, no. 6, pp. 422–440, doi: 10.1038/s42254-021-00314-5.
5. Willard J., Jia X., Xu S., Steinbach M., Kumar V. (2022) Integrating Scientific Knowledge with Machine Learning for Engineering and Environmental Systems. *ACM Comput. Surv.*, <https://doi.org/10.1145/3514228>
6. Cybenko G.V. (1989) Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 2 no. 4 pp. 303–314.
7. Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. (1997) Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations. arXiv:physics/9705023v1, <https://doi.org/10.1109/72.712178>
8. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. (2019) Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics* 378, 686–707.
9. Sirignano J., Spiliopoulos K. (2018) DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations. arXiv:1708.07469v5.
10. Weinan E, Bing Yu. (2018) The Deep Ritz Method: A Deep Learning-Based Numerical Algorithm for Solving Variational Problems. *Commun. Math. Stat.*, 6:1–12. <https://doi.org/10.1007/s40304-018-0127-z>
11. Guo H., Rabczuk T., Zhuang X. (2021) A Deep Collocation Method for the Bending Analysis of Kirchhoff Plate. arXiv:2102.02617v1.
12. Lu Lu, Xuhui Meng, Zhiping Mao, George Em Karniadakis. (2020) DEEPXDE: A Deep Learning Library For Solving Differential Equations. arXiv:1907.04502v2, 2020.
13. Seo J. (2024) Solving real-world optimization tasks using physics-informed neural computing. *Scientific Reports*, 14(1), 202.
14. Radbakhsh S.H., Zandi K., Nikbakht M. (2023) Physics-informed neural network for analyzing elastic beam behavior. *Structural Health Monitoring*.
15. Duy T.N. Trinh, Khang A. Luong, Jaehong Lee. (2024) An analysis of functionally graded thin-walled beams using physics-informed neural networks, *Engineering Structures*, Volume 301, 117290, ISSN 0141-0296, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117290>.
16. Fallah, A., Aghdam, M.M. (2024) Physics-informed neural network for bending and free vibration analysis of three-dimensional functionally graded porous beam resting on elastic foundation. *Engineering with Computers* 40, 437–454. <https://doi.org/10.1007/s00366-023-01799-7>.
17. Khang A. Luong, Thang Le-Duc, Jaehong Lee. (2023) Deep reduced-order least-square method—A parallel neural network structure for solving beam problems, *Thin-Walled Structures*, Volume 191, 111044, ISSN 0263-8231, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111044>
18. Bolandi, H., Sreekumar, G., Li, X. et al. (2023) Physics informed neural network for dynamic stress prediction. *Appl Intell* 53, 26313–26328. <https://doi.org/10.1007/s10489-023-04923-8>
19. Faroughi, S., Darvishi, A., Rezaei, S. (2023) On the order of derivation in the training of physics-informed neural networks: case studies for non-uniform beam structures. *Acta Mech* 234, 5673–5695. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03676-2>
20. Maziyar Bazmara, Mohammad Silani, Mohammad Mianroodi, Mohsen Sheibani. (2023) Physics-informed neural networks for nonlinear bending of 3D functionally graded beam. *Structures* 49, 152–162, <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.01.115>
21. Vahab M., Haghghat E., Khaleghi M., Khalili N. (2021) A Physics Informed Neural Network Approach to Solution and Identification of Biharmonic Equations of Elasticity. arXiv:2108.07243.
22. Kapoor T., Wang H., Núñez A., Dollevoet R. (2023) Transfer Learning For Improved Generalizability In Causal Physics-Informed Neural Networks For Beam Simulations. <http://arxiv.org/abs/2311.00578>.
23. Bazmara M., Mianroodi M., Silani M. (2023) Application of physics-informed neural networks for nonlinear buckling analysis of beams, *Acta Mech. Sin.* 39, 422438, <https://doi.org/10.1007/s10409-023-22438-x>
24. Haykin S. (2009) *Neural Networks and Learning Machines* (3rd Edition), Prentice Hall.
25. Reddy J.N. (2007) *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells* (3rd Edition), CRC Press.

26. Kudin O.V., Storozhuk Ye.A., Choporov S.V. (2019) Nablyzheni analitychni ta chyselni metody analizu mitsnosti trysharovykh tonkostinnykh konstruksii: monohrafiia [Approximate analytical and numerical methods for analyzing the strength of three-layer thin-walled structures: monograph]. Kherson : “Helvetyka”. 160 s.

27. Vinson J.R. (1989) The Behavior of Thin Walled Structures: Beams, Plates, and Shells. Kluwer Academic Publishers.

28. Wang Z.-Q., Jiang J., Tnag B.-T., Zheng W. (2014) High Precision Numerical Analysis of Nonlinear Beam Bending Problems Under Large Deflection. Applied Mechanics and Materials Vols. 638-640. P. 1705-1709. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.638-640.1705>

29. Mohammadpour A., Rokni E., Fooladi M., Kimiaefar A. (2012) Approximate Analytical Solution For Bernoulli-Euler Beams Under Different Boundary Conditions With Non-Linear Winkler Type Foundation. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 50, 2, pp. 339–355.