BULLETIN
KHERSON NATIONAL
TECHNICAL UNIVERSITY

ВЕСТНИК
ХЕРСОНСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 2078 – 4481

ВЕСТНИК

Херсонского национального технического университета

3(42)

Херсон – 2011

Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 3(42). – Херсон: ХНТУ, 2011. – 504 с.

Настоящий выпуск содержит статьи, посвященные современным проблемам математического моделирования. В публикациях приводятся анализ состояния, достижения и перспективы математического моделирования в образовании, науке и промышленности.

Сборник рассчитан на научных работников, преподавателей, докторантов, аспирантов и студентов.

Журнал отпечатан ЧП "Олди-плюс" с готовых оригинал-макетов.

Компьютерный набор, макетирование и техническое редактирование	к.т.н., доц. Гучек Петр Иосифович
Научный редактор выпуска	д.ф.-м.н., проф. Хомченко Анатолий Никифорович
Рецензенты:	д.т.н., проф. Жолткевич Григорий Николаевич
	д.ф.-м.н., проф. Самойленко Валерий Григорьевич
	д.т.н., проф. Ванько Вячеслав Иванович
	д.ф.-м.н., проф. Ленюк Михаил Павлович
Ответственный за типографические работы	Гринь Дмитрий Сергеевич

Свидетельство о регистрации серия КВ №17371-6141ПР от 17.12.2010 г.

Рекомендовано к печати решением Ученого Совета ХНТУ
протокол №6 от 01.03.2011 г.
Подписано к печати 31.05.2011 г.
Усл. печ. листов 23. Тираж 120 экз.
Формат 69 × 84 ⅛ Бумага печ. №2.

Адрес: 73008, г. Херсон, Бериславское шоссе, 24

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ (МКММ-2011) (12-17 СЕНТЯБРЯ 2011 г.)

В 2011 г. в ХНТУ состоялась международная конференция по математическому моделированию (МКММ-2011), посвященная 190-летию со дня рождения П.Л.Чебышёва.

Организаторы конференции:

- Херсонский национальный технический университет
- Международная академия наук высшей школы
- Украинская ассоциация по прикладной геометрии
- Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
- Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
- Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
- Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского (г. Харьков)
- Национальный авиационный университет (г. Киев)
- Белгородский государственный университет

Тематические направления работы МКММ-2011:

1. Математическое моделирование физических и технологических процессов и технических систем.
2. Компьютерное моделирование вероятностных процессов и систем.
3. Моделирование задач аэродинамики и аэроупругости.
4. Компьютерное моделирование испытаний летательных аппаратов и их систем.
5. Прикладная геометрия и компьютерные технологии.
6. Прогнозирование и предотвращение техногенных и экологических катастроф.

Председатель Оргкомитета МКММ-2011:
Бардачев Ю.Н. – д.т.н., проф., ректор ХНТУ (Херсон).
Председатель программного комитета МКММ-2011:
Хомченко А.Н. – д.ф.-м.н., проф. (Херсон).

В состав организационного и программного комитетов вошли:
Вагер Б.Г. д.ф.-м.н. (Санкт-Петербург); Ванин В.В. д.т.н. (Киев); Ванько В.И. д.т.н. (Москва); Гандель Ю.В. д.ф.-м.н. (Харьков); Герасименко П.В. д.т.н. (Санкт-Петербург); Гнатушенко В.В. д.т.н. (Днепропетровск); Жолткевич Г.Н. д.т.н. (Харьков); Изранцев В.В. д.т.н. (Санкт-Петербург); Киселева Е.М. д.ф.-м.н. (Днепропетровск); Комяк В.М. д.т.н. (Харьков); Корчинский В.М. д.т.н. (Днепропетровск); Крючковский В.В. к.ф.-м.н. (Херсон); Куценко Л.Н. д.т.н. (Харьков); Ленюк М.П. д.ф.-м.н. (Черновцы); Михайленко В.Е. д.т.н. (Киев); Михайленко В.М. д.т.н. (Киев); Найдыш А.В. д.т.н. (Мелитополь); Нигора В.Н. д.т.н. (Киев); Плоский В.А. д.т.н. (Киев); Подгорный А.Л. д.т.н. (Киев); Сазонов К.А. д.т.н. (Киев); Самойленко В.Г. д.ф.-м.н. (Киев); Самохвалов С.Е. д.т.н. (Днепродзержинск); Свешников В.М. д.ф.-м.н. (Новосибирск); Сердюченко А.Н. д.ф.-м.н. (Николаев); Спиваковский А.В. д.пед.н. (Херсон); Тулученко Г.Я. д.т.н. (Херсон); Феоктистов В.В. д.т.н. (Москва).

Редколлегия

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 551.466

И.Б. Аббасов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕФРАКЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА МЕЛКОВОДЬЕ

Постановка задачи.

Проблема исследования поверхностных гравитационных волн на мелководье имеет достаточно давнюю историю. Интерес к волновым явлениям на поверхности жидкости, можно объяснить достаточной распространенностью и доступностью этого физического явления. Нелинейные поверхностные гравитационные волны в условиях мелководья описываются уравнениями мелкой воды. Несмотря на огромное количество исследований, теория волновых движений жидкости ещё остается не завершенной. В связи с этим актуальным является вопрос исследования волновых явлений на поверхности мелководных акваторий для учета их влияния на береговые образования и гидротехнические сооружения. Поэтому моделирование нелинейных поверхностных гравитационных волн может играть немаловажную роль при мониторинге экологического состояния мелководных заливов.

Анализ публикаций.

Рассмотрим результаты некоторых исследований, проведенных за последние десятилетия по численному моделированию волновых процессов в рамках теории мелкой воды на основе нелинейных и нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды.

Вопросы трансформации монохроматических волн над горизонтальным дном в прибрежной зоне достаточно подробно изучены в работах [1] и [2]. В лабораторных экспериментах и путем численного моделирования было исследовано влияние первых четырех гармоник на профиль поверхностной волны при её распространении по мелководью. Система эволюционных уравнений решалась численно с помощью метода Рунге-Кутта. Модель была верифицирована и проверена по данным лабораторных и натурных экспериментов.

Работа [3] посвящена численному моделированию и экспериментальным наблюдениям влияния эффектов нелинейного взаимодействия, отражения, и затухания на распространение поверхностных гравитационных волн в береговой зоне. Нелинейные взаимодействия приводят к удвоению числа гребней волны. Однако для волн меньшей амплитуды гребень не раздваивается. Описанные эффекты рассматриваются в рамках модели Буссинеска.

Статья [4] посвящена численному моделированию нелинейных длинных волн в бассейнах с пологим дном. Рассматривается нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды с учетом топографии и вязкости жидкости. Проводится сравнение расчетов по трансформации плоского возмущения свободной поверхности воды с опытными данными. Численно решается задача о влиянии коническо-цилиндрического острова, подводного хребта на распространение волны. Учитывается также влияние трения о наклонное дно на эволюцию плоской уединенной волны.

Работа [5] посвящена исследованию двухмерной численной модели воздействия затопленного волнореза на распространение волны. Рассмотрены вопросы моделирования волны, как до обрушения, так и после обрушения. Для проверки модели представлены результаты лабораторных экспериментов. В работе проведен анализ трансформации профиля волны. Также описана зависимость крутизны волны от её спектрального состава.

В работе [6] для модельных конфигураций профиля дна рассчитана эволюция двумерного спектра гравитационных волн в рамках трехволнового квазикинетического приближения. Оценено относительное влияние рефракции и нелинейности на изменение формы двумерного спектра гравитационных волн в процессе эволюции.

В работе [7] предлагается стохастическая модель распространения поверхностной волны на мелководье с учетом топографии дна. Проведено сравнение предлагаемой модели с известными аналитическими выражениями для глубоководного и мелководного режима. Приведены лабораторные наблюдения по распространению нелинейных волн. Детерминированная модель является более подходящей для больших расстояний распространения и более глубокой воды, а стохастическая модель особенно рассчитана для прибрежной зоны, включая зону прибоя.

Анализируя описанные работы можно отметить, что в большинстве случаев используются итерационные методы решения дискретных уравнений. В нашем случае мы будем использовать точные методы решения дискретных уравнений мелкой воды с условиями, привязанными к гидрофизическим условиям Азовского моря.

Основная часть. Система уравнений мелкой воды. Граничные и начальные условия.

Поверхностные гравитационные волны на мелководье описываются уравнением мелкой воды. Система уравнений мелкой воды содержит уравнение неразрывности и динамическое уравнение на основе закона сохранения импульса [8], [9]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -g\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = -\dfrac{\partial\left((H+\zeta)u\right)}{\partial x} \end{cases}, \tag{1}$$

где u – скорость частиц среды, ζ – функция возвышения поверхности, H – глубина жидкости. Уравнения мелкой воды не учитывают эффект дисперсии из-за её незначительности на мелководье.

В качестве граничных условий на свободной поверхности жидкости выполняется кинематическое граничное условие, т.е. скорость возвышения поверхности совпадает с вертикальной скоростью частиц среды:

$$w\big|_{z=\zeta(x,y,t)} = \frac{d\zeta(x,y,t)}{dt}. \tag{2}$$

Для динамического условия считаем, что давление на свободной поверхности жидкости равно атмосферному давлению. На дне предполагается условие равенства нулю вертикальной компоненты скорости частиц жидкости:

$$w\big|_{z=-H} = 0. \tag{3}$$

Начальное условие в нулевой момент времени предполагается $u(x,0)=0$, в остальные моменты времени изменение формы поверхности задается по гармоническому закону $u(0,t)=a\sin(\omega t)$, где a, ω – амплитуда и круговая частота поверхностной волны.

Построение дискретной модели.

После применения метода расщепления по физическим процессам получается система из трех уравнений (4). С помощью компоненты скорости частиц среды на текущем временном слое находятся компоненты на вспомогательном временном слое. Затем, из второго уравнения находится функция возвышения уровня свободной поверхности. Из третьего уравнения находятся компоненты скорости частиц на следующем временном слое.

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{u}-u}{\tau}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+\dfrac{\partial(\tilde{u}\zeta)}{\partial x}=\tau g\dfrac{\partial}{\partial x}\left((\zeta+H)\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial(\tilde{u}H)}{\partial x} \\ \dfrac{u-\tilde{u}}{\tau}=-g\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} \end{cases}, \quad (4)$$

где u – компонента скорости на текущем временном слое;

$\tilde{u}$ – компонента скорости на вспомогательном временном слое;

u – компонента скорости на следующем временном слое;

τ – шаг по времени, μ – параметр сеточной вязкости.

Для численного решения дифференциальных уравнений используется разностная схема. Разностная схема строится на основе интегро-интерполяционного метода на равномерной сетке по неявной схеме [10]. Неявная схема выбрана из-за её большего запаса устойчивости.

Дискретным аналогом первого уравнения системы (4) будет следующее уравнение:

$$\frac{u_i^{j+\frac{1}{2}}-u_i^j}{\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^j+u_i^j}{2}\cdot\frac{u_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}-u_i^{j+\frac{1}{2}}}{h_x}+\frac{u_{i-1}^j+u_i^j}{2}\cdot\frac{u_i^{j+\frac{1}{2}}-u_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{h_x}\right)=$$

$$=\mu\left(\frac{u_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}-u_i^{j+\frac{1}{2}}}{h_x^2}-\frac{u_i^{j+\frac{1}{2}}-u_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{h_x^2}\right). \quad (5)$$

Далее определяется порядок аппроксимации, и исследуются условия устойчивости дискретной модели. Для расчета системы уравнений был использован метод прогонки. Непрерывная задача эквивалентна дискретной задаче с порядком аппроксимации: $O(h_x^2+\tau)$, где h_x – шаг по пространственной координате. Согласно условию Куранта шаги сетки ограничены выражением: $\dfrac{h_x}{\tau}<\dfrac{2gH}{|\tilde{u}|}$.

Моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях залива.

Рассмотрим особенности моделирования процесса рефракции поверхностных гравитационных волн на мелководье. В качестве мелководной акватории мы воспользуемся условиями Таганрогского залива Азовского моря: средняя глубина не превышает 5 м, условиям мелководности удовлетворяют гравитационные волны с длинами свыше 30 м. В нашем случае поверхностные гравитационные волны являются свободными, т.е. являются волнами зыби, следовательно, влиянием ветра пренебрегаем.

Азовское море и его подводный рельеф сформировались в условиях погружения Азово-Кубанской впадины. Азовское море относится к типу внутренних морей, имеет сравнительно простые очертания, относительно однообразные берега и довольно несложный рельеф дна. Море преимущественно окружают абразионные и аккумулятивные береговые формы. Пологое побережье переходит в ровное и плоское дно. Самые большие глубины находятся в центральной части моря. Наибольшая глубина Азовского моря составляет 14 м [11].

Необходимо отметить, что вопросы рефракции поверхностных гравитационных волн на береговых образованиях были рассмотрены в работе [12] на основе приближенной аналитики. Были описаны волновые процессы при подходе нелинейной поверхностной волны к берегу, было проведено трехмерное моделирование береговых образований и процесса рефракции нелинейных поверхностных волн.

В данной работе линия дна смоделирована на основе графика степенных функций. Глубина уменьшается с H=3 м до нуля, крутизна склона не превышает значения $0{,}01^0$. На рис.1 представлена зависимость для скорости частиц поверхностной гравитационной волны при подходе к берегу.

Исходная поверхностная волна является синусоидальной, с уменьшением глубины уменьшается скорость распространения. Это приводит к уменьшению длины волны при постоянстве частоты и соблюдении закона сохранения энергии. Следовательно, профиль волны сжимается и увеличивается скорость частиц как на рис. 1. Наряду с уменьшением длины волны у берега мы наблюдаем укручение переднего фронта гребня волны, что приведет в дальнейшем к её обрушению на линии прибоя.

Укручение переднего фронта гребня поверхностной волны связано с влиянием нелинейного члена уравнений мелкой воды. При подходе к берегу гребень волны движется быстрее впадины, из-за трения о дно. В момент когда «гребень нагоняет подошву», передний склон волны становится отвесным, и волна обрушивается.

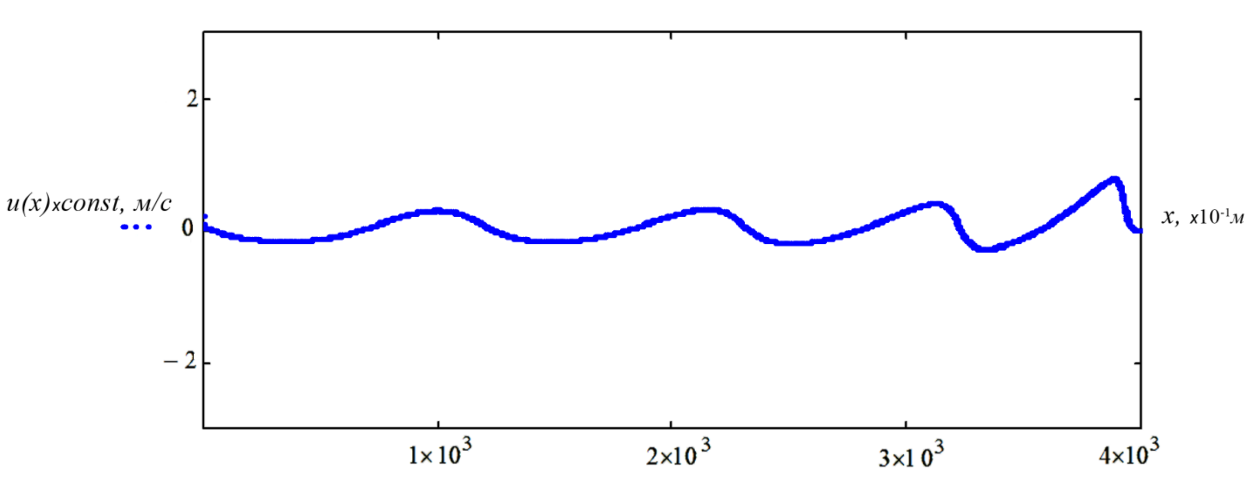


Рис. 1. Трансформация профиля поверхностной гравитационной волны при подходе к берегу, начальные параметры волны: частота f =0,045Гц; длина волны λ=120,5м; глубина H=3м; скорость распространения c=5,4м/с; волновой параметр kH=0,16; начальная крутизна $2a/\lambda$=0,003; нелинейный параметр ε=0,06.

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

Для проверки достоверности разработанной модели проводится сравнение полученных результатов с экспериментальными и численными профилями поверхностных волн, представленными в работе [5]. На основе сравнения можно отметить, что результаты проведенного численного моделирования нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнений мелкой воды в целом имеют хорошее совпадение с экспериментальными измерениями.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Chapalain G., Cointe R., Temperville A. Observed and modeled resonantly interacting progressive water-waves / G. Chapalain, R. Cointe, A. Temperville // Coastal Engineering Journal. – 1992. – №16. – P. 267–300.
2. Eldeberky Y., Madsen P.A. Determenistic and stochastic evolution equations for fully dispersive and weakly nonlinear waves / Y. Eldeberky, P.A. Madsen // Coastal Engineering Journal. – 1999. – №38. – P.1–24.
3. Elgar S., Norheim C. A., Herbers T. H. Nonlinear evolution of surface wave spectra on a beach / S. Elgar, C. A. Norheim, T. H. Herbers // Journal of physical oceanography. – 1998. – V.28. – №7. – P.1534–1551.
4. Литвиненко А.А., Хабахпашев Г.А. Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном / А.А.Литвиненко, Г.А. Хабахпашев // Вычислительные технологии. – 1999. – Т.4. – № 3. – С.95–105.
5. Kawasaki K. Numerical simulation of breaking and post-breaking wave deformation process around a submerged breakwater / K. Kawasaki // Coastal Engineering Journal. – 1999. – V.41. – №3&4. – P.201–223.
6. Полников В.Г. Относительная роль нелинейности и рефракции в эволюции спектра волн на мелкой воде / В.Г. Полников // Извести РАН. Физика атмосферы и океана. – 2005. – Т.41. – №1. – С.114–124.
7. Janssen T. T., Herbers T. H. C. & Battjes J. A. Generalized evolution equations for nonlinear surface gravity waves over two-dimensional topography / T. T. Janssen, T.H.C. Herbers & J. A. Battjes // J. Fluid Mech. – 2006. – V.552. – P.393–418.
8. Лемб Г. Гидродинамика / Г. Лемб – М.: Гостехиздат, 1947. – 524 с.
9. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж.Уизем М.: Мир, 1976. – 622 с.
10. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский Учеб. пос.для вузов. 2-ое изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 288 с.
11. Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. – T.V. Азовское море. С.-Пб.: Гидрометеоиздат. – 1991. – С.75–88.
12. Аббасов И.Б. Исследование и моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн в заливе / И.Б. Аббасов // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2004. – Т.40. – №3.– С.423–426.

АББАСОВ Ифтихар Балакишиевич – к.ф-м.н., доцент кафедры инженерной графики и компьютерного дизайна Таганрогского технологического института Южного федерального университета.

Научные интересы:

– моделирование нелинейных волновых явлений на мелководье, нелинейные волны в акустике.

УДК 539.219.3

Г.С. Абрамов, М.Г. Абрамов

ФОРМИРОВАНИЕ ЗОНЫ ВНУТРЕННЕГО ОКИСЛЕНИЯ ПРИ МАЛОЙ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОКИСЛОВ

Постановка проблемы и анализ публикаций. При определенных условиях высокотемпературного окисления (азотирования, борирования, цементации и т.д.) бинарных сплавов может формироваться только соответствующая двухфазная область – зона внутреннего окисления (ЗВО), а слой окалины на поверхности не образуется. Такая ситуация возникает, например, в том случае, когда давление кислорода в газовой среде меньше или равно равновесному с окислом легирующего элемента [1,2]. Из всего многообразия условий насыщения, приводящих к формированию двухфазной области типа ЗВО, можно выделить два основных случая:

1) легирующий элемент удаляется из образца через его внешнюю поверхность и на ней поддерживаются равновесные концентрации кислорода и легирующего элемента;

2) удаление легирующего элемента в газовую среду не происходит.

В первом случае граничные условия диффузионной задачи имеют следующий вид (граничные условия первого рода):

$$C_i(0,t)=C_i^1 \qquad (i=1,2),$$

а во втором (граничные условия второго рода для легирующего элемента и граничные условия первого рода для кислорода):

$$J_2\big|_{x=0}=0; \qquad C_i\left(0,t\right)=C_1^1.$$

Граничные условия второго рода для легирующего элемента могут иметь место при соответствующих насыщающих средах, когда, например, сплав и насыщающая среда находятся в квазиравновесии по легирующему элементу; при малой скорости перехода атомов легирующего элемента через границу сплав-среда и высокой скорости образования дисперсных частиц в диффузионной зоне. Наличие квазиравновесного состояния по легирующему элементу – случай редкий для практики, если только это не является целью специальных экспериментов. Вторая ситуация встречается значительно чаще. Она лежит в основе теоретической модели Вагнера [3]. Кроме того, в теории внутреннего окисления Вагнера предполагается, что пересыщение в твердом растворе релаксирует практически мгновенно и частицы второй фазы находятся в равновесии с твердым раствором. Аналогичное допущение сделано и в модели Киркалди [4], которая, как будет показано ниже, является модификацией модели Вагнера. Теории Вагнера-Киркалди широко используются для интерпретации экспериментальных результатов по внутреннему окислению и прогнозирования кинетики этого процесса. Вместе с тем, на основании моделей Вагнера-Киркалди определяются только скорость роста зоны внутреннего окисления и распределение суммарного объема частиц второй фазы в этой зоне.

Цель статьи. В этой связи представляется важным на основании модели процессов типа внутреннего окисления, выявить, с одной стороны, условия применимости теории Вагнера-Киркалди, а с другой – получить полную информацию о структуре двухфазной зоны (число частиц, их средний размер и суммарный объем).

Основная часть. В отличие от Вагнера, который принимал равным нулю равновесные концентрации кислорода и легирующего элемента на границе двухфазная зона-твердый раствор (x=y), отсутствие растворимости кислорода в твердом растворе (x>y) и легирующего элемента в зоне внутреннего окисления (x<y), Киркалди обратил внимание на то, что предположения не соответствуют реальным диаграммам состояния. В его теории учтено, что условию равновесия со второй фазой удовлетворяет целый набор концентраций кислорода и легирующего элемента, лежащих на линии растворимости. Эти равновесные концентрации могут меняться по координате и во времени, оставаясь при этом на линии растворимости, то есть

$$C_2(x,t) = f[C_1(x,t)] \tag{1}$$

В соответствии с (1), уравнения диффузии, образующие систему

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_{ii}\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + D_{ij}\frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} + D_{ii}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial C_i}{\partial x} + D_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial C_j}{\partial x} + \left(C_i^{\phi} - C_i\right)\frac{\partial Q}{\partial t}, \qquad \text{где } Q = \ln(1-V) \tag{2}$$

не являются независимыми. Следуя за Киркалди [4] и принимая для определенности линейную аппроксимацию кривой растворимости

$$C_1(x,t) = a + bC_2(x,t) \tag{3}$$

получаем из (2)

$$\begin{aligned} b\frac{\partial C_2}{\partial t} &= \left(bD_{11} + D_{12}\right)\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \left(bD_{11} + D_{12}\right)\frac{\partial C_2}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + C_1^{\phi}\frac{\partial Q}{\partial t} \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} &= \left(bD_{21} + D_{22}\right)\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \left(bD_{21} + D_{22}\right)\frac{\partial C_2}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + C_2^{\phi}\frac{\partial Q}{\partial t} \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$a = C_1^{(1)} - bC_2^{(1)}$$

$$b = \frac{dC_1^p}{dC_2^p} = const$$

$C_i^1 (i=1,2)$ – равновесная концентрация i-го компонента на поверхности (x=0); $Q = ln(1-V_{\phi})$; $V_{\phi}(x,t)$ – суммарный объем (относительная доля) дисперсных частиц.

Для решения (4) введем обобщенную переменную

$$\lambda = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

и коэффициенты

$$D_1 = \left(D_{11} + \frac{D_{12}}{b}\right); \qquad D_2 = \left(D_{21}b + D_{22}\right)$$

После соответствующих преобразований из (4), имеем

$$\frac{d^2C_2}{d\lambda^2} + \left(\frac{\lambda}{2D_1} + \frac{dQ}{d\lambda}\right)\frac{dC_2}{d\lambda} - \frac{C_1^{\phi}}{bD_1}\frac{\lambda dQ}{2d\lambda} = 0$$

$$\frac{d^2C_2}{d\lambda^2} + \left(\frac{\lambda}{2D_2} + \frac{dQ}{d\lambda}\right)\frac{dC_2}{d\lambda} - \frac{C_2^{\phi}}{bD_2}\frac{\lambda dQ}{2d\lambda} = 0$$

или

$$\frac{d^2C_2}{d\lambda^2} + \left(\frac{\lambda}{2D} + \frac{dQ}{d\lambda}\right)\frac{dC_2}{d\lambda} = 0 \tag{5}$$

$$\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right)\frac{dC_2}{d\lambda} = \left(\frac{C_1^{\phi}}{bD_1} - \frac{C_2^{\phi}}{D_2}\right)\frac{dQ}{d\lambda} \tag{6}$$

где $$D = \frac{D_1 D_2\left(C_2^{\phi}/\mathrm{D}_2 - C_1^{\phi}/\mathrm{bD}_1\right)}{C_2^{\phi} - C_1^{\phi}/\mathrm{b}}$$

Решение (5) имеет следующий вид

$$C_2(\lambda) = A + B\int_0^{\lambda} e^{-\frac{\xi^2}{4D} - Q}\, d\xi \tag{7}$$

Здесь A и B определяются из граничных условий. Дифференцируя (7) по λ и подставляя результат в (6), получаем

$$e^{Q} = 1 - V_{\phi} = const + \chi erf\,\frac{\lambda}{2\sqrt{D}}$$

откуда

$$V_{\phi} = V_0 - \chi erf\,\frac{\lambda}{2\sqrt{D}} \tag{8}$$

где χ – постоянная, V_0 – объем частиц на поверхности (x = 0).

Далее, используя (8), имеем из (5) выражение для концентрации легирующего элемента

$$C_2(\lambda) = C_2^1 + \frac{D\left(C_2^{\phi} - C_1^{\phi}/b\right)}{D_1 - D_2}\ln\left(\frac{1-V_{\phi}}{1-V_0}\right) = C_2^1 + \frac{D\left(C_2^{\phi} - C_1^{\phi}/b\right)}{D_1 - D_2}\ln\left(1 + \frac{\chi erf\,\frac{\lambda}{2\sqrt{D}}}{1-V_0}\right) \tag{9}$$

Коэффициент χ можно определить из условия на границе зоны внутреннего окисления-твёрдый раствор $y(t)=\lambda_0(t)$:

$$C_2(\lambda_0) = C_2^{p} \tag{10}$$

С помощью (9) из (10) получаем

$$\chi = \left[\exp\left[\frac{\left(C_2^{\mathrm{p}} - C_2^{(1)}\right)\left(D_1 - D_2\right)}{\left(C_2^{\phi} + C_1^{\phi}/|\mathrm{b}|\right)D}\right] - 1\right]\frac{\left(1-V_0\right)}{erf\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D}}} \tag{11}$$

Строго говоря, равновесную концентрацию C_2^{p} в (10) нельзя задавать априорно, как это сделано, например, в [3], а следует определять из соответствующего уравнения массового баланса. Аналогично находится и постоянная скорости роста λ_0.

Уравнения баланса массы кислорода и легирующего элемента на границе зоны внутреннего окисления с твердым раствором имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_0}{2}C_1^{\phi}V_1 = |b|\frac{D_1}{D_1 - D_2}\sqrt{\frac{D}{\pi}}\chi\left(C_2^{\phi} + C_1^{\phi}/|\mathrm{b}|\right)e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D}} - \sqrt{\frac{D_{11}}{\pi}}\Bigg[C_1^{p} + \frac{D_{12}}{D_{11}}\left(C_2^{\mathrm{p}} - C_2^{0}\right) - \\ - \frac{|b|D_1 D\left(C_2^{\phi} + C_1^{\phi}/|\mathrm{b}|\right)}{D_{11}\left(D_1 - D_2\right)}\cdot\ln\left(\frac{1-V_1}{1-V_0}\right)\Bigg]\frac{e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D_{11}}}}{erfc\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D_{11}}}}\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_0}{2}C_2^{\phi}P_1 = -\frac{D_2}{D_1 - D_2}\sqrt{\frac{D}{\pi}}\chi\left(C_2^{\phi} + C_1^{\phi}/|\mathrm{b}|\right)e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D}} + \sqrt{\frac{D_{22}}{\pi}}\cdot \\ \cdot\left[C_2^{0} - C_2^{p} - \frac{D\left(C_2^{\phi} + C_1^{\phi}/|\mathrm{b}|\right)}{\left(D_1 - D_2\right)}\ln\left(\frac{1-V_1}{1-V_0}\right)\right]\frac{e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D_{22}}}}{erfc\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D_{22}}}}\end{aligned} \tag{13}$$

При получении выражений (12) и (13) использовались решения уравнений диффузии компонентов в твердом растворе зоны внутреннего окисления (9) и (3) и за пределами этой зоны ($\lambda \geq \lambda_0$) обычные решения уравнений трехкомпонентной диффузии:

$$C_1(\lambda)=\left[C_1^p+\left(C_2^p-C_2^0\right)\frac{D_{12}}{D_{11}}\right]\frac{erfc\,\frac{\lambda}{2\sqrt{D_{11}}}}{erfc\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D_{11}}}}-\frac{D_{12}}{D_{11}}\left(C_2^p-C_2^0\right)\frac{erfc\,\frac{\lambda}{2\sqrt{D_{22}}}}{erfc\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D_{22}}}}$$

$$\cdot C_2(\lambda)=C_2^0+\left(C_2^p-C_2^0\right)\frac{erfc\,\frac{\lambda}{2\sqrt{D_{22}}}}{erfc\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D_{22}}}}$$

В выражениях (12) и (13)

$$V_1=V_0-\chi erf\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D}} \tag{14}$$

− объем частиц окисла легирующего элемента в зоне внутреннего окисления на границе x=y.

Решение трансцендентных уравнений (12) и (13) относительно λ_0 и C_2^p представляет большие сложности даже при использовании приближенных методов. Поэтому проведем ряд их упрощений: во-первых, будем рассматривать случай, когда объем частиц второй фазы мал ($V_ф$ << 1); во-вторых, будем пренебрегать перекрестными коэффициентами диффузии (D_{ij}=0; i,j=1,2; $i\neq j$) и, наконец, примем, что объем частиц второй фазы в зоне внутреннего окисления на границе (x=y) V_1=0. Если два первых предположения достаточно широко используются в работах по внутреннему окислению и, видимо, качественно не сильно меняют характера зависимости λ_0 и C_2^p от других параметров системы, то последнее кажется несколько произвольным. Однако, здесь следует учитывать, что объем частиц второй фазы в зоне внутреннего окисления на поверхности образца V_0 является граничным условием уравнения (6) и, соответственно, задается независимым образом. В этой связи, и в случае

$$V_0=\chi erf\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D}}$$

при котором V_1 = 0 в (14), сохраняется общность анализа (12) и (13).

С учетом сделанных допущений, из (12) и (13) имеем

$$C_2^p=F\left(\lambda_0\right) \tag{15}$$

$$C_1^1=|b|\left[F\left(\lambda_0\right)-C_2^1\right]\cdot\left(1+\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}\,\frac{e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D}}erfc\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D_{11}}}}{e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D_{11}}}erf\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D}}}\right)=\Phi\left(\lambda_0\right)|b| \tag{16}$$

где

$$F\left(\lambda_0\right)=\frac{C_2^1\sqrt{\frac{D_{22}}{D}}\,e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D}}\Big/erf\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D}}+C_2^0\,e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D_{22}}}\Big/erfc\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D_{22}}}}{\sqrt{\frac{D_{22}}{D}}\,e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D}}\Big/erf\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D}}+e^{-\frac{\lambda_0^2}{4D_{22}}}\Big/erfc\,\frac{\lambda_0}{2\sqrt{D_{22}}}} \tag{17}$$

В предельных случаях

$$\lambda_0\to 0 \qquad C_2^p\to C_2^1 \qquad \frac{C_1^1}{|b|}\to C_2^0\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$$

$$\lambda_0\to\infty \qquad C_2^p\to C_2^0 \qquad \frac{C_1^1}{|b|}\to\left(C_2^0-C_2^1\right)$$

Приведенные предельные соотношения показывают, что случай, описываемый моделью Киркалди, реализуется при выполнении условия

$$\left(C_2^0 - C_2^1\right) \le \frac{C_1^1}{|b|} \le C_2^0 \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$$

Поскольку $D_{11} >> D_{22}$, то при реальных значениях $|b|$ и C_1^1 отношение $C_1^1 / |b|$ практически не ограничено сверху, то есть основным условием является следующее

$$\frac{C_1^1}{|b|} \ge \left(C_2^0 - C_2^1\right) \qquad (18)$$

Неравенство (18) выполняется тем лучше, чем меньше $|b|$ или, иными словами, чем меньше наклон линии растворимости на соответствующем изотермическом разрезе диаграммы состояния. С другой стороны, величина $|b|$ определяется свободной энергией образования окисла: чем меньше эта энергия, тем меньше $|b|$. Таким образом, условием использования модели Киркалди является низкая свободная энергия образования окисла легирующего элемента.

Следовательно, можно сделать вывод, что в модели Киркалди кинетика роста зоны внутреннего окисления лимитируется диффузией легирующего элемента. Действительно, увеличение C_1^1 в силу (3) приводит к уменьшению C_2^1 и, соответственно, к возрастанию потока легирующего элемента в твердом растворе зоны внутреннего окисления. Как следствие этого, скорость роста зоны уменьшается. Увеличение C_2^0 вызывает возрастание потока легирующего элемента со стороны сплава к зоне внутреннего окисления что, наоборот, увеличивает скорость роста зоны.

В работе было проведено численное решение системы уравнений (2), описывающих процесс внутреннего окисления пластины толщиной *l*, в отсутствии предположения о мгновенной релаксации пересыщения в диффузионной зоне [5]. Эта система состоит из уравнений диффузии

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_{ii}\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + D_{ij}\frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} + D_{ii}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial C_i}{\partial x} + D_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial C_j}{\partial x} + C_{\text{i}}^{\phi}\frac{\partial Q}{\partial t}, \qquad (i, j = 1{,}2; \quad i \ne j)$$

с граничными условиями:

$$C_1(0,t) = C_1^1 \qquad J_2(x,t)\big|_{x=0} = 0$$

$$C_i(x,0) = C_i^0$$

$$\left.\frac{\partial C_i}{\partial x}\right|_{x=\frac{l}{2}} = 0 \qquad 0 < x < l$$

и уравнения Фоккера-Планка для функции распределения частиц по размерам

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} + \frac{\partial (fV_R)}{\partial R} = \mu(R, t_1)$$

где t_1 − время, отсчет которого ведется с момента $t = t_1$ появления зародышей в данном сечении, $f(R,t)$ − функция распределения частиц по размерам, $V_R = \frac{\alpha}{R^2}\left(\frac{R}{R_K} - 1\right)$− скорость роста частиц, $\alpha = \frac{D_{22}\gamma\alpha^1}{C_2^{\phi}}$, γ − коэффициент поверхностного натяжения R_K−критический радиус зародыша; $\mu(R,t_1) = N_0 \exp\left(-\chi R_K^2\right)\delta(R - R_K)$ − интенсивность зарождения частиц; $\chi = \frac{8\pi}{3kT}\gamma^2 V_m$; V_m − объем молекул новой фазы.

Численный расчет проводился для случая, когда произведение термодинамических активностей

$$a_{1p}^{\omega_1} a_{2p}^{\omega_2} = \exp\frac{\Delta G}{RT} = 10^{-8} \qquad (19)$$

то есть свободная энергия образования окисла $Me_{\omega_2}O_{\omega_1}$, ΔG невелика.

При временах до ~15 час ("малые" времена) пластина данной толщины (l = 600 мкм) является полубесконечной средой для диффундирующих элементов. При больших временах на кинетику процесса внутреннего окисления оказывают влияния эффекты, связанные с конечными размерами образца.

При малых временах на поверхности образца происходит достаточно быстрое уменьшение поверхностной концентрации легирующего элемента $C_2(0,t)$ в твердом растворе, которое связано с его уходом в частицы окисла. В соответствии с таким изменением $C_2(0,t)$ происходит и эволюция меры пересыщения.

$$L = a_1^{\omega_1} a_2^{\omega_2} \Big/ a_{1p}^{\omega_1} a_{2p}^{\omega_2}$$

В начале процесса внутреннего окисления мера пересыщения имеет наибольшие значения на поверхности $x = 0$. С увеличением времени $L(0,t)$ уменьшается и стремится к единице, что соответствует отсутствию пересыщения в твердом растворе при данной нормировке L. На кривой $L(x)$ появляется максимум, который со временем смещается вглубь пластины. В области значений $x < x_m$ (x_m – координата максимума функции $L(x,t)$) мера пересыщения близка к единице, то есть концентрации кислорода и легирующего элемента в этой области близки к равновесным, лежащим на линии растворимости, значениям. Последнее обстоятельство указывает на возможность использования полученных выше закономерностей для описания кинетики процесса внутреннего окисления в этой области. Действительно, кривые изменения суммарного объема фазы $V_ф(x)$ могут быть удовлетворительно обработаны по формуле (8).

Вместе с тем, в окрестностях точек $x = 0$ и $x = y(t)$ зависимость $V_ф(x)$ отлична от (8). В случае малых x это вызвано: во-первых, достаточно сильной временной зависимостью суммарного объёма частиц на поверхности (для "малых" времен), что не учитывается в модели Киркалди; во-вторых, формированием при "больших" временах вблизи свободной поверхности образца области с практически постоянным объемом фазы, что является следствием равенства нулю потока легирующего элемента через эту поверхность. В области $x \cong y(t)$ отклонение $V_ф(x)$ от (8) связано с тем, что в этой зоне имеется некоторое пересыщение твердого раствора, что, соответственно, не дает возможности для реализации модели Киркалди. Наличие пересыщения в окрестностях границы зоны внутреннего окисления влияет, в конечном итоге, на скорость ее роста: постоянная скорости роста границы $\lambda_0 = 3\cdot10^{-5}$см/с$^{1/2}$ в случае численного расчета и λ_0 = 1,7·10^{-5} см/с$^{1/2}$ в случае использования выражения (17), то есть в модели Киркалди скорость роста зоны внутреннего окисления занижена.

При "малых" временах распределения числа частиц N в зоне внутреннего окисления, их средний размер $\overline{R}$ и суммарный объем $V_ф$ в целом повторяют зависимость меры пересыщения $L(x)$: наибольшие N, $\overline{R}$ и $V_ф$ находятся на свободной поверхности. При этом граница двухфазной области движется по параболическому закону $y = \lambda_0\sqrt{t}$. Однако, при "больших" временах происходит существенное ускорение движения фронта внутреннего окисления, связанное с возрастанием эффекта диффузионного наложения потоков кислорода (как быстродиффундирующего компонента в твердом растворе) от обеих свободных поверхностей пластины.

Начиная с времен ~40 часов хорошо выраженные максимумы меры пересыщения, симметрично расположенные относительно центра пластины, исчезают и появляется протяженная область примерно с одинаковой величиной $L(x)$. Таким образом, при "больших" временах в приповерхностных областях пластины, составляющих ~1/3 от её толщины, пересыщение в твердом растворе практически отсутствует и в пересыщенном состоянии находится твёрдый раствор только в центральной части пластины. При этих временах зарождения новых частиц не происходит, что следует из зависимости $N(x,t)$, и пересыщение снимается, в основном за счет роста уже имеющихся частиц. В приповерхностных областях, где $L \approx 1$, частицы окисла стабилизированы, поэтому преимущественный рост частиц в центральной части пластины изменяет характер распределения $\overline{R}(x)$: в отличие от "малых" времен максимальный размер частиц находится теперь в центре пластины. Такое увеличение размера выделений при удалении от поверхности наблюдалось во многих экспериментальных работах по внутреннему окислению [1,2].

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Проведенные исследования показывают, что при быстрой релаксации пересыщения и малой энергии образования окисла кинетика формирования структуры ЗВО определяется главным образом диффузионным потоком легирующего элемента. Сопоставление полученных результатов по кинетике роста ЗВО с результатами анализа модели Киркалди показывает, что скорость роста зоны в модели Киркалди несколько занижена. Разработанный и реализованный в настоящей работе подход, основанный на использовании с помощью ЭВМ достаточно полной модели процесса, открывает широкие перспективы для целенаправленного получения структур ЗВО, обеспечивающих необходимые эксплуатационные свойства.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кипарисов С.С., Левинский Ю.В. Внутреннее окисление и азотирование сплавов / С.С. Кипарисов, Ю.В. Левинский. – М.: Металлургия, 1979. – 200с.
2. Данелия Е.П., Розенберг В.М. Внутреннеокислен. Сплавы / Е.П. Данелия, В.М. Розенберг. – М.: Металлург., 1978. – 232с.
3. Wagner C. Reactiontypen bei der Oxydation von Zegierungen / C. Wagner // Z.Electrochem. – 1959. - Bd.63. - s.772-790.
4. Kirkaldy J.S. On the theory of internal oxidation and sulphation of alloys / J.S. Kirkaldy // Canad. Metal. Quarterly. – 1969. - V.8. - P.35-38.
5. Абрамов Г.С. Кинетика формирования двухфазной области в процессе внутреннего окисления / Г.С. Абрамов // Физико-технические и технологические приложения математического моделирования. Сб. научных трудов. – К.: НАН Украины. Институт математики, 1998. - С.3-5.

АБРАМОВ Генадий Серафимович – к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование диффузионных процессов в многокомпонентных системах; моделирование сложных технических систем и технологических процессов.

АБРАМОВ Михаил Генадиевич – зав. цикловой комиссией информатики и математики ХФ государственной академии статистики, учёта и аудита.

Научные интересы:

– математическое моделирование диффузионных процессов типа внутреннего окисления; имитационное моделирование с использованием компьютерных комплексов.

УДК 519.6

В.Г. Агеев, И.Н. Зинченко, С.П. Греков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В СЕТИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК

Постановка проблемы и анализ публикаций по теме исследований. Существующие в настоящее время в Украине, России и Казахстане методики расчёта параметров воздушных ударных волн при взрывах газа и пыли в горных выработках базируются на статическом методе, основанном на кратковременном характере действия избыточного давления, из-за чего якобы можно рассматривать стационарную ударную волну с её затуханием на прямолинейных участках выработки по экспоненте, а в местах сопряжений выработок с различными коэффициентами отношения избыточных давлений до и после преодоления препятствий.

