УДК 624.131.7 DOI https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2024.2.8

С. А. РУСАНОВ
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри транспортних систем і технічного сервісу
Херсонський національний технічний університет
ORCID: 0000-0002-1003-4867

О. І. КЛЮЄВ
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри транспортних систем і технічного сервісу
Херсонський національний технічний університет
ORCID: 0000-0001-6803-0706

І. А. ШАТОХІНА
старший викладач кафедри транспортних систем і технічного сервісу
Херсонський національний технічний університет
ORCID: 0000-0002-5767-3674

ВІДПОВІДНІСТЬ ТЕОРІЇ ГРАНИЧНОЇ РІВНОВАГИ ГІПОТЕЗАМ, ЩО ПОКЛАДЕНІ В ОСНОВУ ТЕОРІЇ ЯНСЕНА МЕХАНІКИ ГРУНТІВ

У даній роботі наведені позиції щодо підходів до використання формули Янсена для розрахунку напруг у вертикальних циліндричних та прямокутних ємностях стосовно до позицій теорії граничної рівноваги грунтів.

Рівняння теорії граничної рівноваги мають дуже широке застосування для розрахунків в багатьох прикладних задачах. Спектр задач поширюється від задач граничної рівноваги відкосів (схилів), задач розрахунку фундаментів будівельних конструкцій, до задач напруженого стану сипких матеріалів у ємностях з жорсткими стінками – силосах, лотках, живильниках тощо. Подібні задачі часто зводяться до необхідності чисельного інтегрування диференціальних рівнянь у часткових похідних рівноваги інфінітезимального елементу масиву, разом з умовою граничного стану рівноваги. Рівняння Янсена, та аналогічні йому рівняння, представляють собою замкнуті аналітичні вирази, що дозволяють швидко оцінити напруги в вертикальних ємностях з жорсткими стінками, що наповнені сипкими матеріалами. Чисельні експерименти показують, що формула Янсена добре виконується особливо в асимптотичному плані, проте, чисельні розрахунки (наприклад, пряме моделювання за методом дискретного елемента DEM) показують, що у високих силосах можуть реалізовуватися й інші види напруженого стану. Вказані вирази отримуються за рахунок використання низки гіпотез, виконання яких не завжди очевидно, при цьому використання рівняння Янсена для визначення тиску на дно й стінки циліндричної ємності в явному вигляді не стосується теорії граничної рівноваги.

В роботі показується, що формула Янсена відповідає стану граничної рівноваги, – вона може бути отримана безпосередньо з осереднених рівнянь статики якщо припустити додатково, що розподіл дотичних напружень по радіусу представляється лінійною функцією, і вважаючи, що радіальні напруги рівномірно розподіленими по перерізу, а це повністю відповідає розв'язку відповідної задачі граничної рівноваги. Наводиться також додатковий метод покращення збіжності чисельних розрахунків.

Ключові слова: *механіка грунтів, сипкі матеріали, рівняння Янсена, гранична рівновага.*

S. A. RUSANOV
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Transport Systems
and Technical Service
Kherson National Technical University
ORCID: 0000-0002-1003-4867

O. I. KLIUIEV
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Transport Systems
and Technical Service
Kherson National Technical University
ORCID: 0000-0001-6803-0706

I. A. SHATOKHINA
Senior Lecturer at the Department of Transport Systems
and Technical Service
Kherson National Technical University
ORCID: 0000-0002-5767-3674

COMPLIANCE OF THE THEORY OF LIMITING EQUILIBRIUM WITH THE HYPOTHESES UNDERLYING JANSEN'S THEORY OF SOIL MECHANICS

This paper presents positions regarding approaches to using the Jansen formula for calculating stresses in vertical cylindrical and rectangular containers in relation to the positions of the theory of limiting equilibrium of soils.

