УДК 629.02 DOI https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2024.4.4

Є. І. КАЛІНІН
доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри тракторів, автомобілів та біоенергоресурсів
Національний університет біоресурсів і природокористування України
ORCID: 0000-0001-6191-8446

В. М. КОЛОДНЕНКО
старший викладач
Сумський національний аграрний університет
ORCID: 0000-0002-8450-6759

Н. М. МЕЛЬНИК
старший викладач
Сумський національний аграрний університет
ORCID: 0000-0001-9967-0669

СИНТЕЗ ТЕОРІЇ РУХУ ТВЕРДИХ ТІЛ ДЛЯ ВІДМОВОСТІЙКОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЇХ ПАРАМЕТРІВ ЗАПОВНЕНИХ СИПУЧИМИ РЕЧОВИНАМИ

Динаміка руху спеціалізованого автомобіля при навантаженні сипким вантажем можуть бути віднесені за структурою до категорії сипких середовищ. Деякі з них (легкосипкі) можуть розглядатися як ідеально сипке середовище, представлене, в першому наближенні, ідеальною нестискаємою рідиною, що не має сил зв'язку між частинками. Інші (погано сипкі) повинні розглядатися як зв'язне середовище, яке є проміжним ступенем між ідеально сипким і твердим тілами.

Оскільки практично процес формування сипкого тіла заздалегідь відомий, так само як відомі його механічні властивості (коефіцієнт внутрішнього тертя, початковий опір зсуву для зв'язаних насипних вантажів, коефіцієнт тертя по твердим поверхням, коефіцієнт ущільнення під впливом динамічних навантажень і т.п.) можна говорити, що завдання неграничної рівноваги мають конкретні розв'язки. Тоді можна говорити і про можливість ідентифікації динаміки вантажного автомобіля під час транспортування сипкого середовища.

У статті з принципу найменшої дії у формі Гамільтона-Остроградського виводяться рівняння Лагранжа руху твердого тіла, що має об'єми, повністю або частково наповнені сипким середовищем, представленим у формі ідеальної рідини. Для розширення можливості застосування теорії прийнято, що модельне сипуче середовище має поверхневий натяг. Розглядаються перші інтеграли цих рівнянь.

Далі з рівнянь руху виводяться умови, за яких мають місце рівновага або стаціонарний рух твердого тіла з сипким середовищем, що зводяться до умов екстремальності (стаціонарності) потенційної енергії або зміненої потенційної енергії системи. У практично цікавих випадках завдання мінімуму зміни потенційної енергії вирішується дослідженням другої варіації останнього, виведення якої наводиться.

У нелінійній постановці доводиться теорема про нестійкість положення рівноваги тіла з сипким середовищем у випадку, коли потенційна енергія системи не має мінімуму в положенні рівноваги.

Ключові слова: *тверде тіло, потенційна енергія, вантаж, транспорт, навантаження, матеріали.*

E. I. KALININ
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Tractors, Cars and Bioenergy Resources
National University of Bioresources and Nature Management of Ukraine
ORCID: 0000-0001-6191-8446

V. M. KOLODNENKO
Senior Lecturer
Sumy National Agrarian University
ORCID: 0000-0002-8450-6759

N. M. MELNYK
Senior Lecturer
Sumy National Agrarian University
ORCID: 0000-0001-9967-0669

SYNTHESIS OF THE THEORY OF MOTION OF SOLID BODIES FOR FAULT-TOLERANT IDENTIFICATION OF THEIR PARAMETERS FILLED WITH LOOSE SUBSTANCES

The dynamics of the movement of a specialized vehicle when loaded with bulk cargo can be structurally classified into the category of bulk media. Some of them (fluid) can be considered as an ideal fluid medium, represented, in the first approximation, by an ideal incompressible liquid that has no binding forces between particles. Others (poorly free-flowing) should be considered as a cohesive medium, which is intermediate between perfectly free-flowing and solid bodies.

Since the process of forming a bulk body is practically known in advance, as well as its mechanical properties (the coefficient of internal friction, the initial shear resistance for bound bulk cargoes, the coefficient of friction on solid surfaces, the compaction coefficient under the influence of dynamic loads, etc.), it can be said that the problems of unbounded equilibrium have specific solutions. Then we can also talk about the possibility of identifying the dynamics of a truck during the transportation of a bulk medium.

In this case, from the principle of the least action in the Hamilton-Ostrogradsky form, Lagrange's affinity for the structure of a solid body is derived, which has volumes, almost or often on top of the coarse middle, represented in the ideal form. To expand the possibility of stagnation of the theory, it is accepted that the model effervescent middle has a surface tension.

The first integrals of these equals are seen. Far from the rvnya ruk one can see the minds behind which the place of rvnovaga or stationary rukh of a solid body with a husky middle, which comes down to the minds of extremeness (stationarity) of potential energy or change new potential energy system. In practically certain episodes, a minimum change in potential energy is required to be followed by another variation of the remaining output that is induced.

