

Є. В. ОГІНСЬКИЙаспірант кафедри інженерії програмного забезпечення
Державний університет «Житомирська політехніка»
ORCID: 0000-0002-7777-8449**Д. С. АНТОНЮК**кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри інженерії програмного забезпечення
Державний університет «Житомирська політехніка»
ORCID: 0000-0001-7496-3553

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ДОХОДНОСТІ ТА РИЗИКОВАНOSTІ ІНВЕСТИЦІЙ У КОНТЕКСТІ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛЬНИМИ ФІНАНСАМИ

Управління персональними фінансами є ключовим аспектом досягнення фінансової стабільності та добробуту і відіграє важливу роль у житті сучасної людини. Інвестиції є одним з інструментів персональних фінансів, що дозволяє зберігати і накопичувати кошти. Важливим фактором при виборі інвестиційних фінансових інструментів є знаходження збалансованого співвідношення дохідності і ризикованості. Дохідність визначає очікуваний майбутній прибуток від інвестицій, в той же час ризикованість характеризує ступінь невизначеності і ймовірність того, що реальні доходи будуть відрізнятися від очікуваних. В цій роботі розглянуто підходи вибору інвестиційного портфелю і покращення його дохідності та ризикованості шляхом диверсифікації ризикових активів. Можливість додавання безризикових активів у портфель значно розширює множину доступних ефективних портфелів. В роботі також проведений аналіз впливу дохідності та ризику інвестиційного портфелю на досягнення персональних фінансових цілей за допомогою моделювання методом Монте-Карло. Даний метод базується на використанні випадкових чисел для імітації реальних процесів. Вхідні параметри для розрахунків, такі як дохід за поточний період і значення інфляції, характеризуються ймовірнісними характеристиками. В результаті виконання великої кількості симуляцій отримується ймовірність досягнення фінансової цілі і середнє значення результату при заданих вхідних параметрах. На прикладі показано як збільшення дохідності впливає на накопичення, і відповідно збільшує середнє значення можливого прибутку. Ризик, в свою чергу, може зменшити ймовірність досягнення фінансової цілі в цілому. Показана необхідність зваженого підходу до вибору дохідності і ризику інвестицій. Цей вибір заснований на принципах компромісу і оптимальні значення можуть відрізнятися в залежності від поставленої мети. Збалансований підхід до вибору дохідності та ризикованості, а також моделювання їхнього впливу на кінцевий результат, забезпечує можливість оптимізації фінансових рішень для широкого спектру завдань у сфері персональних фінансів.

Ключові слова: моделювання, персональні фінанси, інвестиції, оптимізація портфелю, метод Монте-Карло.

YE. V. OHINSKYIPostgraduate Student at the Department of Software Engineering
Zhytomyr Polytechnic State University
ORCID: 0000-0002-7777-8449**D. S. ANTONIUK**Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Software Engineering Department
Zhytomyr Polytechnic State University
ORCID: 0000-0001-7496-3553

MODELING THE IMPACT OF INVESTMENT RETURNS AND RISKS IN THE CONTEXT OF PERSONAL FINANCE MANAGEMENT

Personal finance management is a key aspect of achieving financial stability and well-being and plays an important role in the life of a modern person. Investments are one of the tools of personal finance management that allows you to save and accumulate funds. An important factor in choosing investment financial instruments is finding a balanced ratio of return and risk. Return defines the expected future profit from investments, while risk characterizes the degree of uncertainty and the probability that actual returns will differ from the expected ones. This paper considers approaches to selecting an investment portfolio and improving its return and risk through the diversification of risky assets. Adding risk-free assets to the portfolio significantly expands the range of available efficient portfolios. The paper also analyzes

the impact of investment portfolio return and risk on the achievement of personal financial goals using Monte Carlo simulation. This method is based on the use of random numbers to simulate real processes. Input parameters for calculations, such as income for the current period and inflation rates, are characterized by probabilistic features. As a result of performing a large number of simulations, the probability of achieving a financial goal and the average value of the outcome given the input parameters are obtained. The example demonstrates how an increase in returns affects accumulation, and consequently enhances the average potential profit. Higher risk, in turn, can reduce the probability of achieving the financial goal in general. The paper shows the need for a balanced choice of return and risk of investments. This decision is based on trade-off, and the optimal outcomes can differ and depend on the specific objectives established. A balanced approach to the choice of return and risk, as well as modeling their impact on the final result, makes it possible to optimize financial decisions for a wide range of personal finance tasks.