Однако современная угольная шахта представляет собой сложный технологический объект, включающий в себя огромную разветвлённую сеть отработанных и действующих горных выработок большой протяжённости с вентиляционными перемычками, установленными в различных местах для разделения свежих и отработанных вентиляционных струй. Отсюда очевидна несостоятельность существующих методик расчёта параметров воздушных ударных волн, хотя в одной из них [1] указывается на использование газодинамического подхода, основанного на численном решении нестационарных решений уравнений газовой динамики, описывающих пространственное формирование и распространение ударных волн. Однако, как указывают сами авторы работы [1], предложенный газодинамический метод носит иллюстративный характер и полученные результаты требуют дальнейшего уточнения и сравнения с экспериментальными данными, особенно при наличии вентиляционных и изоляционных перемычек.

Цель работы. При расчётах формирования ударных волн при взрывах метана, их наложения и отражения в сети горных выработок, необходимо разработать такую математическую модель, которая учитывала бы нестационарные процессы переноса газов со сверхзвуковыми скоростями не только на прямолинейных участках горных выработок, но также в местах сопряжения выработок друг с другом. При этом необходимо ещё учитывать не только аэродинамические сопротивления по пути движения вентиляционных потоков, но также и местные сопротивления в виде сужений или расширений выработок, их поворотов и разных типов перемычек с учётом их устойчивости или разрушений в зависимости от величины избыточного давления и времени существования.

Основная часть. На рис. 1 представлена схема горных выработок, включающая в себя выемочный участок и уклонное поле. Здесь стрелками указано направление движения воздуха до взрыва. Взрыв метана может произойти в подготовительной выработке 1–2, в лаве 2–3 или в вентиляционной выработке 3–4, а также в выработанном пространстве вблизи узла 4. В результате взрыва ударная вона будет распространяться как по лаве 2–3 и вентиляционной выработке, так и по конвейерной выработке 2–5, опрокидывая вентиляционный поток и отражаясь от забоя подготовительной выработки 7–8, разрушая, а возможно и нет вентиляционные перемычки в выработках 4–5, 4–10, 9–10 и т.д.

Для корректной постановки задачи переноса газов в сети выработок будем использовать двумерный подход. Поскольку газы при больших скоростях являются сжимаемыми, используем уравнения, описывающие их течения в сокращённой записи, что очень удобно для изложения и оценки численных схем решения.

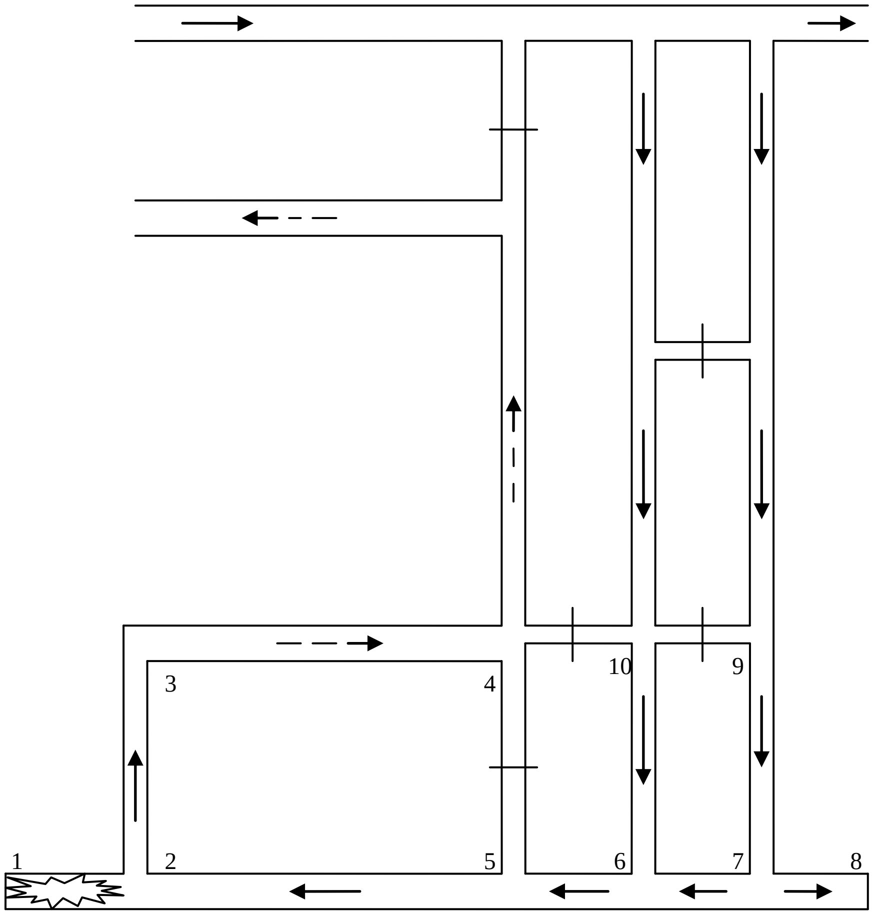


Рис.1. Схема выемочного участка с уклонным полем при взрыве метана в подготовительной выработке.

Сокращённая запись уравнений течения газов может быть представлена в следующем виде [2]:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0. \qquad (1)$$

Здесь функции U,F,G представляют собой упорядоченные наборы основных переменных и выглядят таким образом

$$U=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho \upsilon\\ E\end{Bmatrix};\quad F=\begin{Bmatrix}\rho u\\ P+\rho u^2\\ \rho u\upsilon\\ u(E+P)\end{Bmatrix};\quad G=\begin{Bmatrix}\rho \upsilon\\ \rho u\upsilon\\ P+\rho \upsilon^2\\ \upsilon(E+P)\end{Bmatrix}, \qquad (2)$$

где ρ – плотность газовоздушной смеси, кг/м^3;

u – продольная составляющая скорости смеси газов вдоль оси выработки, м/с;

υ – поперечная составляющая скорости смеси газов, м/с;

P – давление, МПа;

E – полная энергия потока газов, МПа;

t – время, с;

x – координата, направленная вдоль оси выработки, м;

y – координата, направленная перпендикулярно к стенкам выработки, м.

При рассмотрении течений смеси газов в каждой выработке вентиляционной сети проще перейти от двумерной задачи к одномерной, стягивая в линию каждый элемент сети, как это используется в рудничной аэрологии.

С этой целью проинтегрируем уравнение (1) по поперечному сечению выработки и получим

$$\frac{\partial US}{\partial t}+\frac{\partial FS}{\partial x}+(G_1S_1-G_2S_2)/b=0\,, \tag{3}$$

где S – площадь поперечного сечения выработки, м^2;

S_1 и S_2 – площади сечений поперечных потоков, втекающих и вытекающих газов, м^2;

b – ширина выработки, м.

Здесь функции с индексами 1 и 2 представляют собой значения функций соответственно на левой и правой стенке выработки.

В результате для одномерного течения газов получим вместо четырёх три уравнения, где матрицы (2) примут вид

$$U=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{Bmatrix};\quad F=\begin{Bmatrix}\rho u\\ (P+\rho u^2)\\ u(E+P)\end{Bmatrix};\quad G_1-G_2=\begin{Bmatrix}(\rho \upsilon)_1-(\rho \upsilon)_2\\ (\rho \upsilon u)_1-(\rho \upsilon u)_2\\ [\upsilon(E+P)]_1-[\upsilon(E+P)]_2\end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Анализ элементов третьей матрицы (4) показывает, что в первой строчке присутствуют функции притоков или оттоков массы газов, во второй строчке – приток или отток количества движения за счёт трения о боковые стенки выработки, а в третьей строчке – приток или отток внутренней энергии от стенок.

Будем считать, что наличие поперечной скорости и её пульсаций у стенок выработки приводит к возникновению сил трения. Тогда можно принять во второй строчке третьей матрицы поперечные пульсации пропорциональными продольной скорости как по длине выработки, так и в местах сопряжений её с другими выработками и записать

$$(\rho u\upsilon)_1-(\rho u\upsilon)_2=\frac{\lambda}{2}\rho u|u|\,, \tag{5}$$

где λ – коэффициент пропорциональности или коэффициент трения газов о стенки выработки по её длине и при местных сопротивлениях.

В результате в общем виде система уравнений с учётом (3) – (5) примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho S}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u S)}{\partial x}=[(\rho\upsilon S)_1-(\rho\upsilon S)_2]/b;\\[2mm] \dfrac{\partial(\rho u S)}{\partial t}+\dfrac{\partial[(P+\rho u^2)S]}{\partial x}=-\dfrac{\lambda S}{2b}\rho u|u|;\\[2mm] \dfrac{\partial(ES)}{\partial t}+\dfrac{\partial[(E+P)uS]}{\partial x}=\{[\upsilon S(E+P)]_1-[\upsilon S(E+P)]_2\}/b.\end{cases} \tag{6}$$

Систему уравнений (6) удобнее выразить через безразмерные параметры:

$$\overline{\rho}=\rho/\rho_0;\quad \overline{Q}=\rho u/\rho_0 c;\quad \overline{P}=P/P_0;\quad \overline{E}=E/P_0\,,$$

где $c=\sqrt{P_0/\rho_0}$ – скорость звука при нормальных условиях, м/с.

Остальные параметры с индексом "ноль" взяты при нормальных условиях. При этом относительная массовая скорость означает в тоже время и относительный массовый расход газа $\overline{Q}$.

В результате система уравнений (6) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + c\dfrac{\partial\overline{Q}}{\partial x} = c(\overline{Q}_1 - \overline{Q}_2)/Sb; \\ \dfrac{\partial\overline{Q}}{\partial t} + c\dfrac{\partial[(\overline{P} + \overline{Q}^2/\overline{\rho})]}{\partial x} = -\dfrac{\lambda c}{2b\overline{\rho}}\overline{Q}\left|\overline{Q}\right|; \\ \dfrac{\partial(\overline{E})}{\partial t} + c\dfrac{\partial[\overline{Q}(\overline{E} + \overline{P})/\overline{\rho}]}{\partial x} = c\{[\overline{Q}(\overline{E} + \overline{P})/\overline{\rho}]_1 - [\overline{Q}(\overline{E} + \overline{P})/\overline{\rho}]_2\}/b. \end{cases} \tag{7}$$

При этом внутренняя энергия газов должна определяться по формуле [3]

$$E = \frac{1}{k-1}P + \frac{\rho u^2}{2}, \tag{8}$$

где k – отношение удельных теплоёмкостей заранее известно (для воздуха $k = c_p/c_\upsilon = 1{,}4$).

Таким образом, система уравнений (7) позволяет определить плотность, скорость и внутреннюю энергию газов в каждой отдельной выработке, после чего можно вычислить на сновании (8) относительное давление по формуле

$$\overline{P} = (k-1)(\overline{E} - \frac{\overline{Q}^2}{2\overline{\rho}}). \tag{9}$$

и каждый раз подставлять его значение во вторую и третью формулу системы (7).

Представим систему уравнений (7) в конечных разностях по пространственной координате и получим

$$\begin{cases} \dfrac{d(\overline{\rho})}{dt} + c\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{Q}_i}{\Delta x} = 0 \\ \dfrac{d(\overline{Q})}{dt} + c\dfrac{(\overline{P}_{i+1} + \overline{Q}_{i+1}^2/\overline{\rho}_{i+1}) - (\overline{P}_{i-1} + \overline{Q}_{i+1}^2/\overline{\rho}_{i-1})}{2\Delta x} = -\dfrac{\tilde{r}}{\overline{\rho}}\overline{Q}\left|\overline{Q}\right|, \\ \dfrac{d(\overline{E})}{dt} + c\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{Q}_i(\overline{E}_i + \overline{P}_i)/\overline{\rho}_i}{\Delta x} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

где i – номер элемента ветви, примыкающего к узлу;

n – число элементов ветви, примыкающих к узлу;

$\tilde{r}_j = \dfrac{\lambda c\Pi}{8S}$ – удельное аэродинамическое сопротивление элемента ветви с учётом местных сопротивлений.

Здесь во втором уравнении системы (10) взяты центральные разности по любому направлению движения вдоль или поперёк потока, а ширина выработки выражена через площадь сечения и её периметр в виде $b = 4S/\Pi$, где Π – периметр выработки, м. При этом шаг по длине принят равным $\Delta x = b$.

Из анализа первого и третьего уравнений системы (10) следует, что изменение плотности и внутренней энергии объёма элемента выработки или сопряжения $S\Delta x$ зависит от суммы потоков, входящих и выходящих из узла. При равенстве входящих и выходящих из узла потоков эти параметры не будут меняться и останутся постоянными величинами.

При движении потока газов по выработкам вне сопряжений имеется только два элемента, примыкающих к узлу, и в этом случае n = 2. Однако на сопряжениях выработок могут быть различные варианты примыкания выработок, как показано на рис. 2.

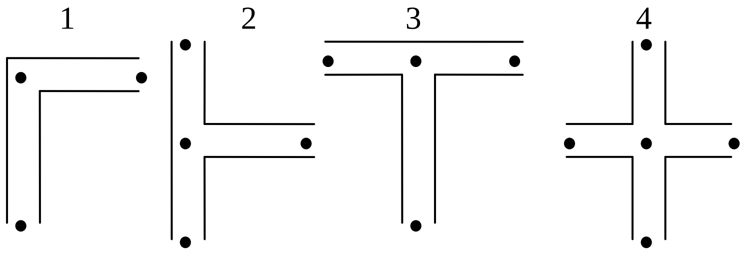


Рис.2.3. Основные схемы сопряжений выработок

Обозначим горизонтальные направления через j = 1, вертикальные направления через j = 2. Узел сопряжения обозначим через i.

Очевидно, при повороте потока в узле (сопряжение 1) горизонтальный и вертикальный потоки обращаются в нуль, так как на стенках скорости должны равняться нулю. Поэтому в узле сопряжения 1 следует принять $Q_{1,i}$ = $Q_{2,i}$ = 0. В сопряжении 2 в узле из-за стенки слева для горизонтального потока следует принять $Q_{1,i}$ = 0. В сопряжении 3, наоборот, для вертикального потока из-за стенки $Q_{2,i}$ = 0. В то же время на спряжении 4 существует два потока и горизонтальный и вертикальный, расходы которых определяются по второму уравнению системы (10). По этому же уравнению определяется вертикальный поток в сопряжении 2 и горизонтальный поток в сопряжении 3, показанные на рис. 2.

Таким образом, второе уравнение системы (10) однозначно определяет расходы газов в узлах при различных сопряжениях выработок, а первое и третье уравнения этой системы дают возможность определить плотность газов и внутреннюю энергию независимо для каких узлов на сопряжениях или условных узлов при разбиении выработок на элементы.

Полученная система (10) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений и может решаться любым численным методом.

В качестве начальных условий до возникновения взрыва примем

$$\overline{\rho}(0)=1;\quad \overline{P}(0)=1;\quad \overline{Q}_j(0)=0\,. \tag{11}$$

Принятие нулю относительных расходов воздуха обосновано тем, что реальные скорости воздуха 1 – 4 м/с в горных выработках пренебрежимо малы по сравнению со скоростью звука. При этом начальная относительная внутренняя энергия газов согласно (9) и (11) будет равна

$$\overline{E}(0)=\frac{\overline{P}(0)}{k-1}=2{,}5\,. \tag{12}$$

При быстром воспламенении и начальной нулевой скорости движения газов их плотность даже в зоне горения согласно первому уравнению системы (10) вначале остаётся постоянной $\overline{\rho}(0)=1$. Следовательно, согласно уравнению состояния [3, 4] в зоне горения резкое повышение температуры от T_0 до T_1 приведёт к резкому повышению давления от P_0 до P_1. Поэтому в момент взрыва начальные условия вместо (11) и (12) примут вид

$$\bar{\rho}(0)=1; \quad \bar{P}(0)=\begin{cases}1, \text{если } 0 \le x < x_1; \\ \bar{P}_1, \text{если } x_1 \le x \le x_1+L; \\ 1, \text{если } x_1+L < x < \infty\end{cases} \quad \bar{Q}_j(0)=0; \quad \bar{E}(0)=2{,}5\bar{P}(0), \qquad (13)$$

где $\bar{P}_1 = P_1 / P_0$ – относительное давление в зоне взрыва;

P_1 – давление в месте взрыва, МПа;

x_1 – расстояние от начала выработки, м;

L – длина зоны быстрого горения и взрыва, м.

С помощью экспериментальных исследований [5] установлена зависимость избыточного давления в месте взрыва от объёма 5 – 15 % метановоздушной смеси

$$\Delta P_1 / P_0 = 0{,}067V/S + 0{,}4\sqrt{(1+0{,}029V/S)V/S}, \qquad (14)$$

где ΔP_1 – начальное избыточное давление, МПа;

V – объём взорванной смеси газов, м^3;

S – средняя площадь поперечного сечения выработки, м^2.

На рис. 3 представлены результаты расчёта по формуле (14). Там же нанесены экспериментальные точки.

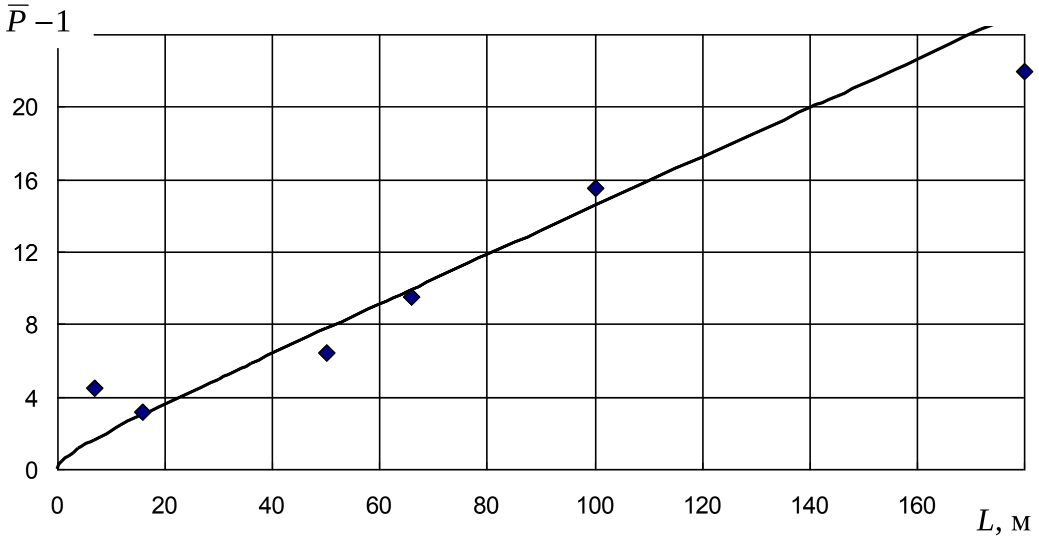


Рис. 3. Сравнение расчётной кривой с экспериментальными данными изменения относительного давления по длине штольни при взрыве метана

Сравнение расчётных и экспериментальных данных показывает их удовлетворительную сходимость.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Задавая объём взорванной смеси газов и длину зоны воспламенения можно определить избыточное давление, задать начальные условия (13) и решать систему уравнений (10) различными методами, к примеру, методом Рунге-Кутта. Таким методом решаются динамические системы двух первых уравнений системы (10) для дозвуковых потоков в вентиляционных сетях при различных незначительных аэродинамических возмущениях, имеющих место при изменении режимов работы главных вентиляторов проветривания и регулировании сопротивления вентиляционных дверей. Несмотря на меньшее число уравнений, принятие изотермических условий, такие задачи, включающие тысячи элементов вентиляционной сети, решаются методом параллельного программирования, требующего подключения в одновременную работу нескольких компьютеров [6, 7].

В нашем случае можно рассматривать не всю вентиляционную сеть, а ту её часть, где имеют место ударные волны, что несколько облегчает задачу получения численных результатов моделирования формирования и отражения ударных волн в тупиках, которыми следует считать вентиляционные и изоляционные перемычки до момента их разрушения в зависимости от мощности взрыва метана в горных выработках.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Палеев Д.Ю. Математическое моделирование активного воздействия на взрывоопасные области и очаги горения в угольных пластах. / Д.Ю. Палеев, О.П. Брабандер. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1999. – 202 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
4. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. / Г.Н. Абрамович. – М.: Наука, 1969. – 824 с.
5. Гурин А.А. Ударные воздушные волны в горных выработках. /А.А. Гурин, П.С. Малый, С.К. Савенко. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
6. Святный В.А. Генератор уравнений параллельной модели сетевого динамического объекта с распределенными параметрами / В.А. Святный, О.В. Молдованова // Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем. – Донецк: сб. науч. тр. ДонГТУ, 1999. – Вып. 10. – С. 135–141.
7. Святний В.А. Паралельне моделювання складних динамічних систем / В.А. Святний // Моделирование – 2006: Международная конференция. – Киев, 2006. – С. 83–90.

АГЕЕВ Владимир Григорьевич – директор НИИГД «Респиратор».

Научные интересы:

– предотвращение и локализация взрывов метана и угольной пыли в шахтах.

ГРЕКОВ Святослав Павлович – д.т.н., ведущий научный сотрудник НИИГД «Респиратор».

Научные интересы:

– сорбционные процессы в газонасыщенных угольных скоплениях с переменной реакционной поверхностью.

ЗИНЧЕНКО Игорь Николаевич – к.т.н., ведущий инженер НИИГД «Респиратор».

Научные интересы:

– сорбционные процессы в газонасыщенных угольных скоплениях с переменной реакционной поверхностью.

УДК 519.876.5

М.А. Аматов, Г.М. Аматова

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE К ИНТЕГРИРОВАНИЮ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Постановка проблемы. В настоящей работе рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменной структурой (СОДУПС). Такие системы являются обобщением систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями, систем с многолистным фазовым пространством, кусочно-сшитых и импульсных систем [1-5]. При этом СОДУПС не являются простым механическим соединением всех перечисленных выше типов уравнений, но представляют собой органичный их синтез. В силу чрезвычайной общности СОДУПС находят применение при решении большого числа прикладных задач.

Если системы дифференциальных уравнений, из которых состоит СОДУПС неинтегрируемы в квадратурах, то представление решения в виде формулы невозможно, а значит, исследование асимптотического поведения траекторий такой системы представляет значительные трудности. Всё сказанное свидетельствует об актуальности разработки методов компьютерного интегрирования таких систем.

Анализ публикаций по теме исследования. Теоретические исследования и многочисленные практические приложения СОДУПС описаны в большом числе работ. Здесь следует упомянуть исследования Э.В. Гаушуса, В.И. Уткина, А.Ф. Филиппова и многих других. Однако до настоящего времени не разработано регулярного метода полного и точного исследования таких систем. В частности, авторам данной статьи не известны публикации, посвящённые компьютерному моделированию процессов интегрирования СОДУПС, хотя любая программа для ЭВМ, позволяющая в той или иной форме интегрировать такие системы, представляет большой интерес. В частности, нет программ для интегрирования СОДУПС в таких широко известных математических пакетах, как MAPLE, MATHEMATICA и др.

Цель статьи – представление результатов работы по созданию алгоритмов и программ для интегрирования СОДУПС с использованием языка символьной алгебры математического пакета MAPLE.

Основная часть. В самой общей форме СОДУПС может быть определена следующим образом.

Дана совокупность систем обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x), \qquad (1_i)$$

определённых в некоторой области $G = D \times (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ расширенного фазового пространства, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$, и зависящих от параметра $i \in A = \{1, 2, \ldots N\}$. Правые части систем (1_i) локально в области G удовлетворяют условию Липшица по x.

Для каждого $i \in A$ имеем некоторое число кусочно-гладких поверхностей $S_{i,j} \subset G$, $j \in B_i = \{1, 2, \ldots, M_i\}$, заданных уравнениями в неявной форме:

$$S_{i,j} : S_{i,j}(t, x) = 0, \; j \in B_i = \{1, 2, \ldots, M_i\}. \qquad (2_j)$$

Каждая из поверхностей $S_{i,j}$ разбивается на ряд кусков $R_{i,j,k}$, $k \in C_{i,j}$

($C_{i,j}=\{1,2,\ldots K_{i,j}\}$), таких что $S_{i,j}=\bigcup_{k=1}^{K_{i,j}} R_{i,j,k}$. Кроме того, задан ряд областей D_s, $s\in Q$, где $Q=\{1,2,\ldots,P\}$ и $\bigcup_{s=1}^{P} D_s \subset G$. Области D_s могут не совпадать с теми областями, на которые поверхности $S_{i,j}$ делят G.

Считаем также заданными подстановки $\varphi(i,j,k): A\times B_i\times C_{i,j}\to M$, где $M=\{1,2,3,\ldots,L\}$, $N\le L$ и $\psi(i,j,k,s): A\times B_i\times C_{i,j}\times Q\to A$, и отображения T_r, $T_r: R_{i,j,k}\to G$, $(r=1,2,\ldots,L-N)$, определённые на некоторых из областей $R_{i,j,k}$.

Движение по траектории СОДУПС определяется следующим образом. В точках области $G\setminus\left(\bigcup_{j\in B_i} S_{i,j}\right)$ движение происходит по траектории системы (1_i), номер i которой определяется предысторией движения.

Пусть $x=x_i(t)$ – уравнение интегральной кривой системы (1_i) такой, что $(t,x_i(t))\in G\setminus\left(\bigcup_{j\in B_i} S_{i,j}\right)$ при $t\in(\alpha,\beta)$ и $\exists j_0\in B_i\ \exists k_0\in C_{i,j_0}$: $(\beta,x_i(\beta))\in R_{i,j_0,k_0}\subset S_{i,j_0}$.

Если значение подстановки $\varphi(i,j_0,k_0)\le N$, то при $t=\beta$ происходит переход с траектории системы (1_i) на траекторию системы (1_l), $l=\varphi(i,j_0,k_0)$, начинающуюся при $t=\beta$ в точке $(\beta,x_i(\beta))$. При $t>\beta$ движение будет происходить по интегральной кривой $x=x_l(t)$ системы (1_l) до тех пор, пока она не пересечётся с одной из поверхностей $S_{i,j}$.

В случае, когда точка $(\beta,x_i(\beta))$ лежит на пересечении нескольких поверхностей S_{i,j_s}, $(s=1,2,\ldots N_0)$ будем считать, что движение продолжается по системе (1_l) с наименьшим номером, т.е. $l=\min\limits_{1\le s\le N_0}\{\varphi(i,j_s,k_s)\}$.

Если же $\varphi(i,j_0,k_0)>N$, то при $t=\beta$ происходит толчок. В результате изображающая точка мгновенно перебрасывается из положения $(\beta,x_i(\beta))$ в точку (t^*,x^*) которая является образом точки $(\beta,x_i(\beta))$ при отображении T_r, $(t^*,x^*)=T_r(\beta,x_i(\beta))$, $r=\varphi(i,j,k)-N$. При $t>\beta$ движение будет происходить по интегральной кривой $x=x_l(t)$ системы (1_l) номер l которой равен значению подстановки $l=\psi(i,j_0,k_0,s)$. Очевидно, что номер l зависит кроме всего прочего от того, в какую из областей D_s, $s\in Q$ попадает точка (t^*,x^*) после толчка.

В начальных условиях, которые имеют вид $x_i(t_0)=x_0$, номер i системы, по траектории которой начинается движение, должен быть задан в начальных данных.

Кроме того, считаем, что СОДУПС (1_i), (2_j) удовлетворяет двум условиям.

Условие 1. На любом отрезке $[\tau,T]$ интегральные кривые системы дифференциальных уравнений (1_i) пересекаются с поверхностями $S_{i,j}$, $j\in B_i$ лишь в конечном числе точек. Другими словами, если $x=x_i(t,t_0,x_0)$ – некоторое решение системы (1_i) с начальными условиями $x_i(t_0,t_0,x_0)=x_0$, $x_0\in D$, то $\forall j\in B_i$ уравнение

$S_{i,j}(x_i(t,t_0,x_0))=0$ с неизвестной t имеет лишь конечное число корней на отрезке $[\tau,T]$.

Условие 2. $\forall i\in A$ $\forall j\in B_i$ $\forall k\in C_{i,j}$ $\forall(\beta,x_i(\beta))\in R_{i,j,k}\subset S_{i,j}$ $\exists\delta=\delta(i,j,k,\beta,x_i(\beta))>0$ $\forall t\in(\beta,\beta+\delta)$: $x_l(t)\notin\bigcup\limits_{j\in B_i}S_{i,j}$, где, как и ранее, $l=\varphi(i,j,k)$.

Благодаря этим условиям любое решение СОДУПС может быть продолжено либо на бесконечный интервал времени, либо на конечный интервал, но с бесконечным числом переключений.

Для интегрирования СОДУПС в среде MAPLE был составлен комплекс SODEVS (от **S**ystem of **O**rdinary **D**ifferential **E**quation with **V**ariable **S**tructure), состоящий из программ sodevssolve, sodevsplot и sodevsfsolve. Мы не приводим здесь описание алгоритмов в псевдокодах этих программ, чтобы не увеличивать объёма статьи, отметим лишь, что они являются существенным обобщением программ работ [7, 8].

Пример. Для иллюстрации работы программы sodevsplot рассмотрим пример построения траекторий СОДУПС, описывающей динамику трёх биологических популяций: один хищник, две жертвы при дополнительном условии, что из популяции одной из жертв, при достижении ею максимального значения, мгновенно изымается некоторое количество особей. Такая постановка задачи имеет место, когда исследуется динамики численностей популяций трёх видов морских рыб, из которых одна является хищником и питается двумя другими. При этом одна из жертв является промысловой рыбой и в момент, когда её биомасса достигает максимума, разрешается её отлов, и устанавливаются квоты отлова.

СОДУПС, о которой идёт речь в примере, задаётся тремя системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\cdot(a-b_i\cdot z),\\ \dfrac{dy}{dt}=y\cdot(c-d_i\cdot z),\\ \dfrac{dz}{dt}=z\cdot(-e+h_i\cdot x+g_i\cdot y)\end{cases}\quad(3_i)\ \ (i=1,2)\qquad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\cdot(A_0-B_0\cdot z),\\ \dfrac{dy}{dt}=x\cdot(A_0-B_0\cdot z),\\ \dfrac{dz}{dt}=-e\cdot z+C_0\cdot x+D_0\cdot xz\end{cases}\quad(3_3)$$

В области $G_1=\{(x,y,z)\,|\,x>0,z>0,0<y<x\}$ движения СОДУПС задаются траекториями системы (3_1), а в области $G_2=\{(x,y,z)\,|\,x>0,z>0,x<y<+\infty\}$ траекториями системы (3_2). Таким образом, поверхность $S_1: y=x$ является поверхностью разрыва, движения на которой задаются системой (3_3). Следовательно, система уравнений (3_3) задаёт скользящие движения [2] на поверхности разрыва. Будем считать, что уравнения скользящих движений определяются по А.Ф. Филиппову [1] и, следовательно, коэффициенты A_0, B_0, C_0, D_0 выражаются через коэффициенты a, c, e, b_i, d_i, h_i, g_i $(i=1,2)$ по формулам: $A_0=\dfrac{a(d_2-d_1)+c(b_1-b_2)}{d_2-d_1+b_1-b_2}$,
$C_0=\dfrac{(a-c)(h_1+g_1-h_2-g_2)}{d_2-d_1+b_1-b_2}$, $D_0=\dfrac{(b_1-d_1)(h_2+g_2)+(d_2-b_2)(h_1+g_1)}{d_2-d_1+b_1-b_2}$, $B_0=\dfrac{b_1d_2-b_2d_1}{d_2-d_1+b_1-b_2}$.

Если в процессе движения по траектории системы (3_1) изображающая точка, находясь в области G_1, достигает части $R_{1,2,1}=\{x_3=\dfrac{a}{b_1}, h_1x_1+g_1x_2-e>0\}$ поверхности $S_2: x_3=\dfrac{a}{b_1}$, на которой значение численности первой популяции x_1 достигает максимума, то из численности этой популяции мгновенно изымается $\delta > 0$ биомассы.

Аналогично, если изображающая точка траектории системы (3_2), находясь в области G_2, достигает части $R_{2,3,1} = \{x_3 = \frac{a}{b_2}, h_2 x_1 + g_2 x_2 - e > 0\}$ плоскости $S_3 : x_3 = \frac{a}{b_2}$, на которой x_1 максимально, то из её численности мгновенно изымается $\delta > 0$ биомассы.

При движении по траектории системы (3_3) скользящих движений численность первой популяции x_1 достигает максимума на луче $R_{3,1,1} = \left\{ x_3 = \frac{a}{b_1}, x_1 > \frac{e}{h_1 + g_1} \right\}$ прямой $S_3 : x_3 = \frac{a}{b_1}$. В момент достижения изображающей точкой луча $R_{3,1,1}$ из численности этой популяции мгновенно изымается $\delta_1 = \sqrt{\frac{\delta^2}{2}}$ биомассы.

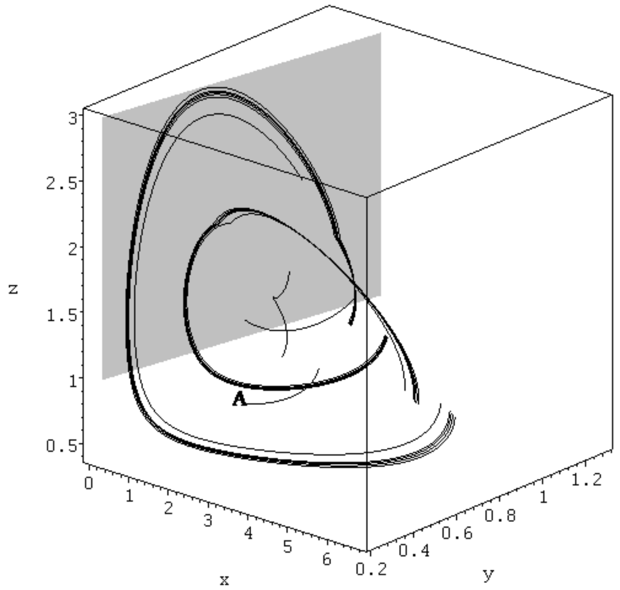


Рис. 1. Предельный цикл СОДУПС (3_i). при $\delta = 0{,}8$

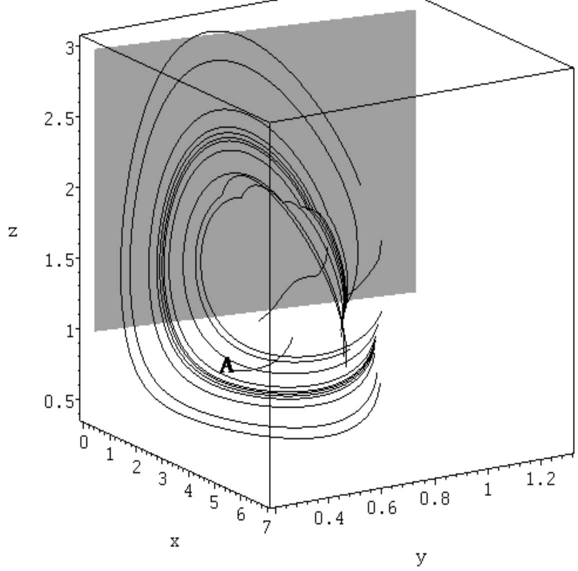


Рис. 2. Неустойчивая траектория СОДУПС (3_i) при $\delta = 1{,}3$.

При значениях параметров $a = 7$, $c = 1$, $e = 3$, $b_1 = 6{,}5$, $d_1 = 0{,}5$, $h_1 = 1$, $g_1 = 2$, $b_2 = 3$, $d_2 = 1$, $h_2 = 2$, $g_2 = 3$, $A_0 = 1{,}75$, $B_0 = 1{,}25$, $C_0 = -3$, $D_0 = 6$, $\delta = 0{,}8$ траектория движение СОДУПС (3_i), начинающееся по траектории системы (3_1) в точке $A(2; 0{,}5; 0{,}7)$, изображена на рис. 1. Как видно на этом рисунке, траектория навивается на разрывный предельный цикл. Причём амплитуда колебаний увеличилась по сравнению с амплитудой непрерывного цикла [6].

Если же изымаемое количество биомассы увеличить до $\delta = 1{,}3$, то движение становится неустойчивым, что, очевидно ведёт в вымиранию всех трёх популяций. Траектория движения СОДУПС (3_i) при $\delta = 1{,}3$ изображена на рис. 2.

Выводы и перспектива дальнейших исследований. Представленные программы позволяют находить аналитический вид решений СОДУПС, строить графики траекторий и находить численные значения решений для заданных значений аргумента. Во многих случаях это может облегчить исследование свойств решений СОДУПС, а также поможет анализировать изменения поведения решений в зависимости от изменения каких-либо параметров. Таким образом, данные программы можно использовать как для теоретического исследования свойств решений СОДУПС, так и для решения прикладных задач.

В дальнейшем авторы планируют вести работу в следующих трёх направлениях:

1) Ввести в полученные программы возможность вероятностного выбора как систем дифференциальных уравнений и начальных данных, так и поверхностей переключения;

2) разработать программы для интегрирования СОДУПС для более поздних версий пакетов MAPLE, MATHEMATICA, REDUCE допускающих параллельные вычисления;

3) Исследовать с помощью полученных программ некоторые прикладные задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов // Математический сборник. – 1960. – Т. 51 (93). – № 1. – С. 99–128.
2. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой / В.И. Уткин. – М.: Наука, 1974. – 272 с.
3. Гаушус Э.В. Исследование динамических систем методом точечных преобразований / Э.В. Гаушус. – М.: Наука, 1976. – 368 с.
4. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями / М.И. Фейгин. – М.: Наука, 1994. – 567.
5. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981.– 568 с.
6. Аматов М.А. Исследование модели взаимодействия трёх популяций, связанных трофическими отношениями / М.А. Аматов, Г.М. Аматова, Н.А. Чеканов, И.С. Кузнецова, С.А. Кунгурцев // Экологические системы и приборы. – 2009. – №7. –С. 31–40.
7. Аматов М.А. Интегрирование импульсных систем с помощью математического пакета MAPLE 8 / М.А. Аматов, Г.М. Аматова, И.С. Кузнецова, Н.А. Чеканов // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вып. 2(31). – С. 15–19.
8. Аматов М.А. Математическое моделирование процессов, описываемых бушующими системами дифференциальных уравнений / М.А. Аматов, Г.М. Аматова // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2010. – Вып. 3(39). – С. 25–29.

АМАТОВ Михаил Александрович – к. ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– качественная теория дифференциальных уравнений, гидродинамика, компьютерное моделирование.

АМАТОВА Галина Михайловна – к. ф.-м.н., доцент, заведующая кафедрой естественно-математических дисциплин и методики начального образования Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– качественная теория дифференциальных уравнений, компьютерное моделирование.

УДК 621.793

А. Ю. Андрейцев, М. М. Крюков, Т. В. Крижановська, Т. М. Семененко

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ ЧАСТИНОК ПОРОШКУ ПРИ ПЛАЗМОВОМУ НАПИЛЕННІ КОМПОЗИЦІЙНИХ ПОКРИТТІВ

Постановка проблеми. Керамічні порошки знайшли широке застосування при нанесенні покриттів завдяки своїй багатофункціональності. Вказані покриття використовуються як термо- та електроізоляційні, підвищують корозійну стійкість деталей та їх зносостійкість. Однак при газотермічному напиленні, через високу температуру плавлення та низьку теплопровідність, важко забезпечити високу міцність зчеплення даних покриттів з основою.

Для покращення фізико-механічних властивостей при напиленні використовують суміші оксидів та металів. При цьому виникає інша проблема. Оскільки температури плавлення металів та оксидів, що використовуються при напиленні, значно відрізняються, то вони можуть досягати основи у різних агрегатних станах, що значно зменшує адгезійні та когезійні властивості покриттів. Крім того, на фізико-механічні властивості покриттів впливає радіальне відхилення частинок від осі плазмового струменя, оскільки в його радіальному перерізі спостерігаються суттєві відхилення температур та швидкостей від їх значень на осі. Через це виникає необхідність побудови математичних моделей для визначення температурних характеристик напилюваних частинок з метою оптимізації режимів напилення та гранулометричного складу порошків.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Основні залежності для визначення швидкостей та температур в двофазному плазмовому потоці наведено в [1]. Але дані результати можна використати лише на початковому етапі перебування частинки в плазмовому струмені, коли різниці температур та швидкостей струменя і напилюваних частинок досить високі. Основним недоліком в даному випадку є припущення про сталість температури та швидкості плазмового потоку. В роботі [2] для врахування зміни цих параметрів дистанцію напилення розбито на ряд відрізків, для кожного з яких розв’язуються крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Однак в даній моделі внесено значні спрощення, що суттєво впливає на їх адекватність.

В [3] розроблено математичну модель для чисельного визначення термодинамічних параметрів частинок в турбулентному плазмовому потоці при умові радіальної їх подачі у плазмовий струмінь. Дослідженню теплофізичних процесів при плазмовому напиленні (але теж за певних припущень) присвячені роботи [4,5].

Для напилення сумішей порошків доцільно використовувати плазмотрони, що генерують квазіламінарний потік низькотемпературної плазми з аксіальною подачею порошку. В даному випадку з’являється можливість побудови математичних моделей для аналітичного визначення швидкостей та температур напилюваних частинок при менш суттєвих припущеннях щодо параметрів моделі. В [6] розглянуто модель руху частинки в потоці із змінною швидкістю, що дає можливість оптимізації складу напилюваної суміші. В [7] дана модель удосконалена з урахуванням зміни динамічної в’язкості плазми та розглянуто модель нагріву частинки до температури плавлення за умови змінної температури плазмового струменя.

Мета статті. Мета даної роботи – побудувати комплексну математичну модель для аналітичного визначення зміни температури частинок оксидів та металів вздовж дистанції напилення в умовах зміни агрегатного стану та подальшої оптимізації режимів напилення, що дозволяють покращити фізико-механічні показники покриттів.

Основна частина. Будемо вважати, що напилювані частинки мають ідеальну сферичну форму і є однорідними та ізотропними тілами. Крім того, будемо вважати, що температура змінюється лише радіально. Тоді на етапі розігріву частинок до температури плавлення для моделювання процесу скористаємось рівнянням теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0, \qquad 0 \le r \le R, \tag{1}$$

де $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$; λ – коефіцієнт теплопровідності частинки; c – теплоємність частинки; ρ – її густина; R – радіус, враховуючи, що на поверхні відбувається конвективний теплообмін з плазмовим потоком змінної температури $T_g(t)$:

$$\lambda \frac{\partial T(R,t)}{\partial r} = \alpha\left(T_g(t) - T(R,t)\right), \tag{2}$$

де α – коефіцієнт теплообміну між частинкою порошку та газом, а в центрі температура обмежена

$$T(0,t) < +\infty. \tag{3}$$

В початковий момент часу частинка має температуру

$$T(r,0) = T_0 = const. \tag{4}$$

Розв’язок даної крайової задачі має вигляд (див. [6]):

$$T = T_g(t) - 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin k_i - k_i\cos k_i}{k_i - \sin k_i\cos k_i}\frac{\sin\frac{k_i r}{R}}{\frac{k_i r}{R}}\left(\left(T_g(0) - T_0\right)e^{-\frac{a^2 k_i^2 t}{R^2}} + \int_0^t T_g'(\tau)e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}}d\tau\right), \tag{5}$$

де k_i – корені трансцендентного рівняння

$$tgk_i = \frac{k_i}{1 - Bi}, \tag{6}$$

$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ – число Біо.