The equations of the theory of limit equilibrium are widely used for calculations in many applied problems. The range of problems extends from problems of limit equilibrium of slopes (slopes), problems of calculating the foundations of building structures, problems of the stressed state of bulk materials in containers with rigid walls – silos, trays, feeders, etc. Such problems often come down to the need for numerical integration of partial differential equations for the equilibrium of an infinitesimal element of an array, together with the condition for the limit state of equilibrium. The Jansen equations and similar equations are closed analytical expressions that allow one to quickly estimate the stresses in vertical containers with rigid walls filled with bulk materials. Numerous experiments show that the Jansen formula is well satisfied, especially in the asymptotic plane, but numerical calculations (for example, direct modeling using the discrete element method DEM) show that other types of stress states can be realized in high silos. These expressions are obtained through the use of a number of hypotheses, the implementation of which is not always obvious, while the use of the Jansen equation to determine the pressure on the bottom and cylindrical wall of the container does not explicitly concern the theory of limit equilibrium.

The work shows that the Jansen formula corresponds to the state of limit equilibrium – it can be obtained directly from the averaged equations of statics if we additionally assume that the distribution of tangential stresses along the radius is represented by a linear function, and assuming that the radial stresses are uniformly distributed over the section, and this is completely corresponds to the solution of the corresponding limit equilibrium problem. An additional method for improving the convergence of numerical calculations is also presented.

Key words: *soil mechanics, bulk materials, Jansen equation, limit equilibrium.*

Постановка проблеми

Рівняння граничної рівноваги сипких середовищ відіграють важливу роль в галузі геотехніки й механіки ґрунтів [1–3]. Вони надають інженерам можливості аналізу й прогнозування поведінки ґрунтових мас у різних умовах. На практиці використання умов граничної рівноваги дозволяє, наприклад, провести прогнозування стійкості (визначити умови, при яких ґрунтова маса перебуває на грані стійкості або руйнування), провести оцінку навантажень і деформацій (з визначенням навантажень, які здатний витримати ґрунт без значних деформацій), провести проєктування захисних конструкцій (оцінка можливостей застосування конструкцій, які запобігають обвалам ґрунту або знижують ризик обвалення схилів). Аналіз стабільності схилів був одним з перших застосувань умов граничної рівноваги – можливість визначення ризику обвалення ґрунту та аналіз стабільності схилів на будівельних ділянках або в небезпечних геологічних зонах є вкрай важливою задачею. Окрім того, одне з основних застосувань – визначення навантажень на фундаменти: при проєктуванні фундаментів умови дозволяють визначити очікувані навантаження на ґрунт, що важливо для вибору правильного типу фундаменту і його розмірів. Також широке застосування – аналіз напруженого стану в ємностях з жорсткими стінками (силосах, живильниках тощо). У цілому, рівняння граничної рівноваги сипких середовищ являють собою основу для аналізу й проектування різних інженерних споруджень пов'язаних з механікою ґрунтів, забезпечуючи безпеку й надійність будівництва в різноманітних умовах.

Необхідно розуміти, що умови граничної рівноваги ґрунтів часто містять у собі досить істотне припущення про те, що ці умови реалізуються в кожній точці розглянутої області. Таким чином, в такому випадку ми фактично оцінюємо найгіршу ситуацію в системі, припускаючи, що разом з умовою граничної рівноваги продовжують виконуватися рівняння статики елементарного обсягу сипкого середовища (не з'являються прискорення їх центрів ваги).

Для задачі плоскої деформації рівняння статики й умова граничної рівноваги інфінітезимального елемента мають вигляд [1–3]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\gamma=0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+4\tau_{xy}^2=\sin^2\varphi\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+2c\cdot\mathrm{ctg}\varphi\right)^2,\tag{2}$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напруг, γ – насипна об'ємна вага матеріалу, c – зв'язність сипучого матеріалу, φ – кут внутрішнього тертя матеріалу. У циліндричній системі координат система записується у вигляді

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0,\\&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+\gamma=0,\end{aligned}\tag{3}$$

$$(\sigma_{rr}-\sigma_{zz})^2+4\tau_{rz}^2=\sin^2\varphi\left(\sigma_{rr}+\sigma_{zz}+2c\cdot\mathrm{ctg}\varphi\right)^2.\tag{4}$$