Key words: modeling, personal finance, investment, portfolio optimization, Monte Carlo simulation.

Постановка проблеми

Питання персональних фінансів є важливою частиною існування сучасного суспільства. Особливо актуальним це питання стає під час нестабільності та змін у економічно-фінансовій сфері. Поняття персональних фінансів включає в себе різні аспекти, такі, як керування доходами і витратами, накопичення коштів, оподаткування, врахування ризиків, тощо.

Важлива роль у виборі фінансових інструментів припадає на вибір оптимального співвідношення ризикованості до доходності. Ризикованість інструментів визначає ступінь невизначеності і ймовірність того, що реальні доходи будуть відрізнятись від очікуваних. Деякі інструменти можна розглядати як низькоризикові, що гарантують визначену доходність, наприклад, депозити в надійному банку, або інвестиції в ОВДП, якщо вони купляються на весь строк випуску облігацій. Також існує можливість продати облігації достроково на вторинному ринку, що може знизити або підвищити їх доходність. Це збільшує ризик ОВДП як інвестиційного інструменту. Можливість інвестицій у акції значно розширює спектр доходності і ризику інвестицій.

В загальних рекомендаціях для інвестицій пропонується визначити припустимий рівень ризику для людини за допомогою опитувань і знайти максимальну доходність при заданому ризику. В даній статті розглядається знаходження оптимальної доходності і ризикованості відповідно до вимог фінансової цілі персональних фінансів за допомогою моделювання. Фінансова ціль може визначати необхідну суму накопичення, часові рамки для використання коштів тощо. Для деяких цілей важливо мати визначену суму на конкретний строк, скажімо накопичення коштів на майбутнє навчання. Деякі цілі, такі як накопичення коштів на авто або подорож, дозволяють при необхідності скоригувати суму або дату для використання коштів. Ці фактори визначають вимоги для знаходження збалансованого співвідношення доходності і ризикованості фінансових інструментів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В ряді останніх досліджень і публікацій розглянуто підходи та методології в сфері портфельного інвестування, основні моделі портфельної оптимізації, такі як моделі Марковіца і Тобіна, та їх застосування та розширення за допомогою методу Монте-Карло та інтеграції з машинним навчанням.

М. Mangram проаналізував внесок Марковіца у сучасну портфельну теорію (Modern Portfolio Theory, MPT), зазначив основні елементи теорії, які включають розуміння компромісу між ризиком та доходністю, значення диверсифікації, та використання кількісних показників, таких як варіація та коваріація, у виборі портфеля [1]. Також в праці було вказано на теоретичні обмеження MPT і відмінності між ідеальними умовами та реальністю.

Ветрова Г. В. і Гужва В. О. розглядають процес формування інвестиційного портфеля з використанням моделі Марковіца для оптимізації портфеля, а також модель Тобіна як розширення моделі Марковіца за допомогою включення безризикового активу разом із ризиковими цінними паперами [2]. Представлено порівняння результатів використання обох моделей та ефект від інтеграції безризикових активів у модель Тобіна. Як приклад, сформовано портфоліо з урахуванням специфіки українського фондового ринку.

Z. Chen, H. Li, Z. Li, L. Yin у своїй роботі порівняли ефективності моделі Марковіца (MPT) з простою індексною моделлю (Single index model, SIM), зроблено висновок, що модель Марковіца більше підходить для портфелів з високим ризиком, тоді як проста індексна модель краща для низькоризикових інвестицій [3].