Також в [6] було показано, що на початковому етапі залежність температури плазми від часу перебування частинки в струмені досить добре апроксимується поліномом другого степеня:

$$T_g(t) = At^2 + Bt + T_g(0).$$

В цих умовах температура частинки визначається за формулою

$$T = At^2 + Bt + T_g(0) - 2\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\sin k_1 - k_1\cos k_1}{k_1 - \sin k_1\cos k_1}\frac{\sin\frac{k_1 r}{R}}{\frac{k_1 r}{R}}\left[\left(T_g(0) - T_0\right)e^{-\frac{a^2 k_1^2 t}{R^2}} + \frac{2AR^2}{a^2 k_1^2}t + \right.$$
$$\left. + \frac{R^2}{a^2 k_1^2}\left(B - \frac{2AR^2}{a^2 k_1^2}t\right)\left(1 - e^{-\frac{a^2 k_1^2 t}{R^2}}\right)\right]. \tag{7}$$

Даний розв'язок дає досить хороші результати для порошків металу, при цьому можна обмежитись лише 10 – 20 – ма членами ряду, але для оксидів спостерігаються суттєві відхилення від експериментальних даних.

Це пов'язано з тим, що припущення про сталість коефіцієнта a^2 є прийнятним для металів і не прийнятним для оксидів, для яких він на стадії нагріву збільшується майже у п'ять разів, причому нелінійно.

В цьому випадку, аналогічно [7], розглядаємо послідовність крайових задач (1) – (4) для функції $T_i(r,t)$ з коефіцієнтами a_i^2, тобто розбиваємо дистанцію нагріву частинок до температури плавлення на декілька проміжків, на кожному з яких a_i^2 можна вважати сталим. При цьому значення T_i в кінці відповідного часового інтервалу буде початковою умовою для наступної крайової задачі.

Оскільки має місце відхилення частинок від осі напилення до 2-3 мм, то необхідно порівняти їх температури. Оскільки температура на границі плазмового потоку може відрізнятись від аксіальної до 500°С, то це може суттєво вплинути в подальшому на міцність зчеплення покриття з основою. Слід врахувати і різницю швидкостей плазмового потоку на осі та на границі.

На стадії плавлення частинок будемо вважати потік тепла із плазми сталим. Оскільки час плавлення, як показують експериментальні дані, не перевищує $2 \cdot 10^{-4}$ с, то різниця температур плазми і поверхні мікрочастинки змінюється в межах декількох десятків градусів. При цьому температура плазми перевищує температуру частинки на 1000 – 2500°С в залежності від режиму напилення, діаметра частинок та хімічного складу напилюваних матеріалів.

Для частинок металів (нікелю та міді) можна вважати температуру розплаву та нерозплавленої частки однаковою, оскільки теплопровідність їх досить висока. В цьому випадку обгрунтованим є припущення про рівність нулю теплового потоку на границі фазового переходу. В цьому випадку час плавлення частинки

$$t_{пл} = \frac{m_r \sigma_r}{Q_{пл}}, \tag{8}$$

де m_r – маса частинки, σ_r – теплота фазового переходу (теплота плавлення), $Q_{пл}$ – потік тепла, що надходить із плазми через поверхню частинки. Згідно з даною формулою, час плавлення частинок металів діаметром 40 – 60 мкм не перевищує 10^{-4} с.

Припущення про сталість температури при плавлення оксидів (Al_2O_3, SiO_2 тощо) є некоректним з декількох причин. По-перше, температура їх плавлення значно перевищує температуру плавлення напилюваних металів. Тому при одинакових геометричних параметрах вони починають плавитись пізніше. Різниця температур плазми і частинки в цьому випадку менша, а значить меншим є і тепловий потік $Q_{пл}$. По-друге, тепловий опір оксидів на порядок вищий, ніж у металів.

В даному випадку будемо припускати, що сталим є потік тепла Q_r на границі фазового переходу. Для керамічних частинок час плавлення

$$t_{пл} = \frac{m_r \sigma_r}{Q_{пл} + Q_r}. \tag{9}$$

Аналіз показує, що час плавлення оксидів перевищує 10^{-4}с. Однак, це не впливає на адекватність моделі, що розглядається, при умовах правильного визначення режиму напилення. Температура поверхні частинки не повинна перевищувати температуру в центрі не більш ніж на 100°С.

На стадії польоту частинки в розплавленому стані знову розв'язуємо задачу (1) - (3) при початковій умові $T(t_0)=T_{пл}=const$. Відрізняються апроксимації температури плазми: для металів $T_g=T_g(t_0)+At$, для оксидів $T_g(t_0) = T_g(t_0)e^{A(t_0 - t)}$

У випадку, якщо частинка досягне температури випаровування, то виникає задача оцінки втрати напилюваного матеріалу, тому необхідно підібрати фракції напилюваних матеріалів так, щоб не допустити їх перегрівання.

Якщо напилювані частинки досягають поверхні в розплавленому стані, то отримуємо міцне зчеплення покриття з основою. Але, враховуючи радіальні відхилення частинок від осі напилення (як було показано вище, це призводить до зниження температури частинок) та певну дисперсність напилюваних фракцій (частинки меншого діаметра перегріваються) виникає необхідність розгляду ще одного етапу: затвердіння частинок.

Складністю моделювання даного етапу є те, що час затвердіння частинок значно (на декілька порядків) перевищує час плавлення, що пов'язано з незначною різницею температур плазми та частинки. Для металів з певною часткою вірогідності при оцінці часу затвердіння можна скористатись формулою (9).

Якщо частинка із розплавленого стану повністю перейде в твердий, то знову можна скористатись формулою (5). Але, зазначимо, що в цьому випадку значно зменшується міцність зчеплення покриття з основою, тому не будемо зупинятись на аналізі цього етапу.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Результати, отримані в даній роботі, дають можливість розробити рекомендації по оптимізації режимів, дистанції напилення та гранулометричного складу сумішей для покращення якісних показників керамічних покриттів. Враховуючи, що на процес формування якісного покриття впливає декілька факторів (різні хімічні та фізичні властивості компонентів суміші, її дисперсність, відхилення від осі струменя тощо) задача оптимізації ускладнюється і вимагає повторних обрахунків деяких параметрів моделі для частинок різного діаметра.

Суттєву перевагу при цьому має напилення плакованих частинок (з керамічним ядром та металевою оболонкою). В цьому випадку для визначення температури окремої частинки отримуємо наступну крайову задачу.

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - a_1^2\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) = 0, \qquad 0 \le r < \rho,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} - a_2^2\left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) = 0, \qquad \rho \le r < R,$$

$$T_1(r,0) = T_2(r,0) = T_0,$$

$$T_1(0,t) < +\infty,$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(R,t)}{\partial r} = \alpha\left(T_g(t) - T_2(R,t)\right),$$

$$T_1(\rho,t) = T_2(\rho,t), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(\rho,t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(\rho,t)}{\partial r}.$$

Розв'язанню даної задачі будуть присвячені наступні роботи.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Нанесение покрытий плазмой/ В. В. Кудинов, П. Ю. Пекшев, В. Е. Белащенко и др.- М.: Наука, 1990. – 406 с.
2. Компьютерное моделирование процессов плазменного напыления покрытий/ С.П. Кундас, А.П. Достанко, А.Ф. Ильющенко и др.–Мн.: Бестпринт, 1998.–212с.

3. Компьютерное моделирование процесса плазменного напыления./ Ю.С. Борисов, И.В. Кривцун, А.Ф. Мужиченко, Е. Люгшайдер, У. Эритт. // Автоматическая сварка – 2000. – № 12. – С. 42-51.
4. Нагрев и испарение частиц в струе низкотемпературной плазмы./ Ю.Н. Лохов, В.А. Петруничев, А.А. Углов, И.И. Швыркова. // Физ. и хим. обраб. материалов. – 1974. – №6. – С. 52–56;
5. Иванов Е.М. Инженерный расчет теплофизических процессов при плазменном напылении/ Е.М. Иванов. – Саратов: Из-во Саратов. ун-та, 1983. – 140 с.
6. Моделирование процесса нагрева частиц порошка в плазменной струе при напылении композиционных покрытий / И.В. Смирнов, А.Ю. Андрейцев, А.В. Чорный, В.И. Копылов. // Вестник ХНТУ. — 2008. — №3. — С. 219-224.
7. Смирнов И.В. Аналитическое определение скорости и температуры частиц оксидной керамики в процессе плазменного напыления / И.В. Смирнов, А.Ю. Андрейцев, А.В. Черный.// Вестник ХНТУ. — 2009. — №2(35). — С. 403-410.

АНДРЕЙЦЕВ Андрій Юрійович – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Державного економіко-технологічного університету транспорту.

Наукові інтереси:

– симетрія диференціальних рівнянь, математичне моделювання економічних та фізичних процесів.

КРЮКОВ Микола Миколайович – д. т. н., завідувач кафедри вищої математики Державного економіко-технологічного університету транспорту.

Наукові інтереси:

– механіка оболонкових конструкцій, диференціальні рівняння.

КРИЖАНОВСЬКА Тетяна Василівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Державного економіко-технологічного університету транспорту.

Наукові інтереси:

– дослідження процесів деформування елементів оболонкових конструкцій, чисельні методи.

СЕМЕНЕНКО Тетяна Миколаївна – старший викладач кафедри вищої математики Державного економіко-технологічного університету транспорту.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання нестаціонарних суперкавітаціних процесів при високошвидкісному русі тіл у воді і при роботі машин.

УДК 004.93

А.М. Ахметшин, К.А. Ахметшин

ОТОБРАЖЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММ КАК ЯРКОСТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЯДЕР ВТОРОГО ПОРЯДКА МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА

Постановка проблемы. Вариабильность сердечных ритмов имеет сложную динамику, что предопределяет возникновение ряда проблем при проведении качественного анализа различных типов специфических заболеваний. С точки зрения теории системного анализа, регистрируемую электрокардиограмму (ЭКГ) можно рассматривать как выходной сигнал нелинейной нестационарной динамической системы (ННДС), характеризуемой различными переходами между устойчивым, замирающим и хаотическим поведением. Знание этих особенностей принципиально важно для понимания особенностей динамики сердечных ритмов и их классификации. Однако, как это хорошо известно, линейные методы анализа сердечных ритмов (в первую очередь, различные варианты метода Фурье-спектроскопии и параметрического спектрального анализа) не дают удовлетворительных результатов, а большинство известных методов нелинейного анализа, заимствованных из теории динамики стохастических систем (фрактальная размерность, коэффициенты Ляпунова и др.), требуют достаточно длинных временных последовательностей и, зачастую, не обеспечивают требуемую степень чувствительности применительно к задаче идентификации типа динамики сердечного ритма.

В этой связи возникает вопрос: возможно ли отображение характерных особенностей ЭКГ как ННДС в виде яркостного изображения (возможно цветного) для облегчения и повышения достоверности определения типа заболевания? Важность такой постановки вопроса обусловливается необходимостью сжатия достаточно длинных временных записей оцифрованных ЭКГ (десятки тысяч отсчетов) и открывающейся возможностью использования математического аппарата теории цифровой обработки изображений и методов искусственного интеллекта при анализе ЭКГ с позиции теории распознавания образов.

Анализ публикаций по теме исследования. В рамках цифровых методов обработки и анализа ЭКГ условно можно выделить два основных направления. Первое, в основном связано с задачами линейной фильтрации ЭКГ от влияния шумов и последующего сжатия очищенных ЭКГ [1]. Основной проблемой здесь является то обстоятельство, что для синтеза оптимального фильтра необходима математическая модель «полезного» сигнала и априорное знание спектральных и статистических характеристик шумов. Принципиальным недостатком подобного подхода является игнорирование нелинейной сущности ЭКГ и информационная неопределенность самого понятия шума в ЭКГ, ведь помимо измерительных шумов имеются и шумы собственно сердца, информационная и диагностическая значимость которых является неопределенной до настоящего времени. Второе направление качественного анализа сердечной динамики базируется на математическом аппарате нелинейного анализа стохастических временных рядов [2]. В рамках этого подхода, состояние сердца, как некоторой системы, в любой момент времени описывается переменными состояния (предшествующими отсчетами): $v_1(t), v_2(t), ..., v_d(t)$. Эти отсчеты образуют вектор $\overline{v(t)}$ в d- мерном пространстве, называемом фазовым пространством (или пространством состояний), причем величина d характеризует размерность вложения. Этот вектор мигрирует во временной области, формируя траекторию фазового пространства (орбиту). Базовая идея такого подхода базируется на предположении о том, что топологические особенности временной эволюции траектории многомерного фазового пространства, характеризуют особенности поведения динамики исследуемой системы (в нашем случае – динамики сердечных ритмов). Однако, традиционные методы вложения имеют очевидный недостаток при анализе существенно неоднородных временных сигнальных последовательностей (к каковым относятся ЭКГ), в которых сосуществуют участки с быстрым и медленным движениями, что диктует необходимость использования переменной величины размерности вложения. Помимо этого, качественная классификация типа динамики трехмерных фазовых портретов возможна на основе визуального анализа экспертом, но авторам ничего не известно об успешных попытках компьютерной классификации типа ЭКГ на основе трехмерного фазового портрета динамики анализируемой ЭКГ.

Целью работы является демонстрация информационных возможностей нового метода качественного анализа ЭКГ именно как нелинейной динамической системы.

Основная часть. В рамках общей теории систем Вольтерра показал [3], что, для «условно» стационарной нелинейной системы с конечной памятью, соотношение между входом $u(t)$ и выходом $v(t)$ определяется как

$$v(t)=\int_0^\infty h_1(\tau)u(t-\tau)d\tau+\int_0^\infty\int_0^\infty h_2(\tau_1,\tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\ldots, \tag{1}$$

где $h_1(\tau)$; $h_2(\tau_1,\tau_2)$; $h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ - ядра Вольтерра, являющиеся симметричными функциями, причем член первого порядка представляет собой интеграл свертки линейной системы. Функциональный смысл ядер Вольтерра заключается в проведении аналогии между взаимодействием нескольких импульсов (отсчетов ЭКГ). Поскольку ядро первого порядка рассматривается как модель, с помощью которой учитывается влияние прошлых значений входного сигнала на реакцию в настоящий момент, то ядра Вольтерра высших порядков можно рассматривать в виде модели, описывающей зависимость значения выходного сигнала в настоящий момент, от взаимодействия прошлых значений входного сигнала.

Выражение (1) является чисто математическим, поскольку при попытке его применения к исследованию особенностей динамики сердечных ритмов возникает два принципиальных вопроса:

1. Что рассматривать в качестве входного сигнала $u(t)$, если характеризовать сердечную динамику ядрами Вольтерра ($v(t)$ – регистрируемая ЭКГ)?

2. Какой вид (характеристики) должен иметь входной сигнал $u(t)$?

С биофизической точки зрения однозначные ответы на поставленные вопросы отсутствуют, но в рамках системного подхода для реализации целей данной работы последующее изложение базируется на трех положениях:

1. В регистрируемой ЭКГ $v(t)$ имеются компоненты, которые допустимо рассматривать в виде виртуального входного сигнала $u(t)$.

2. Входной сигнал $u(t)$ должен быть более широкополосным, по сравнению с выходным сигналом $v(t)$.

3. Априорные спектральные и статистические характеристики виртуального входного сигнала $u(t)$ следует рассматривать как неизвестные.

В этой связи, центральной является проблема выделения компонент $u(t)$ из регистрируемой ЭКГ $v(t)$.

С учетом изложенных выше положений, для решения поставленной задачи был разработан новый нелинейный метод разделения регистрируемой ЭКГ на составляющие компоненты с априори неизвестными характеристиками.

Структура алгоритма включает в себя следующие этапы:

1. На основе измеренной ЭКГ $v(t_i)$, $i = 1,2,...,N$ – формируется матрица G вложенных векторов анализируемой ЭКГ вида

$$G = \begin{bmatrix} v(t_1) & v(t_2) & ... & v(t_L) \\ v(t_2) & v(t_3) & ... & v(t_{L+1}) \\ . & . & ... & . \\ v(t_{N-L+1}) & v(t_{N-L+2}) & ... & v(t_N) \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

размерностью $(N - L + 1) \times L$, причем $N >> \mathrm{L}$, где L рассматривается как параметр, характеризующий глубину вложения анализируемой ЭКГ.

2. Проводится сингулярное разложение матрицы G

$$G = UWV^T, \qquad (3)$$

где $U = [v_1 v_2 ... v_L]$ – матрица сингулярных векторов размерностью $(N - L + 1 \times L)$, формирующая ортонормированный базис пространства натянутого на столбцы матрицы G; W – диагональная матрица, элементы которой w_i $(i = 1,...,L)$ являются сингулярными числами матрицы G, причем $w_1 \geq w_2 \geq ... \geq w_L \geq 0$. Они являются собственными значениями матрицы $G^T G$, а V – представляет собой ортогональную матрицу размерностью $(L \times L)$.

Следует отметить некоторые особенности предложенного алгоритма:

1. Сингулярное разложение матрицы G, приводящее к синтезу ортонормированной матрицы сингулярных векторов U, с физической точки зрения, представляет собой такой тип математического преобразования, которое максимизирует различия между столбцами матрицы G, что, по своей сути, соответствует эффекту адаптивной многоканальной нелинейной фильтрации.

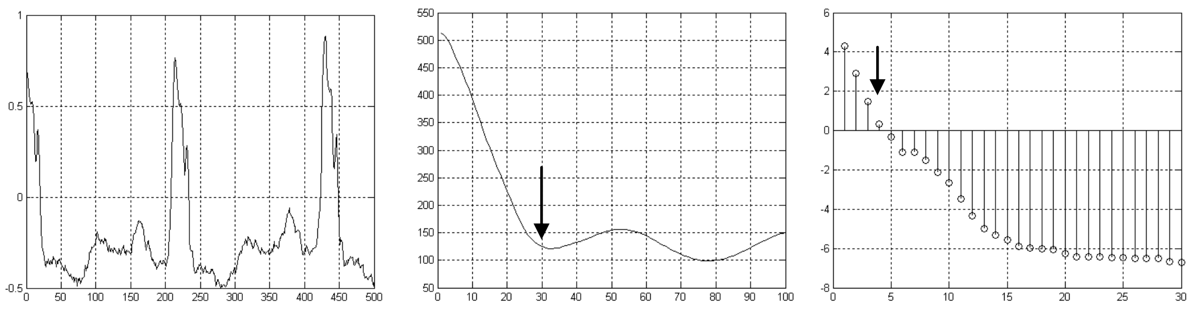
2. Поскольку сингулярные числа w_i являются собственными значениями корреляционной матрицы $R = G^T G$, то из теории декоррелирующих преобразований следует, что сингулярный вектор v_1, соответствующий первому наибольшему сингулярному числу w_1, характеризует наибольшую степень «похожести» всех столбцов матрицы G друг на друга, что обеспечивает необходимый эффект фильтрации ЭКГ от шумов.

3. Ансамбль сингулярных векторов $\{v_i\}$ можно рассматривать в виде аналога ортонормированной декомпозиции анализируемой ЭКГ $v(t)$.

4. Анализ спектра сингулярных чисел w_i, позволяет определить степень линейной независимости К столбцов матрицы G (ее ранг) и оптимизировать значение параметра глубины вложения L, которое целесообразно выбирать равным $L \geq K$.

На рис.1а представлена фрагмент одной из анализированных ЭКГ, а так же ее автокорреляционная функция (АКФ) (рис.1б) и спектр нормированных сингулярных чисел в логарифмическом масштабе (рис.1в).

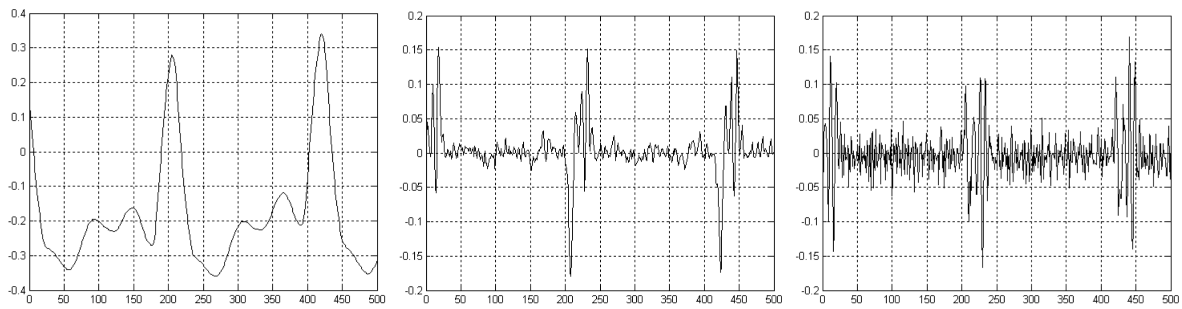
Из рассмотрения рис.1 следует, что если исходить из расстояния до первого минимума АКФ ЭКГ, то, в соответствии с рекомендациями нелинейной теории временных рядов [2] , размерность глубины вложения должна выбираться равной $L = 30$, тогда как анализ спектра сингулярных чисел матрицы G показывает, что ранг матрицы $K \approx 4$, поэтому в наших экспериментах глубина погружения выбиралась $L = K = 4$.



а б в

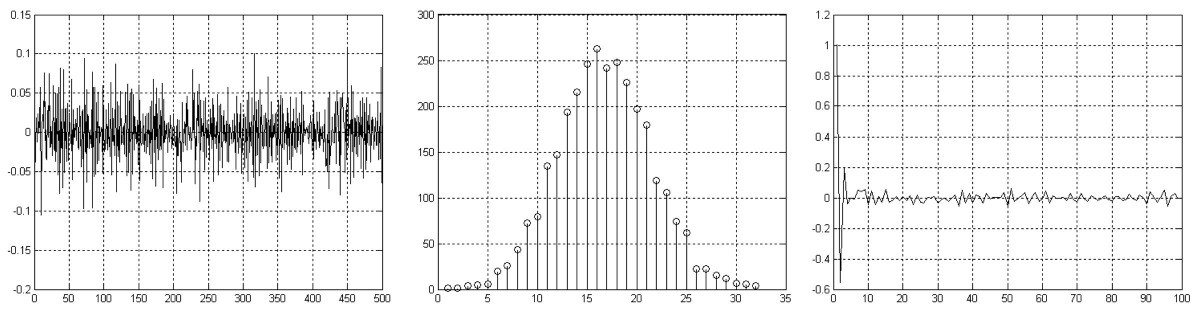
Рис.1 Фрагмент патологической ЭКГ: а – оригинал; б – АКФ ЭКГ; в – спектр нормированных сингулярных чисел в логарифмическом масштабе матрицы G при глубине вложения $L = 30$

На рис.2 показаны первые три сингулярных вектора соответствующих ЭКГ на рис.1а, а на рис.3 – четвертый (последний для $L = 4$) сингулярный вектор, а так же его гистограмма и АКФ.



ν_1 ν_2 ν_3

Рис.2 Первые три сингулярных вектора соответствующих ЭКГ на рис.1а для $L = 4$



а б в

Рис.3 Характеристики четвертого сингулярного вектора ν_4:
а – ν_4; б – гистограмма ν_4; в – АКФ ν_4

Из рассмотрения рис.2 и рис.3 следует.

1. Первый сингулярный вектор ν_1 можно рассматривать как отфильтрованную от влияния измерительных и структурных шумов ЭКГ (сравнить рис.1а и рис.2а).

2. С увеличением порядка (номера) вектора сингулярного разложения увеличивается степень его «хаотичности».

3. Последний сингулярный вектор ν_4, с учетом его характеристик, можно рассматривать в виде некоррелированного нормального случайного процесса.

Последнее обстоятельство имеет особо важное значение, поскольку в качестве оптимального сигнала на входе нелинейной системы при решении задачи ее идентификации следует использовать именно некоррелированный гауссовский шум [4]. Это означает, что (в данном конкретном случае) в рамках модели Вольтерра (1) в качестве входного, следует рассматривать сигнал $u(t) = v_4(t)$, а в качестве выходного – сигнал $v(t) = v_1(t)$.

В отношении ядер модели Вольтерра (1) следует отметить:

– ядро первого порядка (вектор h_1) отвечает за линейные эффекты в ЭКГ и не представляет интереса;

– ядро третьего порядка h_3 представляет собой объемный параллелепипед в пространстве трех временных задержек и не может быть синтезировано за приемлемый интервал вычислительного компьютерного времени.

– ядро второго порядка h_2 представляет собой квадрат и может быть представлено в виде аналога яркостного изображения отображающего особенности нелинейной динамики анализируемых ЭКГ.

На рис.4а представлены изображения ядер Вольтерра второго порядка для нормальной и патологических ЭКГ.

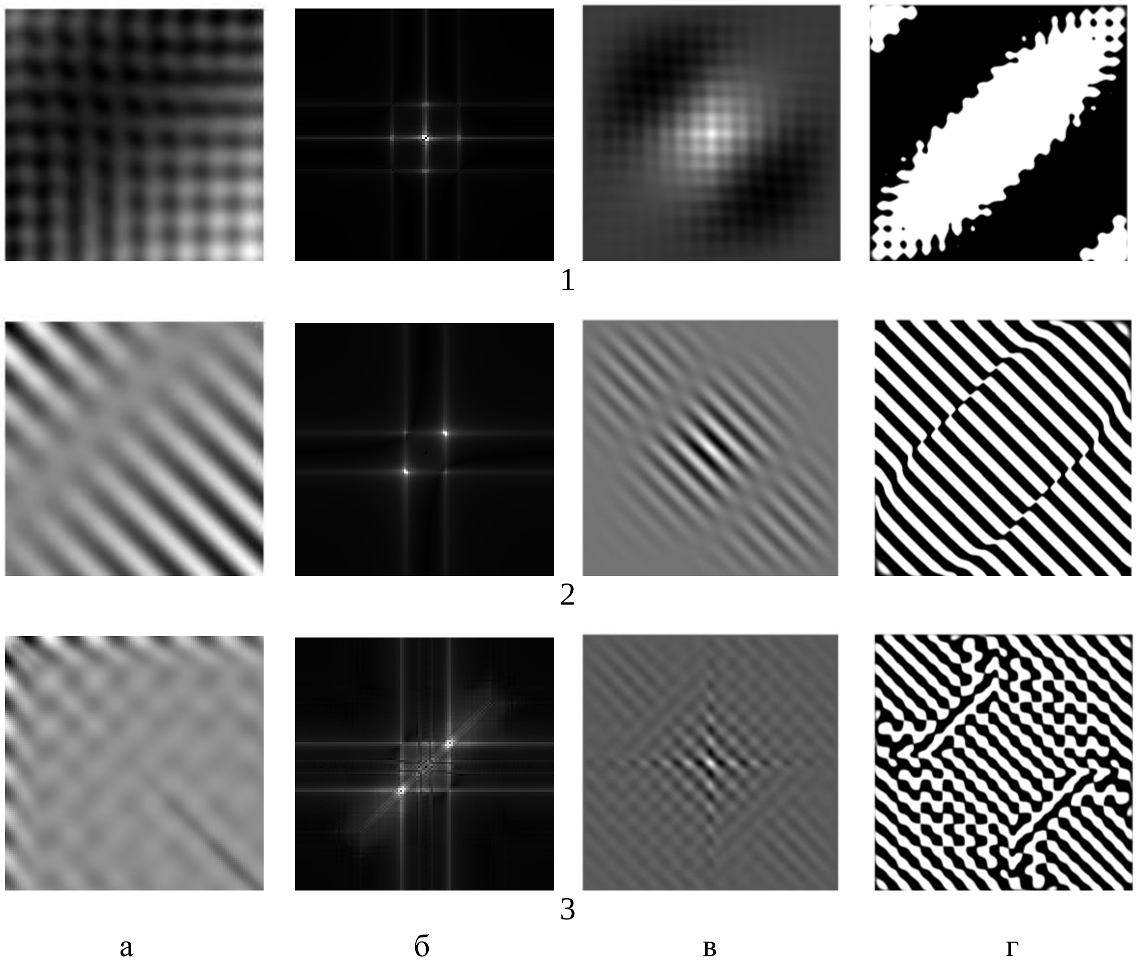


Рис.4 Изображения ядер Вольтерра h_2 и их характеристики: 1 – нормальная ЭКГ; 2, 3 – патологические ЭКГ (а – h_2; б – модуль Фурье спектра h_2; в – автокорреляционная функция h_2; г – бинаризированное изображение автоковариационной функции h_2)

Из рассмотрения рис.4а видно, что изображения ядер Вольтерра второго порядка являются «текстуро–подобными» и для их классификации целесообразно использовать характеристики используемые для классификации изображений текстур (энергетические Фурье–спектры (рис.4б) и корреляционные функции (рис.4в,г)) [5] в целях выявления качественных отличий нормальных и патологических ЭКГ.

Анализ рис.4 показывает, что энергетические Фурье–спектры ядер Вольтерра $h_2(t_i, t_j)$ плохо подходят для решения задачи классификации из–за сравнимой ширины спектров нормальных и патологических ЭКГ. Однако, представляется, что бинаризированные по уровню «0» изображения автоковариационных функций ядер Вольтерра (удалена постоянная составляющая) могут быть использованы для решения задачи автоматизированной классификации типов ЭКГ.

Выводы. 1. Предложенный метод сингулярного разложения ЭКГ позволяет разделить ЭКГ на отдельные ортогональные составляющие, что открывает возможность использования методологии «черного ящика» в рамках модели Вольтерра для дополнительного повышения достоверности качественной классификации особенностей динамики ЭКГ на основе визуализации и анализа ядер второго порядка.

2. В качестве входного сигнала следует рассматривать сингулярный вектор соответствующий максимальному значению оптимальной размерности величины погружения вложенных векторов, а в качестве выходного – сингулярный вектор соответствующий максимальному значению сингулярного числа.

3. Полученные результаты свидетельствуют – в рамках предложенного подхода анализируемой ЭКГ возможно сопоставление двумерной яркостной характеристики (изображения) отображающей основные особенности ее динамики, что позволяет использовать математический аппарат цифровой обработки изображений и вычислительного интеллекта в целях повышения достоверности диагностической классификации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Addison P. Wavelet transforms and the ECG: a review / P. Addison // Physiol. Meas. – 2005. – Vol.26 – P.155–199.
2. Perc M. Nonlinear time series analysis of the human electrocardiogram / M. Perc // European Journal of Physics. – 2005. – Vol.26. – P.757–768.
3. Bussgang J.J. Analysis of nonlinear systems with multiple inputs/ Bussgang J.J., Ehrman L., Graham J.W. // Proc. IEEE. – 1974. – Vol.62. – P.1088-1119.
4. Мармарелис П. Анализ физиологических систем: метод белого шума / Мармарелис П., Мармарелис В. – М.: Мир, 1981. – 480 с.
5. Ахметшин А.М. Классификация текстурных изображений на основе инвариантных признаков аналитических автокорреляционных функций / Ахметшин А.М., Довженко О.В.// – Вестник Херсонского госуд. техн. университета. – 2002. – Т. 2(15). – С.38-41.

АХМЕТШИН Александр Мубаркович – д.ф.-м.н., профессор кафедры АСОИ Днепропетровского национального университета.

Научные интересы:

– компьютерное видение, распознавание образов, нелинейная динамика.

АХМЕТШИН Константин Александрович – магистр кафедры ЭВМ Днепропетровского национального университета.

Научные интересы:

– интеллектуальные методы обработки информации.

УДК 004.93

А.М. Ахметшин, А.А. Степаненко

АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ АДАПТИВНОЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЯРКОСТЕЙ

Постановка проблемы. Задачи анализа и интерпретации изображений различной физической сущности являются неизменно актуальными, о чем свидетельствует ежегодное проведение десятков конференций и симпозиумов посвященных данной тематике. Последнее связано с отсутствием единого подхода к построению математических моделей произвольных изображений, что обусловливает наличие множества различных методов и алгоритмов при отсутствии какой–либо общей технологии их цифровой обработки [1, 2]. К одной из наиболее сложных относится ситуация, связанная с анализом слабоконтрастных изображений, характеризуемых наличием визуально неразличимых областей (объектов) потенциального интереса, число, форма и месторасположения которых является неизвестным.

Сложность подобной ситуации обусловлена тем обстоятельством, что применение известных алгоритмов (эквализация гистограммы, градиентное отображение, псевдоцветовое кодирование и др.) может не давать ожидаемых результатов или, что еще хуже, давать различные результаты. В подобной ситуации единственным способом повышения надежности (достоверности) обработки является использование дополнительного числа, желательно принципиально различных, методов в целях получения совпадающих результатов хотя бы в двух случаях.

Хорошо известно, что линейные преобразования могут облегчить визуальную интерпретацию слабоконтрастных изображений, но не обеспечивают получения (извлечения) дополнительной информации, необходимой для повышения надежности анализа

Анализ публикаций по теме исследования. Применительно к задаче повышения чувствительности анализа слабоконтрастных изображений были разработаны методы резонансно–пространственного [3] и нуль–пространственного [4] отображений. Характерной особенностью этих методов является их алгоритмическая и программная сложность, а так же направленность на выделение и сегментацию слабоконтрастных областей, а не малоразмерных объектов. В [5] был предложен способ выделения слабоконтрастных (согласованных) границ эхо–импульсных изображений слоистых структур, базирующийся на использовании нелинейного параметрического метода спектрального анализа второго порядка. В рамках этого метода импульсная последовательность кодируется коэффициентами модели линейного предсказания на один отсчет временной последовательности, что, по сути дела, означает перекодировку исходных данных. Данное обстоятельство открывает потенциальную возможность повышения информативности анализа подобного типа изображений.

Целью работы является обобщение метода линейного предсказания на анализ яркостных изображений произвольной физической сущности и демонстрация его информационных возможностей.

Основная часть. Суть нового метода базируется на адаптивном сопоставлении каждому пикселю анализируемого изображения вектора коэффициентов линейного предсказания значения яркости в локальной окрестности данного пикселя. Структура алгоритма метода включает в себя следующие этапы.

1. Формирование скользящей вдоль апертуры анализируемого изображения I рамки размером $N = L*L$. В наших экспериментах мы использовали рамку размером (3*3).

2. Центр расположения рамки соотносится с текущими координатами (x, y) пикселя, с которым соотносятся яркости изображения, локализованные в пределах апертуры рамки и разворачиваемые по спирали в целях формирования текущего вектора $I(x, y) = I(x_k); k = 1,2,..., N$.

3. Модель текущего вектора локальных яркостей $I(x_k)$ анализируемого изображения рассматривается в виде стохастической модели авторегрессии порядка $M < N$

$$I(x_k) = \sum_{m=1}^{M} a(m) I(x_{k-m}) + n_k \;; \quad k = 1,2,..., N\,, \tag{1}$$

где $a(m)$ – рассчитываемые коэффициенты модели авторегрессии порядка M, n_k – рассматривается в виде непредсказуемого белого гауссовского шума с нулевым средним.

Линейный предсказывающий фильтр для случайного текущего вектора $I(x_k)$ определяется как

$$\hat{I}(x_k) = \sum_{m=1}^{M} a(m) I(x_{k-m})\,. \tag{2}$$

Погрешность предсказания текущего значения яркости на $k-$ом отсчете определится как

$$e(x_k) = I(x_k) - \hat{I}(x_k)\,, \tag{3}$$

а результирующая энергия ошибки в пределах длительности вектора $I(x_k)$ будет равна

$$P = \sum_{k=1}^{N} e^2(x_k)\,. \tag{4}$$

Вектор коэффициентов модели авторегрессии, обеспечивающих минимальную среднеквадратичную ошибку предсказания значений яркостей, определяется путем минимизации выражения (4) по отношению к каждому из коэффициентов $a(m)$, т.е. к выполнению равенства

$$\partial P / \partial a(m) = 0; \quad m = 1,2,..., M\,,$$

что приводит к решению системы уравнений [6]

$$\begin{vmatrix} c(0) & c(1) & ... & c(M-1) \\ c(1) & c(0) & ... & c(M-2) \\ ... & ... & ... & ... \\ c(M-1) & c(M-2) & ... & c(0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a(1) \\ a(2) \\ ... \\ a(M) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c(1) \\ c(2) \\ ... \\ c(M) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где $c(i)$ – выборочная оценка автокорреляционной функции текущего вектора значения яркостей $I(x_k)$

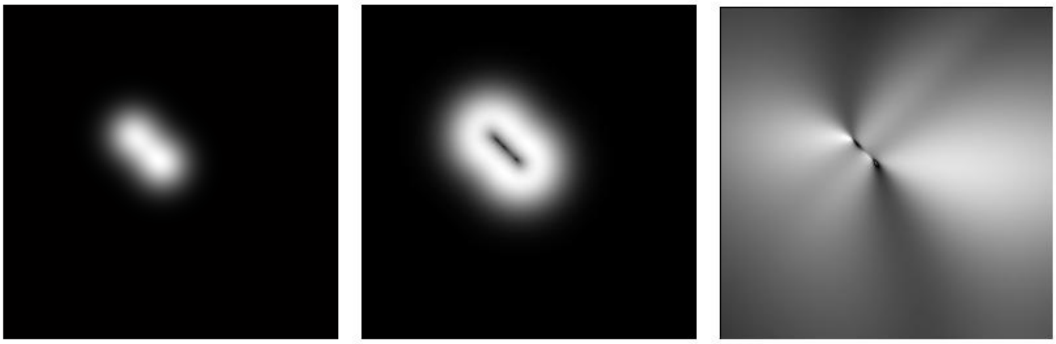
$$c(i) = \frac{1}{N-i+1} \sum_{k=1}^{N-i+1} I(x_k) I(x_{k+i}); \; i = 0,1,..., D < N\,. \tag{6}$$

Диагностическая проверка синтезированной модели авторегрессии базируется на анализе статистических свойств последовательности $\{e(k)\}$, которая должна удовлетворять условиям [6]

$$E\{e(k)\} = 0; E\{e(k)e(j) = \sigma_0^2 \delta(k-j)\}, \tag{7}$$

где E – оператор математического ожидания, а σ_0^2 – дисперсия ошибки прогноза.

На рис.1а представлено модельное цифровое изображение, характеризуемое наличием двух локальных, визуально неразличимых яркостных объектов. На рис.1б представлено изображение модуля градиентного отображения анализируемого изображения, из рассмотрения которого видно, что данное преобразование не позволяет визуально разделить два участка и, по сути дела, дает искаженное представление, трансформируя исходное изображение в «тороподобное».

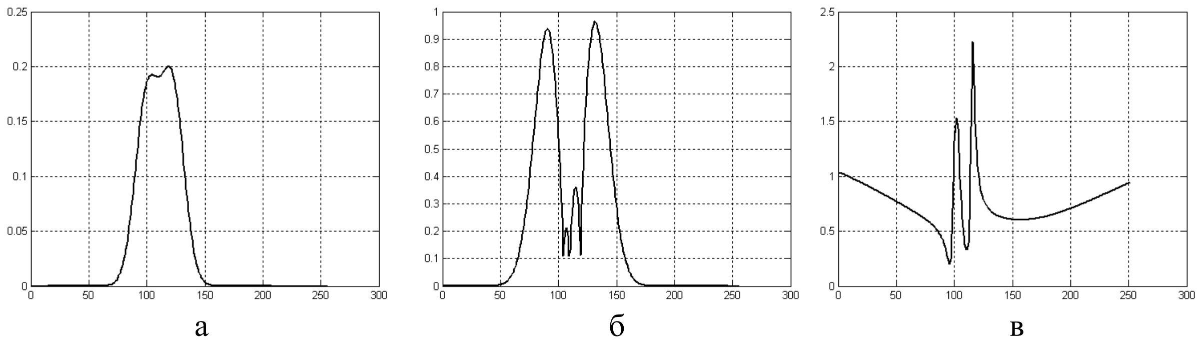


а б в

Рис.1 Цифровое модельное изображение: а – оригинал; б – модуль градиентного отображения; в – визуализация коэффициента $a(2)$ для рамки размером (3*3)

На рис.1в синтезировано изображение второго коэффициента $a(2)$ адаптивной модели авторегрессии четвертого порядка (т.е. для $M=4$ в (1)), из рассмотрения которого следует, что новый метод позволил уверенно локализовать наличие двух перекрывающихся яркостных участков.

Более детально информационные аспекты метода можно уяснить из рассмотрения графиков диагональный яркостно–пространственных срезов рис.1, представленных на рис.2.

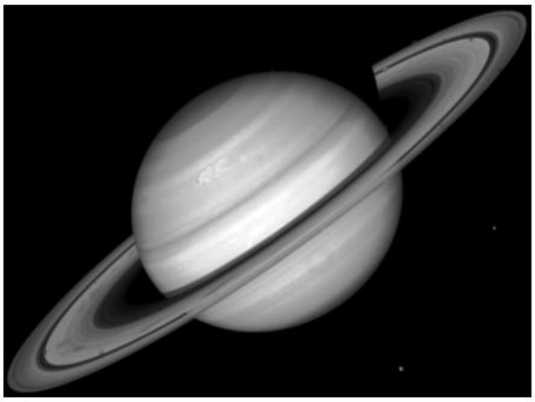


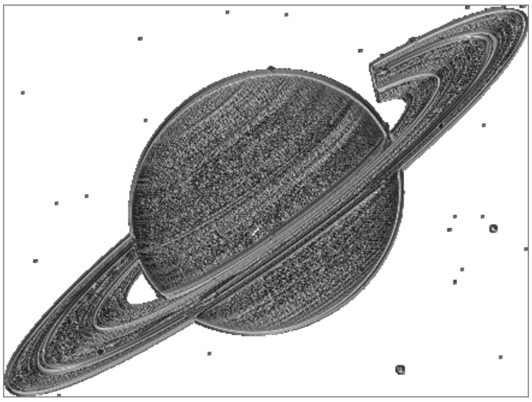
а б в

Рис.2 Яркостно–пространственные диагональные срезы изображений, представленных на рис.1

Из рассмотрения рис.2 видно, что виртуальный синтез изображений в пространстве параметров модели линейного предсказания позволил увеличить пространственную разрешающую способность в два раза, тогда как модуль градиентного отображения, в данном конкретном случае, дает искаженное представление об особенностях анализируемого изображения.

На рис.3а представлено космическое изображение Сатурна.