У розрахунковій практиці для визначення розподілу тиску сипкого матеріалу на дно й стінки циліндричної ємності широко використовується рівняння Янсена [1; 4]. Рівняння Янсена виходить із досить простих гіпотез, виконання яких не завжди очевидно. Проте, численні дані часто говорять про гарний збіг результатів розрахунків з результатами натурних експериментів, однак у більшості літературних джерел не надається чітких обґрунтувань для можливості використання зазначених гіпотез і перетинання їх з теорією граничної рівноваги.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Методи інтегрування системи граничної рівноваги були розвинені Соколовським із введенням приведеної напруги $\sigma=(\sigma_1+\sigma_3)/2+c\cdot\mathrm{ctg}\varphi$. Підстановка в рівняння статики дає систему [3; 5]

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\mp2\sigma\,\mathrm{tg}\,\varphi\frac{\partial\rho}{\partial x}-\gamma\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)\cos(\rho\mp\varepsilon)+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\mp2\sigma\,\mathrm{tg}\,\varphi\frac{\partial\rho}{\partial y}-\gamma\right)\sin(\rho\mp\varepsilon)=0,$$

де σ_1,σ_3 – головні напруги, ρ – кут між напрямком найбільшої головної напруги σ_1 і віссю x, $\varepsilon=\pi/4-\varphi/2$ – кут між напрямком σ_1 і площадкою ковзання. Ця система вирішується за методом характеристик, звичайно використовуючи кінцево-різницеву апроксимацію уздовж характеристик.

Використання ж рівняння Янсена для визначення тиску на дно й стінки циліндричної ємності в явному вигляді не стосується теорії граничної рівноваги. Вважається, що рівняння Янсена базується на двох гіпотезах. По-перше, з гідростатичної аналогії вводиться поняття коефіцієнта бічного тиску ξ як відношення між бічними й вертикальними напругами. Передбачається, що коефіцієнт бічного тиску відомий, постійний і не залежить від характеру розподілу напруг по горизонтальному перерізу, так що приймається аналогія із законом Паскаля в гідростатиці. Крім того, передбачається, що на стінках ємності виконується закон тертя Кулона. Розрахункова схема являє собою умову рівноваги інфінітезимальних шарів матеріалу в ємності (рис. 1).

Відповідно до розрахункової схеми й зазначених вище гіпотез, умова рівноваги шару з поперечним перерізом S записується як $-q_zS+(q_z+dq_z)S-\gamma Sdz+\pi D\tau dz=0$, що приводить до диференціального рівняння $q_z'+\pi f_0\xi Dq_z/S=\gamma$, розв'язком якого в припущенні сталості ξ і буде рівняння Янсена

$$q_z=\frac{\gamma D}{4f_0\xi}(1-e^{-\frac{4f_0\xi}{D}z}),\tag{5}$$

де D – діаметр ємності, f_0 – коефіцієнт тертя матеріалу об стінку ємності. Рівняння Янсена таким чином описує, що напруги з глибиною надходять до асимптотичної границі $\gamma D/(4f_0\xi)$.

Необхідно вказати, що рівняння Янсена й гіпотези, що приводять до нього, використовуються не тільки для статики сипких середовищ, але й в інших теоріях напруженого стану достатньо пластичних середовищ, що рівномірно заповнюють замкнений простір, наприклад, у теорії напруженого стану сальникових ущільнень [6]. Хороші результати отримуються також для динамічних задач заповнення ємностей з поправками на кшталт коефіцієнта

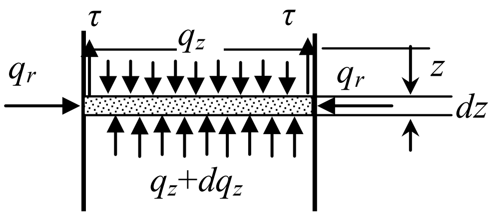

Рис. 1. Розрахункова схема до одержання рівняння Янсена

динамічності [7]. Чисельні експерименти показують, що формула Янсена добре виконується особливо в асимптотичному плані, проте, чисельні розрахунки (наприклад, пряме моделювання за методом дискретного елемента DEM [8]) показують, що у високих силосах можуть реалізовуватися й інші види напруженого стану.