В ряді публікацій розглядаються методи оцінки ризиків та диверсифікації. Так Жовновач Р. І., Вишневська В. А., Шевчук М. О. досліджують диверсифікацію як метод зменшення ризиків у інвестиційному маркетингу [4], Мажара Г. А., Крикун Є. О. аналізують методи багатокритеріальної оптимізації для мінімізації ризику інвестиційного портфеля [5].

S. Ding описує застосування моделювання Монте-Карло у поєднанні з моделлю Марковіца для керування невизначеністю на фінансових ринках і оптимізації портфелів, спрямоване на збалансування ризику і доходності [7]. А. Chaweewanchon і С. Rujirga у своїй роботі ілюструють інтеграцію машинного навчання з моделлю Марковіца для вибору акцій і оптимізації портфеля, підтверджуючи, що використання аналітичних прогностичних методів може значно підвищити продуктивність портфелів [8].

Формулювання мети дослідження

Метою даної роботи є розглянути принципи вибору інвестиційного портфелю і можливості для знаходження оптимальних значень дохідності і ризикованості інвестицій, і за допомогою моделювання дослідити вплив дохідності і ризикованості на ймовірність досягнення фінансової цілі в персональних фінансах.

Викладення основного матеріалу дослідження

Відомим науковцем, що працював в сфері фінансових інвестицій і досліджував питання оптимізації інвестиційного портфелю, є Гаррі Марковіц. Він запропонував модель, де основними факторами для знаходження оптимального портфелю є дохідність цінних паперів і їх ризик. В даній моделі дохідність цінних паперів визначається, як математичне очікування дохідності, а ризик визначається середньоквадратичне відхилення дохідності. Основою для розрахунків дохідності і ризику є історичні значення минулих періодів. Також враховується взаємозв'язок між цінними паперами портфелю, який виражається коефіцієнтом лінійної кореляції [5].

Кожен актив може мати своє значення частки, або ваги у загальному портфелі. Згідно з теорією Г. Марковіца загальна очікувана дохідність портфелю визначається за наступною формулою:

$$E(R_p) = \sum_i E(R_i) w_i,$$

де $E(R_i)$ – очікувана дохідність активу, w_i – вага активу у портфелі.

Взаємозв'язок між активами виражається коефіцієнтом лінійної кореляції. Загальний ризик портфелю, який визначається середньоквадратичним відхиленням дохідності, розраховується з урахуванням взаємозв'язку між активами портфелю за допомогою наступної формули:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij}},$$

де σ_{ij} – коваріація дохідностей активів i та j , w_i та w_j – частки активів i та j .

Американський економіст Джеймс Тобін розглянув можливість додавати в портфель до ризикових активів також безризикові, тобто з нульовим стандартним відхиленням прибутковості. Якщо поєднати ризиковий та безризиковий актив, то загальну прибутковість можна визначити за формулою:

$$E(R) = w_p E(R_p) + (1 - w_p)R_\delta.$$

де w_p – частка ризикового активу у портфелі, $E(R_p)$ – очікувана прибутковість ризикового активу, R_δ – дохідність безризикового активу.

Ризик, як середньоквадратичне відхилення дохідності портфелю визначається:

$$\sigma = w_p \sigma_p$$

де σ_p – середньоквадратичне відхилення дохідності ризикового активу.