The non-linear statement has a theorem about the instability of the position of an equal body with a dry core at the same time, if the potential energy of the system does not have a minimum in the position of the equal body.

Key words: *solid, potential energy, vantage, transport, vantage, materials.*

Постановка проблеми

Розвиток аграрного сектора зумовлює безперервне зростання вантажних перевезень на всіх видах транспорту, причому більша частка вантажообігу, а отже, і більшість операцій навантаження, транспортування та вивантаження припадає на насипні вантажі. Величезний обсяг операцій з насипними вантажами, що обчислюється мільйонами тонн, вимагає створення раціональних та надійних машин та пристроїв для навантаження, вивантаження, переміщення та зберігання зазначених вантажів. Машини та пристрої ці повинні бути досить міцними та довговічними, а їх конструювання має здійснюватися з мінімальними витратами матеріалів [1].

Особливу роль при переміщенні сипких матеріалів має транспорт, і, в першу чергу автомобільний, обсяг якого в загальному машинному парку аграрного сектора становить до 50% і вище [2, 3]. Проектування автомобілів, що використовуються при перевезенні сипких матеріалів, здебільшого ґрунтувалося на емпіричних даних, проте при сучасному швидкому розвитку конструкцій машин накопичення досвідчених відомостей [4-7] про раціональність конструкцій окремих елементів вантажних автомобілів відстає від потреб проектування [8, 9]. Нині вже назріла необхідність створення теоретичних методів розрахунку динаміки вантажних автомобілів у процесі транспортування сипких вантажів з урахуванням механічних властивостей останніх.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Насипні вантажі за структурою можуть бути віднесені до категорії сипких середовищ. Деякі з них (легко сипучі) можуть розглядатися як ідеально сипуче середовище, представлене, в першому наближенні, ідеальною стисливою рідиною, що не має сил зв'язку між частинками. Інші (погано сипучі) повинні розглядатися як зв'язне середовище, що є хіба що проміжним ступенем між ідеально сипучим і твердим тілами.

В опублікованих останніми роками роботах з теорії сипучих середовищ наводяться загальні методи вирішення систем рівнянь напруженого та деформованого стану. Ці методи лише у найпростіших випадках призводять до розрахункових формул алгебри, більшою ж частиною завдання доводиться вирішувати наближеним чисельним інтегруванням. Такий підхід призводить до того, що отримані значення неможливо використовувати при вирішенні проблем, пов'язаних із міцністю та надійністю машин, що, у свою чергу, призводить до значного зниження ресурсу машини та зниження стійкості до відмови ідентифікації її параметрів.

У всіх опублікованих дослідженнях з теорії сипучого середовища розглядається гранична рівновага останньої. Однак при роботі з насипними вантажами, і особливо при їх транспортуванні, здебільшого спостерігається їх ненасичений напружений стан, для якого висновки теорії граничної рівноваги непридатні.

Оскільки практично процес формування сипучого тіла заздалегідь відомий, так само як відомі його механічні властивості (коефіцієнт внутрішнього тертя, початковий опір зсуву для пов'язаних насипних вантажів, коефіцієнт тертя про тверді поверхні, коефіцієнт ущільнення під впливом динамічних навантажень і т.п.) можна говорити, що завдання ненасиченої рівноваги мають конкретні рішення. Тоді можна говорити і про можливість ідентифікації динаміки вантажного автомобіля під час транспортування сипучого середовища.

Викладення основного матеріалу дослідження

Уявимо собі абсолютно тверде тіло, що має об'єм, частково або повністю заповнений сипким середовищем, яку представимо у вигляді ідеальної однорідної стисливої рідини. Тіло і рідину в його порожнині розглядатимемо як одну механічну систему та вивчати її рух по відношенню до нерухомої (інерційної) системи осей координат. Крім того, введемо до розгляду рухому систему осей координат $Ox_1x_2x_3$, жорстко пов'язану з твердим тілом, з початком у певній точці O тіла. Радіус-вектор будь-якої точки V системи відносно точки O' позначимо через $\bar{r}'_v$, а відносно точки O – через $\bar{r}_v$. Абсолютну швидкість точки V можна представити у вигляді:

$$\bar{v}_V = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r}_V + \bar{u}_V$$

де $\bar{v}_0$ – вектор швидкості точки O тіла; $\bar{\omega}$ – вектор його миттєвої кутової швидкості; $\bar{u}_V = d\bar{r}_V / dt$ – вектор відносної швидкості точки V в русі щодо тіла.