Формулювання мети дослідження

Ми далі можемо легко показати, що формула Янсена відповідає стану граничної рівноваги, – вона виходить безпосередньо з осереднення рівнянь статики (3) якщо припустити додатково, що розподіл дотичних напружень по радіусу представляється лінійною функцією

$$\tau_{rz} = kr, \tag{6}$$

і вважаючи радіальні напруги рівномірно розподіленими по перерізу – так, що з урахуванням визначення коефіцієнта бічного тиску можна записати

$$\sigma_{r\,|R} = \sigma_r = \xi\overline{\sigma}_z. \tag{7}$$

Але зазначені залежності (6) і (7) і відповідають розв'язку відповідної задачі граничної рівноваги.

Викладення основного матеріалу дослідження

Проінтегруємо друге з рівнянь рівноваги (3) по площі перетину ємності, одержимо

$$\int_S \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \gamma\right) dS = 2\pi \int_0^R \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \gamma\right) r dr = 2\pi k R^2 + \frac{d\overline{\sigma}_{zz}}{dz} S + \gamma S,$$

де $\overline{\sigma}_z = 2\pi \int_0^R \sigma_z \, r dr / S$ – середня вертикальна напруга в перерізі, $S = \pi R^2$. Враховуючи, що $k = \dfrac{\tau_{rz|R}}{R}$, і припускаючи, що $\tau_{z\,|R} = f_0 \sigma_{r\,|R}$, з врахуванням (7) одержимо

$$\frac{2 f_0 \xi}{R} \overline{\sigma}_{zz} + \frac{d\overline{\sigma}_{zz}}{dz} = \gamma. \tag{8}$$

Розв'язок цього рівняння з врахуванням граничної умови $\overline{\sigma}_{zz}(0) = 0$ саме відповідає рівнянню Янсена (5). Таким чином, для одержання рівняння Янсена як результату осереднення рівняння рівноваги, нам необхідно покласти додатково, що розподіл дотичних напружень по радіусу представляється лінійною функцією, тобто виконується (6), і виконується сталість по перерізу радіальних напруг (7).

Апроксимація розподілу дотичних напруг по радіусу лінійною функцією $\tau_{zz} = kr$ й сталість по перерізу радіальних напруг насправді відповідає точному розв'язку задачі про граничну рівновагу шару сипкого середовища, а саме, розв'язку системи (3), разом з умовою граничної рівноваги (4). Покажемо це безпосередньо спочатку для задачі плоскої деформації (1) і (2). Граничні умови задають нульові напруги на поверхні, нульове значення дотичних напружень на осі симетрії, і умову кулонівського тертя на стінці $\tau_{wall} = f_0\, \sigma_x|_{wall}$. Ми будемо використовувати пряме чисельне інтегрування системи (1) і (2) не звертаючись до методу Соколовського. Проблема поліпшення збіжності чисельної кінцево-різницевої схеми може бути усунута, якщо умову граничної рівноваги (2) для достатньо сипкого матеріалу ($c = 0$) записати відносно дотичних напруг у вигляді

$$\tau_{xy} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 \varphi (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2},$$

і, припускаючи оцінку $\sin\varphi \left|\sigma_x + \sigma_y\right| > \left|\sigma_x - \sigma_y\right|$, розкласти праву частину в ряд, утримуючи необхідну кількість членів, – загалом достатньо одного:

$$\tau_{xy} = \pm \frac{1}{2} \sin\varphi (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{\sin^2 \varphi (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2}\right). \tag{9}$$

Результати, отримані чисельним розв'язком системи (1) доповненої рівнянням (9) для плоскої деформації представлені на рис. 2.