Розглянемо приклад портфелю, що складається з трьох цінних паперів: Apple Inc. (AAPL), American Express Company (AXP), Walmart Inc. (WMT). Використовуючи мову програмування Python і бібліотеку yfinance можна легко отримати доступ до історичних значень дохідностей акцій, і порахувати середнє значення і середньоквадратичне відхилення дохідності:

```
import yfinance as yf

num_trade_days = 252
stocks = ['AAPL', 'AXP', 'WMT']
stock_prices = yf.download(stocks, start='2014-01-01', end='2024-01-01')['Adj Close']
stock_returns = stock_prices.pct_change()

returns = stock_returns.mean() * num_trade_days
risk = stock_returns.std() * (num_trade_days**0.5)
```

Отримані наступні значення для дохідності і ризику:

	AAPL	AXP	WMT
Дохідність	0.281721	0.134565	0.112291
Ризик	0.283805	0.304581	0.207846

Якщо визначити дохідність і ризик в якості осей координат, то дані значення можна графічно відобразити точками.

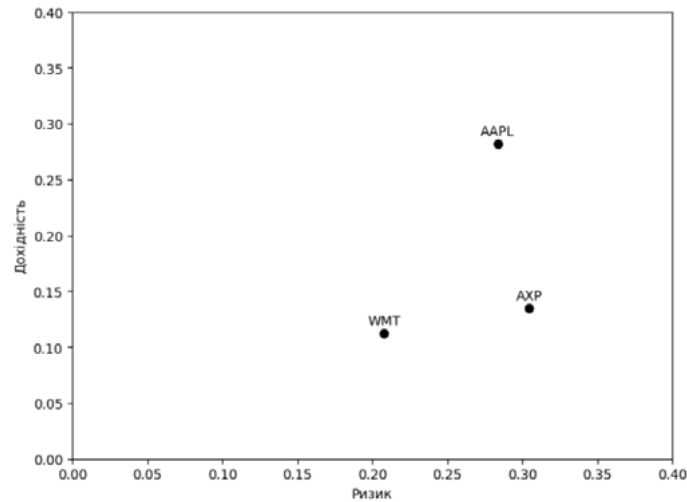


Рис. 1. Дохідність та ризик акцій

Матриця коваріацій, що враховує взаємний зв'язок зміни дохідностей акцій, отримується за допомогою наступного коду:

```
cov = stock_returns.cov() * num_trade_days
```

Розраховані значення матриці коваріацій:

	AAPL	AXP	WMT
AAPL	0.080545	0.037025	0.019130
AXP	0.037025	0.092770	0.014536
WMT	0.019130	0.014536	0.043200

Згенеруємо випадковим чином 1000 комбінацій для співвідношень акцій у портфелі і розрахуємо дохідність і ризик кожного з портфелів використовуючи значення дохідності і ризику окремих акцій і матриці коваріації акцій.

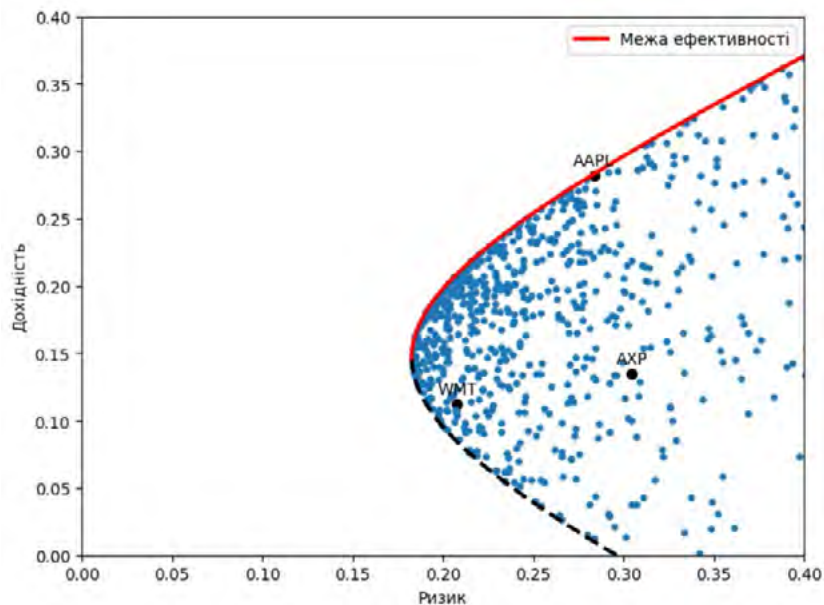


Рис. 2. Множина можливих портфелів і межа ефективності

Рациональний інвестор намагається максимізувати дохідність портфелю при визначеній ризикованості, або мінімізувати ризик при визначеній дохідності. Портфель вважається неефективним, якщо існує інший портфель, з кращою дохідністю при однаковому ризику, або з меншим ризиком при однаковій дохідності [4]. Межа