Очевидно, що для точок твердого тіла $\bar{u}_V = 0$. Кінетична енергія системи T складається з кінетичних енергій тіла та рідини, причому

$$T_1 = \frac{M_1\bar{v}_0^2}{2} + M_1\bar{v}_0\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}_1) + \frac{\bar{\omega}\Omega^{(1)}\cdot\bar{\omega}}{2},\; T_2 = \rho\int_\tau T^\circ d\tau\,, \tag{1}$$

де M_1 и $\bar{r}_1$ – маса та радіус-вектор центру мас твердого тіла; $\Omega^{(1)}$ – тензор інерції тіла для точки O; $T^\circ = 0,5\text{v}^2$ – щільність кінетичної енергії рідини; τ – обсяг простору $x_1x_2x_3$, зайнятий рідиною в даний момент часу; ρ – щільність рідини.

Об'єм τ обмежений стінками σ_1 порожнини, з якими рідина стикається в даний момент часу, і вільною поверхнею S (якщо рідина частково заповнює порожнину), рівняння якої можна подати у вигляді

$$f(x_1,x_2,x_3,t) = 0 \tag{2}$$

Поверхня σ, з якою в даний момент контактує рідина, і поверхня σ_1, з якою в даний момент стикається рідина, і поверхня σ_2, з якою стикається повітря.

Границею цих двох частин поверхні σ є лінія l перетину поверхні S з поверхнею σ. Якщо вільна поверхня рідини S не перетинається зі стінками порожнини σ, очевидно, лінії l немає. Надалі припускатимемо, що поверхня S є гладкою або складається з кінцевого числа елементів гладких поверхонь.

Будемо припускати, що тверде тіло з рідиною, що розглядається, стиснуте деякими ідеальними геометричними зв'язками або є вільним. Число ступенів свободи тіла позначимо через n ($n \le 6$).

Положення системи визначатимемо лагранжовими координатами тіла q_j ($j = \overline{1,n}$) та декартовими координатами частинок рідини x_i ($i = 1,2,3$). При цьому вектори $\bar{v}_0$ і $\bar{\omega}$ можна викласти у вигляді деяких лінійних функцій узагальнених швидкостей $\dot{q}_j$ з коефіцієнтами, що залежать від узагальнених координат q_j. Використовуючи ці вирази і підставляючи їх у формули (1), кінетичну енергію тіла та щільність кінетичної енергії рідини представимо у вигляді функцій другого ступеня від $\dot{q}_j$ и u_i: $T_1 = T_1(\dot{q}_j, q_j, t)$, $T^\circ = T^\circ(\dot{q}_j, q_j, u_i, x_i, t)$.

Вектор заданої активної сили, прикладеної до певної точки системи, позначимо через $\bar{F}$. Серед цих сил розрізнятимемо сили, що діють на точки твердого тіла, масові сили, що діють на рідину, та сили поверхневого натягу.

Наслідуючи концепцію Гауса, вважатимемо, що внаслідок зіткнення вздовж деякої поверхні двох різнорідних середовищ r і s виникають сили натягу, що мають потенціал, що дорівнює добутку площі поверхні зіткнення на коефіцієнт поверхневого натягу α_{rs}, залежить від природи обох середовищ, причому, очевидно, $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$. Також, очевидно, що у разі сипучого середовища $\alpha_{rs} = \alpha_{sr} = 0$. У цьому випадку твердого тіла з рідиною таких різнорідних середовищ, взагалі кажучи, три: тверде тіло, рідина і повітря, яким приписуватимемо індекси 1, 2 і 3 відповідно. Коефіцієнти α_{nm} надалі вважаються постійними.

Для виведення рівнянь руху твердого тіла з ідеальною рідиною скористаємося принципом найменшої дії Гамільтона-Остроградського.

Враховуючи умову стискання рідини, запишемо принцип у вигляді:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T + \sum_V \bar{F}\cdot\delta\bar{r}'_V + \int_\tau p\,div\,\delta r'_V d\tau\right)dt = 0\,, \tag{3}$$

де символ δ означає варіацію або зміну відповідної величини при можливому переміщенні (при $\delta t = 0$), причому при постійних межах інтегрування

$$\delta r'_V = 0 \text{ при } t = t_0,\; t = t_1\,; \tag{4}$$

$p(x_1,x_2,x_3,t)$ – множник Лагранжа, який у даному разі представляє гідродинамічний тиск. Варіюючи вираз кінетичної енергії системи (1), маємо

$$\delta T=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\delta \dot q_j\right)+\sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\left(\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}\delta u_i\right)d\tau . \quad (5)$$

Підрахуємо суму елементарних робіт активних сил, що додаються до системи, на можливому її переміщенні. Так як для точок твердого тіла та частинок рідини $\bar r'=\bar r'(q_j,x_i,t)$, то

$$\sum_{V}\bar F\cdot\delta\bar r_v'=\sum_{j=1}^{n}Q_j\delta q_j+\rho\int_{\tau}\sum_{i=1}^{3}F_i\delta x_i d\tau-\alpha_{23}\delta S-\alpha_{12}\delta\sigma_1-\alpha_{13}\delta\sigma_2-p_0\int_{S}\bar n\cdot\delta_1\bar r dS , \quad (6)$$

де $Q_j=\sum_{V}\bar F\frac{\partial r_V'}{\partial q_j}$ $(j=\overline{1,n})$ – узагальнені сили; $\delta_1\bar r$ – варіація радіуса-вектора $\bar r=x_1\bar i_1+x_2\bar i_2+x_3\bar i_3$ при фіксованих ортах рухомих осей $\bar i_s$; $\bar n$ – вектора зовнішньої нормалі до поверхні S.