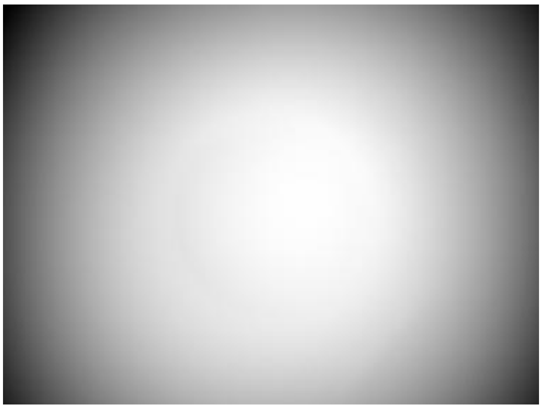


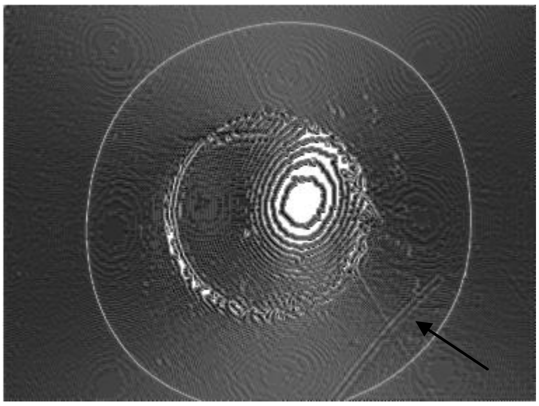
а б

Рис.3 Космическое изображение Сатурна: а – оригинал; б – синтезированное изображение коэффициента $a(2)$ для рамки размером (3*3)

На рис.3а в правом нижнем углу видно изображение двух планет, но визуально неразличима ни одна из звезд, что обусловлено влиянием яркостной засветки солнечного излучения. Синтез изображения в пространстве второго параметра модели авторегрессии четвертого порядка позволил уверенно выделить 24 «звездоподобных» точечных объектов (рис.3б).

На рис.4а представлено оптическое изображение излучения из конца оптоволоконного кабеля, прямой визуальный анализ которого не позволяет выявить топологические особенности оптического излучения.



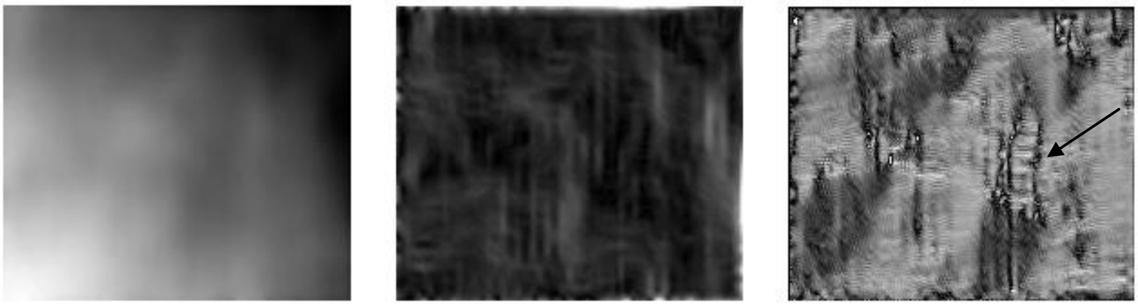


а б

Рис.4 Оптическое изображение излучения из конца оптоволоконного кабеля: а – оригинал; б – синтезированное изображение коэффициента $a(2)$

Визуальный анализ синтезированного изображения (рис.4б) позволяет выявить как характерные особенности топологии поверхности яркостного «фронта», так и наличие какого–то визуально неразличимого объекта в правом нижнем углу (указан стрелкой).

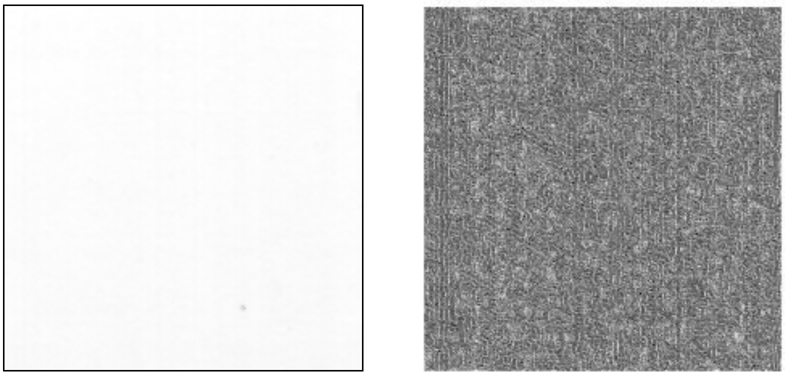
На рис.5а представлено изображение гравитационного поля участка Земной поверхности в сопоставлении с модулем его градиентного отображения (рис.5б). Анализ показывает, что градиентное отображение при наличии сложного яркостного фона не позволяет выделить объекты потенциального интереса, за которые обычно принимаются аномальные участки изображений геофизических полей. Синтезированное изображение на основе вычисления второго коэффициента авторегрессии четвертого порядка (рис.5в) уверенно селектирует одну такую область (указана стрелкой).



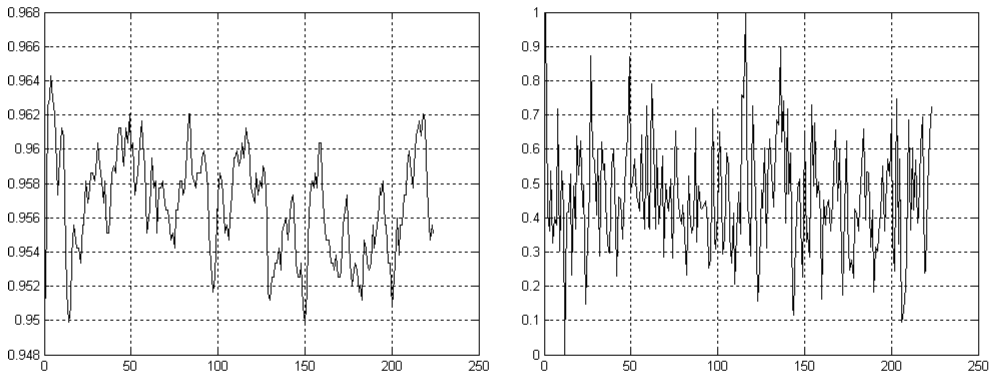
а б в

Рис.5 Изображение гравитационного поля участка Земной поверхности: а – оригинал; б – модуль градиентного отображения; в – синтезированное изображение коэффициента $a(2)$

На рис.6а представлено изображение листа белой бумаги, вариация значений яркости которого находится в пределах 1% (рис.6в), т.е. структура листа является визуально неразличимой.



а б



в г

Рис.6 Изображение листа белой бумаги: а – оригинал; б – изображение коэффициента а(2); «в», «г» – графики 100–ой строки соответствующих изображений

Синтез нового изображения на основе визуализации коэффициента а(2) позволил увеличить динамический диапазон изменения яркости в 60 раз (от 0.01 до 0.60) и визуализировать особенности структуры листа бумаги.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. На основании проведенных исследование и экспериментов можно сделать следующие выводы.

1. Виртуальный синтез слабоконтрастных изображений в пространстве параметров модели адаптивного линейного предсказания локального распределения яркостей позволяет повысить пространственную разрешающую способность и визуальную чувствительность обнаружения малоразмерных и визуально неразличимых объектов.

2. Информационные возможности метода зависят как от размеров скользящей рамки, влияющей на величину текущего яркостного вектора $I(x_k)$, так и выбора порядка M модели линейного предсказания.

3. Поскольку характеристики объектов потенциального интереса и яркостного фона, как правило, являются неизвестными, то параметры модели линейного предсказания целесообразно варьировать в рамках итеративного процесса, добиваясь приемлемой степени психофизиологического восприятия синтезируемых изображений.

4. Разработанный метод можно рассматривать в виде полезного дополнения к существующим алгоритмам цифровой обработки слабоконтрастных изображений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. .; [пер. с англ. под ред. П.А.Чочиа]. – М.: Техносфера, 2006. – 1070 с.
2. Яне Б. Цифровая обработка изображений / Б. Яне.; [пер. с англ. А.М. Измайловой]. – М.: Техносвера, 2007. – 583 с.
3. Ахметшина Л.Г. Повышение чувствительности анализа радиологических изображений на основе фазовых характеристик метода топологического резонанса / Л.Г. Ахметшина, А.М. Ахметшин // Искусственный интеллект. – 2004. – № 4. – С. 477 − 483.
4. Ахметшин А.М. Нейросетевая кластеризация низкоконтрастных изображений в пространстве признаков комплексного нуль-пространственного отображения на основе сочетания ортогонализирующего и декоррелирующего преобразований / А.М. Ахметшин, Л.Г. Ахметшина // Искусственный интеллект. − 2003. – № 3. – С. 475 − 482.
5. Ахметшин А.М. Разложение суперпозиций неизвестных импульсных сигналов адаптивным спектральным методом линейного предсказания / А.М. Ахметшин, А.А Степаненко // Москва. – Машиностроение. - Вестник информационных и компьютерных технологий. – 2006. - №10. – С.2-12.
6. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

АХМЕТШИН Александр Мубаркович – д.ф.-м.н., профессор кафедры АСОИ Днепропетровского национального университета.

Научные интересы:

– компьютерное видение, распознавание образов, нелинейная динамика.

СТЕПАНЕНКО Александр Александрович – к.т.н., доцент Запорожского национального технического университета.

Научные интересы:

– цифровые методы обработки многомерной информации.

УДК 004.93

Л.Г. Ахметшина А.А. Егоров

ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ КАЧЕСТВА ГРУППИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЛГОРИТМА ГИБРИДНОЙ НЕЧЕТКОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Постановка проблемы. Кластеризации является одной из самых сложных задач, которые очень часто приходится решать при выполнении обработки данных, примером чего может служить сегментация изображений. Хотя на сегодняшний день разработано большое количество различных алгоритмов кластеризации, имеющих свои особенности и рекомендуемую сферу применения, задача поиска новых методов кластеризации и модификации существующих, направленной на повышение их чувствительности и скорости выполнения, остается актуальной.

Анализ публикаций по теме исследования. Одним из активно применяемых для решения поставленной задачи методов является нечеткая кластеризация, для выполнения которой часто используется алгоритм FCM (Fuzzy c-means) [1], что связано как с его простотой, так и с достаточным для большинства задач уровнем чувствительности. Другим перспективным подходом, применяемым для решения задачи кластеризации, является использование нейронных сетей, среди которых хотелось бы выделить карту Кохонена [2] – нейронную сеть без обратных связей, обучаемую без учителя. Интерес представляют также комбинация вышеупомянутых подходов в пределах одного метода, что позволяет объединить их достоинства. Примером такой комбинации может служить алгоритм гибридной нечеткой кластеризации sFCM, представленный в работе [3].

Недостатком как алгоритма FCM, так и большинства из его модификаций, является необходимость явного указания числа нечетких кластеров. При выборе слишком большого числа кластеров, увеличивается время кластеризации и происходит выделение несущественных групп исходных данных, что, как и в случае выбора недостаточного числа кластеров, приводит к потере чувствительности. В работах [4, 5] был предложен модифицированный алгоритм FCM, в котором выполнялось динамическое сжатие функции принадлежности для определения рекомендуемого количества нечетких кластеров, а также метод автоматической оценки рекомендуемого числа кластеров.

Для дальнейшего повышения чувствительности нечеткой кластеризации могут быть использованы критерии качества группирования, например, оценка степени нечеткости, критерий Ксие-Биени, позволяющий определить оптимальное число нечетких кластеров [6].

Цель статьи. В данной статье предлагается модифицированный алгоритм sFCM, который, благодаря применению показателей, оценивающих качество группирования, позволяет повысить чувствительность нечеткой кластеризации при выполнении динамического сжатия функции принадлежности.

Основная часть. Предложенный модифицированный метод гибридной нечеткой кластеризации sFCM состоит из следующих шагов:

1. Инициализация числа кластеров c, значения m (экспоненциальный вес нечеткой кластеризации), начальных значений центров нечетких классов v_{fcm}^{0} (для этого рекомендуется использовать метод k-средних).
2. Кластеризация картой Кохонена исходных данных с использованием центров нечетких классов предыдущей итерации алгоритма v_{fcm}^{t-1} в качестве начальных

значений для кластеров (нейронов). Размерность карты Кохонена выбирается равной $[N*c,1]$, где N – коэффициент увеличения количества кластеров, причем каждое новое значение центров нечетких кластеров получается на основании значений из матрицы v_{fcm}^{t-1} методом пропорционального распределения [7].

3. Получение новых значений центров нечетких кластеров v_{som}^{t} путем выбора c значимых центров кластеров, полученных в результате обучения карты Кохонена. Этот выбор является нетривиальной задачей и оказывает влияние на чувствительность метода.
4. Вычисление текущих значений функции принадлежности u:

$$u_{k,i}=\left[\sum_{L=1}^{c}\left[\frac{\left(\sum_{j=1}^{q}\left(X_{i,j}-(v_{som}^{t})_{k,j}\right)^{2}\right)^{1/2}}{\left(\sum_{j=1}^{q}\left(X_{i,j}-(v_{som}^{t})_{k,L}\right)^{2}\right)^{1/2}}\right]^{\frac{2}{m-1}}\right]^{-1}\begin{pmatrix}\forall k\in\{1,...,c\},\\ \forall i\in\{1,...,n\}\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где n – число экземпляров данных; q – количество информативных признаков, описывающих каждый экземпляр данных; X – исходные данные.

5. Динамическое сжатие функции принадлежности на основе расстояний между центрами нечетких кластеров:
   - определение матрицы расстояний между центрами нечетких кластеров d^0 и значений минимального ($d^0_{\min}$) и максимального ($d^0_{\max}$) расстояний;
   - автоматическое определение значений (d_a^1 и d_a^2) минимально допустимого расстояния между центрами кластеров на основе статистических характеристик и по изменению производной, соответственно. Расстояние d_a^1 рассчитывается по следующим формулам:

$$d_a^1=d_c^1+\left(\sum_{i=1}^{n_d^1}\left(d_c^1-d_i^1\right)\right)/\,n_d^1, \qquad (2)$$

$$d_c^1=\min\left(\overline{d^1},0.5*\max(d^1)\right), \qquad (3)$$

где $\overline{d^1}$ – среднее по вектору d^1, который состоит из n_d^1 элементов (d_i^0) матрицы d^0, удовлетворяющих условию

$$d_i^0<d_c^0+\left(\sum_{j=1}^{n_d^0}\left(d_c^0-d_j^0\right)\right)/\,n_d^0, \qquad (4)$$

$$d_c^0=\min(\overline{d^0},0.5*d^0_{\max}), \qquad (5)$$

где $\overline{d^0}$ – среднее по матрице d^0. Расстояние d_a^2 вычисляется следующим образом:

а) на основании матрицы d^0 формируется отсортированная по возрастанию последовательность расстояний;
б) для каждого элемента и последовательности вычисляется его производная по отношению к 1-му элементу и производится поиск минимального значения

этой производной;

в) Значение d_a^2 вычисляется, как среднее между элементом последовательности с минимальным значением производной и следующим за ним элементом.

- выбор минимального ($d_{\min}$) из расстояний d_a^1, d_a^2 и $\left(d_{\max}^0 - d_{\min}^0\right) * N_c$, что позволяет избежать негативного влияния от использования слишком большого значения параметра N_c, который может изменяться от 0 до 1;
- сохранение первоначальных матриц функций принадлежности и векторы центров нечетких кластеров;
- вычисление показателя Ксие-Биени (V_{xb}^0) по следующей формуле:

$$V_{xb}^0 = \frac{\sum_{k=1}^{c}\sum_{i=1}^{n}\left(u_{k,i}\right)^m * \sum_{j=1}^{q}\left(X_{i,j} - (v_{som}^t)_{k,j}\right)^2}{n * \left(d_{\min}^0\right)^2} \qquad (6)$$

- осуществление сжатия функции принадлежности (путем выполнения нечеткой операции объединения) и вектора центров кластеров (используется усреднение) с помощью слияния «близких» кластеров на основе расстояния d_{min};
- вычисление показателя Ксие-Биени (V_{xb}^1) по формуле (6) после выполнения сжатия, причем значение $d_{\min}^0$ определяется по вновь рассчитанной матрице расстояний d^0;
- если выполняется условие $V_{xb}^1 > V_{xb}^0$, то происходит возврат к сохраненным матрице функций принадлежности и векторам центров нечетких кластеров.

6. Вычисление значений центров нечетких кластеров v_{fcm}^{t+1}:

$$(v_{fcm}^{t+1})_{k,j} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(u_{k,i}\right)^m \cdot X_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n}\left(u_{k,i}\right)^m}\left(\forall k \in \{1,...,c\}, \forall j \in \{1,...,q\}\right) \qquad (7)$$

Эти вектора центров кластеров будут использованы в начале следующей итерации.

7. Вычисление значения d_v^t следующим образом:

$$d_v^t = \frac{\sum_{k=1}^{c}\sqrt{\sum_{j=1}^{q}\left(v_{k,j}^t - v_{k,j}^{t-1}\right)^2}}{c} \qquad (8)$$

где v^t и v^{t-1} – векторы центров нечетких кластеров текущей и предыдущей итераций;

8. Вычисление показателя Ксие-Биени V_{xb}^t по формуле (6) и степени нечеткости (V_{fz}^t), которая вычисляется следующим образом:

$$V_{fz}^t = \frac{\sum_{k=1}^{c}\sum_{i=1}^{n}\left(u_{k,i}\right)^m}{n} \qquad (9)$$

9. Если выполняется условие $V_{xb}^t < V_{xb}^{\min}$, где $V_{xb}^{\min}$ – минимальное значение

показателя Ксие-Биени, полученное в процессе обучения, то запоминаются следующие значения: $d_v^{\min} = d_d^t$, $V_{fz}^{\min} = V_{fz}^t$, $V_{xb}^{\min} = V_{xb}^t$, $u^{\min} = u$, $v^{\min} = v_{som}^{t+1}$

10. Если следующее условие выполняется:

$$d_v^t > \varepsilon, \tag{10}$$

где ε – пороговое значение, то переход к пункту 2, а в противном случае – окончание процесса обучения.

11. Если выполняется условие:

$$V_{xb}^t > V_{xb}^{\min} \text{ и } (V_{fz}^t < V_{fz}^{\min} \text{ или } p_{fz} < p_{xb}) \text{ и } p_{d_v} < p_{xb}, \tag{11}$$

$$p_{xb} = \left| V_{xb}^t - V_{xb}^{\min} \right| / \max(V_{xb}^t, V_{xb}^{\min}), \tag{12}$$

$$p_{fz} = \left| V_{fz}^t - V_{fz}^{\min} \right| / \max(V_{fz}^t, V_{fz}^{\min}), \tag{13}$$

$$p_{d_v} = \left| d_v^t - d_v^{\min} \right| / \max(d_v^t, d_v^{\min}), \tag{14}$$

то происходит возврат к значениям $u^{\min}$ и $v^{\min}$, которые и являются результатом обучения.

Экспериментальные результаты были получены на примере обработки медицинских изображений: томограммы (рис. 1 а) и спин-решетчатая Т1 релаксация ЯМР (ядерного магнитного резонанса) участка головного мозга (рис. 2 а). При выполнении кластеризации были выбраны следующие значения управляющих параметров:

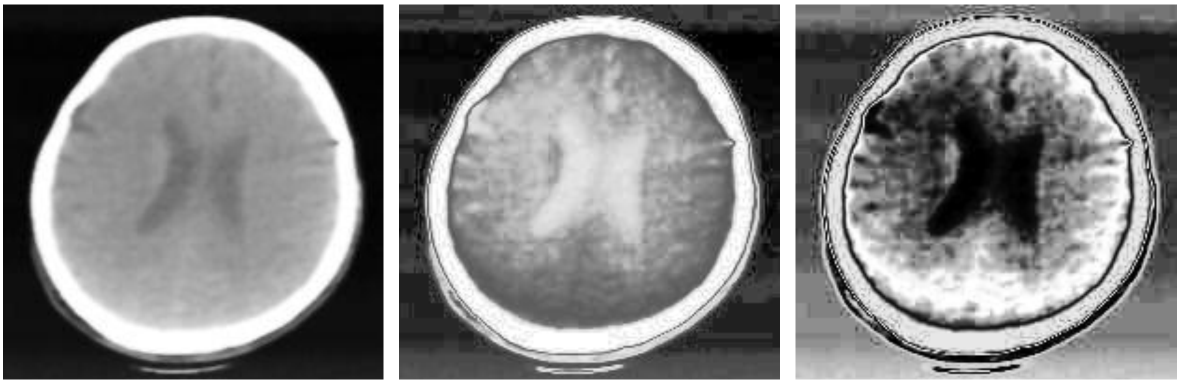
- количество нечетких кластеров $c = 6$ (для медицинских изображений рекомендуется это значение выбирать от 5 до 7), параметр $m = 2$, пороговое значение $\varepsilon = 10^{-5}$;
- параметр $N = 4$, получение исходного числа нечетких кластеров после выполнение кластеризации картой Кохонена производилось путем выбора c кластеров с максимальным количеством относящихся к ним экземпляров исходных данных;
- динамическое сжатие функции принадлежности выполнялось на основе матрицы Евклидовых расстояний;
- визуализация результатов нечеткой кластеризации производилась на основе сравнения с исходными данными [8].

На рис. 1 б и 2 б представлены результаты нечеткой кластеризации методом sFCM без применения показателей нечеткости и Ксие-Биени, а на рис. 1 в и 2 в – с их применением. Благодаря выполнению динамического сжатия функции принадлежности при осуществлении кластеризации во всех случаях было получено 3 нечетких кластера.

Применение показателей нечеткости и Ксие-Биени позволило повысить чувствительность сегментации, осуществленной на основе нечеткой кластеризации, что приводит к выделению невидимых ранее потенциальных областей интереса, в частности, области влияния гематомы (рис. 1 в) и структуры окружающей опухоль ткани (рис. 2 в).

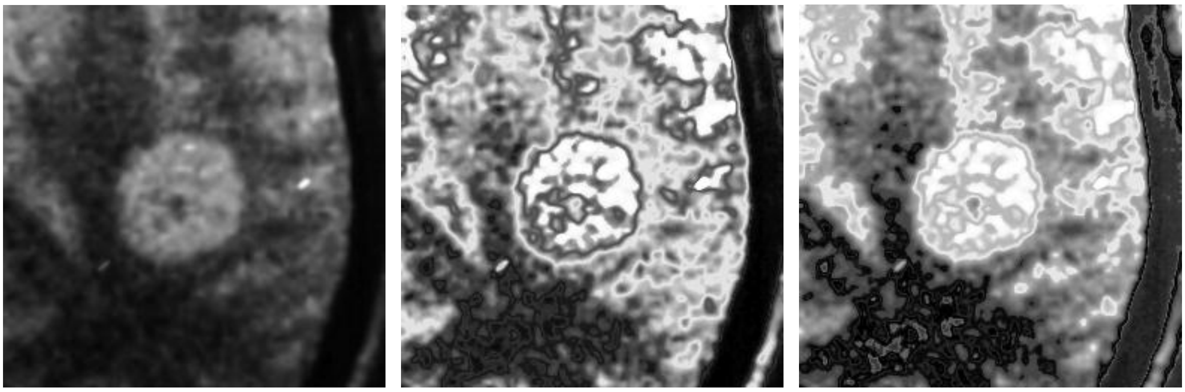
Выводы и перспективы дальнейших исследований. На основании полученных экспериментальных результатов можно сделать следующие выводы: применение показателей нечеткости и Ксие-Биени в модифицированном методе sFCM позволяет повысить чувствительность кластеризации.

Следует отметить возможность применения показателей нечеткости и Ксие-Биени как в алгоритме sFCM, так и в других модификациях алгоритма FCM при определении конечных значений матрицы функций принадлежности и векторов центров нечетких кластеров с целью повышения их чувствительности.



а б в

Рис. 1. а – исходные медицинское полутоновое изображение (томограмма головного мозга); результаты нечеткой кластеризации методом sFCM с осуществлением динамического сжатия функции принадлежности: б – без применения показателей нечеткости и Ксие-Биени; в – с применением показателей нечеткости и Ксие-Биени



а б в

Рис. 2. а – исходные медицинское полутоновое изображение; результаты нечеткой кластеризации методом sFCM с осуществлением динамического сжатия функции принадлежности: б – без применения показателей нечеткости и Ксие-Биени; в – с применением показателей нечеткости и Ксие-Биени

Перспективным направлением дальнейших исследований информационных возможностей предложенного метода кластеризации является использование других показателей качества группирования и способов формирования конечных значений матрицы функций принадлежности и векторов центров нечетких кластеров.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Леоненков А. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. Леоненко. – С.П.: БХВ–Петербург, 2003. – 719 с.
2. Chi Z. Fuzzy algorithms: With Applications to Image Processing and Pattern Recognition / Z. Chi, H. Yan, T. Pham. – Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: Word Scientific, 1998. – 225 p.
3. Ахметшина Л.Г. Сегментация низко контрастних изображений алгоритмом гибридной кластеризации SOM-FCM / Л.Г. Ахметшина, А.А. Егоров // Системні технології. – Дніпропетровськ, 2008. – Вип. 2 (55).– С. 34 – 40.

4. Ахметшина Л.Г. Модификация метода нечеткой кластеризации на основе динамического преобразования функции принадлежности / Л.Г. Ахметшина, А.А. Егоров // Питаня прикладної математики і математичного моделювання. – 2007. – С. 3−9.
5. Ахметшина Л.Г. Динамическое сжатие функции принадлежности на основании расстояний между центроидами в алгоритме гибридной нечеткой кластеризации. // Л.Г. Ахметшина, А.А. Егоров / Прикладна геометрія та інженерна графіка. − 2010. − Вип. 84. − Т. 1. − С. 88 − 92.
6. Рутковский Л. Методы и технологии искусственного интеллекта / Л. Рудковский. − М.: Горячая Линия-Телеком, 2010. − 520 с.
7. Ахметшина Л.Г. Повышение чувствительности гибридной нечеткой кластеризации на основе формирования центроидов пропорционально расстояниям в q-мерном пространстве / Л.Г. Ахметшина, А.А. Егоров. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. − 2009. − Вип. 24. − С. 193−198.
8. Егоров А.А. Визуализация результатов нечеткой кластеризации на основе сравнения с исходными данными / А.А. Егоров // Матеріали VI міжнародної науково-практичної конференції "Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем" (12-14 ноября 2008 г.). – 2008. – С. 117–118.

АХМЕТШИНА Людмила Гергиевна – д.т.н., профессор кафедры электронных вычислительных машин, факультета физики, электроники и компьютерных систем, Днепропетровского национального университета им. О. Гончара.

Научные интересы:

– нечеткая логика и нейронные сети.

– обработка пространственных данных.

ЕГОРОВ Артем Александрович – старший преподаватель кафедры автоматизированных систем обработки информации, факультета физики, электроники и компьютерных систем, Днепропетровского национального университета им. О. Гончара.

Научные интересы:

– нечеткая логика и нейронные сети.

– обработка изображений.

УДК 004.93

Л.Г. Ахметшина, Т.С. Ямнич

МУЛЬТИМОДЕЛЬНЫЙ МЕТОД НЕЧЕТКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Постановка проблемы. Существует множество прикладных задач, требующих применения методов интерполяции пространственных данных, например, прогнозирование зон затопления, оценка оседания земной поверхности. В общем случае, увеличение количества точек исходных данных увеличивает точность интерполированной поверхности. Однако во многих практических задачах данные измерений имеют ограниченный объем и распределены нерегулярным образом. При этом часто отсутствует возможность проведения дополнительных экспериментов (бурение скважин, выполнение дорогостоящих лабораторных исследований).

Нечеткая интерполяция не только помогает уменьшить сложность вычислений по сравнению с традиционными математическими моделями, но и делает возможным осуществление прогноза на основе значительно меньших объемов информации о системе, причем она может носить приближенный характер. Этот подход успешно применяется в системах контроля, но почти отсутствуют работы по применению нечеткой интерполяции для решения задач прогнозирования и классификации.

Данная статья посвящена нечеткому моделированию пространственных данных на основе экспериментальных значений, определенных на неравномерной сетке (в частности, высотных отметок скважин, отметок почвы пласта и его мощностей). Для повышения точности получаемой модели предлагается мультимодельный метод, учитывающий особенность пространственного распределения исходных данных и предполагающий построение составной структуры нечетких правил, формируемых для отдельных областей поверхности. Результат может быть применен как для интерполяции, так и для экстраполяции пространственных данных.

Анализ публикаций по теме исследования. Классические методы нечетких рассуждений [1, 2] для построения функций принадлежности отображающих связь «вход–выход» предполагают наличие входных данных на всем пространстве определения.

Развитие методов вывода основанных на нечеткой интерполяции (Fuzzy Rule Interpolation based Inference Techniques – FRITs) [3] открыло новые возможности в области практического применения нечеткого подхода, поскольку обеспечило сокращение объема базы правил, что соответствует упрощению модели и, в свою очередь, ведет к уменьшению вычислительных затрат [4]. Первоначально целью нечеткой интерполяции являлась нейтрализация локальных невыпуклостей, но в дальнейшем она получила широкое практическое применение при выводе в системах с регулярной и нерегулярной базой правил.

В работе [5] демонстрируется возможность использования нечеткой интерполяции для построения модели пространственных данных, заданных на неравномерной сетке, методом двумерного проецирования нечетких кластеров. Точность получаемой модели существенно зависит от структуры входов, а именно, их количества и пространственного распределения [6]. Поскольку поверхность системы представлена точками, неравномерно распределенными по координатам, маловероятно присутствие в исходных данных точек экстремумов, которые обычно рассматриваются как «существенные» точки поверхности, и в которых размещаются правила для системы отображения «вход-выход», что влияет на точность решения.

Понятие мультимодели введено в работе [7]. Обычно такой подход используется в случаях, когда имеет место неоднозначность информации о системе или большой разброс результатов измерений выхода. Вместо одной глобальной модели, заданной на всей области входов, рассматривается множество локальных, для каждой из которых предполагается определение собственной плотности сетки связанного с ней участка пространства входов.

Распознавание мультимоделей является отдельной сложной проблемой. Неоднозначность в системе, работающей с пространственными данными, существует априори и обусловлена природой координатной системы.

Целью статьи является повышение точности построения интерполяционной модели пространственных данных заданных на неравномерной сетке, за счет использования мультимодельного подхода – способа формирования результирующей поверхности на основе нескольких решений в локальных областях, с последующей агрегацией, при этом критерием выделения локальных областей являются особенности распределения экспериментальных данных.

Основная часть. Аппарат нечеткой логики вводит понятие нечетких кластеров, описываемых n-мерной функцией принадлежности $\mu_j(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где x_i – i-тый параметр (признак) объекта (в рассматриваемом случае - координаты X, Y, Z), $j = 1,2,\ldots c$ – номер кластера, изменяющейся в интервале [0,1], значение которой интерпретируется как степень принадлежности объектов тому либо иному классу. Задание и настройка многомерных нерегулярных функций принадлежности на всем пространстве входных параметров достаточно сложная задача во многом определяющая точность решения.

В методе двумерного проецирования нечетких кластеров определение «существенных» точек $m_1, m_2, \ldots, m_c$, в которых осуществляется построение функций принадлежности, реализуется с использованием метода нечеткой кластеризации (fuzzy c-means или FCM) неравномерных экспериментальных измерений. Пример распределения таких данных представлен на рис. 1 а.

Определение функций принадлежности полного координатного пространства интерполируемой поверхности для каждого из центров кластеров $m_1, m_2, \ldots, m_c$, выполняется в соответствии с выражением:

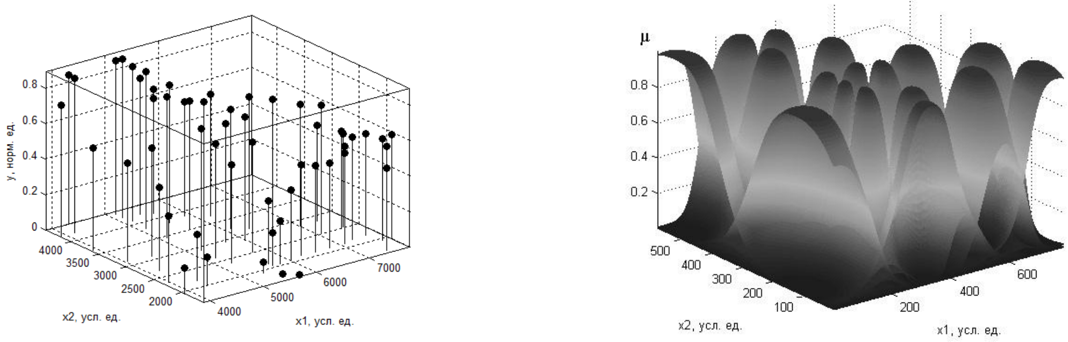
$$\mu_{ij}^X(x) = \left(\sum_{k=1}^{c} \left[\frac{d_{ij}^X(x)}{d_{kj}^X} \right]^{\frac{2}{q-1}} \right)^{-1}, \quad d_{ij}^X(x) = \left| x - m_i^X \right| = \sqrt{\left(x_j - m_i^X\right)^T A \left(x_j - m_i^X\right)} \ . \qquad (1)$$

Расстояние $d_{ij}^X(x)$ между вектором x_i и центром кластера m_i^X определяется только во входном пространстве. Их вид для 17 классов приведен на рис. 1. б.

Определения выхода нечеткой модели y на основе вычисленных функций принадлежности к заданным кластерам каждой точки полного координатного пространства интерполируемой поверхности осуществляется по формуле.

$$y(x_j) = \left(\sum_{i=1}^{c} m_i^Y \cdot \mu_i^X(x_j) \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{c} \mu_i^X(x_j) \right). \qquad (2)$$

Увеличение количества кластеров повышает возможность получения высокой точности нечеткой модели. В предельном случае, каждую точку измерения можно рассматривать в качестве центра нечеткого кластера, тогда ошибка модели в них стремится к нулю. В то же время, такое представление приводит к преобладанию «локальных» тенденций и в случае высокой плотности точек измерения увеличивает стоимость вычислений, которая и так является критичным параметром из-за значительного объема при работе с пространственными данными.



а б

Рис. 1. Пространственное распределение данных: а – экспериментальные значения; б – функции принадлежности

Наибольшие значения ошибки получаемой модели сосредоточены не только в области пространства, для которых измерения отсутствуют (т.е. достоверность модели не подтверждена и должна решаться задача внешней экстраполяции), но и в областях, с «большим» расстоянием между точками измерения, которую можно рассматривать как область «внутренней экстраполяции».

Одним из путей повышения точности неоднозначных систем является использования мультимодели, которая в [7] определяется как «множество моделей $M_1, M_2,...M_n$ снабженное механизмом переключения между моделями, либо, если необходимо, механизмом агрегации результатов предоставляемых отдельными моделями», каждая из которых имеет собственную сетку разбиения, которая определяется изменчивостью данных.

Главной сложностью и условием корректной работы мультимодели является проблема, связанная с установлением областей определения каждой из них и обеспечением непрерывности при соединении.

В задаче интерполяции экспериментальных данных на неравномерной сетке подход, связанный с выбором локальных областей по критерию изменчивости моделируемой поверхности не применим, так же, как повышение точности за счет изменения шага интерполяции из-за неполноты входной информации (плотность сетки вычислений определяется исходными координатами экспериментальных данных).

В данной работе предлагается использовать иной подход при выделении локальных областей, а именно учет плотности и топологии точек экспериментальных данных. При неизменной плотности сетки точность может быть повышена путем правильного выбора существенных точек – центров функций принадлежности: использованием всех измерений в некоторых локальных областях, например, при «большом» расстоянии между точками измерения или значительной изменчивости выхода или метода двумерного проецирования нечетких кластеров в остальных случаях. Заметим, что понятия «большое» расстояние и «изменчивость» выхода для точек измерения также является нечетким и предполагает использование априорных знаний о системе.

Условие непрерывности для двух моделей M_1 и M_2, описывающих две смежные локальные области выражается соотношением

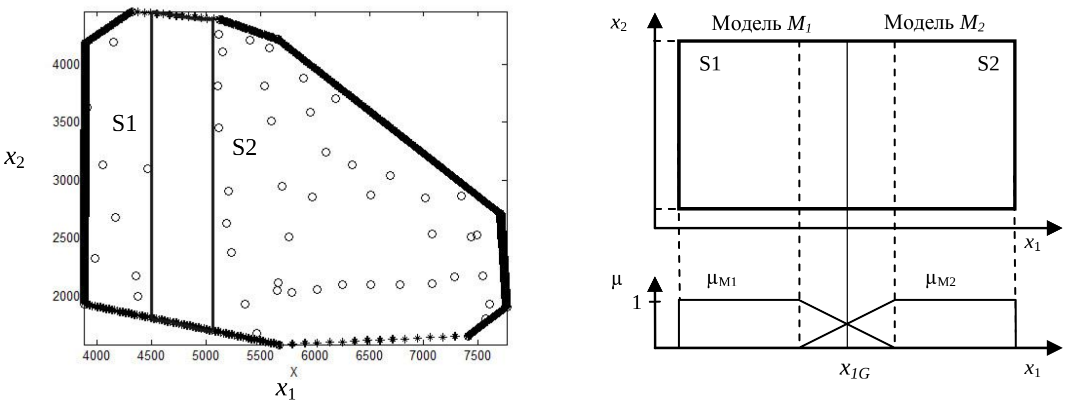
$$y_{M1}(x_{1G}, x_2) = y_{M2}(x_{1G}, x_2), \tag{3}$$

где x_{1G} – центральное значение ординаты пограничной зоны (выделена пунктиром на рис. 2 б). Данное условие накладывает ограничение на структуру смежных моделей, требует взаимозависимости их параметров и практически трудно реализуемо.

В данной работе для повышения точности интерполяции неравномерно распределенных пространственных данных мы предлагаем метод, включающий шаги:

- выделение областей локальных моделей и зоны их перекрытия на основе анализа пространственного распределения данных;
- построение локальных интерполяционных поверхностей с использованием метода двумерного проецирования нечетких кластеров;
- выполнение «внутренней экстраполяции» полученных моделей в область пограничной зоны;
- формирование результирующей поверхности (агрегация локальных моделей) на основе полученных решений в локальных областях.

Агрегация осуществляется путем нечеткого объединения моделей, предполагающим построение дополнительных функций принадлежности составной структуры нечетких правил, формируемых для отдельных областей поверхности $S1, S2$ (схема представлена на рис. 2 б).



а б

Рис. 2. Схема локальных областей: а – распределение экспериментальных данных; б – агрегирующие функции принадлежности

Экспериментальные результаты приведены для модельных и реальных данных. В качестве модели использовалось гравитационное поле участка Земной поверхности Земли $Z = f(x, y)$, трехмерное изображение которого приведено на рис. 3 а. В качестве исходных для интерполяции данных использовались значения Z определенные для точек с координатами (x, y), соответствующих 57 реальным измерениям – разведочным скважинам. На рис. 3 б приведена поверхность, полученная методом нечеткого проецирования кластеров. Использование мультимодельного метода нечеткой интерполяции пространственных данных на неравномерной сетке позволило повысить ее точность, что особенно заметно в области, где измерения отсутствуют (рис. 3 в).

На рис. 3 г представлен результат моделирования угольного пласта шахтного поля шахты «Павлоградская», позволяющий визуально оценить его рельеф и ориентацию.

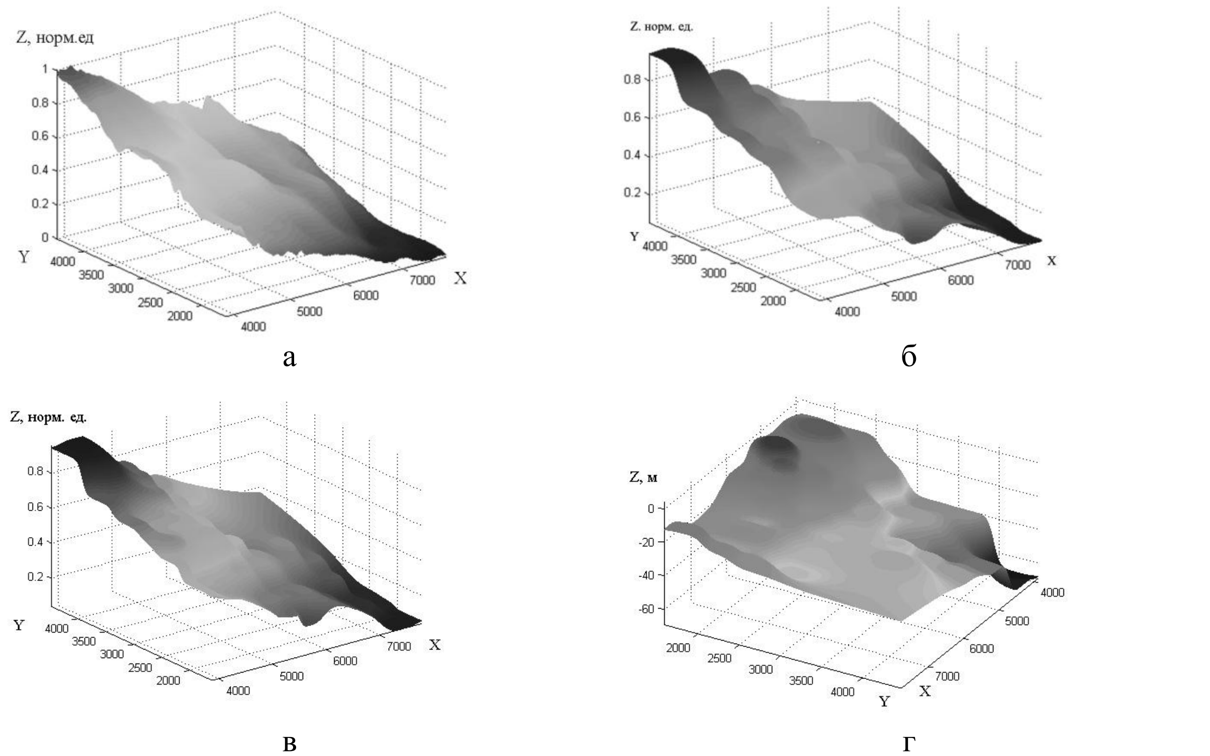


Рис. 3. Экспериментальные результаты: а – модельное гравитационное поле; б – интерполяция методом проецирования нечетких кластеров; в, г – мультимодельный метод нечеткой интерполяции для модельных и реальных данных, соответственно

Выводы. На основании проведенных исследований и экспериментов можно сделать следующие выводы.

1. Применение мультимодельного метода нечеткой интерполяции позволяет повысить точность моделирования поверхности пространственных данных заданных на неравномерной сетке.

2. Информационные возможности метода зависят от количества локальных моделей, размера их граничной области и метода экстраполяции данных в зоне перекрытия и требуют дальнейшего исследования.

3. Наибольшие значения ошибки сосредоточены в области пространства, для которой достоверность модели не подтверждена (за границей области определения исходных данных) и дальнейшее повышение точности модели требует решения задачи внешней экстраполяции.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Mamdani T.H. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis/T.H. Mamdani // IEEE Transactions on Computers. – 1977. – Vol. C-26, № 12. – P. 1182–1181
2. Zadeh L.A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes/L.A. Zadeh // IEEE Transactions on Computers, Man and Cybernetycs. – 1973. – Vol. 3 - P. 28-44.
3. Johanyák, Zs. Cs., Kovács, Sz.: Fuzzy modeling of Petrophysical Properties Prediction Applying RBE-DSS and LESFRI/ Zs. Cs Johanyák, Sz. Kovács//International Symposium on Logistics and Industrial Informatics (LINDI 2007). - September 13-15, 2007, Wildau, Germany. - P. 87-92.