ефективності (efficient frontier) визначає множину ефективних портфельів з усієї множини портфельів, що складаються з даних акцій [9]. Даний підхід дозволяє обирати портфель з бажаним значенням дохідності і ризику, і значно розширює вибір порівняно з окремими акціями.

Множину портфельів що складаються з ризикового і безризикового активу графічно можна відобразити прямою лінією, що поєднує точки визначені ризиковим і безризиковим активом.

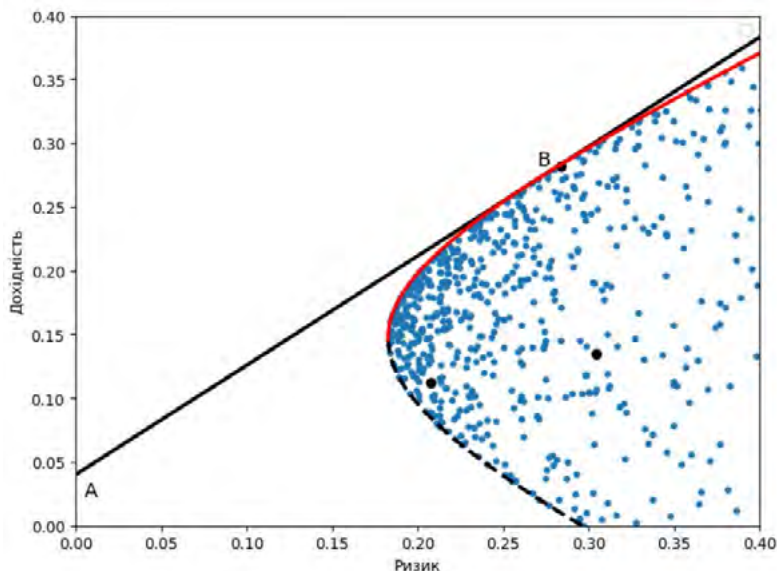


Рис. 3. Поєднання ризикових і безризикових активів

На рисунку 3 точка А відображає безризиковий актив з дохідністю 0.04, точка В – один з портфельів, з множини ефективних ризикових портфельів побудованих раніше. Прямий лінійний сегмент АВ визначає всі варіанти портфельів, що складаються з різних часток безризикового і ризикового активів. Дану лінію прийнято називати *capital allocation line*. Найбільш ефективний варіант лінії можна побудувати, якщо вона буде дотична до межі ефективності ризикових портфельів. Це пояснюється тим, що в цьому випадку нахил лінії буде найбільшим і при цьому досягається найбільший приріст дохідності за кожен одиницю росту ризику [10]. Поєднання ризикового і безризикового активів дозволяє значно розширити множину ефективних портфельів.

Як ми бачимо, існує можливість вибирати інвестиційні портфелі з різними значеннями прибутковості і ризику і ріст прибутковості зазвичай пов'язаний з ростом ризику. Тож перед інвестором стоїть питання компромісного вибору між прибутковістю і ризиком.