Враховуючи закон збереження маси, будемо вважати, що зміна вектора $\delta_1\bar r$ зміщення рідини є неперервною функцією.

Вектор можливого переміщення рідини щодо твердого тіла $\delta_1\bar r$ будемо вважати безперервною функцією радіуса-вектора, що диференціюється $\bar r$, задовольняє умовам стискання в області τ, непроникності стін σ та збереження об'єму рідини

$$div\delta_1\bar r=0 ;\ \bar n_\sigma\cdot\delta_1\bar r=0 ;\ \int_S\bar n\cdot\delta_1\bar r dS=0 , \quad (7)$$

де $\bar n_\sigma$ – нормаль до поверхні σ.

Варіації площі вільної поверхні S та площ змоченої σ_1 і не змоченої σ_2 частин поверхні стін порожнини на можливому переміщенні $\delta_1\bar r$ дорівнює:

$$\begin{gathered}\delta S=\int_S 2H\delta\zeta dS+\int_l\delta\zeta_1 dl;\\ \delta\sigma_1=-\delta\sigma_2=\int_l\delta\zeta_2 dl;\\ \delta\zeta=\bar n\cdot\delta_1\bar r;\\ \delta\zeta_i=\bar n_i\cdot\delta_1\bar r,(i=1,2);\\ H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\end{gathered} \quad (8)$$

де H – середня кривизна поверхні; R_1 і R_2 – головні радіуси кривизни поверхні S у цій точці, прийняті додатніми, якщо центр кривизни лежить з тієї ж сторони цієї поверхні, як і рідина, і відємними –в іншому випадку; $\bar n_1$ і $\bar n_2$ – орти зовнішніх нормалей до контуру l поверхонь S і σ_1, розташовані відповідно до дотичних площин до цих поверхонь. Кут між нормалями $\bar n_1$ и $\bar n_2$ позначимо через θ. Припускаючи, що навколо контуру поверхню стінок порожнини σ є досить гладкою і не має гострих ребер, знайдемо, що

$$\sigma\zeta_1=\sigma\zeta_2\cos\theta . \quad (9)$$

Розглянемо також інтеграл

$$\int_\tau p div\delta\bar r' d\tau=\int_\tau p div\delta_1\bar r d\tau .$$

Так як $pdiv\delta_1\bar r=div(p\delta_1\bar r)-gradp\cdot\delta_1\bar r$ то, використовуючи теорему Гаусса-Остроградского, отримаємо:

$$\int_\tau p div\delta_1\bar r d\tau=\int_S p\bar n\cdot\delta_1\bar r dS-\int_\tau gradp\cdot\delta_1\bar r d\tau . \quad (10)$$

Підставляючи вирази (4) – (9) до рівняння (3), отримаємо:

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}\partial\dot q_j\right)+\sum_{i=1}^{3}\rho\int_\tau\left(\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}\delta u_i+F_i\delta x_i\right)d\tau+\right.\\ +\sum_{j=1}^{n}Q_i\delta q_i-\int_S(2\alpha_{23}H+p_0-p)\delta\zeta dS-\int_l(\alpha_{23}\cos\theta+\alpha_{12}-\alpha_{13})\delta\zeta_2 dl-\\ \left.-\int_\tau gradp\cdot\delta_1\bar r d\tau\right\}dt=0.\end{gathered} \quad (11)$$

Інтегруючи частинами $(\partial T / \partial \dot{q}_j)\delta \dot{q}_j$ и $(\partial T^{\circ} / \partial u_i)\delta u_i$, а також враховуючи, що умови (4) у межах інтегрування еквівалентні $\delta q_j = 0$, $\delta x_i = 0$ при $t = t_0$, $t = t_1$, отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j + \sum_{i=1}^{3} \rho \int_{\tau} \left(\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i} + F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \delta x_i d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_S (2\alpha_{23} H + p_0 - p)\delta\zeta dS - \int_l (\alpha_{23}\cos\theta + \alpha_{12} - \alpha_{13})\delta\zeta_2 dl \right\} dt = 0. \tag{12}$$