4. Ye. Bodyanskiy, N. Kulishova Neuro–fuzzy memory based system for printing inks color reproductive properties description/ Ye. Bodyanskiy, N. Kulishova // Proceedings. East West Fuzzy Colloquium 2008, 15th Zittau Fuzzy Colloquium. – 2008. – P. 61 – 69.
5. Ахметшина Л.Г. Интерполяция пространственных данных методом двумерного проецирования нечетких кластеров/ Л.Г. Ахметшина., Т.С. Ямнич // Искусственный интеллект. – 2010. - № 3. – С. 433 - 438.
6. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление /А. Пегат. – М.: «Бином», 2009. – 798 с.
7. Pedrycz W. Fuzzy multimodels/ W. Pedrycz // IEEE Transactions on Fuzze Systems. – 1996. – Vol. 4, № 3. – P. 139–148.

АХМЕТШИНА Людмила Георгиевна – д.т.н., профессор кафедры электронных вычислительных машин Днепропетровского национального университета им. О. Гончара.

Научные интересы:

– компьютерное видение, нечеткое моделирование, нейротехнологии.

ЯМНИЧ Татьяна Сергеевна – ассистент кафедры программного обеспечения компьютерных систем Государственного высшего учебного заведения «Национальный горный университет».

Научные интересы:

– нечеткое моделирование, информационные технологии.

УДК 519.6

А.Ю. Баев, В.Т. Лазурик

ВЫБОР СЕТКИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГЛОЩЕННОГО ЗАРЯДА В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СПЕКТРА ЭЛЕКТРОНОВ

Постановка проблемы. Важным рабочим параметром радиационных технологий использующих источники ионизирующего излучения является спектр пучка электронов. Одним из методов его определения является восстановление энергетического распределения по измеренному методом поглотителей глубинному распределению поглощенного заряда (рис. 1).

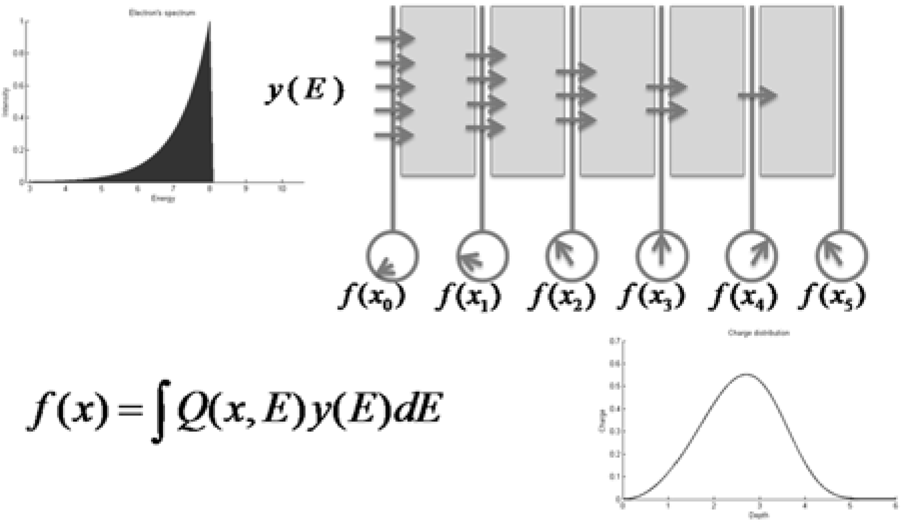


Рис. 1. Схема измерения глубинного распределения заряда методом поглотителей.

На рис. 1 показана схема измерения распределения заряда и представлено соотношение между спектром электронов $y(E)$ и распределением заряда по глубине $f(x)$. Для восстановления распределения $y(E)$ необходимо решить уравнение Фредгольма I-ого рода, которое в дискретном случае приближается системой линейных алгебраических уравнений:

$$Ay = \tilde{f} \tag{1}$$

где вектор $\tilde{f}$ – дискретные значения функции $f(x_i)$ с учетом погрешности измерений, а матрица A – рассчитывается с использованием квадратурных формул и включает информацию о ядре интегрального уравнения и сетках дискретизации функций $y(E)$ и $f(x)$. Значения элементов $\tilde{f}$ определяются параметрами дозиметра – толщина поглотителей и число детекторов, – и для равноудаленных детектирующих слоев сетка их координат имеет вид:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,\ \ x_j = x_0 + jh,\ \ j = \overline{0,n}, \tag{2}$$

где h – толщина поглотителя, $n+1$ – количество детектирующих слоев.

Задача решения уравнения (1), т.е. восстановление спектра пучка электронов по глубинному распределению заряда, является некорректной по Адамару, поэтому для расчета вектора y применяются специальные методы [1], например метод регуляризации Тихонова, в том числе и нейронные сети (НС) [2, 3]. Как показано в предыдущих работах авторов НС принимает на вход вектор $\tilde{f}$ и численно рассчитывает параметры энергетического распределения пучка электронов.

Работа посвящена исследованию зависимости числа детектирующих слоев на точность методов искусственного интеллекта и регуляризации Тихонова в задаче реконструкции спектра электронов по измеренному распределению поглощенного заряда.

Вычислительный эксперимент

Выполнен статистический эксперимент, каждая итерация которого имитирует процесс получения распределения заряда с использованием компьютерных моделей взаимодействия электронов с материалом [4], процесс измерения с нормально распределенной погрешностью и процесс восстановления исходного спектра электронов каждым рассматриваемым методом. Таким образом, по результатам обработки каждого набора экспериментальных данных $\tilde{f}_k$ для каждого метода по выбранным метрикам рассчитываются и сохраняются ошибки восстановления (различие между желаемым и полученным результатами), после чего эксперимент повторяется для нового набора $\tilde{f}_{k+1}$. Отметим, что для алгоритмов, основанных на НС, генерируется специальная выборка из $\tilde{f}_l$ для инициализации и обучения. В эксперименте для всех итераций фиксирована общая толщина дозиметра (т.е. отрезок $[a;b]$) и варьируются толщина поглотителей h (соответственно и их количество) и величина относительной погрешности измерений *ε*.

Функция распределения энергии пучка электронов, модель которого использована в работе задается в соответствии с:

$$y(E,\overline{E}) = \begin{cases} e^{\mu(E-E_{prob})}, 0 < E <= E_{prob} \\ k_1 E + k_2, \quad E_{prob} < E <= E_{\max}, \\ 0, \quad E > E_{\max} \end{cases}, \tag{3}$$

$$\mu = \frac{\ln(0.1)}{E_{slope} - E_{prob}}, k_1 = \frac{1}{E_{prob} - E_{\max}}, k_2 = \frac{E_{\max}}{E_{\max} - E_{prob}}$$

где $\overline{E} = (E_{slope}, E_{prob}, E_{\max})$, E_{slope} – энергия электронов, для которых интенсивность по левому склону спектра в 10 раз меньше интенсивности электронов с наиболее вероятной энергией, E_{prob} – наиболее вероятная энергия спектра, $E_{\max}$ – максимальная энергия электронов в спектре.

Для использования нейронной сети решение уравнения (1) рассматривается как задача многомерной аппроксимации, т.е.:

$$\overline{E} = \varphi(\tilde{f}) : Err(Ay_{\overline{E}}(E), \tilde{f}) \to \min, \tag{4}$$

где φ – аппроксимирующая функция, *Err()* – функция ошибки. Таким образом исследуемые методы можно представить в виде черных ящиков, на вход которых поступает вектор, елементы которого есть значения функции распределения заряда, а на выходе – численные значения параметров спектра E_{slope}, E_{prob}, $E_{\max}$.

Генерация $\tilde{f}_k$ и $\tilde{f}_l$ для подготовки и тестирования методов выполняется на основе нескольких различных спектров, т.е. на основе нескольких $\overline{E}$, образующих наборы:

$$\begin{aligned} L &= \{\overline{E}_i\} = \{(4+0.5i,\ 6+0.5i,\ 6.2+0.5i)_i\} = \{(4,\ 6,\ 6.2), (4.5,\ 6.5,\ 6.7), \ldots, (8,\ 10,\ 10.2)\}, \quad i = \overline{1,9} \\ T &= \{\overline{E}_j\} = \{(4+0.1j,\ 6+0.1j,\ 6.2+0.1j)_j\} = \{(4,\ 6,\ 6.2), (4.1,\ 6.1,\ 6.3), \ldots, (8,\ 10,\ 10.2)\},\ j = \overline{1,41} \end{aligned}, \tag{5}$$

Расчет распределения заряда, на основе спектров (5) осуществляется для каждой итерации, т.е. для каждого значения шага h и погрешности ε генерируется серия $\tilde{f}_k$ и $\tilde{f}_l$ для каждого $\overline{E}_i$ и $\overline{E}_j$ соответственно.

Критерии точности восстановления

Под точностью обработки результатов измерений в работе понимается совокупность систематической и статистической ошибок, различным образом определяющих несоответствие восстановленного и истинного спектров по результатам всех итераций.

Положим, что y_k и $\tilde{y}_k$ – значения функции (3) в узлах сетки дискретизации спектра рассчитанные на основе соответственно истинных и восстановленных наборов параметров $\overline{E}$ на *k-ой* итерации. На основе метрики:

$$r_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{k_i} - \tilde{y}_{k_i}\right)^2, \tag{6}$$

рассчитываются среднее значение ($M(r)$) и стандартное отклонение (δ_r) расстояния между восстановленными и истинными спектрами по оси интенсивности для каждой фиксированной пары шага h и погрешности ε.

Обсуждение результатов

Рассмотренный вычислительный эксперимент реализован с использованием пакета MATLAB. Ниже приведены основные параметры, необходимые для понимания результатов: $[a;b]=[0;6]$, $h \in \{0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 2.4, 2.5\}$, $\varepsilon \in \{0, 1\%, 2\%, \ldots, 15\%\}$, материал поглотителей – Al, НС – обобщенно-регрессионная нейронная сеть (GRNN), классические методы – наименьших квадратов (MLS), регуляризации Тихонова (MTR).

На рисунках 2-3 показаны графики, демонстрирующие работу GRNN и MTR соответственно. На рис. 4 представлены графики зависимости $M(r)$ и δ_r каждого метода от величины шага сетки дискретизации при погрешности измерения 5%.

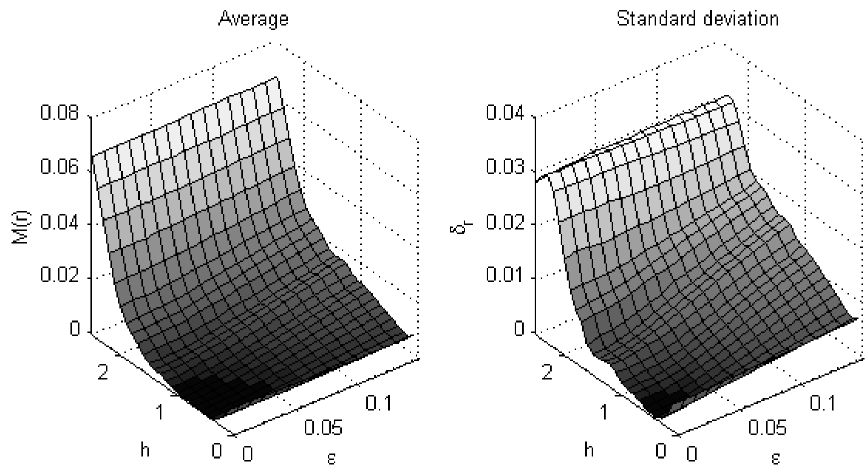


Рис. 2. Обобщенно-регрессионная нейронная сеть

Графики на рис. 2 показывают, что точность восстановления спектра пучка электронов методом НС уменьшается как при малом количестве детектирующих слоев, так и при их увеличении. Очевидно, что увеличение числа узлов сетки дискретизации (2) при фиксированной общей толщине дозиметра $[a;b]$ приводит к уменьшению ошибки, однако, согласно [3, 5] увеличение размерности входного пространства НС приводит к росту сложности процесса обучения и использования сети. Таким образом, существует область значений шага дискретизации, для которой ошибка НС будет минимальна.

На графиках соответствующих методу регуляризации Тихонова (рис. 3) наблюдается немонотонная зависимость точности восстановления спектра от величины шага – пик для шага дискретизации $h \in \{1.3, 1.4 \ldots, 1.8\}$. Вероятно, это связано с тем, что характерный размер измеряемого распределения сравним с выбранными толщинами поглотителей и детектирующие слои не перекрывают изменения зарядовой кривой. Обнаруженные аномалии требуют дальнейшего исследования.

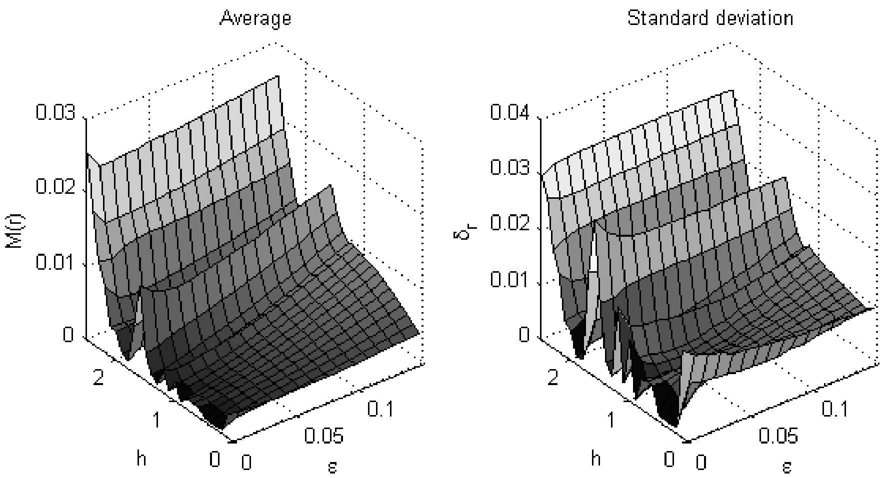


Рис. 3. Метод регуляризации Тихонова

Как видно на рис. 4 точность восстановления спектра электронов выбранной нейронной сетью ухудшается при толщине поглотителей менее 0.3. Сопоставление графиков на рис. 2, 3 и 4 показывает, что при толщине поглотителей дозиметра от 0.3 до 0.7, то есть при количестве детектирующих слоев от 8 до 20 нейронная сеть превосходит классические методы.

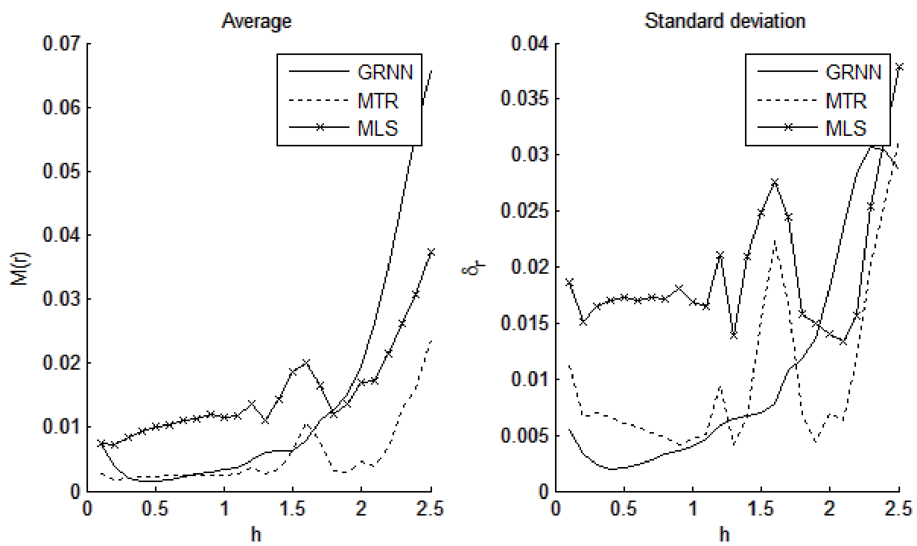


Рис. 4. Зависимость ошибки восстановления спектра электронов от шага дискретизации распределения заряда при погрешности измерений 5%

Выводы

Компьютерное моделирование показало, что на зависимости точности восстановления спектра электронов методами искусственного интеллекта от числа детектирующих слоев существует точка, в которой выбранная НС вычисляет энергетическое распределение с наименьшей ошибкой. Исследование аналогичной зависимости для методов наименьших квадратов и регуляризации Тихонова позволило выявить аномалии, вероятно, вызванные совпадением выбранной толщины поглотителя и характерного размера зарядовой кривой. Сопоставительный анализ традиционных методов восстановления и методов использующих НС показал, что точность, достигаемая НС для оптимальных дозиметров, превосходит точность методов наименьших квадратов и регуляризации Тихонова.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений: Учебник для вузов/ В.С. Сизиков . – СПб: Политехника, 2001. – 240 с.
2. Баев А.Ю., Лазурик В.Т. Регуляризация процедуры определения энергии фотонов методами искусственного интеллекта // Вестник Харьковского национального университета. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2010. – №890., вып 13. – С.5-11.
3. Michael M. Li, William Guo, Brijesh Verma, Kevin Tickle, John O’Connor Intelligent methods for solving inverse problems of backscattering spectra with noise: a comparison between neural networks and simulated annealing // Neural Computing & Applications. – 2009. – Vol. 18. – P. 423-430.
4. Valentina Lazurik, Tatsuo Tabata, Valentin Lazurik. A database for electron-material interactions // Radiation Physics and Chemistry – 2001. – Vol. 60 issue 3. – P. 161.
5. Haykin S. Simon Neural networks and learning machines/ S. Haykin. – New Jersey: Prentice Hall, 2009. – 936 p.

БАЕВ Александр Юрьевич – аспирант кафедры моделирования систем и технологий, факультета компьютерных наук, Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина.

Научные интересы:

– компьютерное моделирование физических процессов, регуляризация решений некорректных задач, методы искусственного интеллекта.

ЛАЗУРИК Валентин Тимофеевич – д.ф.-м.н., старший научный сотрудник, заведующий кафедрой моделирования систем и технологий факультета компьютерных наук Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина.

Научные интересы:

– развитие моделей физических явлений и вычислительных методов для компьютерного моделирования процессов в радиационных технологиях, создание программного обеспечения наукоемких процессов в технологиях.

УДК 519.217.2, 519.8

І. В. Баклан, Г. А. Степанкова

ПРО ОДИН ПОГЛЯД НА КЛАСИФІКАЦІЮ МОДЕЛЕЙ МАРКОВСЬКОГО ТИПУ

Постановка проблеми та аналіз публікацій за темою дослідження. Імовірнісні моделі, такі як приховані марковські моделі (ПММ) та баєсові мережі, на сьогодні є одними з найпопулярніших математичних формалізмів, які використовуються у сучасних інтелектуальних системах прийняття рішень. Тому дуже важливо мати повну класифікацію різновидів цих імовірнісних моделей та їх застосування.

Теорія прихованих марковських моделей (ПММ) не нова. Її основи опублікував Баум і його колеги в кінці 60-х, початку 70-х років [1, 2, 3, 4, 5]. Тоді ж, на початку 70-х Бейкер і Джелінек з колегами із IBM застосували ПММ в розпізнаванні мови [6, 7].

Тим не менш, широке розповсюдження ПММ отримала зовсім недавно:

- Основи теорії ПММ були опубліковані у журналах для математиків, які не дуже популярні серед інженерів, що займаються розпізнанням мови;
- Опублікована теорія не містила відповідних навчальних матеріалів, яки б пояснювали можливості та способи застосування ПММ у різних прикладних галузях.

Ціллю даної статті є створення найбільш повної класифікації марковських моделей, та, зокрема, встановлення місця прихованих марковських моделей у загальній класифікації імовірнісних моделей.

Основна частина. Марковський процес – це випадковий процес, конкретні значення якого для будь-якого заданого часового параметру $t+1$ залежать від значення у момент часу t, але не залежать від його значень у моменти часу $t-1, t-2$ і т. д. [8, 9].

Прихована марковська модель (ПММ) – це статистична модель, що імітує роботу процесу схожого на марковський процес із невідомими параметрами, із завданням розгадування невідомих параметрів на основі спостережуваних [10, 11, 12, 13, 14].

У звичайній марковській моделі стан видимий спостерігачеві, тому ймовірності переходів – єдиний параметр. У ПММ, ми можемо стежити лише за змінними на які впливає даний стан. Кожен стан має імовірнісний розподіл серед всіх можливих вихідних значень. Тому послідовність символів згенерована ПММ подає інформацію про послідовності станів. На рисунку 1 приведена діаграма переходів у прихованій марковській моделі, де x - приховані стани; y - спостережувані результати; a - ймовірності переходів; b - ймовірність результату.

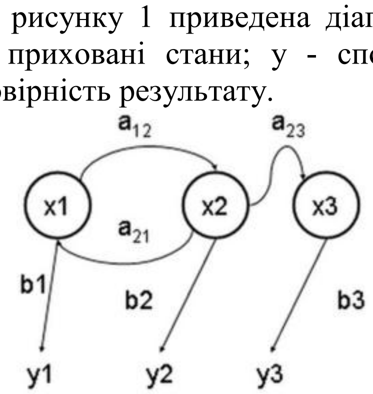


Рис. 1 – Діаграма переходів у прихованій марковській моделі

На рисунку 2 представлена діаграма загальної архітектури ПММ. Овали являють собою змінні з випадковим значенням. Випадкова змінна $x(t)$ являє собою значення прихованої змінної в момент часу t. Випадкова змінна $y(t)$ це значення спостережуваної змінної в момент часу t. Стрілки на діаграмі символізують умовні залежності.

З діаграми стає ясно, що значення схованої змінної $x(t)$ (у момент часу t) залежить тільки від значення прихованої змінної $x(t-1)$ (у момент $t-1$). Це називається властивістю Маркова. Хоча в той же час значення спостережуваної змінної $y(t)$ залежить тільки від значення прихованої змінної $x(t)$ (обидві в момент часу t).

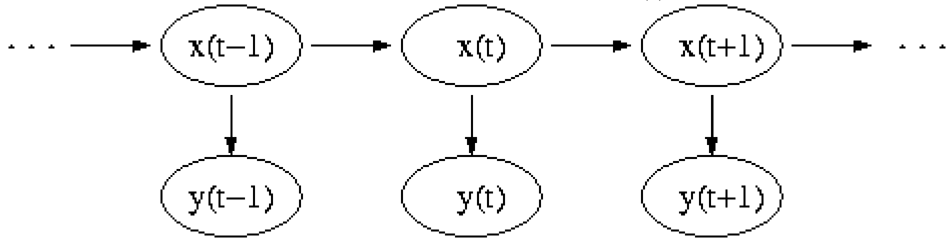


Рис. 2 – Загальна архітектура ПММ

Ймовірність побачити послідовність $Y = y(0), y(1), ..., y(L-1)$ довжини L дорівнює:

$$P(Y) = \sum_{X} P(Y|X)P(X) \quad (1)$$

Тут сума пробігає по всіх можливих послідовностях прихованих вузлів $X = x(0), x(1), ..., x(L-1)$.

Метод підрахунку повним перебором значення $P(Y)$ дуже трудомісткий для багатьох завдань із реального життя, у силу того, що кількість можливих послідовностей прихованих вузлів дуже велика. Але, є світло наприкінці тунелю... Застосування процедури «назад» дозволяє істотно збільшити швидкість обчислень.

Розглянемо систему, яку у будь-який момент часу можна описати одним з N станів, $S_1, S_2, ..., S_N$. Через певний проміжок часу система може змінити свій стан або залишитися в колишньому стані відповідно ймовірностям, зазначеним для цих станів. Моменти часу, коли ми реєструємо стан системи ми позначимо як $t = 1,2,...$, а стан в момент часу t – ми позначимо q_t. Повний опис розглянутої вище системи, повинен містити поточний стан (в момент часу t) і послідовність всіх попередніх станів, через які пройшла система. В окремих випадках опис системи зводиться до вказівки поточного та попереднього стану.

$$P\left[q_t = S_j \middle| q_{t-1} = S_i, q_{t-2} = S_k, ...\right] = P\left[q_t = S_j \middle| q_{t-1} = S_i\right] \quad (2)$$

Крім того, ми також вважаємо що процеси, що протікають у системі, не залежать від часу, про що нам говорить права частина формули (2). Таким чином, систему можна описати безліччю ймовірностей a_{ij} у вигляді:

$$a_{ij} = P\left[q_t = S_j \middle| q_{t-1} = S_i\right], 1 \le i, j \le N \quad (3)$$

де a_{ij} – це ймовірність переходу з стану i в стан j в даний момент часу. Оскільки ці ймовірності характеризують випадковий процес, вони мають звичайні властивості, тобто: $a_{i,j} \ge 0$, $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1$.

Легко побачити, що на основі вище приведених визначень [15], ПММ належать до класу імовірнісних моделей . Існують класифікації імовірнісних моделей, але в них відсутній погляд на сучасні імовірнісні моделі, особливо такі, як ПММ.

Загальна класифікація імовірнісних моделей.

Імовірнісні моделі – це моделі, які на відміну від детермінованої моделі містять випадкові елементи (величини) [16]. До імовірнісних моделей у класифікаційних підходах відносять:

- марковські моделі,
- байєсові мережі,
- марковські процеси прийняття рішень.

Марковські випадкові процеси були вперше визначені Марковим А.А. у 1907 році. Випадковий процес зветься марковським, якщо імовірність будь-якого його стану у майбутньому залежить тільки від теперішнього стану та не залежить від того, яким чином та коли процес прийшов у теперішній стан. Аналітично це може бути записано наступним чином:

$$\begin{aligned}&\Pr\{g(t_{n+1})=E_{n+1}|g(t_0)=E_0, g(t_1)=E_1,\cdots,g(t_n)=E_n\}=\\&=\Pr\{g(t_{n+1})=E_{n+1}|g(t_n)=E_n\}\end{aligned} \tag{4}$$

де $t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$, а E_n – теперішній стан. Інакше кажучи, у марковських випадкових процесах вплив усієї передісторії процесу на його майбутнє повністю зосереджений у теперішньому стані процесу. Ця властивість зветься властивістю відсутності наслідків або стосовно випадкових процесів марковською властивістю. [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]

В свою чергу, ми підрозділяємо марковські процеси прийняття рішень на

- марковські ланцюжки,
- марковські логічні мережі
- приховані марковські моделі.

Визначення марковського ланцюжка: якщо випадкова послідовність має марковську властивість (4), то вона зветься ланцюжком Маркова [24].

Однорідний ланцюжок Маркова – це однорідний марковський процес з дискретним часом $t = 0,1,...$ [18].

З іншого боку, якщо в випадковому процесі стани дискретні, час неперервний та властивість післядії зберігається, то такий випадковий процес зветься марковським процесом з неперервним часом. Ланнцюжок Маркова вважається заданим, якщо перехідні імовірності $P(i|i+1)$ залишаються постійними у ході процесу. Ланцюжок Маркова вважається заданим, якщо задані дві умови:

Існує совокупність перехідних ймовірностей у вигляді матриці

$$P(n)=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & ... & P_{1l}\\ P_{21} & P_{22} & ... & P_{2l}\\ ... & ... & ... & ...\\ P_{n1} & P_{n2} & ... & P_{nl}\end{bmatrix} \tag{5}$$

Матриця $P(n)$ зветься перехідною матрицею (матриця переходів). Елементами матриці є імовірності переходу з *i*-того стану у *j*-тий стан за один шаг процесу [24].

Марковська логічна мережа – це ймовірнісна логіка, яка застосовує ідею марковської мережі до логіки першого порядку.

Марковська логічна мережа L – це множина пар (F_i, w_i), де F_i є формулою у логіці першого порядку та w_i є дійсним числом [25, 26]. Разом з скінченною множиною обмежень $C = \{c_1, c_2, ..., c_{|C|}\}$ ця множина пар (F_i, w_i) визначає марковську мережу $M_{L,C}$ наступним чином:

1. $M_{L,C}$ включає один бінарний вузол для кожної можливої основи кожного предиката з L. Значення вузла буде – 1, якщо базовий атом – істина, та 0 у протилежному випадку.
2. $M_{L,C}$ включає одну властивість для кожної можливої основи кожної формули F_i з L. Значення властивості буде – 1, якщо базова формула – істина, та 0 у протилежному випадку. Вага властивості є w_i, що зв'язана з F_i у L.

Таким чином, ми визначили місце ПММ у загальній класифікації імовірнісних моделей.

Тепер перейдемо безпосередньо до класифікації ПММ. У загальному вигляді класифікація подана на рисунку 3.

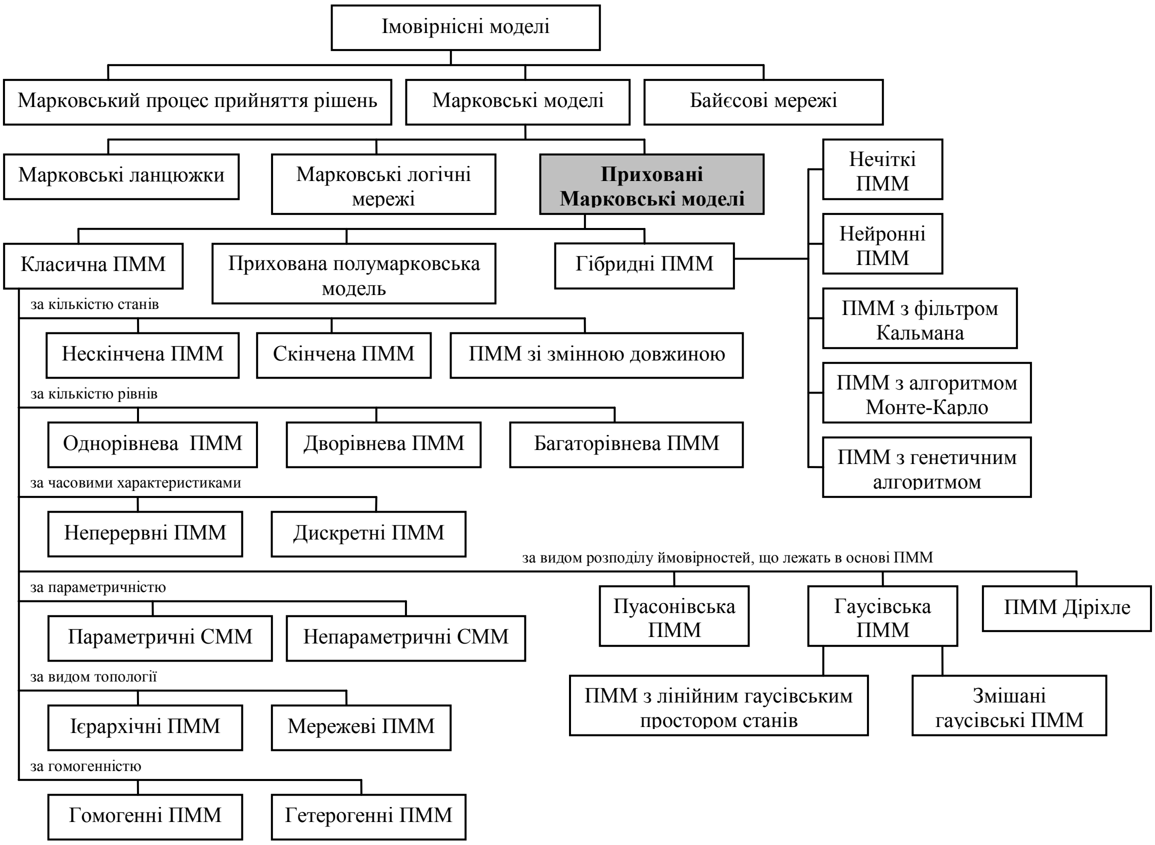


Рис. 3 – Загальна класифікація імовірнісних моделей марковськиго типу

Тепер перейдемо до детального розгляду. У широкому сенсі ПММ можна розділити на наступні загальні класи:

- Прихована полумарковська модель
- Класична ПММ
- Гібридні марковські моделі [27, 28, 29, 30]

Тепер розглянемо класифікацію безпосередньо <u>класичних ПММ</u>. Класичні ПММ розділяються за наступними основними класифікаційними ознаками:

- за кількістю станів
- за кількістю рівнів
- за часовими характеристиками
- за видом розподілу ймовірностей, що лежать в основі ПММ
- за параметричністю
- за видом топології
- за гомогенністю

Висновок. На сьогодні не існувало повної класифікації ПММ, які були б визначені у багатьох наукових статтях. Тому ціллю нашого дослідження було створення такого роду класифікації.

Слід зазначити, що нами була отримана найбільш повна класифікація сучасних ПММ та галузей їхнього застосування.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Baum L. E. “Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains”/ L. E. Baum and T. Petrie // Ann. Math. Statist. – 1966. – V. 37. – P. 1554–1563.
2. Baum L. E. “An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of Markov processes and to a model for ecology”/ L. E. Baum and J. A. Eagon // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – P. 360–363.
3. Baum L. E. “Growth transformations for functions on manifolds”/ L. E. Baum and G. R. Sell // Pacific J. Math. – 1968. – V. 27, № 2. –P. 211–227.
4. A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains/ L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules, and N. Weiss // Ann. Math. Statist. – 1970. – V. 41. – P. 164–171.
5. Baum L. E. “An inequality and associated maximization technique in statistical estimation for probabilistic functions of Markov processes”/ L. E. Baum // In Inequalities, III (Proc. 3rd Symp., Univ. Calif., Los Angeles, Calif., 1969; dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin). – New York: Academic, 1972. – P. 1–8.
6. Baker J. K. “The DRAGON system—An overview”/ J. K. Baker // IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Processing. – 1975. – V. ASSP-23. – P. 24–29.
7. Baker, J. Trainable grammars for speech recognition./ J. Baker // In Speech communication paper presented at th 97th Meeting of the Acoustical Society of America. – Boston, MA, 1979. – P. 547–550.
8. Rabiner L.R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition/ L.R. Rabiner // Proc. IEEE. – 1989. – P.257–286.
9. Рабинер Л.Р. Скрытые марковские модели и их применение в избранных приложениях при распознавании речи: Обзор / Л.Р. Рабинер //ТИИЭР. -1989. –Т. 77, № 2. – С. 86 – 120.
10. Степанкова Г.А. Деякі підходи до навчання прихованих марківських моделей/ Г.А. Степанкова, І.В. Баклан // Матеріали міжнародної наукової конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту». – Євпаторія. – 2008. – Т.3 (ч.2) – С.87 – 91.
11. Баклан І.В. Основні проблеми при застосуванні прихованих марківськиї моделей / І.В. Баклан, Г.А. Степанкова // Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту: Матеріали міжнародної наукової конференції. – Херсон: ХНТУ, 2009. – Т.2. – С. 430 – 432.
12. Степанкова Г.А. Прогнозування часових рядів за допомогою прихованих марковських моделей / Г.А. Степанкова, І.В. Баклан // Сучасні інформаційні та

інноваційні технології на транспорті: Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції. – Херсон: Видавництво Херсонського державного морського інституту, 2010. – Т.1. – С.209 – 211.
13. Баклан І.В. Про деякі нові особливості використання прихованих марковських моделей для аналізу та прогнозування часових рядів/ І.В. Баклан, Г.А. Степанкова // Искусственный интеллект. – Донецк: ИПИИ Наука і освіта, 2010. – № 4. – С.337 – 341.
14. Степанкова Г.А. Використання прихованих марковських моделей для прогнозування часових рядів/ Г.А. Степанкова // Системи та засоби штучного інтелекту. Тези доповідей Міжнародної наукової молодіжної школи. – Донецьк: ІПШІ Наука і освіта, 2010. – С. 97 – 101.
15. Баклан І.В. Імовірнісні моделі для аналізу та прогнозування часових рядів/ І.В. Баклан, Г.А. Степанкова // Искусственный интеллект. – Донецк: ИПИИ Наука і освіта, 2008. – № 3. – С.505 – 515.
16. Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки/ Л. И. Лопатников.– М.: Дело, 2003, - 520 с.
17. Городецкий А.Я. Информационные системы. Вероятностные модели и статистические решения/ А.Я. Городецкий. – СПбГПУ, 2003. – С. 326 .
18. Портенко Н. И. Марковские процессы / Н. И.Портенко, А. В.Скороход, В. М. Шуренко // Итоги науки и техн. Соврем, пробл. матем. Фундам. направления. – ВИНИТИ, 1989, – Т.46, № 2. – С. 5 – 248
19. Чураков Е. П. Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике: Учеб. пособие./ Е. П.Чураков. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 240 с.
20. Qiying Hu. Markov decision processes with their applications/ Hu Qiying, Yue Wuyi. – Springer Science+Business Media, 2008. – P. 305
21. Sasa Hasan. N-Best Hidden Markov Model Supertagging for Typing with Ambiguous Keyboards / Diploma thesis. Universitat Koblenz-Landau Campus Koblenz, Fachbereich Informatik, Koblenz, Germany, July 2, 2003
22. Кемени Джон Дж., Снелл Дж. Лори. Конечные цепи Маркова / Джон Дж. Кемени, Дж. Лори Снелл. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1970.
23. Марковские процессы принятия решений. http://web.petrsu.ru/~forest/courses/decision/chap8_a.htm
24. Чернов А.С. Марковские модели в экономических системах массового обслуживания. http://masters.donntu.edu.ua/2006/fvti/chernov/index.htm
25. Richardson, M. Markov logic networks. / M. Richardson, P. Domingos //Machine Learning, 62. – 2006. –P. 107-136.
26. Richardson, M., & Domingos, P. (2004). Markov logic networks (Tech. Rept.). Dept. Comp. Sci. & Eng., Univ. Washington, Seattle. http://www.cs.washington.edu/homes/pedrod/mln.pdf.
27. Степанкова Г.А. Особливості гібридизації нейронних мереж та прихованих марківських моделей/ Г.А. Степанкова, І.В. Баклан // Искусственный интеллект. Интеллектуальные системы: Материалы IX Международной научно-технической конференции. – Донецк: ИПИИ «Наука і освіта», 2008. – Т.1. – С.328 – 333.
28. Степанкова Г.А. Особливості навчання гібридних ПММ/ШНМ моделей/ Г.А. Степанкова // Системи та засоби штучного інтелекту. Тези доповідей Міжнародної наукової молодіжної школи. – Донецьк: ІПШІ «Наука і освіта», 2008. – С.123 – 128.

29. Степанкова Г.А. Побудова гібридних моделей на основі прихованих марківських моделей та нейронних мереж/ Г.А. Степанкова, І.В. Баклан // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 2008. – №1(21). – С.5 – 11.
30. Баклан І.В. Застосування гібридних нейронних мереж для прогнозування фінансових часових рядів/ І.В. Баклан, Г.А. Степанкова // Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали XI Міжнародної науково-технічної конференції (26-30 травня 2009р., Київ). – К.: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2009. – С.261.

БАКЛАН Ігор Всеволодович – к.т.н., доцент, зав. кафедрою інтелектуальних систем Національної Академії Управління.
Наукові інтереси:
– лінгвістичне моделювання;
– імовірнісні моделі для розпізнання образів та прогнозування часових рядів;
– інтелектуальні системи прийняття рішень.

СТЕПАНКОВА Ганна Анатоліївна – магістр, старший викладач кафедри інтелектуальних систем Національної Академії Управління.
Наукові інтереси:
– імовірнісні моделі для розпізнання образів та прогнозування часових рядів.

УДК 577.4:517.9

А.Г. Балакирева, Н.С. Бутенко, Е.А. Михайлов

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ ЛЕСЛИ

Постановка проблемы. Анализ публикаций по теме исследования. Модели динамики популяций с дискретной возрастной структурой и дискретным временем исторически связаны с именем П. Лесли, изучавшего простейшие варианты подобных моделей [1]. Формализм Лесли опирается на допущение, что популяция разбита на конечное число последовательных возрастных классов одинаковой длительности, а численность всех классов регулируется в дискретном времени с равномерным шагом, длина которого совпадает с длительностью класса (например, 1 год).

Пусть имеется одновидовая биологическая популяция, развивающаяся в стационарных внешних условиях при отсутствии заметного влияния лимитирующих факторов, в частности, ресурсы питания не ограничены. Как правило, жизненный цикл любого организма состоит из нескольких стадий развития или из нескольких возрастных ступеней, определяемых в некоторых единицах времени. Тогда, естественно, популяция разбивается на несколько возрастных групп. При популяционно-динамическом описании обычно выделяют три группы: прегенеративных (молодых, ещё не способных к размножению), генеративных (способных к размножению, но не обязательно размножающихся в данный момент) и постгенеративных (старческих, уже утерявших способность к размножению).

Пусть размножение происходит в определенные моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$ и популяция состоит из n возрастных групп, а $x(t)$ - вектор-столбец, координатами которого являются численности всех n возрастных групп в момент времени t.

Однородная модель Лесли имеет вид:

$$x(t+1) = Lx(t), \tag{1}$$

где L - матрица Лесли ($n \times n$) следующего вида:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & . & \alpha_{k-1} & \alpha_k \\ \beta_0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \beta_{k-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В данной матрице α_i ($\alpha_i \geq 0, i = 1,2,...,n$) – возрастные коэффициенты рождаемости, (то есть средняя плодовитость особей i-й возрастной группы), и β_i ($0 < \beta_i \leq 1$, $i = 1,2,...,n$) – коэффициенты выживания, равные вероятности перехода из возрастной группы i в $i+1$ группу к следующему моменту времени.

Матрица Лесли L неотрицательна. Это вполне естественное предположение связано с тем, что, как и вероятности дожития, так и коэффициенты рождаемости по своей сути не могут быть отрицательными. Так же матрица Лесли является неразложимой, поскольку для неразложимости матрицы Лесли необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_n \neq 0$. Значит, матрица Лесли неразложима тогда и только тогда, когда в старшей возрастной группе имеется ненулевая рождаемость. Данного условия всегда можно добиться с помощью исключения пострепродуктивных возрастных классов, которые не оказывают влияния на динамику возрастного состава младших классов.

Поскольку элементы матрицы L постоянны, то из неотрицательности и неразложимости данной матрицы следует, что в ее спектре имеется положительное собственное значение μ_0 такое, что

$$|\mu_j| \le \mu_0, \tag{3}$$

где μ_j - любое другое собственное значение матрицы L. Данное собственное значение называется главным и показывает скорость, с которой размножается популяция, когда ее возрастная структура стабилизировалась. Главному собственному значению соответствует положительный собственный вектор $\tilde{x} > 0$: $L\tilde{x} = \mu_0\tilde{x}$. В популяционной биологии такой вектор называется относительной возрастной структурой популяции.