Розглянемо вплив прибутковості та ризику на реалізацію фінансових цілей у сфері персональних фінансів. Створимо модель, для спрощення сприйняття і дослідження цього питання. Припустимо, що людина має певну суму накопичених коштів, які можна інвестувати для отримання прибутку. Також є необхідність знімати кожен рік визначену суму коштів для певних потреб. Сума, що знімається, повинна збільшуватися кожен рік згідно з ростом інфляції, яка характеризується математичним сподіванням і стандартним відхиленням. У даній задачі є декілька вхідних параметрів, які не можна точно визначити, а саме, точне значення прибутку інвестиційного портфелю і значення інфляції. Дані параметри можуть мати різне випадкове значення кожен рік. Зручним способом для моделювання певних процесів, що описуються випадковими процесами, є метод Монте-Карло. Даний метод дозволяє оцінити ймовірнісну характеристику реального явища. Застосуємо метод Монте-Карло для моделювання процесу отримання прибутку і витрат за кожен рік, і визначимо суму яка залишиться через 20 років. Визначимо початкову суму – 1 000 000, початкову суму витрат – 55 000, математичне очікування інфляції – 0.03 зі стандартним відхиленням 0.01. Виберемо три портфелі з дохідністю і ризиком згідно з графіком на рисунку 3:

	Портфель 1	Портфель 2	Портфель 3
Дохідність	0.04	0.08	0.21
Ризик	0	0.05	0.2

Застосуємо метод Монте-Карло з кількістю симуляцій 30000 для кожного з портфельів для визначення суми залишку через 20 років. Наступний код реалізує розрахунок даних симуляцій за допомогою методу Монте-Карло:

```

import numpy as np
num_samples = 30000
start_amount = 1_000_000
years = 20
start_spend_amount = 55000
inflation_mean = 0.03
inflation_deviation = 0.01

def calculate_total(returns_mean, returns_deviation):
    inflation = np.random.normal(inflation_mean, inflation_deviation,
                                years-1)
    spendings = start_spend_amount * (1 + np.cumsum(inflation))
    spendings = np.insert(spendings, 0, start_spend_amount)
    portfolio_performance = np.random.normal(returns_mean,
                                             returns_deviation, years-1)

    net_worth = start_amount - spendings[0]
    for i in range(0, years-1):
        if net_worth==0:
            return 0
        else:
            net_worth=max(0, net_worth * (1 + portfolio_performance[i]) - spendings[i])
    return net_worth

def monte_carlo_simulation(returns_mean, returns_deviation):
    return np.fromiter([calculate_total(returns_mean, returns_deviation)
                        for x in range(num_samples)], dtype=float)

res1 = monte_carlo_simulation(0.04, 0)
res2 = monte_carlo_simulation(0.082, 0.05)
res3 = monte_carlo_simulation(0.21, 0.2)
    
```

Порахуємо середнє значення накопиченої суми. Також порахуємо кількість результатів з нульовими сумами, що означає що ціль не була досягнута. Отримані наступні результати:

	Портфель 1	Портфель 2	Портфель 3
Середнє значення суми	0.11 млн	1.43 млн	24.54 млн
Кількість нульових сум	17	4	85