Через незалежність δq_i і δx_i отримуємо рівняння руху твердого тіла з ідеальною рідиною у формі Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j;$$
$$\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}\frac{d}{dt} - \frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \tag{13}$$

при $j = \overline{1,n}$ и $i = 1,2,3$, а також граничні умови для тиску p на вільній поверхні S:

$$p = p_0 + 2\alpha_{23} H, \tag{14}$$

і для крайового кута θ на контурі l:

$$\cos\theta = \frac{\alpha_{13} - \alpha_{12}}{\alpha_{23}}. \tag{15}$$

До цих рівнянь і граничних умов слід приєднати рівняння стискання рідини

$$div\overline{u} = 0, \tag{16}$$

а також кінематичні умови на твердих стінках $\sigma_1 - u_n = \overline{u} \cdot \overline{n} = 0$ та на вільній поверхні $S - \partial f / \partial t + \overline{u} \cdot gradf = 0$.
Слід зазначити, що у разі, коли прикладені до системи активні сили мають силову функцію $U(\overline{r}'_V, t)$, тобто

$$\overline{F} = grad_{\overline{r}'_V} U,$$

узагальнені сили

$$Q_j = \sum_V \frac{\partial \overline{r}'_V}{\partial q_j} \cdot grad_{\overline{r}'_V} U = \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1,n},$$

і рівняння (13) набувають вигляду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{17}$$

де $L = T + U$ – функціонал Лагранжа. У випадку силова функція активних сил, які діють на систему:

$$U = U_1 + \rho\int_{\tau} U_2 d\tau + U_2^*,$$

де $U_1(q_j, t)$ – силова функція активних сил, прикладених до твердого тіла; $U_2(q_j, x_i, t)$ – силова функція масових сил, які діють на рідину;

$U_2^* = -(\alpha_{23}S + \alpha_{12}\sigma_1 + \alpha_{13}\sigma_2)$ – силова функція сил поверхневого натягу.

Функцію U далі будемо вважати безперервною, що володіє безперервними похідними частинними по всіх координатах. Позначаючи через $L^{\circ} = T^{\circ} + U_2$ функцію Лагранжа для одиниці маси рідини, рівняння (13) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^{\circ}}{\partial u_i} - \frac{\partial L^{\circ}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3, \tag{18}$$

оскільки у разі дії потенційних сил

$$F_i = \frac{\partial U_2}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3.$$

Умови рівноваги твердого тіла з ідеальною рідиною

Розглянемо питання характеру рівноваги твердого тіла з рідиною у разі, якщо у становищі рівноваги потенційна енергія системи немає мінімуму. Для систем із кінцевим числом ступенів свободи існують, як відомо, доведення теореми Лагранжа, дані Ляпуновим та Читаєвим.

Аналогічну теорему можна довести й для твердого тіла з рідиною.

Обмежимося випадком, коли в околиці положення рівноваги потенційна енергія системи має вигляд $\Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \ldots$, де $\Pi^{(k)}$ – однорідний функціонал

відхилення системи від положення рівноваги ступеня k.

Теорема 1. Якщо для скільки завгодно малої околиці положення рівноваги твердого тіла з рідиною потенційна енергія системи Π може набувати відємних значень і якщо при цьому знаки виразів $\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \ldots$ и $2\Pi^{(2)} + 3\Pi^{(3)} + \ldots$ визначаються квадратичним функціоналом то положення рівноваги нестійке.

Допустимо, що в положенні рівноваги координати твердого тіла $q_j = 0$, $j = \overline{1,n}$, координати частинок рідини $x_i = x_{i0}$, $i = 1,2,3$ та рідина заповнює об'єм τ_0. Нехай у положенні рівноваги потенційна енергія системи $\Pi = 0$ та не мінімальна; в околиці положення рівноваги існує область, де $\Pi < 0$. Виведемо систему зі становища рівноваги і, надавши її собі, розглянемо збурений рух. Він описується рівняннями (17), (18), (16) із відповідними граничними умовами.

Радіус-вектор зміщення частинки рідини щодо твердого тіла з положення рівноваги позначимо через $\Delta\overline{r} = \overline{r} - \overline{r}_0$. Очевидно,

$$\Delta\overline{r} = \Delta_0\overline{r} + \int_{t_0}^{t_1} \overline{u}dt, \tag{19}$$

де $\Delta_0\overline{r}$ – радіус-вектор початкового зміщення рідини, причому через нестисливість $div\Delta_0\overline{r} = 0$. Тоді з (19) при врахуванні рівняння (16) випливає:

$$div\Delta\overline{r} = 0. \tag{20}$$

Нахил збуреної поверхні рідини до незбуреної характеризується частинними похідними. n_u, n_v функції $n(u,v) = \Delta\zeta$. Максимум $|n_u|$, $|n_v|$ позначимо через ∇ і назвемо нахилом збуреної поверхні до незбуреної.