Цель статьи. Легко видеть, что для прогнозирования состояния популяции в любой наперед заданный n-ый момент времени необходимо знать только начальное состояние популяции (вектор-столбец $x(0)$), а не все предыдущие $(n-1)$-ые состояния:

$$x(n) = Lx(n-1) = L^n x(0). \tag{4}$$

Однако, классическая однородная модель Лесли вида (4) имеет весьма жесткие ограничения для использования ее в прогнозировании динамики реальных популяций. В связи с этим мы обобщаем данную модель на неоднородный случай, предполагая, что статистические показатели популяции могут изменятся с течением времени.

Основная часть. Пусть коэффициенты выживания и рождаемости популяции изменяются на каждом шаге, что соответствует изменению переходной матрицы Лесли. Тогда однородная модель Лесли модифицируется на неоднородный случай.

Неоднородная модель Лесли для прогнозирования развития популяции с течением времени имеет вид:

$$x(n) = L_n x(0),\ L_n = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n,\ n = 1,2,..,\tag{5}$$

где L_i - матрица Лесли на i-ом шаге ($i = \overline{1,n}$). Таким образом, мы, по сути, имеем дело с произведением L_n неотрицательных матриц Лесли без нулевых строк и столбцов. В связи с этим актуально рассмотреть теорему о слабой эргодичности произведения произвольного конечного числа таких матриц.

Теорема [2]. Если для последовательности неотрицательных и не имеющих нулевых строк и столбцов матриц $H_k = \{h_{ij}(k)\}$, $k \ge 1$, выполняются условия:

1) $H_{p,r_0} = \prod\limits_{k=p+1}^{p+r} H_k > 0$ для $p \ge 0$, где r_0 (≥ 1) - некоторое фиксированное целое число независимое от p;

2) $\min\limits_{i,j}{}^{+} h_{ij}(k) / \max\limits_{i,j} h_{ij}(k) \ge \upsilon > 0$, (где $\min^{+}$ - минимум по всем положительным элементам и υ не зависит от k),

тогда произведение $H_{p,r}$, $p \ge 0$, $r \ge 1$, обладает слабой эргодичностью.

Утверждение. Если все матрицы H_k, $k > 1$ имеют одну и ту же матрицу событий и являются неразложимыми, имеют по крайней мере один положительный диагональный элемент, то $H_{p,r} > 0$, $p \ge 0$, $r \ge 2(n-1)$.

Учитывая вышеприведенное утверждение и то, что все элементы матрицы Лесли находятся в диапазоне от нуля до бесконечности, можно утверждать, что условия теоремы выполняются для произведения L_n матриц Лесли, т. е. неоднородная модель Лесли вида (5) обладает свойством слабой эргодичности. Данное свойство для популяции интерпретируется следующим образом: доля особей каждого возрастного класса по отношению к общей численности популяции остается неизменной, хотя общая численность может изменяться с течением времени.

Рассмотрим теперь вероятностную интерпретацию неоднородной популяционной модели Лесли (5).

Поскольку матрица Лесли несократима, то ее можно нормировать к ее эквивалентной стохастической матрице P [3]:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $p_1 = \dfrac{\alpha_1}{r} \ge 0$ и $p_i = \dfrac{\beta_1 \ldots \beta_{i-1}\alpha_i}{r^i} \ge 0, i = 2,\ldots,n$, с $p_n > 0$.

При помощи преобразования (6) в неоднородной модели Лесли вида (5) переходим от матриц Лесли к их стохастическим эквивалентам, т.е. в каждый момент времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ мы имеем различные стохастические приведенные матрицы P_i, которые сохраняют при этом простоту единичного собственного числа. В результате получаем неоднородный процесс, управляемый последовательностью стохастических матриц $P(t_n)$. Нас интересует вопрос, можно ли в некоторый момент времени $t^* < \infty$ обеспечить сходимость соответствующего начального распределения популяции к заранее заданному стабильному распределению.

Считаем, что поведение процесса полностью определяется заданием начального распределения и последовательности $\left\{P^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $P^{(k)} = \left\| p_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{s}$ стохастических матриц, каждая из которых есть матрица переходных вероятностей, соответствующая промежутку $[t_{k-1}, t_k)$ ($P^{(k)} = P(t_{k-1}, t_k)$). Таким образом, указанный процесс можно рассматривать как цепь Маркова с меняющейся длительностью «единичного» шага $[t_{k-1}, t_k)$.

Если $t^* < \infty$, то интервалы между двумя последовательными переходами $|t_k - t_{k-1}|$ будут убывать к нулю при $k \to \infty$ в силу сходимости последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ к t^*. При исследовании таких процессов представляет интерес вопрос о существовании для распределения процесса $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_s(t))$, где s – число состояний процесса, предела

$$p^* = \lim_{t \to \infty} p(t), \qquad (9)$$

независящего от начального распределения. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема [4]. Пусть выполнены условия:

1) все матрицы $P^{(k)}$ имеют общий левый собственный вектор p^*, отвечающий их простому собственному значению 1:

$$p^* P^{(k)} = p^*, \ \forall k > 0, \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j^* = 1,\ p_j^* \ge 0,\ 1 \le j \le s;$$

2) положим:

$$\delta^{(k)} = \max_{1 \le i \le s} \min_{1 \le j \le s} p_{ij}^{(k)}.$$

Потребуем, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)} = \infty, \delta^{(k)} > 0,\ \forall k > 0. \qquad (11)$$

Тогда при любом начальном распределении вероятностей $p^0 = p(0)$ распределение процесса $p(t)$ при $t \to t^*$ сходится к p^* равномерно по всем состояниям.

Выводы. Таким образом, показано, что независимо от начальной структуры популяции, ее возрастной состав можно стабилизировать в заранее заданное время $t^* < \infty$ в окрестности произвольного заранее заданного распределения. Отсюда следует, что мы можем воздействовать с помощью управляющих факторов на возрастную структуру популяции и ее численность, добиваясь стабилизации ее распределения по возрастам за более короткий период времени, чем в случае развития популяции в естественных условиях.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Leslie P.H. On the use of matrices in certain population mathematics / P.H. Leslie // Biometrica.– 1945.–V.33.- N3.– P.183-212.
2. Seneta E. Non-negative matrices and Markov chains/ E. Seneta// Springer-Verlag. – New-York,1981. – 284 p.
3. Герасин С.Н. Методы стабилизации распределений в матричных моделях популяционной динамики / С.Н. Герасин, А.Г. Балакирева // Радиоэлектроника и информатика. – 2008. – №2 (41). – С.55-60.
4. Герасин С.Н. Существование предельных вероятностей для конечных процессов Маркова с убывающими к нулю временными промежутками перехода/ С.Н. Герасин, В.А. Дикарев, Н.И. Числин // Доповіді НАН України. − 1998. − № 7. − С. 15−19.

БАЛАКИРЕВА Александра Геннадиевна – аспирант кафедры экономической кибернетики Харьковского национального университета радиоэлектроники

Научные интересы:

– матричные модели популяционной динамики.

БУТЕНКО Нина Семеновна ассистент – кафедры высшей математики Харьковского национального университета радиоэлектроники

Научные интересы:

– теория вероятностей.

МИХАЙЛОВ Евгений Алексеевич – старший преподаватель кафедры математики Харьковского института управления

Научные интересы:

– теория вероятностей и ее приложения.

УДК 514.18

А.О. Бездітний

ПОБУДОВА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ З МЕРИДІАНОМ НАПІВЦИКЛОЇДИ У ТОЧКОВОМУ ЧИСЛЕННІ

Постановка проблеми. У результаті виконання державної науково-дослідної програми «Розробка наукових основ, систем, технологій і технічних засобів для забезпечення продовольчої безпеки південного регіону України» в Таврійському державному агротехнологічному університеті, виникла необхідність у побудові поверхні обертання, твірною якої б була напівциклоїда. Через те, що поверхні цього класу є нерозгортними, була поставлена задача знайти рівняння цієї поверхні. Для реалізації цієї задачі був залучений апарат точкового числення [1, 2]. Обґрунтувати вибір саме цього математичного апарату можна тим, що його засоби та методи спрямовані на конструювання геометричних форм, які найбільш придатні для подальшої реалізації їх на ЕОМ [3]. А враховуючи те, що планується отримати поверхню, складену з хмари точок кількістю не менш ніж 57000, можна зробити висновок, що геометрична модель поверхні повинна мати граничну простоту, якою й володіє апарат точкового числення.

Аналіз останніх досліджень. Побудова геометричних моделей поверхонь обертання, твірними яких є різноманітні криві лінії, є задачею нерозповсюдженою. Тому говорити про останні дослідження в цьому напрямку важко. Навіть якщо такі задачі вирішуються – це проходить доволі локально і результати цих праць не розповсюджуються.

Формування цілей статті. Ця стаття має ціллю побудову у точковому численні геометричної моделі поверхні обертання, твірною якої є напівциклоїда [4]. Результати вирішення цієї задачі планується використати для написання програми на ЕОМ для автоматизації побудови цієї поверхні обертання.

Основна частина. Викладемо розв’язання поставленої задачі.

По-перше, визначимо напівциклоїду у точковому численні.

Для цього у симплексі KCD (рис.1) необхідно визначити напівциклоїду з радіусом ρ та дотичними CK та CD у точках C, D.

Визначимо геометричний алгоритм побудови дуги циклоїди. Коло з центром R радіуса ρ котиться без ковзання по відрізку CF довжиною $\pi\rho$. На цьому колі жорстко закріплена точка C. Визначити траєкторію точки $C \to D$.

У якості параметра обираємо кут φ . Визначимо точки P та R:

$$\frac{KP}{KD} = \frac{\pi\varphi}{\pi\rho} \to \frac{K-P}{K-D} = \frac{\varphi}{\rho} \to P = \frac{K(\pi-\varphi)+D\varphi}{\pi}. \tag{1}$$

Виходячи з того, що четверта вершина паралелограму дорівнює сумі двох суміжних вершин мінус протилежна вершина [1], маємо:

$$R = P + R_K - K = \frac{K(\pi-\varphi+D\varphi)}{\pi} + \frac{K+C}{2} - K = \frac{C-K}{2} + (D-K)\frac{\varphi}{\pi} + K. \tag{2}$$

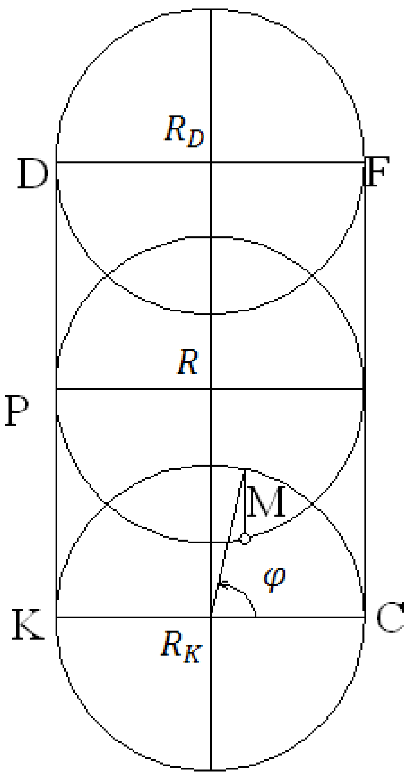


Рис.1. Зображення симлексу для визначення циклоїди.

Розглянемо визначення дуги на окремому рисунку (рис.2).

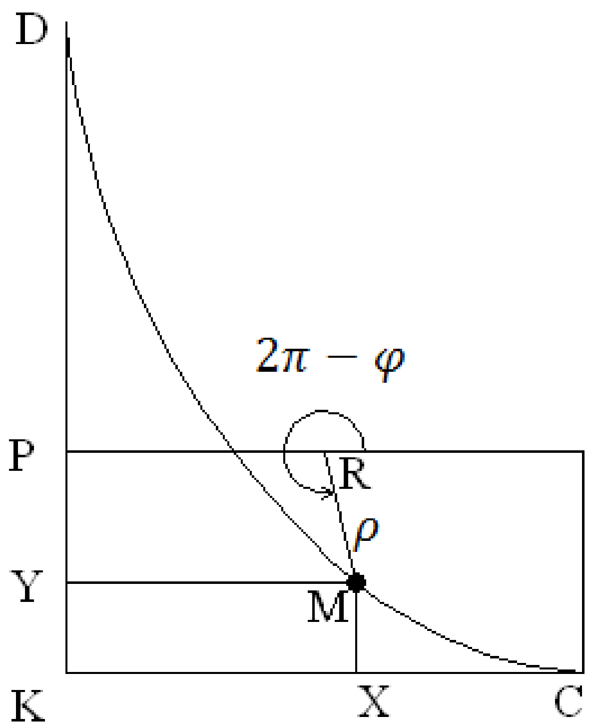


Рис.2. Зображення напівциклоїди.

Представимо шукане рівняння у вигляді рівняння площини DKC у точковому численні [1]:

$$M = (C-K)p + (D-K)q + K. \tag{3}$$

З рис. 2 визначаємо параметри p, q точкового рівняння площини:

$$KX = \rho + \rho\cos(2\pi - \varphi), p = \frac{KX}{KC} = \frac{1+cos\varphi}{2}, \tag{4}$$

$$KY = \rho\varphi - \rho\sin(2\pi - \varphi), q = \frac{KY}{KD} = \frac{\varphi + sin\varphi}{\pi}. \tag{5}$$

Шукане рівняння дуги DC має вигляд:

$$M = (C-K)\frac{1+cos\varphi}{2} + (D-K)\frac{\varphi+sin\varphi}{\pi} + K, \text{де } 0 \le \varphi \le \pi, \tag{6}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \to M = (C-K)\frac{1}{2} + (D-K)\frac{3}{2} + K = \frac{C+3D-2K}{2}. \tag{7}$$

Після визначення напівциклоїди у точковому численні, можна приступити до побудови поверхні обертання з меридіаном напівциклоїди.

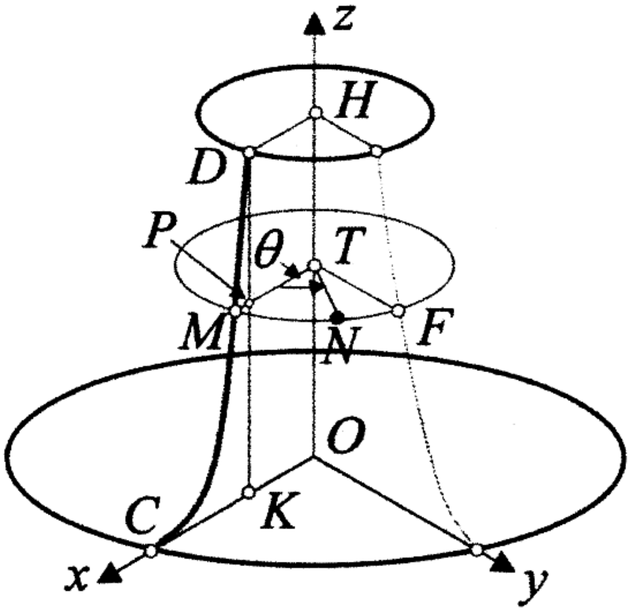


Рис.3. Зображення поверхні обертання з меридіаном напівциклоїди.

Точка M належить напівциклоїді (рис.3). Точки K, C, D задані у системі Oxz:
$x_K = HD = r_2, y_K = z_K = 0.$
$KC = 2\rho,$ де $\rho -$ радіус твірного кола циклоїди;
$x_C = r_2 + 2\rho, y_C = z_C = 0,$
$x_D = r_2, y_D = 0, z_D = \pi\rho.$
Визначимо точки симлексу MTF, де буде розглядатися точка N:
$x_M = \rho(1+cos\varphi) + r_2, y_M = 0, z_M = \rho(\varphi + sin\varphi),$
$x_T = y_T = 0, z_T = z_M,$

$$x_F = 0, y_F = x_M, z_F = z_M.$$

$\varphi -$ параметр циклоїди (меридіана); $\theta -$ параметр кола (паралель); $N(\varphi, \theta) -$ поточна точка поверхні обертання. Треба визначити рівняння поверхні обертання. Для того, щоб отримати шукане рівняння поверхні обертання $N(x, y, z)$ необхідно записати точкове рівняння поточної паралелі на висоті OH [1]:

$$N = (M - T)cos\theta + (F - T)\sin\theta + T. \quad (8)$$

У глобальній системі координат $Oxyz$ отримаємо:

$$x = (x_M - x_T)cos\theta + (x_F - x_T)sin\theta + x_T, \quad (9)$$

$$y = (y_M - y_T)cos\theta + (y_F - y_T)sin\theta + y_T, \quad (10)$$

$$z = (z_M - z_T)cos\theta + (z_F - z_T)sin\theta + z_T. \quad (11)$$

Поверхня обертання з віссю Oz та меридіаном напівциклоїди

$$x = (2\rho - r_2)\frac{1 + cos\varphi}{2} + r_2, z = \rho(\varphi + sin\varphi) \quad (12)$$

має параметричне рівняння, яке отримуємо, підставляючи координати точок M, T, F у (9), (10), (11):

$$x = \rho(1 + cos\theta) + r_2 cos\theta, \quad (13)$$

$$y = \rho(1 + cos\varphi)sin\theta + r_2 sin\theta, \quad (14)$$

$$z = \rho(\varphi + sin\varphi). \quad (15)$$

Висновки та перспективи подальшого розвитку. Задачу побудови поверхні обертання з меридіаном напівциклоїди було вирішено з використанням апарату точкового числення. На основі отриманої геометричної моделі складений алгоритм, який успішно реалізований на ЕОМ. У результаті його роботи отримана тривимірна модель поверхні у середовищі AutoCAD, яка придатна для обрахунку та отримання на її базі фізичної моделі за допомогою станків ЧПК. Таким чином, клас задач, що вирішується за допомогою точкового числення, був розширений. Створена на основі геометричної моделі програма має суттєві переваги у швидкості виконання перед аналогічними програмами, в основу яких покладено рішення цієї задачі засобами класичного математичного апарату.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Балюба І.Г. Вычислительная геометрия в точечном исчислении. / І.Г. Балюба, С.Л. Корнілов, Т.П. Малютіна. – Макеевка: ДГАСА, 1990. – 52 с..
2. Балюба І.Г. Основи математичного апарату точкового числення./ І.Г. Балюба, В.І. Поліщук, Т.П. Малютіна //Прикл. геом. та інж. граф. Праці ТДАТУ вип. 4. – Мел.:ТДАТУ, 2005. – Т. 29. – С. 22-30.
3. Найдиш В. М. Дискретна інтерполяція / В. М. Найдиш. – Мелітополь, 2008. – 250 с.
4. Берман Г.Н. Циклоида. / Г.Н.Берман . – М.: Наука, 1980. – 113 с.

БЕЗДІТНИЙ Андрій Олександрович — аспірант кафедри прикладної геометрії та інформаційних технологій проектування ім. академіка В.М. Найдиша Таврійського державного агротехнологічного університету.

Наукові інтереси:

– математичні та геометричні моделі, основані на математичному апараті точкового числення.

УДК 532.546

Э. Н. Береславский

К ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ ШПУНТА ЖУКОВСКОГО

Постановка проблемы. В работах [1, 2] рассматривалось течение жидкости под шпунтом Жуковского через грунтовой массив в нижележащий сильнопроницаемый водоносный пласт, не содержащий напорных подземных вод, левая полубесконечная часть кровли которого представляет собой непроницаемый участок. Для изучения инфильтрации на свободную поверхность предполагалась конечная величина скорости обтекания на конце шпунта, удовлетворяющая условию $0 < |v| < \varepsilon$, где ε $(0 < \varepsilon < 1)$ – равномерная интенсивность инфильтрации.

Цель работы. В настоящей статье исследуется случай, когда скорость обтекания на конце шпунта принимается равной бесконечности. Это обстоятельство приводит к тому, что соответствующая область комплексной скорости течения становится двулистной. Для решения возникающей в этом случае смешанной краевой многопараметрической задачи теории аналитических функций используется метод Полубариновой-Кочиной [3], основанный на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [4], а также разработанные [5-7] способы конформного отображения для областей специального вида, которые весьма характерны для задач подземной гидромеханики [8-10].

Постановка задачи. Рассматривается плоское установившееся движение несжимаемой жидкости под шпунтом Жуковского через слой грунта мощности T в нижележащий сильнопроницаемый водоносный пласт, не содержащий напорных подземных вод, при этом левая полубесконечная часть кровли пласта

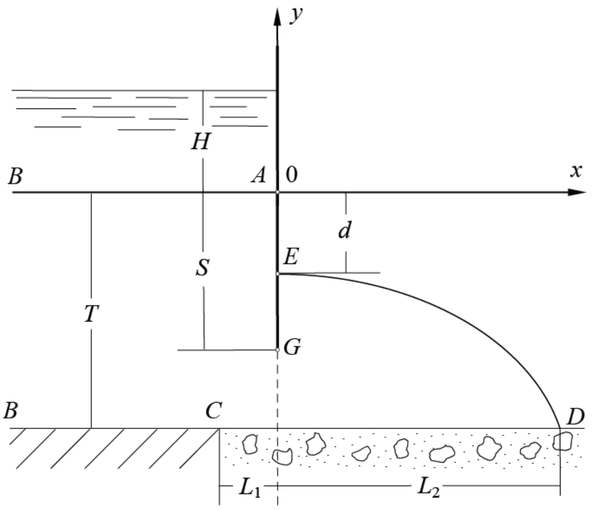


Рис. 1. Схема течения

BC моделируется водонепроницаемым включением (рис.1). Грунтовые воды, обтекая шпунт AGE, поднимаются за ним на некоторую высоту GE и образуют свободную поверхность ED, на которую поступают инфильтрационные воды с равномерной интенсивностью ε. Однако в отличие от [1, 2], где скорость обтекания была ограничена сверху величиной ε, теперь она считается равной бесконечности, что приводит к неоднолистности соответствующей области комплексной скорости, которая принимает вид, изображенный на рис. 2. Предполагается, что граница бьефа AB горизонтальна, грунт однороден и изотропен, а течение подчиняется закону Дарси с коэффициентом фильтрации κ.

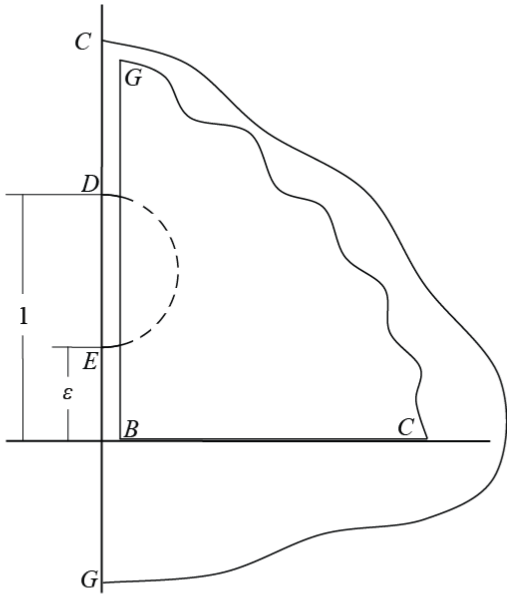


Рис. 2. Область комплексной скорости

Введем комплексный потенциал $\omega = \varphi + i\psi$, где φ – потенциал скорости, ψ – функция тока, и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к κT и T. Задача состоит в определении положения кривой депрессии DE при следующих краевых условиях:

$$AB:\ y=0,\ \ \phi=-H;\quad BC:\ y=-T,\ \ \psi=0;\quad CD:\ y=-T,\ \ \varphi=0;$$
$$DE:\ \phi=-y-T,\ \ \psi=\varepsilon x+Q;\quad AE:\ x=0,\ \ \psi=Q, \tag{1}$$

где Q – фильтрационный расход. Нахождение высоты GE поднятия воды за шпунтом, т. е. величины $S - d$, а также расположение абсциссы точки D, т. е. проекции свободной поверхности L_2, представляют известный практический интерес.

Построение решения. Обратимся к области комплексной скорости w (рис. 2), соответствующей краевым условиям (1). Эта область является двулистной, причем в бесконечно удаленной точке C при обходе границы, осуществляется переход на второй лист римановой поверхности. Учитывая то, что данная область принадлежит классу многоугольников в полярных сетках [11], удобно при конформном отображении в качестве канонической области взять прямоугольник [12] плоскости τ:

$$0<\operatorname{Re}\tau<1/2,\ 0<\operatorname{Im}\tau<\rho/2,\ \rho(k)=K'/K,\ K'=K(k'),\ k'=\sqrt{1-k^2},$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k [3,4]. Применяя разработанную [5-7, 12] методику построения отображающих функций для многоугольников подобного типа, найдем

$$\begin{gathered} w=\sqrt{\varepsilon}\,i\frac{X^{+}(\tau)}{X^{-}(\tau)},\quad \sqrt{\varepsilon}=\operatorname{th}\pi(\rho/2+\alpha-\beta),\\ X^{\pm}(\tau)=(1+\sqrt{\varepsilon})\vartheta_2(\tau-i\alpha)\vartheta_2(\tau+i\beta)\exp(\pi\tau i)\pm\\ \pm(1-\sqrt{\varepsilon})\vartheta_2(\tau+i\alpha)\vartheta_2(\tau-i\beta)\exp(-\pi\tau i), \end{gathered}\tag{2}$$

где для функции ϑ_2 и других тета-функций придерживаемся записи, принятой в [3,4], α, β ($0 < \alpha < \beta < \rho/2$) – некоторые подходящие постоянные.

Для решения задачи используем метод П.Я.Полубариновой-Кочиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Вводятся функции $\omega(\tau)$ и $z(\tau)$, конформно отображающие прямоугольник плоскости τ на области ω и z, а также функции $d\omega/d\tau$ и $dz/d\tau$.

Определяя показатели этих функций около особых точек и принимая во внимание соотношение (2), а также то, что $w = d\omega/dz$, придем к зависимостям

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\sqrt{\varepsilon}M\,\frac{X^{+}(\tau)}{\Delta(\tau)},\qquad \frac{dz}{d\tau} = iM\,\frac{X^{-}(\tau)}{\Delta(\tau)}, \tag{3}$$

$$\Delta(\tau) = \vartheta_0^2(\tau)\,\mathrm{dn}(2K\tau,k)\sqrt{1-(1-k'^2a'^2)\,\mathrm{sn}^2(2K\tau,k)},$$
$$a' = \mathrm{sn}(2Ka,k'),$$

где M – масштабная постоянная моделирования, a – неизвестная ордината точки A в плоскости τ. Можно проверить, что функции (3) удовлетворяют граничным условиям (1), сформулированным в терминах функций $d\omega/d\tau$ и $dz/d\tau$, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи. Запись представлений (3) для разных участков границы области τ с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к замыканию области движения z. В результате получаем выражения для основных геометрических и фильтрационных характеристик S,Q,H,T и L_1.

Обсуждение численных результатов. Представления (3) содержат пять неизвестных постоянных: a' (или ординату a прообраза точки A в плоскости τ), ординату g прообраза точки G в плоскости τ, один из параметров конформного отображения α или β, которые связаны условием $0 < \alpha < g < a < \beta < \rho/2$, M и модуль k $(0 < k < 1)$. Для их определения служит система четырех уравнений при заданных значениях S, Q, L_1 и H, а также условие $1/w|_G = 0$, которое означает, что на острие шпунта G скорость обращается в бесконечность. После определения неизвестных постоянных отображения находятся искомые размеры d и L_2 и, наконец, рассчитываются координаты точек свободной поверхности DE. На рис. 4 изображена картина течения, рассчитанная при

$$\varepsilon = 0.5,\ L_1 = -4.5,\ Q = 6.5,\ H = 5,\ T = 5 \text{ и } S = 4. \tag{4}$$

Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ε, L_1, Q, H, T и S на размеры d и L_2 приведены в табл. 1 и 2. В каждом из блоков таблиц варьируется (в допустимом диапазоне) один из указанных параметров, а значения остальных фиксируются согласно равенствам (4).

Результаты расчетов Табл 1.

ε	d	L_2	L_1	d	L_2	Q	d	L_2
0.1	3.8459	0.0521	4.35	3.9227	0.1169	6.47	3.7091	0.0292
0.3	3.8059	0.0476	4.40	3.8639	0.0869	6.50	3.7584	0.0432
0.5	3.7584	0.0432	4.45	3.8070	0.0637	6.56	3.8441	0.0669
0.7	3.7092	0.0386	4.50	3.7584	0.0432	6.62	3.9060	0.0869
0.9	3.6602	0.0341	4.58	3.6814	0.0194	6.67	3.9485	0.0997

Анализ данных таблиц и графиков позволяет сделать следующие выводы.

Увеличение интенсивности инфильтрации и напора и уменьшение фильтрационного расхода, длины шпунта, а также мощности пласта приводят к уменьшению величины d, т. е. росту ординаты точки G выхода кривой депрессии из-под шпунта. При этом наибольшее влияние на величину d оказывает мощность пласта T: табл. 2 показывает, что при возрастании параметра T в 1.2 раз значение d увеличивается на 33.8%. Видно, что величина d изменяется линейно по T.

Результаты расчетов Табл.2

H	d	L_2	S	d	L_2	T	d
4.9	3.7888	0.0291	3.4	3.1621	0.0509	4.2	2.9584
5.0	3.7584	0.0432	3.8	3.5356	0.0469	4.6	3.3584
5.5	3.6312	0.1984	4.2	3.9763	0.0385	4.8	3.5584
6.0	3.5566	0.3959	4.6	4.4090	0.0255	5.0	3.7584
6.5	3.5136	0.6189	4.8	4.6572	0.0158	5.2	3.9584

Что касается величины L_2, то она увеличивается с ростом напора и фильтрационного расхода и уменьшается с ростом интенсивности инфильтрации, ширины непроницаемого участка и длины шпунта. Наиболее существенное влияние на параметр L_2 оказывает ширина L_1 и напор H: варьирование значений L_1 и H всего в 1.1 и 1.3 раза изменяют проекцию свободной поверхности на 502.4 и 2025.3% соответственно. Наблюдается различное поведение размеров d и L_2 при варьировании параметров H и S (табл. 2) и, напротив, одинаковый качественный характер зависимостей этих размеров от ε и L_1 (табл. 1): уменьшение последних приводит к уменьшению ординаты точки выхода грунтовой воды из-под шпунта и увеличению проекции кривой депрессии.

Сравнение результатов со случаем, когда скорость обтекания на конце шпунта конечна и $0 < |\mathbf{v}| < \varepsilon$ [1, 2], показывает, что зависимости d и L_2 от параметров H, S и T здесь качественно подобны. Расчеты показали, что в отличие от случая конечной величины скорости обтекания, для которого точка C (правый конец непроницаемого включения) всегда находится правее оси ординат, в предлагаемой модели она лежит слева от начала координат.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Береславский Э.Н. Моделирование некоторых фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями / Э.Н.Береславский, Л.А.Александрова, Е.В.Пестерев // Мат. Моделирование. – 2010. – Т.22, №6. – С.27–37.
2. Береславский Э.Н. О режиме грунтовых вод при фильтрации под гидротехническими сооружениями / Э.Н.Береславский, Л.А. Александрова , Е.В.Пестерев // Мат. моделирование. – 2010. – Том 23, №2. – С.27–40.
3. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Гостехиздат, 1952. – 676 с.; 2-е изд.– М.: Наука, 1977. – 664с.
4. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений/ В.В.Голубев. – М.;– Л.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.
5. Береславский Э.Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках / Э.Н.Береславский // Дифференциальные уравнения.– 1997. – Т.33, №3. – С. 296–301.
6. Береславский Э.Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в гидро- и аэромеханике / Э.Н.Береславский // Докл. РАН. –2009. –Т.428, №4. – С. 439–443.
7. Береславский Э.Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом /Э.Н.Береславский // Дифференциальные уравнения.– 2010.– Т.46, №4. – С. 459–466.

8. Береславский Э.Н. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике / Э.Н.Береславский, П.Я. Кочина // Изв. РАН. МЖГ.– 1992. –№5. – С. 3–7.
9. Береславский Э.Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов / Э.Н.Береславский, П.Я.Кочина // Изв. РАН. МЖГ.– 1997.– №5. – С. 9–17.
10. Кочина П.Я., Береславский Э.Н., Кочина Н.Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч.1. Препринт №567/ П.Я. Кочина, Э.Н.Береславский, Н.Н.Кочина. – М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. – 122 с.
11. Коппенфельс В. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман .– М.: Изд-во Иностр. Лит., 1963. – 406 с.
12. Береславский Э.Н. О конформном отображении некоторых многоугольников на прямоугольник / Э.Н.Береславский // Изв. вузов. Математика. – 1980. – №5. – С.3–7.

БЕРЕСЛАВСЬКИЙ Эдуард Наумович–д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации.

Научные интересы:

– математическое моделирование задач гидро- и аэромеханики.

УДК 517.91: 532.2

С.Г. Блажевський, М.П. Ленюк

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є – ЕЙЛЕРА – ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Постановка проблеми та аналіз публікацій за темою дослідження. Процеси теплопровідності, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертали до себе увагу суспільства протягом всієї історії розвитку. Та серйозні математичні дослідження розпочалися з найпростішого диференціального рівняння теплопровідності параболічного типу [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \chi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t,r) \tag{1}$$

з відповідними початковими та крайовими умовами. Потреби практики вимагаЛи різного узагальнення рівняння (1). Особливо слід відмітити появу в другій половині ХХ-го століття «Узагальненої термомеханіки», породженої гіперболічним рівнянням теплопровідності [2]. Розроблялись різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи знаходження розв'язку.

Особливу увагу заслуговує розроблений в другій половині ХХ століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів, що привело до диференціальних рівнянь із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі теплопровідності в цьому випадку одержати неможливо.

Зауважимо, що в усіх випадках завжди припускалося, що межа області є жорсткою по відношенню до відбиття хвиль (в крайових умовах не брав участі оператор $\frac{\partial}{\partial t}$).

Цих труднощів можна уникнути, якщо здійснити моделювання теплового процесу методом гібридних диференціальних операторів. При цьому межа середовища може бути м'якою по відношенню до відбиття хвиль.

Ціль статті. Дана робота присвячена моделюванню нестаціонарних теплових процесів методом гібридного диференціального оператора Фур'є – Ейлера – Фур'є на полярній осі $r \ge R_0 \ge 0$ в припущенні, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Основна частина. Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2^+ = \{(t,r): t \in (0,\infty); r \in I_2^+ = (R_0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,\infty); R_0 \ge 0\}$ розв'язку сепаратної системи класичних рівнянь теплопровідності параболічного типу [1]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \chi_1^2 u_1 - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} = f_1(t,r), r \in (R_0,R_1), R_0 \ge 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \chi_2^2 u_2 - a_2^2 B_\alpha^*[u_2] = f_2(t,r), r \in (R_1,R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \chi_3^2 u_3 - a_3^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} = f_3(t,r), r \in (R_3,\infty) \end{gathered} \tag{2}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r),\ r \in (R_{j-1},R_j),\ j = \overline{1,3}, R_0 \ge 0, R_3 = \infty, \tag{3}$$

крайовими умовами

$$L_{11}^{0}[u_1(t,r)]|_{r=R_0} = g_0(t),\ \frac{\partial^k u_3}{\partial r^k}|_{r=\infty} = 0, k = 0,1 \quad (4)$$

та умовами спряження

$$(L_{j1}^{k}[u_k(t,r)] - L_{j2}^{k}[u_{k+1}(t,r)])|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t),\ j,k = 1,2\ . \quad (5)$$

У рівностях (2) – (5) беруть участь диференціальні оператори Фур'є $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$, Ейлера $B_\alpha^* = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2$ [4] та диференціальні оператори $L_{jk}^{m} = (\alpha_{jk}^{m} + \delta_{jk}^{m}\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial r} + (\beta_{jk}^{m} + \gamma_{jk}^{m}\frac{\partial}{\partial t});\ j,k = 1,2;\ m = 0,1,2.$

Вважаємо, що виконані умови для коефіцієнтів $\chi_j^2 \ge 0,\ a_j > 0,\ 2\alpha+1 > 0,\ c_{11,k}c_{21,k} > 0,$

$$c_{1j,k} = \alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k} - \alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}; c_{2j,k} = \delta_{2j}^{k}\gamma_{1j}^{k} - \delta_{1j}^{k}\gamma_{2j}^{k} = 0,$$

$$c_{j1,j2}^{21,k} = \delta_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k} - \delta_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k},\ c_{j1,j2}^{12,k} = \gamma_{2j}^{k}\alpha_{1j}^{k} - \gamma_{1j}^{k}\alpha_{2j}^{k}; c_{j1,j2}^{21,k} = c_{j1,j2}^{12,k}.$$

Припустимо, що задані та шукані функції є оригіналами Лапласа стосовно t [5]. У зображенні за Лапласом задачі (2) – (5) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь.

$$\begin{gathered}(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2)u_1^*(p,r) = -F_1^*(p,r), r \in (R_0, R_1),\\ (B_\alpha^* - q_2^2)u_2^*(p,r) = -F_2^*(p,r), r \in (R_1, R_2),\\ (\frac{d^2}{dr^2} - q_3^2)u_3^*(p,r) = -F_3^*(p,r), r \in (R_2, \infty)\end{gathered} \quad (6)$$

з крайовими умовами

$$(\bar{\alpha}_{11}^{0}\frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11}^{0})u_1^*(p,r)|_{r=R_0} = \bar{g}_0^*(p),\ \frac{d^k u_3^*}{dr^k}|_{r=\infty} = 0,\ k = 0,1 \quad (7)$$

та умовами спряження

$$[(\bar{\alpha}_{j1}^{k}\frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{j1}^{k})u_k^*(p,r) - (\bar{\alpha}_{j2}^{k}\frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{j1}^{k})u_{k+1}^*(p,r)]|_{r=R_k} = \bar{\omega}_{jk}^*(p);\ j,k = 1,2\,. \quad (8)$$

У рівностях (6) – (8) прийняті позначення:

$$F_j^*(p,r) = a_j^{-2}[f_j^*(p,r) + g_j(r)],\ q_j(p) = a_j^{-1}(p+\chi_j^2)^{1/2},\ \mathrm{Re}\,q_j > 0;$$

$$\bar{\alpha}_{jk}^{m} = \alpha_{jk}^{m} + p\delta_{jk}^{m},\ \bar{\beta}_{jk}^{m} = \beta_{jk}^{m} + p\gamma_{jk}^{m},\ p = \sigma + is;\ i^2 = -1;\ u_j^*(p,r) = \int_0^\infty u_j(t,r)e^{-pt}dt,$$

$$f_j^*(p,r) = \int_0^\infty f_j(t,r)e^{-pt}dt,\ j = \overline{1,3},\ \bar{g}_0^*(p) = \delta_{11}^{0}g'(R_0) + \gamma_{11}^{0}g(R_0),$$

$$\bar{\omega}_{jk}^*(p) = \omega_{jk}^*(p) + \psi_{jk},\ \psi_{jk} = \delta_{j1}^{k}g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^{k}g_k(R_k) - [\delta_{j2}^{k}g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^{k}g_{k+1}(R_k)]\,.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2} - q^2)v = 0$ утворюють функції $\exp(-qr)$ та $\exp(qr)$ або їх лінійні комбінації $chqr$ та $shqr$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^* - q^2)v = 0$ утворюють функції $r^{-\alpha-q}$ та $r^{-\alpha+q}$ [4].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (6) – (8) методом функцій Коші [4,6]:

$$u_1^*(p,r) = A_1 chq_1 r + B_1 shq_1 r + \int_{R_0}^{R_1} E_1^*(p,r,\rho) F_1^*(p,\rho) d\rho,$$

$$u_2^*(p,r) = A_2 r^{-\alpha-q_2} + B_2 r^{-\alpha+q_2} + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*(p,r,\rho) F_2^*(p,\rho)\rho^{2\alpha-1} d\rho, \tag{9}$$

$$u_3^*(p,r) = B_3 e^{-q_3(r-R_2)} + \int_{R_0}^{\infty} E_3^*(p,r,\rho) F_3^*(p,\rho) d\rho.$$

Тут $E_j^*(p,r,\rho)$ - функції Коші [4,6]:

$$E_1^*(p,r,\rho) = -\frac{1}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}\begin{cases}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1\rho),\ R_0<r<\rho<R_1\\ \Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1r),\ R_0<\rho<r<R_1\end{cases}, \tag{10}$$

$$E_2^*(p,r,\rho) = -\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha,11}(q_2,R_1,R_2)}\begin{cases}\psi_{\alpha,12}^{1*}(q_2,r)\psi_{\alpha;11}^{2*}(q_2,\rho),\ R_1<r<\rho<R_2\\ \psi_{\alpha;12}^{1*}(q_2,\rho)\psi_{\alpha;11}^{2*}(q_2,r),\ R_1<\rho<r<R_2\end{cases}, \tag{11}$$

$$E_3^*(p,r,\rho) = \frac{1}{q_3(\overline{\alpha}_{12}^2 q_3-\overline{\beta}_{12}^2)}\begin{cases}e^{-q_3(\rho-R_2)}\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3r),\ R_2<r<\rho<\infty\\ e^{-q_3(r-R_2)}\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3\rho),\ R_2<\rho<r<\infty\end{cases}. \tag{12}$$

Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (8) для визначення величин A_j й $B_k(j=1,2;k=\overline{1,3})$ дають неоднорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$V_{11}^{01}(q_1R_0)A_1 + V_{11}^{02}(q_1R_0)B_1 = \overline{g}_0^*(p),$$

$$V_{j1}^{11}(q_1R_1)A_1 + V_{j1}^{12}(q_1R_1)B_1 - Z_{\alpha,j2}^{11}(q_2R_1)A_2 - Z_{\alpha;j2}^{12}(q_2,R_1)B_2 = \overline{\omega}_{j1}^* + \delta_{j2}G_{12},\ j=1,2,$$

$$Z_{\alpha,j1}^{21}(q_2,R_2)A_2 + Z_{\alpha,j1}^{22}(q_2R_2)B_2 + (\overline{\alpha}_{j2}^2 q_3 - \overline{\beta}_{j2}^2)B_3 = \overline{\omega}_{j2}^* + \delta_{j2}G_{23}. \tag{13}$$

У системі (13) беруть участь функції

$$G_{12} = -c_{11}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)}{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}F_1^*(p,\rho)d\rho + \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\psi_{\alpha;11}^{2*}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha,11}(q_2,R_1,R_2)}F_2^*(p,\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,$$

$$G_{23} = -\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi_{\alpha;12}^{1*}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha;11}(q_1,R_1,R_2)}F_2^*(p,\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho - c_{22}\int_{R_2}^{\infty}\frac{e^{-q_3(\rho-R_2)}}{\overline{\alpha}_{12}^2 q_3 - \overline{\beta}_{12}^2}F_3^*(p,\rho)d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$.