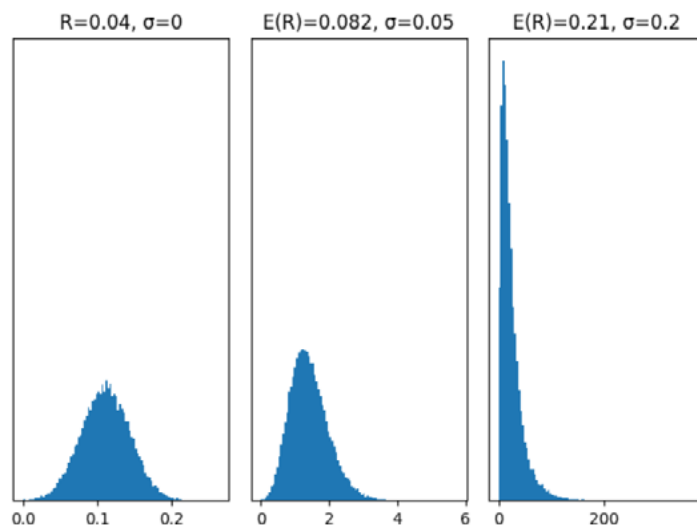


Рис. 4. Гістограми розподілу сум за результатами симуляцій

Згідно з результатами залишок коштів у випадку портфелю 1, що складається з безризикового активу, майже вичерпався за вказаний період часу. Портфель 2 показав кращий результат середньої суми залишку. Більша ризикованість портфелю 2 порівняно з портфелем 1 майже не позначилась на ризику отримати нульову суму. Отриманий результат середньої суми портфелю 3 значно переважає попередні результати. Але разом з тим збільшується ймовірність того, що коштів може не вистачити, це може бути критичним фактором для деяких фінансових цілей у персональних фінансах.

Висновки

В статті було розглянуто інвестування як важливий інструмент в сфері персональних фінансів. Висвітлені підходи для формування інвестиційного портфелю з ризиковими активами згідно з теорією Г. Марковіца, було розглянуто принцип диверсифікації активів, що дозволяє покращити загальну дохідність і ризик портфелю. Було розглянуто додавання безризикового активу в портфель, і як наявність безризикового активу розширює множину доступних ефективних портфелів. Даний підхід для аналізу дохідності і ризику можна використати не тільки для акцій, а і для більш широкого спектру інструментів персональних фінансів, таких, наприклад, як депозити або інвестиції в ОВДП.

Також в статті був застосований метод Монте-Карло для моделювання і оцінки впливу дохідності і ризику інвестиційного портфелю на результати досягнення фінансової цілі у сфері персональних фінансів. Збільшення дохідності позитивно впливає на накопичення, збільшуючи середнє значення можливого прибутку. В той же час збільшення дохідності зазвичай пов'язане з ростом ризику. Ризик в свою чергу може зменшити ймовірність досягнення фінансової цілі в цілому. Необхідно зважено підходити до вибору дохідності і ризику інвестицій. Цей вибір заснований на принципах компромісу і оптимальні значення можуть відрізнитись в залежності від поставленої мети.

Збалансований підхід до вибору дохідності та ризикованості, і моделювання впливу цих факторів на кінцевий результат дозволяє оптимізувати фінансові рішення для більш широкого спектру задач, пов'язаних із вибором інструментів у сфері персональних фінансів.

Список використаної літератури

1. Mangram, Myles E., A Simplified Perspective of the Markowitz Portfolio Theory (2013). *Global Journal of Business Research*, v. 7 (1) pp. 59-70, 2013, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2147880>.
2. Ветрова Г.В., Гужва В.О. 2018. Дослідження моделей Марковіца та Тобіна побудови портфеля цінних паперів. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. 1320, 44 (Груд 2018), 36–41. DOI:<https://doi.org/10.20998/2079-0023.2018.44.07>.
3. Chen, Zeyi & Li, Hao & Li, Zeqing & Yin, Leiming. (2022). Analysis of Ten Stock Portfolios Using Markowitz and Single Index Models. <http://dx.doi.org/10.2991/aebmr.k.220405.202>.
4. Жовновач Р. І., Вишневецька В. А., Шевчук М. О. Теорії диверсифікації в інвестиційному маркетингу підприємств. *Державне управління: удосконалення та розвиток*. 2020. № 3. – URL: <http://www.dy.nayka.com.ua/?op=1&z=1689> DOI: 10.32702/2307-2156-2020.3.11
5. Мажара Г. А., Крикун Є. О. Моделювання оптимального інвестиційного портфеля орієнтованого на мінімізацію ризику. *Modern Economics*. 2023. № 38(2023). С. 69-75. DOI: [https://doi.org/10.31521/modecon.V38\(2023\)-11](https://doi.org/10.31521/modecon.V38(2023)-11).
6. Kahar, R. H., Kaerudin, N. P., & Vimelia, W. (2023). Optimal Portfolio Risk Analysis Using the Monte Carlo Method. In *Operations Research: International Conference Series (Vol. 4, Issue 4, pp. 163–167)*. Indonesian Operations Research Association. <https://doi.org/10.47194/orics.v4i4.276>.
7. Ding, S. (2024). Portfolio Optimization Based on Markowitz Investment Theory and Monte Carlo Simulation. In A. Md Yassin (Ed.), *SHS Web of Conferences (Vol. 188, p. 01009)*. EDP Sciences. <https://doi.org/10.1051/shsconf/202418801009>.
8. Chaweewanon, Apichat, and Rujira Chaysiri. (2022). Markowitz Mean-Variance Portfolio Optimization with Predictive Stock Selection Using Machine Learning. *International Journal of Financial Studies* 10, no. 3: 64. <https://doi.org/10.3390/ijfs10030064>.
9. Efficient Frontier: What It Is and How Investors Use It. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://www.investopedia.com/terms/e/efficientfrontier.asp>.
10. Capital Allocation Line (CAL) and Optimal Portfolio. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/career-map/sell-side/capital-markets/capital-allocation-line-cal-and-optimal-portfolio/>.