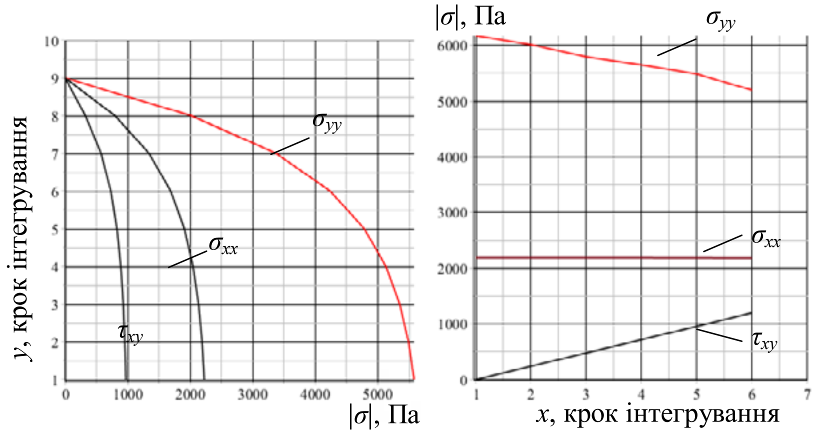

Рис. 2. Результати чисельних розрахунків для задачі плоскої деформації

У цілому – бачимо достатній збіг результатів з тими принципами, які закладені в теорію Янсена, і природно, таким чином, проводити аналогічне виводу (8) інтегрування для прямокутних ємностей, так, що

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{\rho g S}{f_0 \xi U}(1 - e^{-\frac{f_0 \xi U}{S} z}), \tag{10}$$

де S – площа поперечного перерізу ємності, U – периметр ємності.

Система рівнянь рівноваги в циліндричній системі координат (3) з рівнянням граничної рівноваги у вигляді (4) виявляється незамкнутою. Таким чином для замикання системи нам необхідно задати деяку умову для напруги $\sigma_{\theta\theta}$. Такою умовою звичайно служить прирівнювання другої й третьої головних напруг, при цьому припускаючи, що напруга $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_2$ є проміжною головною напругою, одержимо

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_2 = \sigma_3 \; . \tag{11}$$

Рівняння (11) дозволяє замкнути задачу й скористатися тим же чисельним методом для її розв'язку. Результати розрахунків показані на рис. 3.

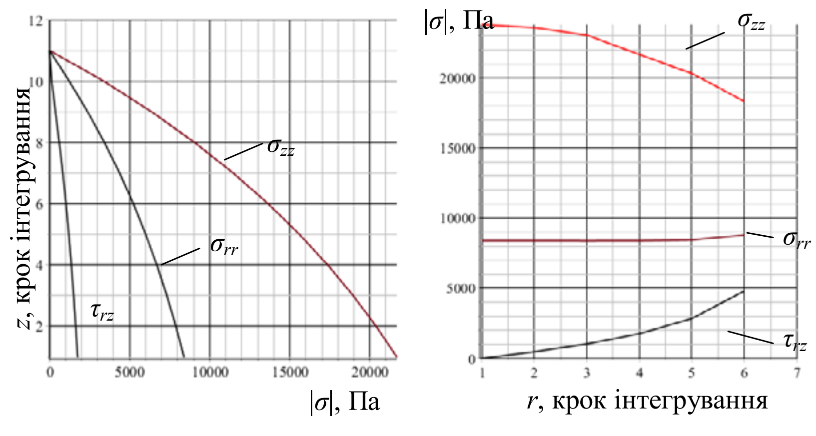

Рис. 3. Результати чисельних розрахунків для осесиметричної задачі

Таким чином, і для циліндричних ємностей ми бачимо достатній збіг із принципами, закладеними в теорію Янсена. Важливо при цьому говорити про середню вертикальну напругу в перерізі, тому що все-таки, на відміну від σ_{rr}, σ_{zz} має помітний нахил у радіальному напрямку.