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha,j} = (\overline{\alpha}_{12}^2 q_3 - \overline{\beta}_{12}^2)\Delta_{\alpha,j2}(q_2,R_1,R_2) - (\overline{\alpha}_{22}^2 q_3 - \overline{\beta}_{22}^2)\Delta_{\alpha,j1}(q_2,R_1,R_2),\ j=1,2,$$

$$B_{\alpha,j} = \Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{\alpha,2j}(q_2,R_1,R_2) - \Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{\alpha,1j}(q_2,R_1,R_2),$$

$$\theta_{\alpha,2} = (\overline{\alpha}_{12}^2 q_3 - \overline{\beta}_{12}^2)\psi_{\alpha,21}^{2*}(q_2,r) - (\overline{\alpha}_{22}^2 q_3 - \overline{\beta}_{22}^2)\psi_{\alpha,11}^{2*}(q_2,r),$$

$$\theta_{\alpha,1} = \Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\psi_{\alpha,12}^{1*}(q_2,r) - \Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\psi_{\alpha,22}^{1*}(q_2,r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (6) – (8): для $p=\sigma+is$ з $\operatorname{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 - абсциса збіжності інтегралу Лапласа, та $p=S\in(-\infty,+\infty)$, визначник алгебраїчної системи (13)

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha^*(p) &\equiv \Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_0)A_{\alpha,2}(p) - \Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)A_{\alpha,1}(p) = \\ &= (\overline{\alpha}_{12}^2 q_3 - \overline{\beta}_{12}^2)B_{\alpha,2}(p) - (\overline{\alpha}_{22}^2 q_3 - \overline{\beta}_{22}^2)B_{\alpha,1}(p) \neq 0\end{aligned} \tag{14}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (6) – (8):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W^*_{\alpha,11}(p,r)=\frac{1}{\Delta^*_\alpha(p)}[A_{\alpha,2}(p)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1r)-A_{\alpha,1}(p)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1r)],$$

$$W^*_{\alpha,12}(p,r)=-\frac{c_{11}q_1}{\Delta^*_\alpha(p)}\theta_{\alpha,2}(p,r),\ W^*_{\alpha,13}(p,r)=\frac{c_{11}q_1}{\Delta^*_\alpha(p)}\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}e^{-q_3(r-R_2)};\qquad(15)$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{1*}_{\alpha;11}(p,r)=-\frac{A_{\alpha,2}}{\Delta^*_\alpha(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),\ \ \mathcal{R}^{1*}_{\alpha;21}(p,r)=\frac{A_{\alpha,1}}{\Delta^*_\alpha(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$\mathcal{R}^{1*}_{\alpha;12}(p,r)=-\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{\bar{\alpha}^2_{22}q_3-\bar{\beta}^2_{22}}{\Delta^*_\alpha(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),\ \mathcal{R}^{1*}_{\alpha;22}(p,r)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{\bar{\alpha}^2_{12}q_3-\bar{\beta}^2_{12}}{\Delta^*_\alpha(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$\mathcal{R}^{2*}_{\alpha,11}(p,r)=\frac{\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta^*_\alpha(p)}\theta_{\alpha,2}(p,r),\ \mathcal{R}^{2*}_{\alpha,21}=-\frac{\Delta_{11}}{\Delta^*_\alpha}\theta_{\alpha,2}(p,r),$$

$$\mathcal{R}^{2*}_{\alpha,12}(p,r)=-\frac{\bar{\alpha}^2_{22}q_3-\bar{\beta}^2_{22}}{\Delta^*_\alpha(p)}\theta_{\alpha,1}(p,r),\quad \mathcal{R}^{2*}_{\alpha;22}(p,r)=\frac{\bar{\alpha}^2_{12}q_3-\bar{\beta}^2_{12}}{\Delta^*_\alpha(p)}\theta_{\alpha,1}(p,r),\qquad(16)$$

$$\mathcal{R}^{3*}_{\alpha;11}(p,r)=-\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta^*_\alpha(p)}e^{-q_3(r-R_2)},\ \mathcal{R}^{3*}_{\alpha;21}=\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta^*_\alpha(p)}e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$\mathcal{R}^{3*}_{\alpha;12}(p,r)=\frac{B_{\alpha,2}(p)}{\Delta^*_\alpha(p)}e^{-q_3(r-R_2)},\ \mathcal{R}^{3*}_{\alpha;22}(p,r)=-\frac{B_{\alpha,1}(p)}{\Delta^*_\alpha(p)}e^{-q_3(r-R_2)};$$

3) породжені неоднорідністю системи (6) функції впливу

$$\mathcal{H}^*_{\alpha,11}(p,r,\rho)=-\frac{1}{q_1}\begin{cases}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)W^*_{\alpha;11}(p,\rho),R_0<r<\rho<R_1\\ \Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)W^*_{\alpha,11}(p,r),R_0<\rho<r<R_1\end{cases};$$

$$\mathcal{H}^*_{\alpha,12}(p,r,\rho)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^*_\alpha(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)\theta_{\alpha,2}(p,\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{\alpha,13}(p,r,\rho)=-\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{c_{22}}{\Delta^*_\alpha(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)e^{-q_3(\rho-R_2)},$$

$$\mathcal{H}^*_{\alpha,21}(p,r,\rho)=\frac{c_{11}}{\Delta^*_\alpha(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)\theta_{\alpha,2}(p,r),$$

$$\mathcal{H}^*_{\alpha;22}(p,r,\rho)=\frac{1}{2q_2\Delta^*_\alpha(p)}\begin{cases}\theta_{\alpha,1}(p,r)\theta_{\alpha,2}(p,\rho),R_1<r<\rho<R_2\\ \theta_{\alpha,1}(p,\rho)\theta_{\alpha,2}(p,r),R_1<\rho<r<R_2\end{cases},$$

$$\mathcal{H}^*_{\alpha;23}(p,r,\rho)=-\frac{c_{22}}{\Delta^*_\alpha(p)}\theta_{\alpha,1}(p,r)e^{-q_3(\rho-R_2)},\qquad(17)$$

$$\mathcal{H}^*_{\alpha;31}(p,r,\rho)=-\frac{c_{11}2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^*_\alpha(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$\mathcal{H}^*_{\alpha;32}(p,r,\rho)=-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^*_\alpha(p)}\theta_{\alpha,1}(p,\rho)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$\mathcal{H}^*_{\alpha;33}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_3\Delta^*_\alpha(p)}\begin{cases}e^{-q_3(\rho-R_2)}[B_{\alpha,2}(p)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3r)-\\ e^{-q_3(r-R_2)}[B_{\alpha,2}(p)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3\rho)-\end{cases}$$

$$-B_{\alpha,1}(p)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3r)],\ R_2<r<\rho<\infty$$

$$-B_{\alpha,1}(p)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3\rho)],\ R_2<\rho<r<\infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (13) й підстановки отриманих значень A_j та B_k у рівності (9) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (6) – (8):

$$u_j^*(p,r) = W_{\alpha;1j}^*(p,r)\bar{g}_0^*(p) + \sum_{i,k=1}^{2} \mathcal{R}_{\alpha;ik}^{*j}(p,r)\bar{\omega}_{ik}^*(p) + \int_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}_{\alpha;j1}^*(p,r,\rho)\times$$
$$\times F_1^*(p,\rho)d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{\alpha;j2}^*(p,r,\rho)F_2^*(p,\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho + \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}_{\alpha;j3}^*(p,r,\rho)F_3^*(p,\rho)d\rho,\ j=\overline{1,3}. \quad (18)$$

Повертаючись до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок задачі (2) – (5):

$$u_j(t,r) = \int_0^t W_{\alpha;1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau + W_{\alpha;1j}(t,r)[\delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)] +$$
$$+\sum_{i,k=1}^{2}[\int_0^t \mathcal{R}_{\alpha;ik}^{j}(t-\tau,r)\omega_{ik}(\tau)d\tau + \mathcal{R}_{\alpha;ik}^{j}(t,r)\psi_{ik}] +$$
$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}_{\alpha;j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)]a_1^{-2} + \quad (19)$$
$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{\alpha,j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]a_2^{-2}d\rho d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}_{\alpha,j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]a_3^{-2}d\rho d\tau,\quad j=\overline{1,3}.$$

Тут $\delta_+(t)$ - дельта функція, зосереджена в точці $t=0^+$.

У рівностях (19) за означенням [5]

$$W_{\alpha,1j}(t,r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0-i\infty} W_{\alpha,1j}^*(p,r)e^{pt}dp,\ \mathcal{R}_{\alpha;ik}^{j}(t,r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \mathcal{R}_{\alpha;ik}^{*j}(p,r)e^{pt}dp,$$
$$\mathcal{R}_{\alpha;jk}(t,r,\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \mathcal{H}_{\alpha;ik}^*(p,r,\rho)e^{pt}dp,\ j,k=1,2,3. \quad (20)$$

Зауваження 1. Можна вважати, що $[\delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)] = 0$ та $\psi_{ik} = 0$. В протилежному випадку можна перейти до нових початкових даних $g_1(r) = \varphi_1(r) + a_1 r + b_1,\ g_2(r) = \varphi_2(r) + a_2 r + b_2,\ g_3(r) = b_3$ й визначити a_j, b_k так, щоб $[\delta_{11}^0 \varphi_1^1(R_0) + \gamma_{11}^0 \varphi_1'(R_0)] = 0$ та $\delta_{j1}^k \varphi_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k \varphi_k(R_k) - [\delta_{j2}^k \varphi_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k \varphi_{k+1}(R_k)] = 0,\ j,k=1,2.$

Зауваження 2. Інтегральне зображення (19) аналітичного розв'язку задачі теплопровідності (2) – (5) можна одержати методом гібридного інтегрального перетворення Фур'є – Ейлера – Фур'є із спектральним параметром.

Зауваження 3. При $\delta_{jk}^m = 0,\ \gamma_{jk}^m = 0$ одержуємо безпосередньо класичний розв'язок задачі теплопровідності на спряження для випадку, коли межа середовища жорстка по відношенню до відбиття хвиль.

Висновок. Вектор-функція $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r)\}$ визначає інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку параболічної задачі (2) – (5) моделювання процесів теплопровідності в неоднорідному середовищі з м'якими межами методом ГДО Фур'є – Ейлера – Фур'є на полярній осі $r \ge R_0 \ge 0$.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
5. Лаврентьєв М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьєв, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. Блажевський С.Г. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м’якими межами методом гібридного диференціального оператора Фур’є – Фур’є – Ейлера на обмеженій справа піввісі / С.Г. Блажевський // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2009. – Вып.2 (35). – С. 101 – 105.

БЛАЖЕВСЬКИЙ Степан Георгієвич – к.ф.-м.н, доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету ім. Ю.Федьковича.

Наукові інтереси:

– диференціальні рівняння, математичне моделювання.

ЛЕНЮК Михайло Павлович – д.ф.-м.н., професор кафедри “Інформаційні системи” Чернівецького факультету НТУ «ХПІ».

Наукові інтереси:

– математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.

УДК 517.958:52/59; 519.711.3

В.Е. Богачев, Н.А. Чеканов

MAPLE ПРОГРАММА СИМВОЛЬНО-ЧИСЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ И ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Анализ публикаций по теме исследования и постановка задачи.

Как известно, большинство динамических задач гамильтоновой механики не допускают решений в явном виде (см., например, [1-3]). Поэтому разработаны и разрабатываются различные приближенные аналитические методы и подходы [4-7], а так же прямые численные расчеты [8-10].

Одним из универсальных приближенных аналитических методов решения уравнений классической динамики является метод нормальных форм. Существо метода нормальных форм заключается в предварительном каноническом преобразовании гамильтоновой функции к простому виду, с которой уравнение движения легко интегрируется. Таким образом построенная функция Гамильтона называется нормальной формой. Имеются различные методы получения нормальной формы [4]. В работе [11] была представлена программа в среде REDUCE, которая позволяет построить нормальную форму по методу Биркгофа-Густавсона [12-13], а также получить приближенный интеграл движения для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, в том числе и для резонансных систем.

В настоящее работе решается задача о нормализации гамильтоновых систем и вычислении приближенных интегралов движения для гамильтоновых систем с произвольным конечным числом степеней свободы.

Цель статьи.

По методу Биркгофа-Густавсона [12-13] разработать алгоритм и составить программу для получения в аналитическом виде нормальной формы и приближенных интегралов движения для нерезонансных и резонансных гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы в пакете прикладных программ MAPLE.

Основная часть.

Как известно (например из статьи [13]) функция Гамильтона $H(q,p)$, где $q=(q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k,\ldots,q_n)$ и $p=(p_1,p_2,p_3,\ldots,p_k,\ldots,p_n)$ – канонически сопряженные координата-импульс, находится в нормальной форме после выполнения канонических преобразований $(q,p)\to(\xi,\eta)$, где $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_k,\ldots,\xi_n)$ и $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\ldots,\eta_k,\ldots,\eta_n)$, n – число степеней свободы, при которых $H(q,p)\to G(\xi,\eta)$, если выполняется условие

$$DG(\xi,\eta)=0, \tag{1а}$$

где

$$D=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\left(\eta_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}-\xi_k\frac{\partial}{\partial\eta_k}\right), \tag{1б}$$

так называемый дифференциальный оператор нормальной формы.

Как показано в работе [13], для этого надо решить основное уравнение

$$D(q,\eta)W^{(S)}(q,\eta)=-H^{(S)}(q,\eta)+\Gamma^{(S)}(q,\eta), \tag{2}$$

где $W^{(S)}$ есть производящий полином, производящей функции

$$F^{(S)}(q,\eta)=q\cdot\eta+W^{(S)}(q,\eta), \tag{3}$$

которая приводит к нормальной форме члены исходного гамильтониана степени S.

При выполнении канонического преобразования, которое приводит слагаемое к функции Гамильтона S-ой степени, слагаемые более высокой степени, чем S вычисляются по формуле

$$\Gamma^{(i)}(\xi,\eta)=H^{(i)}(\xi,\eta)+\sum_{|k|}\frac{1}{k!}\left(\left(\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \xi}\right)^{k}\left(\frac{\partial^{|k|}H^{(l)}}{\partial \eta^{k}}\right)-\left(\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \eta}\right)^{k}\left(\frac{\partial^{|k|}\Gamma^{(l)}}{\partial \xi^{k}}\right)\right), \quad (4)$$

где $i=S+1,S+2,\ldots$ и выполняются условия $l-|k|+|k|(S-1)=i$, $1\le|k|\le l<i$, $l\ge 2$, $S\ge 3$, $k!=k_1!k_2!$, $|k|=k_1+k_2$.

Представленная программа состоит из трех основных частей. Это блок входных данных, блок процедур и основная программа.

Во входных данных задается число степеней свободы n, желаемый максимальный порядок нормальной формы $SMAX$ и дополнительных интегралов движения $SMAX$, максимальный порядок гамильтониана $j\max$, сам гамильтониан, квадратичного часть $V[2]$ которого задается в нормальной форме и его члены более высокой степени $V[3],V[4],\ldots,V[j\max]$, а также устанавливается несколько флагов. Флаг gip дополнительно позволяет вычислить нормальную форму в переменных действие-угол, флаг $intg2$ вычисляет интеграл движения независимый от интеграла энергии, $test1$ и $test2$ – флаги проверки правильности вычисления интеграла движения.

Первые две процедуры – вспомогательные. Подпрограмма $poiss(A,B)$ вычисляет скобку Пуассона между переменными A и B, а процедура $remv(z)$ удаляет в z все степени p и q выше $SMAX$. Процедура $SUPQXY(A)$ заменяет в аргументе A оригинальные переменные p,q на комплексные x,y. Процедура $SUXYPQ(A)$ делает обратную замену. Процедура $BASIS(HT,u,v,n)$ решает основное уравнение в переменных u,v и находит производящую функцию WT и нормальную форму GT S-го порядка. Процедура $high\_g(S)$ преобразует часть гамильтониана, члены которой порядка больше, чем текущее S, так как они необходимы для дальнейших вычислений. Процедура $normform(MAX)$ выполняет построение нормальной формы для степеней от $S=3$ до $S=MAX$. Процедура $invert(S)$ выражает конечные переменные (ξ,η) через начальные (q,p).

Ниже в качестве примеров представим результаты работы разработанной программы.

1. Для гамильтониана Хенона-Хейлеса с двумя степенями свободы [2]:

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+q_1^2\right)+\frac{1}{2}\left(p_2^2+q_2^2\right)+a\left(cq_2^3+q_1^2q_2\right), \quad (5)$$

где a,c – параметры, до степени $SMAX=6$ были получены нормальная форма

$$G_6=G^{(2)}+G^{(4)}+G^{(6)}, \quad (6а)$$

$$G^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\eta_1^2+\xi_1^2+\eta_2^2+\xi_2^2\right), \quad (6б)$$

$$G^{(4)}=-\frac{5}{48}a^2\eta_1^4-\frac{5}{48}a^2\xi_1^4-\frac{15}{16}a^2c^2\eta_2^4-\frac{15}{16}a^2c^2\xi_2^4+\left(\frac{1}{2}a^2c-a^2\right)\eta_2\xi_2\eta_1\xi_1+$$

$$+\left(-\frac{7}{8}a^2c+\frac{1}{12}a^2\right)\eta_2^2\xi_1^2+\left(-\frac{7}{8}a^2c+\frac{1}{12}a^2\right)\xi_2^2\eta_1^2-\frac{5}{24}a^2\eta_1^2\xi_1^2-\frac{15}{8}a^2c^2\eta_2^2\xi_2^2+$$

$$+\left(-\frac{5}{8}a^2c-\frac{5}{12}a^2\right)\eta_2^2\eta_1^2+\left(-\frac{5}{8}a^2c-\frac{5}{12}a^2\right)\xi_2^2\xi_1^2, \tag{6в}$$

$$G^{(6)}=\left(-\frac{7}{48}a^4c-\frac{67}{3456}a^4\right)\xi_1^6+\left(-\frac{7}{48}a^4c-\frac{67}{3456}a^4\right)\eta_1^6-\frac{705}{128}a^4c^4\xi_2^6+$$
$$+\left(-\frac{7}{8}a^4c^2-\frac{1}{9}a^4-\frac{41}{9}a^4c+\frac{41}{16}a^4c^3\right)\xi_2\xi_1\eta_2^3\eta_1+\left(-\frac{37}{48}a^4c-\frac{109}{72}a^4+\frac{5}{4}a^4c^2\right)\xi_2\xi_1\eta_2\eta_1^3+$$
$$+\left(-\frac{37}{48}a^4c-\frac{109}{72}a^4+\frac{5}{4}a^4c^2\right)\eta_2\xi_2\eta_1\xi_1^3+\left(-\frac{7}{8}a^4c^2-\frac{1}{9}a^4-\frac{41}{9}a^4c+\frac{41}{16}a^4c^3\right)\xi_1\eta_2\eta_1\xi_2^3-$$
$$-\frac{705}{128}a^4c^4\eta_2^6+\left(-\frac{43}{432}a^4-\frac{27}{16}a^4c-\frac{251}{192}a^4c^2-\frac{45}{4}a^4c^3\right)\eta_2^2\eta_1^2\xi_2^2+$$
$$+\left(-\frac{43}{432}a^4-\frac{27}{16}a^4c-\frac{251}{192}a^4c^2-\frac{45}{4}a^4c^3\right)\xi_2^2\xi_1^2\eta_2^2+\left(-\frac{5}{16}a^4c-\frac{691}{192}a^4c^2-\frac{311}{432}a^4\right)\eta_1^2\xi_1^2\xi_2^2+$$
$$+\left(-\frac{167}{384}a^4c^2-\frac{19}{864}a^4-\frac{401}{64}a^4c^3+\frac{85}{288}a^4c\right)\xi_1^2\eta_2^4+\left(-\frac{5}{16}a^4c-\frac{691}{192}a^4c^2-\frac{311}{432}a^4\right)\xi_1^2\eta_2^2\eta_1^2+$$
$$+\left(-\frac{319}{64}a^4c^3-\frac{571}{288}a^4c-\frac{335}{384}a^4c^2-\frac{67}{864}a^4\right)\eta_2^4\eta_1^2+\left(-\frac{7}{16}a^4c-\frac{67}{1152}a^4\right)\eta_1^2\xi_1^4+$$
$$+\left(\frac{7}{192}a^4c+\frac{1}{54}a^4-\frac{811}{384}a^4c^2\right)\eta_2^2\xi_1^4+\left(-\frac{7}{16}a^4c-\frac{67}{1152}a^4\right)\xi_1^2\eta_1^4+$$
$$+\left(-\frac{571}{384}a^4c^2-\frac{67}{192}a^4c-\frac{319}{432}a^4\right)\eta_2^2\eta_1^4+\left(-\frac{571}{384}a^4c^2-\frac{67}{192}a^4c-\frac{319}{432}a^4\right)\xi_1^4\xi_2^2+$$
$$+\left(-\frac{319}{64}a^4c^3-\frac{571}{288}a^4c-\frac{335}{384}a^4c^2-\frac{67}{864}a^4\right)\xi_1^2\xi_2^4+\left(\frac{7}{192}a^4c+\frac{1}{54}a^4-\frac{811}{384}a^4c^2\right)\eta_1^4\xi_2^2+$$
$$+\left(-\frac{167}{384}a^4c^2-\frac{19}{864}a^4-\frac{401}{64}a^4c^3+\frac{85}{288}a^4c\right)\eta_1^2\xi_2^4-\frac{2115}{128}a^4c^4\xi_2^2\eta_2^4-\frac{2115}{128}a^4c^4\xi_2^4\eta_2^2 \tag{6г}$$

и приближенный интеграл движения

$$I=-\frac{5}{48}a^2p_1^4-\frac{5}{48}a^2q_1^4-\frac{15}{16}a^2c^2p_2^4-\frac{15}{16}a^2c^2q_2^4+\left(\frac{1}{2}a^2c-a^2\right)p_2q_2p_1q_1+$$
$$+\left(-\frac{7}{8}a^2c+\frac{1}{12}a^2\right)p_2^2q_1^2+\left(-\frac{7}{8}a^2c+\frac{1}{12}a^2\right)q_2^2p_1^2-\frac{5}{24}a^2p_1^2q_1^2-\frac{15}{8}a^2c^2p_2^2q_2^2+$$
$$+\left(-\frac{5}{8}a^2c-\frac{5}{12}a^2\right)p_2^2p_1^2+\left(-\frac{5}{8}a^2c-\frac{5}{12}a^2\right)q_2^2q_1^2. \tag{7}$$

2. Для нерезонансного (частоты $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ – несоизмеримы) гамильтониана Гарнье [2]:

$$H=\frac{1}{2}\omega_1\left(p_1^2+q_1^2\right)+\frac{1}{2}\omega_2\left(p_2^2+q_2^2\right)+\frac{1}{2}\omega_3\left(p_3^2+q_3^2\right)+\left(\frac{q_1^2}{\omega_1}+\frac{q_2^2}{\omega_2}+\frac{q_3^2}{\omega_3}\right)^2, \tag{8}$$

с тремя степенями свободы до степени $SMAX=4$ была получена нормальная форма

$$G_6=G^{(2)}+G^{(4)}, \tag{9а}$$

$$G^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\omega_1\left(\eta_1^2+\xi_1^2\right)+\omega_2\left(\eta_2^2+\xi_2^2\right)+\omega_3\left(\eta_3^2+\xi_3^2\right)\right), \tag{9б}$$

$$G^{(4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{\eta_1^2\xi_1^2}{\omega_1^2}+\frac{3}{2}\frac{\eta_2^2\xi_2^2}{\omega_2^2}+\frac{3}{2}\frac{\eta_3^2\xi_3^2}{\omega_3^2}+\frac{\xi_1^2\xi_2^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\xi_1^2\xi_3^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\xi_2^2\xi_3^2}{\omega_2\omega_3}+\right.$$

$$+\frac{\eta_1^2\eta_2^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\eta_1^2\xi_2^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\xi_1^2\eta_2^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\eta_1^2\eta_3^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\eta_1^2\xi_3^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\xi_1^2\eta_3^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\eta_2^2\eta_3^2}{\omega_2\omega_3}+\frac{\eta_2^2\xi_3^2}{\omega_2\omega_3}+$$

$$+\frac{\xi_2^2\eta_3^2}{\omega_2\omega_3}+\frac{3}{4}\frac{\xi_1^4}{\omega_1^2}+\frac{3}{4}\frac{\xi_2^4}{\omega_2^2}+\frac{3}{4}\frac{\xi_3^4}{\omega_3^2}+\frac{3}{4}\frac{\eta_1^4}{\omega_1^2}+\frac{3}{4}\frac{\eta_2^4}{\omega_2^2}+\frac{3}{4}\frac{\eta_3^4}{\omega_3^2}\Bigg) \qquad (9в)$$

и интегралы движения

$$I_1=\frac{5}{8}\frac{q_1^4}{\omega_1^2}-\frac{3}{4}\frac{p_1^2q_1^2}{\omega_1^2}+\frac{1}{2}\frac{q_2^2q_1^2\left(2\omega_1^2-\omega_2^2\right)}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\omega_2}-\frac{1}{2}\frac{p_2^2q_1^2\omega_2}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}+\frac{1}{2}\frac{q_3^2q_1^2\left(2\omega_1^2-\omega_3^2\right)}{\omega_1\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{p_3^2q_1^2\omega_3}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\omega_1q_1^2+\frac{2q_2p_1q_1p_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}+\frac{2p_1q_1p_3q_3}{\omega_1^2-\omega_3^2}-\frac{3}{8}\frac{p_1^4}{\omega_1^2}-\frac{1}{2}\frac{q_2^2p_1^2\left(2\omega_1^2-\omega_2^2\right)}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\omega_2}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{p_2^2p_1^2\omega_2}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}-\frac{1}{2}\frac{q_3^2p_1^2\left(2\omega_1^2-\omega_3^2\right)}{\omega_1\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\frac{p_3^2p_1^2\omega_3}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\omega_1p_1^2, \qquad (10а)$$

$$I_2=\frac{1}{2}\frac{q_1^2q_2^2\left(-2\omega_2^2+\omega_1^2\right)}{\omega_2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\omega_1}-\frac{1}{2}\frac{q_1^2p_2^2\left(-2\omega_2^2+\omega_1^2\right)}{\omega_2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\omega_1}-\frac{2q_2p_1q_1p_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}+\frac{1}{2}\frac{p_1^2q_2^2\omega_1}{\omega_2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{p_1^2p_2^2\omega_1}{\omega_2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}+\frac{5}{8}\frac{q_2^4}{\omega_2^2}-\frac{3}{4}\frac{q_2^2p_2^2}{\omega_2^2}+\frac{1}{2}\frac{q_2^2q_3^2\left(2\omega_2^2-\omega_3^2\right)}{\omega_2\omega_3\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}-\frac{1}{2}\frac{q_2^2p_3^2\omega_3}{\omega_2\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}+$$

$$+\frac{1}{2}\omega_2q_2^2+\frac{2q_2p_2p_3q_3}{\omega_2^2-\omega_3^2}-\frac{3}{8}\frac{p_2^4}{\omega_2^2}-\frac{1}{2}\frac{p_2^2q_3^2\left(2\omega_2^2-\omega_3^2\right)}{\omega_2\omega_3\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\frac{p_2^2p_3^2\omega_3}{\omega_2\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\omega_2p_2^2, \qquad (10б)$$

$$I_3=\frac{1}{2}\frac{q_1^2q_3^2\left(-2\omega_3^2+\omega_1^2\right)}{\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)\omega_1}-\frac{1}{2}\frac{q_1^2p_3^2\left(-2\omega_3^2+\omega_1^2\right)}{\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)\omega_1}-\frac{2p_1q_1p_3q_3}{\omega_1^2-\omega_3^2}+\frac{1}{2}\frac{p_1^2q_3^2\omega_1}{\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}-\frac{1}{2}\frac{p_1^2p_3^2\omega_1}{\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{q_2^2q_3^2\left(\omega_2^2-2\omega_3^2\right)}{\omega_3\omega_2\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}-\frac{1}{2}\frac{q_2^2p_3^2\left(\omega_2^2-2\omega_3^2\right)}{\omega_3\omega_2\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}-\frac{2q_2p_2p_3q_3}{\omega_2^2-\omega_3^2}+\frac{1}{2}\frac{p_2^2q_3^2\omega_2}{\omega_3\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{p_2^2p_3^2\omega_2}{\omega_3\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}+\frac{5}{8}\frac{q_3^4}{\omega_3^2}-\frac{3}{4}\frac{q_3^2p_3^2}{\omega_3^2}+\frac{1}{2}\omega_3q_3^2-\frac{3}{8}\frac{p_3^4}{\omega_3^2}+\frac{1}{2}\omega_3p_3^2. \qquad (10в)$$

3. Для резонансного ($\omega_1=\omega_2=\omega_3=1$) гамильтониана Гарнье [2]:

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2+p_3^2+q_3^2\right)+\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^2, \qquad (11)$$

была получена нормальная форма порядка $SMAX=6$

$$G_6=G^{(2)}+G^{(4)}+G^{(6)}, \qquad (12а)$$

$$G^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\eta_1^2+\xi_1^2+\eta_2^2+\xi_2^2+\eta_3^2+\xi_3^2\right), \qquad (12б)$$

$$G^{(4)}=\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2+\eta_1\xi_1\eta_3\xi_3+\eta_2\xi_2\eta_3\xi_3+\frac{3}{4}\xi_1^2\xi_3^2+\frac{3}{4}\xi_1^2\xi_2^2+\frac{3}{4}\xi_2^2\xi_3^2+\frac{3}{8}\xi_1^4+\frac{3}{8}\xi_2^4+$$

$$+\frac{3}{8}\xi_3^4+\frac{1}{4}\eta_1^2\xi_2^2+\frac{3}{4}\eta_1^2\xi_1^2+\frac{1}{4}\eta_1^2\xi_3^2+\frac{1}{4}\xi_1^2\eta_3^2+\frac{3}{8}\eta_1^4+\frac{3}{8}\eta_2^4+\frac{3}{8}\eta_3^4+\frac{1}{4}\xi_1^2\eta_2^2+$$

$$+\frac{3}{4}\eta_2^2\xi_2^2+\frac{1}{4}\eta_2^2\xi_3^2+\frac{1}{4}\xi_2^2\eta_3^2+\frac{3}{4}\eta_3^2\xi_3^2+\frac{3}{4}\eta_1^2\eta_2^2+\frac{3}{4}\eta_1^2\eta_3^2+\frac{3}{4}\eta_2^2\eta_3^2, \qquad (12в)$$

$$
\begin{aligned}
G^{(6)} = &-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3\eta_2^2\xi_3 - \frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3^2\eta_2\xi_2 - \frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3\xi_2^2\xi_3 - \frac{9}{4}\eta_2\xi_2\eta_3\eta_1^2\xi_3 - \frac{9}{4}\eta_2\xi_2\eta_3\xi_1^2\xi_3 - \\
&-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2\xi_3^2 - \frac{9}{4}\eta_1^3\xi_1\eta_3\xi_3 - \frac{9}{4}\eta_1\xi_1^3\eta_3\xi_3 - \frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3^3\xi_3 - \frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3\xi_3^3 - \frac{9}{4}\eta_2^3\xi_2\eta_3\xi_3 - \\
&-\frac{9}{4}\eta_2\xi_2^3\eta_3\xi_3 - \frac{9}{4}\eta_2\xi_2\eta_3^3\xi_3 - \frac{9}{4}\eta_2\xi_2\eta_3\xi_3^3 - \frac{9}{4}\eta_1^3\xi_1\eta_2\xi_2 - \frac{9}{4}\eta_1\xi_1^3\eta_2\xi_2 - \frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_2^3\xi_2 - \\
&-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2^3 - \frac{51}{32}\xi_1^4\xi_3^2 - \frac{51}{32}\xi_1^2\xi_3^4 - \frac{51}{32}\xi_2^4\xi_3^2 - \frac{51}{32}\xi_2^2\xi_3^4 - \frac{15}{32}\xi_3^4\eta_1^2 - \frac{15}{32}\xi_3^4\eta_2^2 - \frac{51}{32}\xi_3^4\eta_3^2 - \\
&-\frac{15}{32}\eta_1^4\xi_3^2 - \frac{15}{32}\eta_2^4\xi_3^2 - \frac{51}{32}\eta_3^4\xi_3^2 - \frac{51}{32}\xi_1^4\xi_2^2 - \frac{51}{32}\xi_1^2\xi_2^4 - \frac{15}{32}\xi_2^4\eta_1^2 - \frac{15}{32}\xi_2^4\eta_3^2 - \frac{51}{32}\xi_2^4\eta_2^2 - \\
&-\frac{15}{32}\eta_1^4\xi_2^2 - \frac{51}{32}\eta_2^4\xi_2^2 - \frac{15}{32}\xi_2^2\eta_3^4 - \frac{15}{32}\xi_1^4\eta_2^2 - \frac{15}{32}\xi_1^4\eta_3^2 - \frac{51}{32}\xi_1^4\eta_1^2 - \frac{51}{32}\eta_1^4\xi_1^2 - \frac{15}{32}\xi_1^2\eta_2^4 - \\
&-\frac{15}{32}\xi_1^2\eta_3^4 - \frac{51}{32}\eta_1^4\eta_3^2 - \frac{51}{32}\eta_1^2\eta_3^4 - \frac{51}{32}\eta_2^4\eta_3^2 - \frac{51}{32}\eta_2^2\eta_3^4 - \frac{51}{32}\eta_1^4\eta_2^2 - \frac{51}{32}\eta_1^2\eta_2^4 - \frac{33}{16}\eta_1^2\xi_1^2\eta_3^2 - \\
&-\frac{33}{16}\eta_2^2\xi_2^2\eta_3^2 - \frac{33}{16}\xi_1^2\xi_3^2\eta_1^2 - \frac{15}{16}\xi_1^2\xi_3^2\eta_2^2 - \frac{51}{16}\xi_1^2\xi_3^2\xi_2^2 - \frac{33}{16}\xi_1^2\xi_3^2\eta_3^2 - \frac{15}{16}\xi_2^2\xi_3^2\eta_1^2 - \frac{33}{16}\xi_2^2\xi_3^2\eta_2^2 \qquad (12г)
\end{aligned}
$$

и интеграл движения

$$
\begin{aligned}
I = &\ p_1q_1p_2q_2 + p_1q_1p_3q_3 + p_2q_2p_3q_3 + \frac{3}{4}q_1^2q_3^2 + \frac{3}{4}q_1^2q_2^2 + \frac{3}{4}q_2^2q_3^2 + \frac{3}{8}q_1^4 + \frac{3}{8}q_2^4 + \\
&+\frac{3}{8}q_3^4 + \frac{1}{4}p_1^2q_2^2 + \frac{3}{4}p_1^2q_1^2 + \frac{1}{4}p_1^2q_3^2 + \frac{1}{4}q_1^2p_3^2 + \frac{3}{8}p_1^4 + \frac{3}{8}p_2^4 + \frac{3}{8}p_3^4 + \frac{1}{4}q_1^2p_2^2 + \\
&+\frac{3}{4}p_2^2q_2^2 + \frac{1}{4}p_2^2q_3^2 + \frac{1}{4}q_2^2p_3^2 + \frac{3}{4}p_3^2q_3^2 + \frac{3}{4}p_1^2p_2^2 + \frac{3}{4}p_1^2p_3^2 + \frac{3}{4}p_2^2p_3^2 . \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

Представленная программа будет использована для нормализации и получения интегралов движения других гамильтоновых систем, а также для построения сечений Пуанкаре и для нахождения приближенных решений систем дифференциальных уравнений в гамильтоновой форме. Кроме того, разработанная программа может быть использована другими исследователями, которые проводят изучение нелинейных гамильтоновых систем.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1974. – 432с.
2. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли / А.М. Переломов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 238с.
3. Гориэли А. Интегрируемость и сингулярность / А. Гориэли. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 316с.
4. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем / Г.Е.О. Джакалья. – М.: Наука, 1979. – 320с.
5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504с.
6. Найфэ А. Методы возмущений./ А. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
7. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ – М.: Мир, 1984. – 535с.

8. Березин И.С. Методы вычислений. / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-т.2., 1962. – 640с.
9. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений. / Дж. Форсайт, М. Мальколм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 277с.
10. Уилкинсон Дж. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. / Дж. Уилкинсон, К. Райнш. – М.: Машиностроение, 1976.–392с.
11. Basios, V. GITA: a REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians. / V. Basios, N. A. Chekanov, B. L. Markovski, V. A. Rostovtsev, S.I. Vinitsky // Comp. Phys. Commun. – 1995. – v. 90. – p. 355 – 368.
12. Биркгоф Дж. Динамические системы / Дж. Биркгоф – Москва-Ижевск.: РХД, 2002. – 406с.
13. Gustavson F.G. On construction formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point. / F.G. Gustavson // Astronom. J. – 1966. – v.71. – no.8. – pp.670-686.

БОГАЧЕВ Василий Евгеньевич – аспирант кафедры математического анализа Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– математическое и компьютерное моделирование, дифференциальные уравнения, гамильтоновы системы.

ЧЕКАНОВ Николай Александрович – д. ф.-м. н., заведующий кафедрой физики Старооскольского технологического института (филиал) Национального исследовательского университета «МИСиС», профессор кафедры прикладной математики и механики Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– классическая и квантовая механика, динамический хаос, дифференциальные уравнения, уравнение Шредингера, математическое моделирование.

УДК 658.562

А.Д. Болычевцев, Л.А. Болычевцева, Л.Б. Быстрицкая, Н.А. Любимова

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Постановка проблемы. Стабильность и конкурентоспособность промышленного предприятия в существенной степени зависит от наличия в его распоряжении менеджмента качества и прежде всего качественно функционирующей системы технического контроля.

Имеются два пути (направления) повышения качества контроля – инструментальный и методический. Первый связан с повышением точности используемых при контроле измерительных средств. Второй – с совершенствованием алгоритмической структуры контроля. На сегодняшний день первый путь себя исчерпал. В поисках результативных методик второго направления используются разные алгоритмические структуры технического контроля. К их числу относится структура, получившая наименование «последовательный контроль». В этом случае объект, признанный контролем «годным», подвергается последовательным повторным проверкам. Чтобы оценить положительный эффект такой методики, надо уметь теоретически рассчитывать качественные показатели последовательного контроля. Решению этой проблемы и посвящена настоящая статья.

Анализ публикаций по теме исследования. Описываемое направление исследований является новым и теоретически слабо проработанным. Тем не менее, оно нашло свое отражение в таких уже апробированных формах контроля, как «многоэтапный контроль» [1], «многоступенчатый контроль» [2] и др. Более того, начало его исследованиям положено еще несколько десятков лет тому назад. Среди этих исследований уместно выделить работы 60-70-х годов прошлого столетия [3-5]. Они принадлежат перу ученых-практиков, которые уже в те годы разглядели ограниченные возможности традиционного (инструментального) направления совершенствования и развития контроля и предложили альтернативные ему подходы. Вместе с тем приходится констатировать, что тематика их исследований оказалась разрозненной, сложилась стихийно под «напором» данных практики и носила разовый характер. Исследования не были научно аргументированы, не имели, да и не могли иметь (из-за отсутствия соответствующей методологической и теоретической базы) логического продолжения и системных обобщений.

Цель статьи. Методическое направление базируется на принципиально новом осмыслении процедуры контроля. Она рассматривается как преобразование информации, содержащейся в контролируемом объекте до проведения контроля, в информацию, содержащуюся в нем после его проведения.

При таком подходе центр тяжести исследований падает на вещественный носитель процедуры контроля – контролирующую систему (КС). Она имеет три канала связи с внешней средой: один входной и два выходных. По входному каналу поступает поток контролируемых объектов. С выходных каналов снимаются потоки соответственно принятых и забракованных контролем объектов. Цель выполненных исследований сводится к определению характеристик КС по известным характеристикам составляющих ее элементов.

Основная часть. До недавнего времени контролирующие системы рассматривались как сугубо нелинейные системы: на входе – непрерывная величина (контролируемый параметр объекта), на выходе – величина релейного типа («да» или «нет»; «1» или «0»). Такие системы трудны в теоретическом исследовании. Видимо, по этой причине большинство имеющихся теоретических разработок посвящено «инструментальным» исследованиям измерительного контроля и охватывают лишь различные стороны его анализа. Что же касается структурного синтеза КС, то до настоящего времени эти вопросы не только не разрабатывались, но даже не ставились.

Положение существенно изменилось после того, как было установлено, что при определенном угле зрения на процедуру контроля и надлежащем выборе информативных параметров контролирующей системы, последнюю можно рассматривать как линейный преобразователь ее входной информации в информацию выходную [6, 7]. Такой подход и видение контроля позволяет по-новому высветить его типовую КС и проектировать на этой основе его более сложные алгоритмические структуры.

Можно предложить разные подходы к построению линейной модели КС. Так, в [6] предлагается контролируемые объекты описывать на событийном уровне («годен-негоден»), а в качестве материальных носителей информации, преобразуемой КС, рассматривать потоки таких объектов. Тогда, выбрав в качестве информативных параметров каждого потока количества в нем годных и негодных объектов, можно построить линейную математическую модель функционирования контроля в целом.

Изложенный подход может быть назван *интегральным*. Полученная на его основе математическая модель типовой КС рассматривается как жесткая конструкция, вмешаться в которую с целью изменения ее характеристик нельзя. Это ограничивает область применения такой модели. Чтобы устранить этот недостаток, разрабатывается иной – *дифференциальный* подход к линейному описанию технического контроля. Он основан на представлении состояния объекта контроля не случайным событием, а случайной величиной. Этот подход привлекателен своей общностью и универсальностью и может быть использован при разработке и построении линейной модели различных методик измерительного контроля. Данная статья посвящена исследованию и описанию первого из обсуждаемых вариантов.

Интегральный подход. Теоретическую разработку сложных структур контроля (в том числе рассматриваемой в данной статье) удобно провести на общей статистической модели контроля, приближенной к реальным производственным условиям. В этой модели из-за неидеальности КС оба ее выходных потока оказываются засоренными объектами противоположного качества (первый – негодными, второй – годными объектами). *Объем* и *степень засоренности* каждого из потоков *исчерпывающе* описывают его. Таких пар параметров, называемых информативными, можно составить несколько. Одну из них – количество истинно годных и количество истинно негодных объектов в потоке – будем рассматривать как пару *переменных* КС [8] . Знание этой пары позволяет легко рассчитать любые другие информативные параметры потока.

Чтобы оценить результативность любого контроля, надо уметь рассчитывать информативные параметры выходных потоков КС по информативным параметрам ее входного потока. Такой расчет предполагает знание *исчерпывающих характеристик* самой КС. Первоочередная задача анализа сложной КС, в том числе КС последовательного контроля, – определение этих характеристик.

Постановка этой задачи подпадает под общую схему структурного анализа автоматической системы [8]: известна структура исследуемой системы (составляющие ее элементы и их связи между собой и с внешней средой); заданы исчерпывающие характеристики всех ее элементов; требуется определить исчерпывающие характеристики самой системы. Эта вербальная постановка относится к любым составным системам, в том числе к КС последовательного контроля.

На сегодняшний день строгих решений этой задачи ни для какой из известных сложных структур контроля не получено. Причина, на наш взгляд, – в отсутствии надлежащего теоретического базиса. Ниже находится точное аналитическое решение задачи для КС последовательного контроля (интегральный вариант).