References

1. Mangram, Myles E., A Simplified Perspective of the Markowitz Portfolio Theory (2013). Global Journal of Business Research, v. 7 (1) pp. 59-70, 2013, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2147880>.
2. Vietrova, H.V., Huzhva, V.O. 2018. Doslidzhennia modelei Markovitsa ta Tobina pobudovy portfelia tsinnykh paperiv. Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Serii: Systemnyi analiz, upravlinnia ta informatsiini tekhnolohii. 1320, 44 (Hrud 2018), 36–41. DOI:<https://doi.org/10.20998/2079-0023.2018.44.07>.
3. Chen, Zeyi & Li, Hao & Li, Zeqing & Yin, Leiming. (2022). Analysis of Ten Stock Portfolios Using Markowitz and Single Index Models. <http://dx.doi.org/10.2991/aebmr.k.220405.202>.
4. Zhovnovach, R., Vyshnevskaya, V. and Shevchuk, M. (2020), “Diversification theories in investment marketing of enterprise”, *Derzhavne upravlinnya: udoskonalennya ta rozvytok*, [Online], vol. 3, available at: <http://www.dy.nayka.com.ua/?op=1&z=1689>. DOI: 10.32702/2307-2156-2020.3.11.
5. Mazhara G. A., Krykun Y. O. (2023). Modeling of the optimal investment portfolio focused on risk minimization. Modern Economics, 38(2023), 69-75. DOI: [https://doi.org/10.31521/modecon.V38\(2023\)-11](https://doi.org/10.31521/modecon.V38(2023)-11).
6. Kahar, R. H., Kaerudin, N. P., & Vimelia, W. (2023). Optimal Portfolio Risk Analysis Using the Monte Carlo Method. In Operations Research: International Conference Series (Vol. 4, Issue 4, pp. 163–167). Indonesian Operations Research Association. <https://doi.org/10.47194/orics.v4i4.276>.
7. Ding, S. (2024). Portfolio Optimization Based on Markowitz Investment Theory and Monte Carlo Simulation. In A. Md Yassin (Ed.), SHS Web of Conferences (Vol. 188, p. 01009). EDP Sciences. <https://doi.org/10.1051/shsconf/202418801009>.
8. Chaweewanchon, Apichat, and Rujira Chaysiri. (2022). Markowitz Mean-Variance Portfolio Optimization with Predictive Stock Selection Using Machine Learning. International Journal of Financial Studies 10, no. 3: 64. <https://doi.org/10.3390/ijfs10030064>.
9. Efficient Frontier: What It Is and How Investors Use It. Retrieved from: <https://www.investopedia.com/terms/e/efficientfrontier.asp>.
10. Capital Allocation Line (CAL) and Optimal Portfolio. Retrieved from: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/career-map/sell-side/capital-markets/capital-allocation-line-cal-and-optimal-portfolio/>.