Висновки

Таким чином, гіпотези про бічний тиск, лінійний віднульовий розподіл дотичних напруг і сталість по перерізу радіальних напруг, які дозволяють вивести рівняння Янсена шляхом осереднення рівнянь рівноваги, з достатнім ступенем точності еквівалентні прийняттю умови граничної рівноваги ґрунту у всьому масиві.

Список використаної літератури

1. Mitchell, J.K., and Soga, K. (2005) Fundamentals of soil behavior, Third edition, John Wiley and Sons, Inc.

2. Terzaghi, K., Peck, R.B., Mesri, G. (1996) Soil mechanics in Engineering Practice, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.

3. Божидарник В.В. Теорія пластичності /В.В. Божидарник, В.В. Сулим Київ : УМК ВО, 1991. 144 с.

4. A. Rogers, G. Dyck, J. Paliwal, K. Hildebrand. The Janssen effect and the Chini ordinary differential equation. Powder Technology. Volume 436, 2024.

5. Тітов В.А. Теорія пластичної деформації. Математичні основи пластичної деформації. Конспект лекцій / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В.А. Тітов, Н.К. Злочевська. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 75 с.

6. Русанов С.А., Луняка К.В., Клюєв О.І. Моделювання роботи сальникового вузла з врахуванням гідродинаміки ущільнюваного середовища. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2009. № 36. С. 107–110.

7. Русанов С.А., Луняка К.В., Клюєв О.І., Глухов Г.М. Математичне моделювання робочого процесу в апаратах з віброкиплячим шаром та розробка систем автоматизованого моделювання гідродинаміки киплячих шарів. *Автоматика. Автоматизація. Електротехнічні комплекси і системи.* 2009. № 1 (23). С. 15–24.

8. R. Kacianauskas, R. Balevicius, D. Markauskas, A. Maknickas (2007). Discrete Element Method in Simulation of Granular Materials. IUTAM Symposium on Multiscale Problems in Multibody System Contacts, Volume 1.

References

1. Mitchell, J.K., and Soga, K. (2005) Fundamentals of soil behavior, Third edition, John Wiley and Sons, Inc.

2. Terzaghi, K., Peck, R.B., Mesri, G. (1996) Soil mechanics in Engineering Practice, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.

3. Bozhydarnyk V.V. (1991) Teoriia plastychnosti /V.V. Bozhydarnyk, V.V. Sulym – Kyiv: UMK VO, p. 144.

4. A. Rogers, G. Dyck, J. Paliwal, K. Hildebrand. (2024) The Janssen effect and the Chini ordinary differential equation. Powder Technology. Volume 436.

5. Titov V.A. (2022) Teoriia plastychnoi deformatsii. Matematychni osnovy plastychnoi deformatsii. Konspekt lektsii / KPI im. Ihoria Sikorskoho; uklad.: V.A. Titov, N.K. Zlochevska. Kyiv : KPI im. Ihoria Sikorskoho, p. 75.

6. Rusanov S.A., Luniaka K.V., Kliuiev O.I. (2009) Modeliuvannia roboty salnykovoho vuzla z vrakhuvanniam hidrodynamiky ushchilniuvanoho seredovyshcha // Visnyk khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu, no. 36, pp. 107–110.

7. Rusanov S.A., Luniaka K.V., Kliuiev O.I., Hlukhov H.M. (2009) Matematychne modeliuvannia robochoho protsesu v aparatakh z vibrokypliachym sharom ta rozrobka system avtomatyzovanoho modeliuvannia hidrodynamiky kypliachykh shariv. Avtomatyka. Avtomatyzatsiia. Elektrotekhnichni kompleksy i systemy, vol. 1, no. 23, pp. 15–24.

8. R. Kasianauskas, R. Balevisius, D. Markauskas, A. Maknickas (2007). Discrete Element Method in Simulation of Granular Materials. IUTAM Symposium on Multiscale Problems in Multibody System Contacts, Volume 1.