Розглянемо функціонал

$$V = -(T+\Pi)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}q_j + \sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}\Delta x_i d\tau\right). \tag{21}$$

У досить малій околиці положення рівноваги, тобто в області малих за абсолютною величиною значень координат q_j, Δx_i способи ∇ та швидкостей $\dot{q}_j$, u_i виділимо існуючу для скільки завгодно малих за абсолютною величиною q_j, Δx_i, ∇, $\dot{q}_j$, u_i нескінченно мірну область Υ, визначену спільними нерівностями виду:

$$\begin{gathered} T+\Pi<0; \\ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}q_j + \sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}\Delta x_i d\tau > 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Існування першої з цих нерівностей при досить малих $\dot{q}_j$, u_i очевидно через умови теореми про відсутність мінімуму Π. У точках околиці положення рівноваги, де виконується ця нерівність, швидкості $\dot{q}_j$, u_i завжди можна вибрати за знаком такими, щоб виконувалася і друга з нерівностей (22).

В області Υ функціонал V є, очевидно, обмеженим, тобто існує таке позитивне число N, що в області Υ

$$|V| < N. \tag{23}$$

Похідна за часом від функціоналу V, в силу рівнянь збуреного руху (17), (18), (16), має вигляд:

$$\dot{V} = -(T+\Pi)\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j}q_j\right) + \sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\left[\left(\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_2}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)\Delta x_i + \frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}u_i\right]d\tau\right\}. \tag{24}$$

Враховуючи співвідношення

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i}u_i d\tau = 2T, \tag{25}$$

у справедливості якого неважко переконатися безпосереднім обчисленням, вираз для $\dot{V}$ запишемо у вигляді

$$\dot{V} = -(T+\Pi)\left\{2T + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_j}q_j + \sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\left(\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_2}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)\Delta x_i d\tau + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_j}q_j\right\}. \quad (26)$$

Внаслідок того, що зв'язки, накладені на тверде тіло, передбачається не залежать від часу, кінетична енергія T є додатною щодо $\dot{q}_j$ і u_i. Для досить малих за абсолютною величиною значень q_j і Δx_i вираз $2T + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_j}q_j + \sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i}\Delta x_i d\tau$ за безперервністю також буде додатнім щодо $\dot{q}_j$ і u_i.

Розглянемо тепер інші доданки у виразі (26). Враховуючи, що $\Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \ldots$, де $\Pi^{(2)} = \delta^2\Pi/2!$, $\Pi^{(3)} = \delta^3\Pi/3!$, знаходимо:

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_i}\right)_0 q_i + \rho\int_{S_0}\left(\frac{\partial U_2}{\partial q_j}\right)_0 ndS,$$

як що

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_j}q_j = -\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j + \rho\int_{S_0}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U_2}{\partial q_j}\right)_0 q_j ndS + \ldots$$

Далі, з урахуванням (21) і (14), будемо мати

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{3}\rho\int_{\tau}\frac{\partial U_2}{\partial x_i}\Delta x_i d\tau = \rho\int_{S_0}\left[U_2(0,x_i) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U_2}{\partial q_j}\right)_0 q_j + \left(\frac{\partial U_2}{\partial n}\right)_0 n\right]ndS + \ldots; \\ \sum_{i=1}^{3}\int_{\tau}\frac{\partial p}{\partial x_i}\Delta x_i d\tau = \alpha_{23}\int_{S_0}\left[2H - 2(2H^2 - K)n - \Delta^{\circ} n\right]ndS.\end{gathered} \quad (27)$$

Застосовуючи формулу Гріна, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\tau}\frac{\partial p}{\partial x_i}\Delta x_i d\tau = \alpha_{23}\int_{S_0}[2Hn - 2(2H^2 - K)n^2 + \nabla^{\circ} n]dS - \alpha_{23}\int_{l_0} n\frac{dn}{ds_1}dl. \quad (28)$$

Таким чином, остаточно матимемо

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_j}q_j + \sum_{i=1}^{3}\int_{\tau}\left(\rho\frac{\partial U_2}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\Delta x_i d\tau = -\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j + \\ +\int_{S_0}\left[2\rho\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U_2}{\partial q_j}\right)_0 q_j n + \rho\left(\frac{\partial U_2}{\partial n}\right)_0 n^2 + 2\alpha_{23}(2H^2 - K)n^2 - \alpha_{23}\nabla^{\circ} n\right]dS + \\ +\alpha_{23}\int_{l_0}\left(\frac{1}{R_{n_2}} - \frac{\cos\theta}{R_{n1}}\right)n_2^2 \sin\theta dl + \ldots = -2\Pi^{(2)} + \ldots,\end{gathered} \quad (29)$$

де крапки позначають члени виду $-3\Pi^{(3)} + \ldots$. Згідно (26), знаходимо:

$$\dot{V} = -(T+\Pi)\left\{2T + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_j}q_j + \rho\int_{\tau}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i}\Delta x_i d\tau - 2\Pi^{(2)} + \ldots\right\}. \quad (30)$$

Так як в області Υ потенційна енергія Π негативна, а знаки Π та вирази $2\Pi^{(2)} + 3\Pi^{(3)} + \ldots$ визначаються членами другого порядку $\Pi^{(2)} < 0$, то в області Υ цей вираз відємний: $2\Pi^{(2)} + 3\Pi^{(3)} + \ldots < 0$.

Отже, в області Υ похідна від функціоналу V є додатною щодо q_j, Δx_i, $\dot{q}_j$, u_i, ∇. При цьому певна позитивність функціоналу $\dot{V}$ у сфері позитивності функціоналу V визначається аналогічно до визначеності функції в області $V > 0$. Вибираючи початкові збурення q_{j0}, $\Delta_0 x_i$, ∇_0, $\dot{q}_{j0}$, u_{i0} в області Υ як завгодно малими, так що початкове значення $V_0 > 0$, з рівняння

$$V = V_0 + \int_{t_0}^{t}\dot{V}dt \quad (31)$$

покладаємо, що з часом нерівність (23) буде порушена, чим і доводиться нестійкість положення рівноваги.

Теорема. Якщо у положенні рівноваги твердого тіла з рідиною потенційна енергія системи $\Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + ...$ не має мінімуму і це зрозуміло вже за її другою варіацією $\Pi^{(2)}$ без необхідності розгляду членів вищих порядків, положення рівноваги нестійке.

У нескінченно мірному просторі змінних q_j, Δx_i, n_u, n_v розглянемо гіперсферу з центром у положенні рівноваги довільно малого радіусу $\varepsilon > 0$. На цій гіперсфері безперервний функціонал Π для деяких значень a_s аналізованих змінних набуває найменшого значення Π_0. Згідно з припущенням о потенційної енергії Π, це найменше значення буде негативним та визначається функціоналом $\Pi^{(2)}$. Отже, Π_0 буде другого порядку малості порівняно з ε.

Нехай область, де вивчається питання про нестійкість збурених рухів, визначена нерівностями

$$\left|q_j\right| < l\,,\ \left|x_i\right| < l\,,\ \left|\dot{q}_j\right| < l\,,\ \left|u_i\right| < l\,,\ \left|\nabla\right| < l \tag{32}$$

при довільно малому додатному l. Припускатимемо, що відношення величин l і ε представляє певну кількість, хоча й дуже велику. При такому припущенні про вибір l і ε вираз

$$2\Pi_0 + \Pi^{(3)} + 2\Pi^{(4)} + ... \tag{33}$$

в області (32) буде безперечно відємним. У збуреному русі за початкові значення змінних приймемо значення a_s, а початкові значення всіх швидкостей приймемо рівними нулю. Такий збурений рух відбуватиметься відповідно до закону кінетичної енергії $T + \Pi = \Pi_0$ і, отже, відбуватиметься в області, визначеній нерівністю

$$\Pi_0 - \Pi \geq 0\,. \tag{34}$$

Розглянемо функціонал

$$V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} q_j + \rho \int_{\tau} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T^{\circ}}{\partial u_i} \Delta x_i d\tau \tag{35}$$

і похідну за часом від нього через рівняння обуреного руху (17), (18), (16)

$$\dot{V} = 2T + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_j} q_j + \rho \int_{\tau} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i} \Delta x_i d\tau - 2\Pi^{(2)} + ...\,. \tag{36}$$

Для збуреного руху, що відбувається в області (34), похідна $\dot{V}$ буде додатною. Справді, як з'ясовано вище, вираз

$$2T + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_j} q_j + \rho \int_{\tau} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T^{\circ}}{\partial x_i} \Delta x_i d\tau$$

при досить малому l буде додатнім щодо $\dot{q}_j$ і u_i, а

$$-(2\Pi^{(2)} + 3\Pi^{(3)} + ...) > 0 \tag{37}$$

в силу (33) і (34). Позначимо через l' мінімум виразу, що стоїть у лівій частині нерівності (37), усередині області, визначеної нерівностями (32) та (34). З рівняння (31), де у цьому випадку $V_0 = 0$, виводимо, що $V > l'(t - t_0)$, поки змінні за час від t_0 до t не порушували нерівностей (32). Отже, з часом нерівність (23) буде порушена. Теорему доведено.

Висновки

Таким чином, вивчення руху твердого тіла з ідеальною рідиною зводиться до дослідження спільної системи рівнянь (13) та (16) з граничними умовами (14) та (15). Зазначимо, що у разі, коли силами поверхневого натягу можна знехтувати, умова (14) набуває вигляду $p = p_0$, а умова (15) зникає. Умова (15) буде, таким чином, наслідком більш високого порядку рівнянь, які слід інтегрувати при врахуванні сил поверхневого натягу, щоб отримати рівняння виду (2). Рівняння (14), (15) і вільної поверхні, зрозуміло, випадають.

Рівняння (13) мають вигляд звичайних рівнянь Лагранжа $p = 0$, що відповідає випадку відсутності рідини в обємі, то рівняння (13) будуть рівняння Лагранжа для одного твердого тіла.

Список використаної літератури

1. Джента Г., Морелло Л. Автомобільні шасі (серія машинобудування 2). Берлін: Springer-Verlag, 2009.
2. С. Овсянніков, Є. Калінін, І. Колісник. Коливальний процес багатоопорних машин при проїзді нерівностей. Міжнародна науково-практична конференція «Енергоменеджмент муніципальних об'єктів та стійкі енергетичні технології: досягнення інтелектуальних систем та обчислень EMMFT. 2018. Вип. 982. С. 307–317. doi: 10.1007/978-3-030-19756-8_28.

3. Паувелуссен Дж. Основи динаміки автомобіля. Оксфорд: Butterworth-Heinemann, 2014.

4. Пацейка Х. Динаміка шин і транспортних засобів. Оксфорд: Butterworth-Heinemann, 2006.

5. Ребров О., Кожушко А., Кальченко Б., Мамонтов А., Заковоротний А., Калінін Є., Головіна Є. Математична модель характеристик дизеля для визначення показників тягової динаміки колісного трактора. EUREKA Phys Eng. 2020. Том. 4. С. 90–100. https://doi.org/10.21303/2461-4262.2020.001352

6. Луйтен М. Бічна динамічна поведінка зчленованих комерційних транспортних засобів [Магістерська робота]. Ейндховен: Технологічний університет Ейндховена, 2010.

7. Калінін Ю., Клец Д., Шуляк М., Холодов А. Інформаційна система керування транспортно-технологічним агрегатом із змінною масою. Матеріали семінару CEUR. 2020. Том. 2732. С. 303–312.

8. Смирнов О., Борисенко А., Марченко А., Грицук І. та ін. Нова концепція створення гібридної силової установки автомобіля. Технічний документ SAE 2020-01-2248, 2020. https://doi.org/10.4271/2020-01-2248.

9. Калінін Ю., Сайчук О., Романченко В., Колісник І., Кожушко А. Визначення напружень у балках за короткочасним впливом на їх опори. У: Важливість нових технологій і підприємництва в розвитку бізнесу: у контексті економічної різноманітності в країнах, що розвиваються. ICBT. Конспект лекцій з мереж і систем. Т. 194. 2021. С. 617–328. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69221-6_47

References

1. Genta G., Morello L. (2009) Automotive chassis (mechanical engineering series 2). Berlin: Springer-Verlag;.

2. S. Ovsyannikov, E. Kalinin, I. Kolisnyk. (2018). Oscillating process of multi-support machines when driving over irregularities. International scientific and practical conference “Energy management of municipal facilities and sustainable energy technologies: achievements of intelligent systems and calculations EMMFT 2018. Issue 982. 307–317. doi: 10.1007/978-3-030-19756-8_28.

3. Pauwelussen J. (2014) Fundamentals of Vehicle Dynamics. Oxford: Butterworth-Heinemann;

4. Patseyka H. (2006) Dynamics of Tires and Vehicles. Oxford: Butterworth-Heinemann;

5. Rebrov O., Kozhushko A., Kalchenko B., Mamontov A., Zakovorotny A., Kalinin E., Golovina E. (2020) Mathematical model of diesel engine characteristics for determining traction dynamics indicators of a wheeled tractor. EUREKA Phys Eng. vol. 4. 90–100. https://doi.org/10.21303/2461-4262.2020.001352

6. Luyten M. (2010) Lateral dynamic behavior of articulated commercial vehicles [Master’s thesis]. Eindhoven: Eindhoven University of Technology.

7. Kalinin Y., Klets D., Shulyak M., Kholodov A. (2020) Information control system for a transport and technological unit with variable mass. Proceedings of the CEUR seminar. vol. 2732. 303–312.

8. Smirnov O., Borisenko A., Marchenko A., Hrytsuk I. et al. (2020) A new concept for creating a hybrid vehicle power plant. Technical document SAE 2020-01-2248, https://doi.org/10.4271/2020-01-2248.

9. Kalinin Yu., Saychuk O., Romanchenko V., Kolisnyk I., Kozhushko A (2021). Determination of stresses in beams by short-term impact on their supports. In: The importance of new technologies and entrepreneurship in business development: in the context of economic diversity in developing countries. ICBT 2020. Lecture notes on networks and systems. Vol. 194. Pp. 617–328. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69221-6_47