Простейшая форма организации (алгоритм) измерительного контроля сводится к типовой последовательности действий: измерению компонент контролируемого параметра объекта, сравнению измеренных значений компонент с соответствующими им верхними и нижними границами допуска, выработке исходов контроля – «1» или «0». Значение «1» (признак годности) приписывается объекту при попадании внутрь границ всех результатов измерений компонент, значение «0» (признак брака) – при непопадании внутрь границ хотя бы одного из них.

Совокупность измерительного устройства и устройства сравнения, выступающую в качестве овеществленного носителя функций измерительного контроля, назовем *типовой контролирующей системой* (ТКС). Из-за ее неидеальности и возникают ошибки контроля.

При анализе сложной КС нас не интересует ни внутренняя структура ТКС, ни тип контролируемого параметра (скаляр, вектор), ни алгоритм функционирования ТКС. Последняя рассматривается как некое единое целое, как структурная единица КС, имеющая три вещественных канала связи с внешней средой (один входной и два выходных) и представляемая двумя независимыми показателями. Один из них $p_1^{/}$ (априорно-условный риск изготовителя) характеризует функционирование системы с точки зрения заведомо годного объекта и описывается вероятностью его забракования. Другой $p_2^{/}$ (априорно-условный риск заказчика) – с точки зрения заведомо негодного объекта и описывается вероятностью его принятия.

Контролирующую систему, соответствующую последовательному контролю, будем называть *последовательной* КС. Она представляет собой последовательно-параллельное соединение двух, трех или более ТКС. Последовательно соединенными они оказываются по своим входам и первым выходам. Это *главный* канал прохождения потока объектов. Именно он представляет наибольший производственный интерес. В параллель соединены вторые выходы ТКС.

Рассмотрим произвольную КС. Обозначим через N, N_B и $N_{\overline{B}}$ объемы ее входного, первого выходного и второго выходного потоков соответственно. Эти же символы со штрихом сверху присвоим количествам истинно годных, а с двумя штрихами – количествам истинно негодных объектов в соответствующих потоках. Введем также обозначения $p_1^{/}$ и $p_2^{/}$ для априорно-условных рисков изготовителя и заказчика и обозначения $\overline{p}_1^{/}$ и $\overline{p}_2^{/}$ – для их дополнений до единицы:

$$\overline{p}_1^{/} = 1 - p_1^{/}; \qquad \overline{p}_2^{/} = 1 - p_2^{/}. \tag{1}$$

В этих обозначениях, независимо от того, какую КС мы рассматриваем – типовую или сложную, справедливы зависимости [6]:

$$N_B^{/} = \overline{p}_1^{/} N'; \qquad N_B^{//} = p_2^{/} N''; \tag{2}$$

$$N_{\overline{B}}^{/} = p_1^{/} N'; \qquad N_{\overline{B}}^{//} = \overline{p}_2^{/} N''. \tag{3}$$

Из них вытекает, что показатели $\overline{p}_1^{/}$ и $p_2^{/}$ выступают в роли коэффициентов передачи количеств соответственно годных и негодных объектов по первому выходу КС, а $p_1^{/}$ и $\overline{p}_2^{/}$ – по ее второму выходу.

Обратимся к зависимостям (2). Они справедливы для любых КС, в том числе и для ТКС. Выделим первую из этих зависимостей

$$N_B^{/} = N' \ \overline{p}_1^{/}. \qquad (4)$$

Последовательно применяя ее по отношению к каждой ТКС$_i$, $i = 1,2,...,n$, получим

$$\begin{aligned}
N_{B1}^{/} &= N^{/}\overline{p}_{11}^{/},\\
N_{B2}^{/} &= N_{B1}^{/}\overline{p}_{12}^{/} = N^{/}\,\overline{p}_{11}^{/}\overline{p}_{12}^{/},\\
N_{B3}^{/} &= N_{B2}^{/}\overline{p}_{13}^{/} = N^{/}\,\overline{p}_{11}^{/}\overline{p}_{12}^{/}\overline{p}_{13}^{/}, \qquad (5)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
N_B^{/} &= N_{Bn}^{/} = N_{B,n-1}^{/}\overline{p}_{1n}^{/} = N^{/}\,\overline{p}_{11}^{/}\overline{p}_{12}^{/}\cdots\overline{p}_{1,n-1}^{/}\overline{p}_{1n}^{/}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, зависимость (4) справедлива для последовательной КС в целом, где $\overline{p}_1^{/}$ – один из ее показателей (дополнение априорно-условного риска до единицы). Сравнивая (4) с последней строкой (5), имеем

$$\overline{p}_1^{/} = \prod_{i=1}^{n} \overline{p}_{1i}^{/},$$

что при переходе к самим априорно-условным рискам изготовителя (см. (1)) дает

$$p_1^{/} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_{1i}^{/}). \qquad (6)$$

Для нахождения второго показателя последовательной КС выпишем вторую зависимость (2)

$$N_B^{//} = N^{//} p_2^{/}.$$

Аналогично предыдущему случаю, последовательно применяя ее к каждой типовой КС, в итоге найдем

$$N_B^{//} = N_{Bn}^{//} = N^{//} p_{21}^{/} p_{22}^{/} p_{23}^{/} \cdots p_{2n}^{/},$$

из чего (сравнить с предыдущей записью) следует искомый результат

$$p_2^{/} = \prod_{i=1}^{n} p_{2i}^{/}. \qquad (7)$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Соотношения (6) и (7) являются точными аналитическими представлениями априорно-условных рисков изготовителя и заказчика последовательной КС и могут выступать в качестве математической модели последовательного контроля. Они просты, физичны, наглядны, удобны при пользовании в инженерной практике. Зная их, нетрудно рассчитать все параметры выходных потоков КС (их объемы, степень засоренности и др.), а также оценить результативность контроля в целом.

Представляет самостоятельный интерес исследование дифференциального подхода к решению описываемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рубичев Н.А. Вероятностный анализ многоэтапного допускового контроля по одному параметру при независимости погрешности измерений / Н.А. Рубичев, В.Д. Фрумкин // Измерительная техника. – 1988. – № 9. – С. 10-13.
2. Болычевцев А.Д. Многоступенчатый измерительный контроль / А.Д. Болычевцев // Измерительная техника. – 1990. – № 8. – С. 15-17
3. Коченов М.И. Вопросы точности автоматического контроля размеров/ М.И. Коченов // В кн. «Вопросы точности и надежности в машиностроении». – М.: Изд-во АН СССР, 1962. –С. 46-68.
4. Кампхин А. Исследование эффективности двухступенчатого автоматического контроля размеров моделированием на ЭВМ/ А. Кампхин // Измерительная техника. – 1972. – №7. – С. 16-20.
5. Лучкин С.Л. Об одном способе повышения достоверности результатов контроля/ С.Л. Лучкин // Метрология. – 1976. – № 9. – С. 10-15.
6. Болычевцев А.Д. Контроль как линейное преобразование потоков контролируемых объектов/ А.Д. Болычевцев, Л.А. Болычевцева, В.А. Шлыков // Измерительная техника. – 2004. – № 3. – С.10-15.
7. Болычевцев А.Д. Последовательный контроль. Контролирующая система и ее характеристики / А.Д. Болычевцев, Л.А. Болычевцева, В.А. Шлыков // Метрология. – 2004. – № 9. – С. 3-16.
8. Основы автоматического управления / Под ред. В.С. Пугачева. – М.: Наука, 1968. – 689 с.

БОЛЫЧЕВЦЕВ Алексей Дмитриевич – д.т.н., профессор кафедры радиоэлектроники и компьютерных систем Украинской инженерно-педагогической академии.

Научные интересы:

– математические модели в технических системах контроля и управления.

БОЛЫЧЕВЦЕВА Любовь Алексеевна – к.т.н., ст. преподаватель кафедры КиТЭВС Курского государственного технического университета.

научные интересы:

– моделирование систем контроля и диагностики.

БЫСТРИЦКАЯ Лидия Бруноновна – доцент кафедры радиоэлектроники и компьютерных систем Украинской инженерно-педагогической академии.

Научные интересы:

– моделирование систем контроля и диагностики.

ЛЮБИМОВА Нина Александровна – к.т.н., доцент кафедры охраны труда Харьковского национального аграрного университета им В. В. Докучаева.

Научные интересы:

– контроль и моделирование экологических объектов.

УДК 330.4:338.2:658

А.В. Бондарь, А.С. Мазманишвили

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗОРЕНИЯ В ПРИСУТСТВИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Постановка проблемы. Создание, изучение и адаптация гибких математических моделей, анализирующих и совершенствующих рыночные тенденции и динамику финансовых потоков, всегда являлось важным аспектом теории экономического прогнозирования. В условиях восстановления рыночного баланса чрезвычайно важным является своевременное распознавание и минимизация, а зачастую и полная ликвидация негативных финансовых тенденций.

1. Целью представленной работы является рассмотрение проблемы разорения или исчерпания ресурсов как следствия нарушения стабильной работы предприятия в условиях кризиса, а также нерационального использования ресурсов, в том числе и финансовых, за определенный промежуток времени. Данные анализируются посредством использования схемы изъятия ресурса из ресурсного контейнера с линейным трендом и нормальными к нему возмущениями. Преимущество данной модели состоит в том, что она позволяет провести как аналитическое исследование поставленной задачи, так и выполнить моделирующие численные эксперименты.

Стандартные показатели и модели анализа стабильности экономического состояния предприятия, помимо внутренних отчетных показателей, зачастую учитывают некоторые локальные особенности рынка, такие как сезонные колебания, политическая и экономическая стабильность в стране, имидж и политика компании на рынке. В данном случае анализу подлежат результаты деятельности предприятия на международной арене в докризисный и кризисный периоды.

2. Математическая модель: линейный функционал.

Решение многих практических задач приводит к необходимости изучения вероятностных характеристик времени достижения некоторого заданного уровня процессом на выходе инерционного детектора накопительного типа [1 – 5].

Рассмотрим аддитивную смесь $\xi(t)$ детерминированного положительного сигнала $s(t)$ и шума $x(t)$

$$\xi(t) = s(t) + x(t)\,. \qquad (1)$$

Если на вход указанного линейного детектора поступает такая аддитивная смесь, то результат детектирования имеет случайный характер, на его выходе формируется величина

$$\eta(t) = \int_0^t [s(t') + x(t')]\,dt'\ . \qquad (2)$$

Рассмотрим такие схемы, критерием срабатывания у которых служит достижение величиной $\eta(t)$ некоторого заданного уровня L. Поскольку $\eta(t)$ – случайный процесс, то время достижения уровня L также случайно. Для положительно-определенных функций $s(t)$ и больших t этот момент времени будет определяться уровнем достижения $\eta(\tau) = L$, то есть тем моментом времени τ, для которого будет выполняться случайное событие $\{A : \eta(\tau) = L\}$. Для моментов достижения выполняется

$$P(\tau) = \left\langle \delta\left(\tau - \eta^{-1}(L)\right)\right\rangle, \qquad (3)$$

где $\delta(.)$ – дельта-функция Дирака, а $\eta^{-1}(L)$ – функция, обратная к $\eta(\tau)$. Уголковыми скобками $\langle . \rangle$ здесь и далее будет обозначаться операция нахождения безусловного математического ожидания относительно множества реализаций случайного процесса $x(t)$, то есть функциональный интеграл в пространстве функций $\{x(t)\}$. Из свойств δ-функций следует, что

$$P(\tau) = \left\langle \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} \delta\big(\eta(\tau) - L\big) \right\rangle. \tag{4}$$

Используя Фурье-представление для δ-функции, получим

$$P(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^{-1} \exp(i\lambda L) \frac{d}{d\tau} \langle \exp(-i\lambda\eta(\tau)) \rangle d\lambda. \tag{5}$$

Далее будем предполагать, что $x(t)$ – нормальный марковский процесс (НМП). Рассмотрим характеристическую функцию $Q_\tau(\lambda) = \langle \exp(-i\lambda\eta(\tau)) \rangle$. Поскольку $x(t)$ – нормальный процесс, то свойством нормальности обладает и процесс $\eta(t)$. Для него имеем

$$\langle \eta(\tau) \rangle = \int_0^\tau s(t)\,dt, \qquad D_\tau = D(\tau) = \langle \eta^2(t) \rangle - \langle \eta(t) \rangle^2 = \int_0^\tau \int_0^\tau \langle x(t_1)x(t_2) \rangle dt_1\,dt_2 \tag{6}$$

В силу нормальности случайной величины $\eta_\tau = \eta(\tau)$ приведенных моментов достаточно для нахождения характеристической функции $Q_\tau(\lambda)$, что дает $Q_\tau(\lambda) = \exp\left(-i\lambda\langle\eta_\tau\rangle - \lambda^2 D_\tau / 2\right)$. Поэтому

$$P(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda\tau) Q_\tau(\lambda)\,d\lambda, \tag{7}$$

откуда

$$P(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^{-1} \exp(i\lambda L) \frac{d}{d\tau} \exp\left(-i\lambda\langle\eta_\tau\rangle - \frac{1}{2}\lambda^2 D_\tau\right) d\lambda. \tag{8}$$

Дифференцирование по τ и последующее интегрирование по λ приводит к выражению общего типа

$$P(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\tau}} \left[\dot{D}_\tau \frac{L - \langle\eta_\tau\rangle}{D_\tau} + \langle\dot{\eta}_\tau\rangle \right] \exp\left\{ -\frac{\left(L - \langle\eta_\tau\rangle\right)^2}{2D_\tau} \right\}. \tag{9}$$

Для получения выражений, пригодных для последующего численного моделирования, необходимо задаться конкретным видом случайного НМП-процесса $x(\tau)$ вместе с соответствующими ему функциями $\langle\eta_\tau\rangle$ и D_τ. Ниже будем рассматривать хорошо известный винеровский процесс, для использования которого достаточно задать интенсивность σ.

В настоящей работе будем использовать регулярный процесс $s(t)$ линейного вида с постоянной c, поэтому $\langle\eta_\tau\rangle = c\tau$, $\langle\dot{\eta}_\tau\rangle = c$. Далее, для винеровского процесса имеем $D_\tau = \sigma\tau/2$, $\dot{D}_\tau = \sigma/2$.

В приведенных предположениях, учитывая нормировку для искомой плотности распределения $P(\tau)$ времени достижения τ, имеем:

$$P(\tau) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\tau\tau_c}} \exp\left\{ -\gamma \frac{(\tau - \tau_c)^2}{\tau\tau_c} \right\}, \qquad \gamma = \frac{c}{\sigma} L, \qquad \tau_c = \frac{L}{c}. \tag{10}$$

3. Численное моделирование процесса разорения. Для модельного примера были выбраны следующие параметры: временная длительность расчета $\tau \le 365$ и $\tau \le 400$ (дней), временной шаг $\Delta\tau = 1$, уровень разорения $L_1 = 365$ и $L_2 = 400$, постоянная регулярной компоненты $c = 1$, интенсивность случайной компоненты $\sigma = 0.1$. В модели система «забывает» о своем состоянии к следующему временному шагу. Объем выборки статистического моделирования составил $M = 10^4$. Такая величина объема выборки M дает возможность на основании результатов статистического моделирования делать заключения о значениях P искомых вероятностей вплоть до величин $P = 0.001$ или $P = 0.999$. Основные результаты численных расчетов ниже представлены в виде амплитудных гистограмм или соответствующих им кумулят.

На рисунке 1 представлены пять реализаций функционала (2), а также указаны два уровня разорения $L_1 = 365$ и $L_2 = 400$. Видно, что к моменту достижения выбранных уровней функционал $\eta(t)$ (2) распределен по амплитуде, распределенными являются также и сами моменты достижения.

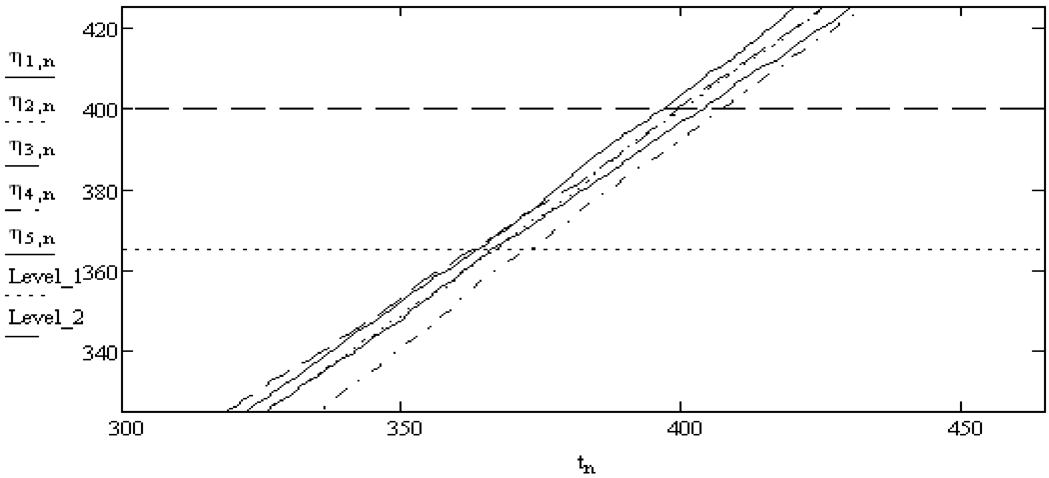


Рисунок 1. Первые пять реализаций линейного функционала $\eta(t)$

На рисунке 2 представлены эмпирические гистограммы распределения времен достижения случайным функционалом $\eta(t)$ уровней разорения $L_1 = 365$ и $L_2 = 400$ (дней). По форме они приближаются к нормальному закону, однако в нашем случае функция τ описывается выражением (10), отличающимся от нормального. Существенным здесь оказывается тот факт, что благодаря наличию случайной компоненты в изучаемом явлении, эмпирические распределения сосредоточены около уровней разорения $L_1 = 365$ и $L_2 = 400$, содержат возможность разорения как ранее этих временных уровней, так и позже.

Кумуляты (накопленные эмпирические вероятности, отвечающие приведенным на рисунке 2 временным гистограммам), приведены на рисунке 3.

Анализ приведенных кумулят показывает, что для выбранных параметров моделирования и уровней разорения имеют место заметные вероятности достичь заданный уровень разорения раньше, чем в заданные моменты времени $\tau = 365$ и $\tau = 400$ (дней). Так, для обеспечения вероятности неразорения $P = 0.997$ (разорение допускается в 3 случаях из 1000) в выбранных условиях требуется $\tau = 370$ и $\tau = 407$ (дней) соответственно.

Достаточно большой объем статистической выборки, используемый в настоящей работе, дает основания предполагать возможность использования предложенного подхода и в тех случаях, когда не оказывается возможным получить явное аналитическое выражение для распределения вероятностей $P(\tau)$.

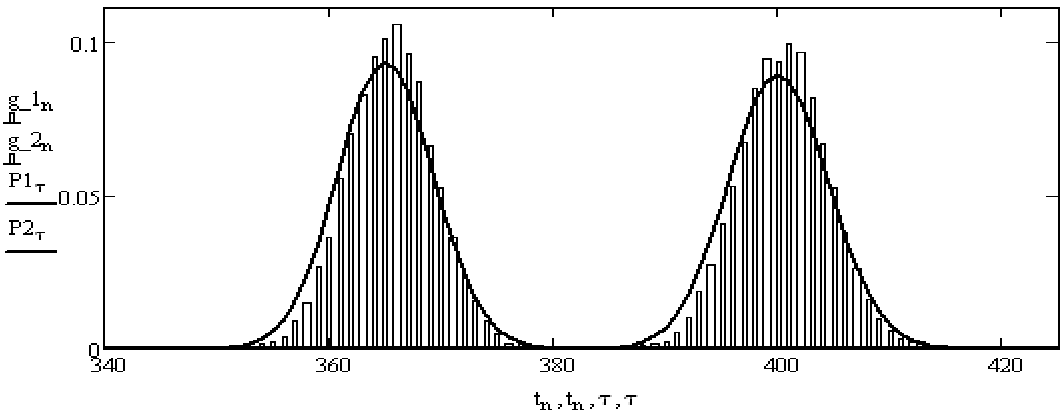


Рисунок 2. Эмпирические гистограммы g_1 и g_2 распределения времен достижения случайным функционалом $\eta(t)$ и их аналитические аналоги P1 и P2 согласно (10); уровни разорения $L_1 = 365$ и $L_2 = 400$.

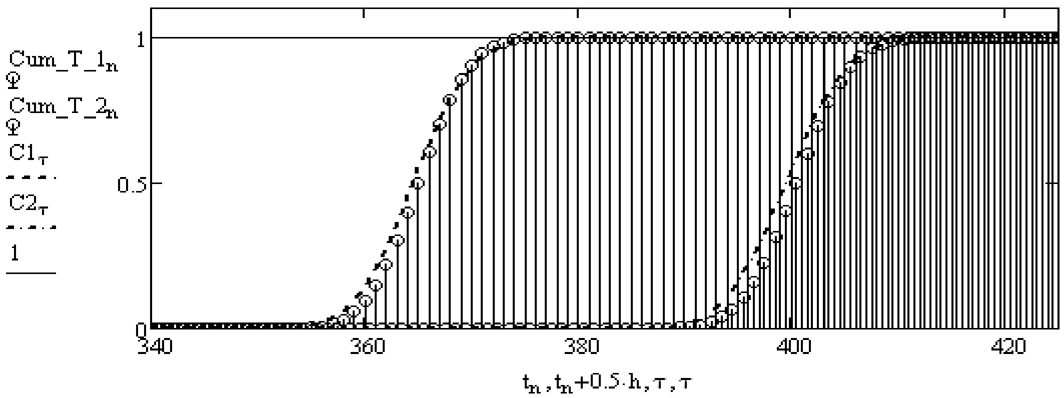


Рисунок 3. Кумуляты Cum_1_t_1 и Cum_T_2 эмпирического распределения времен достижения случайным функционалом $\eta(t)$ и их аналитические аналоги C1 и C2 согласно (10); уровни разорения $L_1 = 365$ и $L_2 = 400$.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Данные расчета и их сравнение с аналитической моделью свидетельствуют о достаточно хорошем их соответствии. Предложенный подход может быть применен и для других моделей шумов и трендов финансовых потоков.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Новоселов А.А. Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения /А.А. Новоселов// Российская Академия Наук, Сибирское отделение, Институт вычислительного моделирования, Новосибирск, 2001.
2. Калашников В.В. Вероятность разорения/В.В. Калашников, Д. Константинидис // Фундаментальная и прикладная математика. – 1996. – № 4 – С. 1050-1100.
3. Зорин В.А Элементы теории процессов риска/ В.А Зорин, В.И. Мухин // – Н. Новгород: ННГУ, 2003 – 25 с.
4. Hongkyu Jo Bankruptcy prediction using case-based reasoning, neutral networks, and discriminant analysis / Jo Hongkyu, Han Ingoo, Lee Hoonyoung // Expert systems with applications – 1997. – V. 13, N.3. – P. 97-108.
5. Буртняк И.В Моделирование динамики индекса ПФТС /И.В Буртняк, А.П. Малицкая // Бизнес Информ. – 2010. – №1 (377). – С.61-65.

БОНДАРЬ Александр Вячеславович – к.т.н., доцент кафедры прикладной и вычислительной математики Сумского государственного университета.

Научные интересы:

– применение математических методов при решении прикладных задач.

МАЗМАНИШВИЛИ Александр Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры моделирования сложных систем Сумского государственного университета.

Научные интересы:

– применение математических методов при решении прикладных задач.

УДК 515.2

В.Д. Борисенко, Д.В. Котляр

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ПОБУДОВИ ОБВОДІВ ПОТОВЩЕНИХ ПРОФІЛІВ ОХОЛОДЖУВАНИХ ЛОПАТОК ОСЬОВИХ ТУРБІН

Постановка проблеми. У сучасній енергетиці досить поширеними двигунами є газові турбіни, в яких потенційна енергія робочої речовини перетворюється в корисну роботу ротора, що обертається і приводить в дію той чи інший механізм або агрегат. Одним із важливих резервів поліпшення ефективності цих турбін є підвищення температури робочої речовини на вході до турбіни. Обмежуючим критерієм при цьому виступає жаростійкість соплових і міцність робочих лопаток першого ступеня турбіни. Для запобігання цим стримуючим чинникам у конструкціях сучасних турбін застосовуються різноманітні схеми охолоджування лопаток. Охолоджуючим агентом при цьому виступає повітря, яке відбирається після компресора високого тиску і подається у спеціально сформовані в лопатках турбін канали. Наявність у тілі лопаток каналів для проходження охолоджуючого повітря знижує ефективну площу їх поперечних перерізів, що погіршує міцнісні характеристики лопаток і призводить до необхідності моделювання потовщених профілів поперечних їх перерізів.

У більшості оприлюднених робіт для опису обводів профілів лопаток турбін використовуються різноманітні криві, наприклад, лемніскати, дуги еліпсів, гіперболічні спіралі, поліноми різних степенів, але ці криві в силу своєї геометричної природи не мають достатньої гнучкості, необхідної для забезпечення формування профілів охолоджуваних лопаток. У першу чергу, це стосується вхідної кромки профілю охолоджуваної лопатки, і, зрозуміло, впливає на обводи їх спинки і коритця. Для випуску охолоджуючого повітря вихідні кромки профілів лопаток також виконуються потовщеними. Збільшенню їх товщини сприяє необхідність протистояти вигорянню у середовищі підвищеної температури.

Відомий у прикладній геометрії метод Безьє дозволяє будувати прийнятні з різноманітних точок зору плоскі криві, які застосовуються у різних галузях техніки, зокрема, в автомобіле-, судно- і літакобудуванні. Але цей метод тісно пов’язаний з наявністю так званої характеристичної ламаної. Саме побудова цієї ламаної дещо звужує можливості метода Безьє. Особливо це стосується геометричного моделювання обводів аеродинамічних профілів лопаток турбін і компресорів, бо невідомо, скільки треба взяти вузлових точок характеристичної ламаної та де їх розташувати, щоб забезпечити доцільну форму профілю. У кожному конкретному застосуванні проектанти лопаток використовують свої власні підходи до задання вузлових точок характеристичної ламаної, які у більшості випадків потребують ручного коригування, що майже унеможливлює автоматизацію процесу проектування. У зв’язку з цим виникла ідея взяти підхід, запропонований В.Х. Абіанцем [1] щодо формування профілів лопатки за допомогою дуг парабол (графічним способом), і адаптувати його для визначення координат вузлових точок характеристичної ламаної Безьє .

Слід відзначити, що проектантам досить часто доводиться доопрацьовувати робочі поверхні лопатки, зберігаючи її конструктивні вихідні дані для профілювання, що визначаються при проведенні розрахунків течії робочої речовини в турбіні. Необхідність доопрацювання профілів також зумовлюється застосуванням складної системи охолоджуючих каналів, які необхідно розмістити у поперечному перерізі лопатки при збереженні міцнісних характеристик лопатки та її аеродинамічної якості. У зв’язку із глобальною залежністю кривої Безьє від вузлових точок, положення яких зафіксовано вхідними даними та специфікою методу Абіанца, а також неможливістю зміни проектних розрахунків, пропонується ввести до кривої Безьє раціональну компоненту з ваговими коефіцієнтами, які забезпечать додатковий вплив на форму кривої обводів профілю.

У наслідок вимушеного збільшення товщини профілю охолоджуваної лопатки проектантів все більше не задовольняє геометрія потовщеної вхідної кромки, яка традиційно має форму циліндра обертання. Як відомо, товста циліндрична вхідна кромка сприяє інтенсифікації турбулентності потоку та набуханню примежових шарів, які далі за ходом проходження потоку через решітку профілів можуть відриватися зі спинки лопатки, приводячи до збільшення втрат енергії робочої речовини. Крім того, збільшення радіуса циліндричної поверхні вхідної кромки сприяє зростанню коефіцієнта лобового опору. Також необхідно відмітити, що у місцях стикування вхідної кромки з обводами спинки і коритця профілю спостерігається значний стрибок кривини, пов'язаний із переходом від кривої сталої кривини до плавної кривої того чи іншого обводу. У підсумку все це призводить до збільшення коефіцієнта втрат енергії робочої речовини в решітці профілів та погіршує ефективність роботи лопаткового апарату.

Зазначимо, що профілювати охолоджувану лопатку з малим радіусом вхідної кромки неможливо, через необхідність забезпечення в ній каналів проходження охолоджуючої речовини. Тому авторами пропонується використати та практично реалізувати у вигляді програмного продукту ідею західних фахівців у галузі турбобудування, які висловлюють думки щодо можливості використання еліптичних кривих для аналітичного подання вхідних кромок лопаток осьових компресорів.

Аналіз публікацій за темою досліджень. У літературі можна знайти публікації, автори яких пропонують будувати профіль за допомогою кривої Безьє [3, 7]. Окремо слід відзначити роботу [1], автор якої запропонував обводи спинки і коритця профілю отримувати як обвідні парабол, що будуються ручним, відомим в інженерній графіці, способом. Основним недоліком такого підходу слід вважати низький рівень точності зняття координат, який не задовольняв проектантів. Що стосується побудови вхідних кромок профілів, то у вітчизняній літературі зазвичай використовуються профілі з класичними кромками, що описуються дугами кіл [2], але у зарубіжній літературі, останнім часом, з'являються статті автори яких приділяють увагу проблемам ефективності профілів, вхідні кромки яких побудовані згідно класичного підходу, і пропонують, хоч і для компресорних лопаток, використовувати еліптичні криві [8].

Мета статті. Висвітлення розробленого комплексного підходу до геометричного моделювання криволінійних обводів профілів лопаток охолоджуваних осьових турбін, який поєднує в одному обчислювальному процесі переваги кривих Безьє, адаптацію графічного способу побудови параболи для визначення координат вузлових точок характеристичної ламаної, та заміну кругових вхідних кромок на еліптичні.

Основна частина. У статті подається підхід до геометричного моделювання потовщених профілів лопаток турбін, що базується на трьох нововведеннях до побудови кривих обводів профілів.

Перше нововведення стосується побудови кривих спинки та коритця профілю. Пропонується описувати обводи профілю кривими Безьє. Вузлові точки характеристичної ламаної Безьє визначаються графічним способом побудови параболи за заданими кутами входу β_1 і виходу β_2 потоку, кутами загострення вхідної γ_1 і видної γ_2 кромок, радіусами їх округлення r_1 і r_2, кутом установки профілю β_y, кроком t та осьовою протяжністю B решітки (рис.1). Точки перетину ліній $11'$, $22'$ тощо, приймаються за вершини ламаної Безьє. При сильному вигині середньої лінії профілі можуть мати не конструктивний вид. Тому у математичну модель запропонованого підходу були введені додаткові коефіцієнти, значення яких залежать від кута вивину дуги середньої лінії профілю. Ці коефіцієнти дають можливість переміщувати вузлові точки кривої Безьє уздовж лінії, що проходить через вершину *A* та відповідну базову вузлову точку *E*. Вершина *A* утворена дотичними в точках стикування кривих спинки або коритця з вхідною і вихідною кромками профілю. Точка E_1 визначає відкориговане положення вузлової точки.

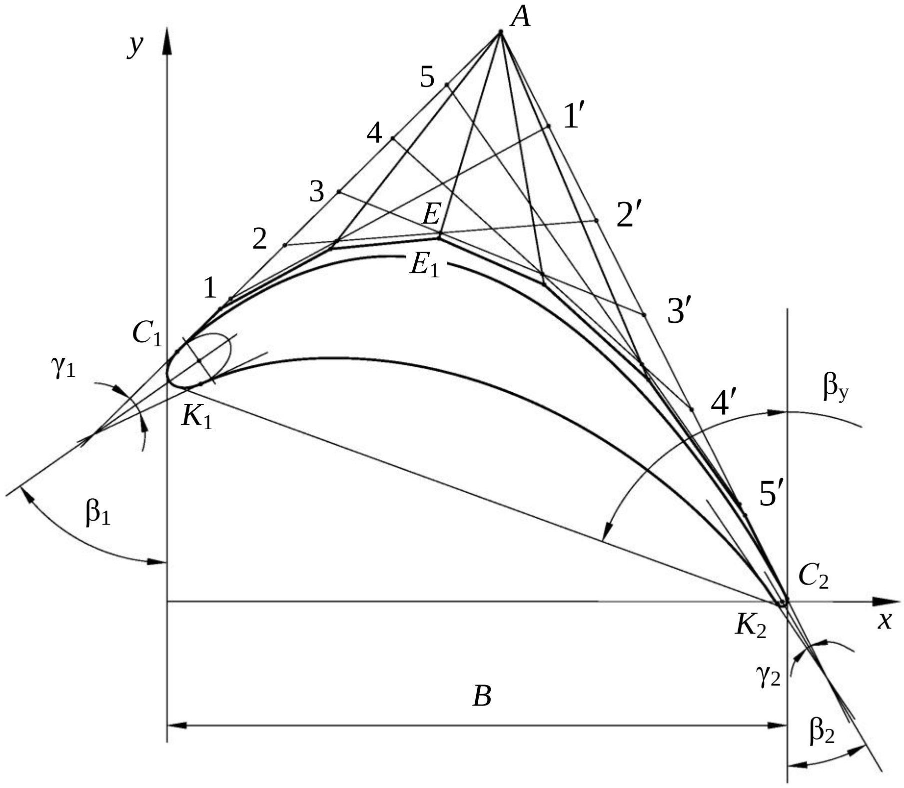


Рис. 1. Визначення вузлових точок кривої обводу спинки профілю

Для аналітичного подання спинки профілю, у якості другого нововведення, пропонується використовувати раціональну параметричну криву Безьє, математична модель якої доповнюється раціональною частиною, що утворена поліномами Бернштейна та вузловими коефіцієнтами. Цю складову запишемо у вигляді:

$$R_{n,k}(f(t)) = \frac{\Phi_{n,k}(t)\omega_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \Phi_{n,k}(t)\omega_k}, \qquad k \in [0, n], \omega_k \geq 0$$

де $\Phi_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ – система базисних функцій Бернштейна, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальній поліном; ω_k – вагові коефіцієнти вузлів.

Плоска крива обводів спинки і коритця профілю описується параметричними співвідношеннями вигляду:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k R_{n,k}(t); \qquad y(t) = \sum_{k=0}^{n} y_k R_{n,k}(t),$$

де x_k, y_k – координати вершин ламаної лінії.

Більш докладно запропонований метод аналітичного визначення обводів спинки і коритця профілю подано в роботах [4, 5].

На рис. 2 показані три варіанти спинки профілю, отримані при різних значеннях величини вагового коефіцієнта третьої вузлової точки. Для кривої спинки, позначеною літерою *а*, ваговий коефіцієнт дорівнює 1,4. Крива *б* побудована за умови, що всі вагові коефіцієнти дорівнюють одиниці. Ваговий коефіцієнт кривої *в* дорівнює 0,6.

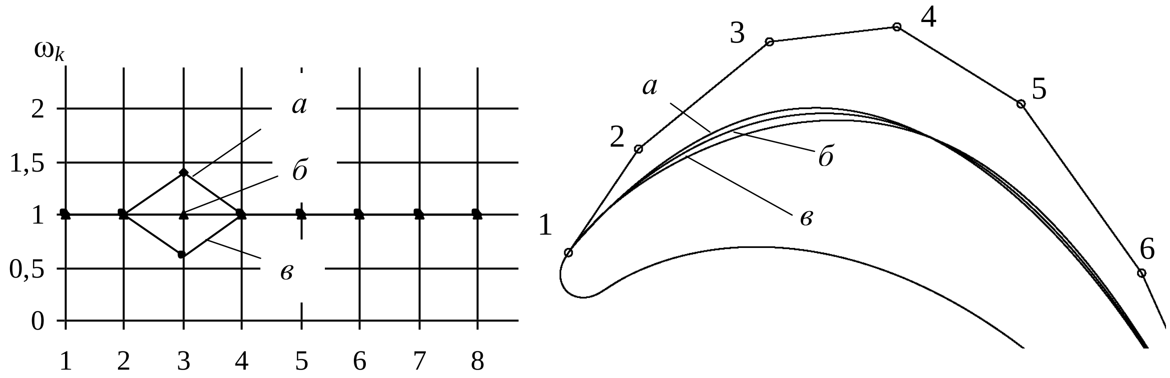


Рис. 2. Вплив величини одного з вагових коефіцієнтів на форму профілю

Для формування вхідної кромки профілю охолоджуваної лопатки пропонується застосовувати еліптичні криві. Оскільки еліпс характеризується двома півосями, менша піввісь була прийнята рівною радіусу вхідної кромки аналогічного профілю з коловою вхідною кромкою, більша ж піввісь має здатність витягуватися, що дозволяє утворювати вхідні кромки різної кривини, за допомогою ведення коефіцієнта еліптичності k вхідної кромки профілю.

На рис. 3 показані вхідні частини трьох профілів, які змодельовані при різних значеннях коефіцієнта еліптичності k. Зрозуміло, що при $k = 1$ вхідна кромка має форму кола. По мірі збільшення коефіцієнта k еліптична крива витягується вздовж великої вісі.

Далі наведено рівняння еліпсу у декартових координатах:

$$\left(\frac{x}{kb}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

де k - коефіцієнт еліптичності кривої кромки профілю, що визначається співвідношенням $k = a/b$, a і b – велика і мала півосі еліпса, відповідно.

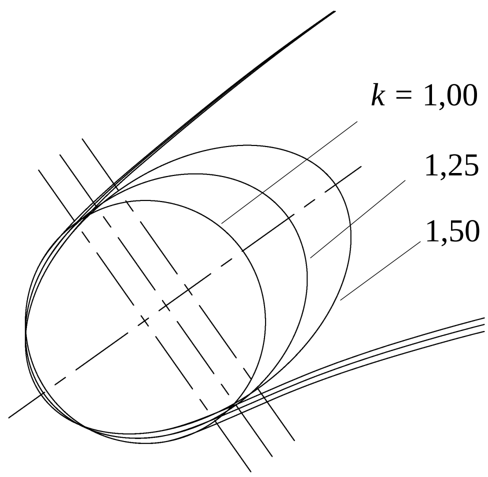


Рис. 3. Вхідні кромки еліптичного типу

На рис. 4 зображено побудову кромок профілю згідно геометричних параметрів, які є вихідними вимогами проектування профілю: B, β_y, β_1, β_2, γ_1, r_1, r_1 та наведені деякі

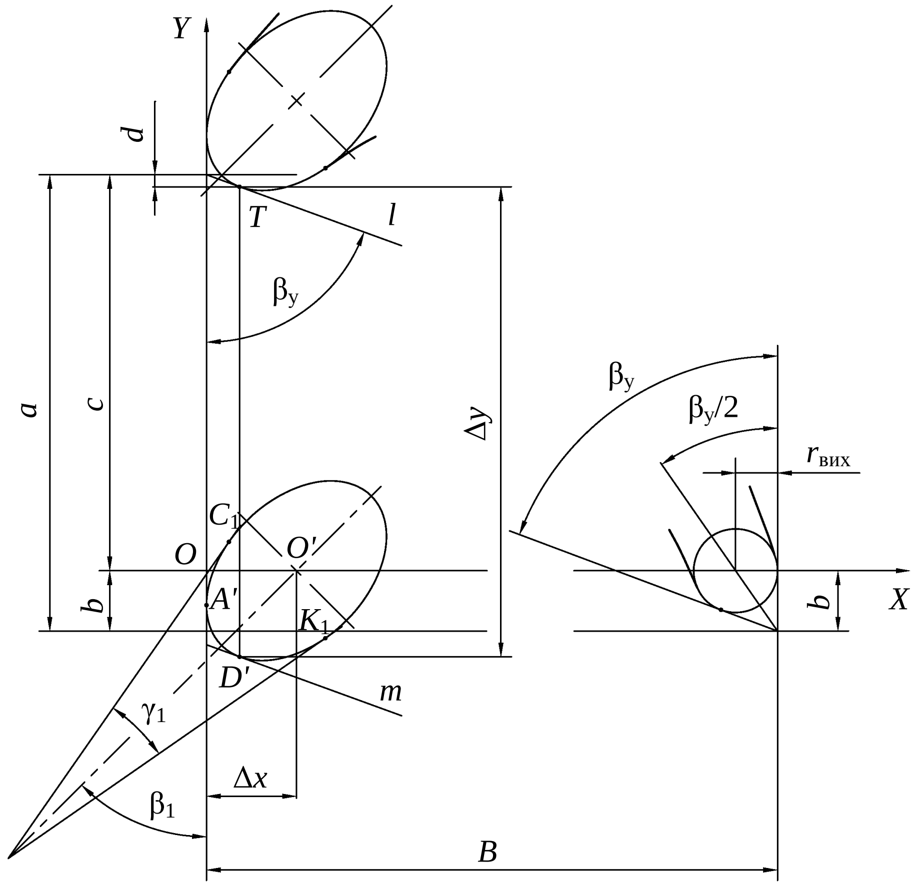


Рис. 4. Побудова кромок профілю

математичні вирази, які дають змогу алгоритмізувати представлений метод побудови профілю. Зокрема,

$$\Delta x = x_{O'} - x_{A'},\ \Delta y = a - b - d + y_{D'},$$

де величини, що входять до Δy визначаються за наступними виразами:

$$a = \frac{B}{\operatorname{tg}\beta_y},\ b = \frac{r_{вих}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_y}{2}},\ d = \frac{|x_{D'}|}{\operatorname{tg}\beta_y}.$$

Координати проміжних точок вхідної кромки профілю еліптичного типу визначаються за виразами:

$$\begin{cases} X = kr_{вх}\cos\varphi\sin\beta_1 - r_{вх}\sin\varphi\cos\beta_1 + \Delta x \\ Y = kr_{вх}\cos\varphi\cos\beta_1 + r_{вх}\sin\varphi\sin\beta_1 + \Delta y \end{cases},$$

де φ – кут побудови еліптичної дуги, що варіюється у межах $\varphi_{C1} \le \varphi \le \varphi_{K1}$.

Більш докладніше підхід побудови еліптичної вхідної кромки висвітлено у джерелі [6].

Усі вище представлені нововведення були алгоритмізовані і реалізовані у програмному продукті геометричного моделювання профілів лопаток осьових турбін.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Запропоновані нововведення щодо геометричного моделювання профілів охолоджуваних лопаток газових турбін, реалізовані у вигляді програмного продукту і дозволяють будувати потовщені профілі, які задовольняють різноманітним умовам, що випливають при проектуванні цих складних і дуже важливих компонентів проточних частин сучасних високотемпературних газових турбін.

Подальші зусилля у справі створення охолоджуваних газових турбін мають бути спрямовані на геометричне моделювання каналів для проходження охолоджуючого агента з метою забезпечення його витрати та досягнення потрібного рівня зниження температури лопатки, який обумовлюється терміном безаварійної експлуатації газових турбін різного цільового призначення.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Абианц В.Х. Теория газовых турбин реактивных двигателей / В.Х. Абианц. – М.: Машиностроение, 1965. – 310 с.
2. Аронов Б.М. Профилирование лопаток авиационных газовых турбин/Б.М. Аронов, М. И. Жуковский, В.А. Журавлев.– М.: Машиностроение, 1975. – 192 с.
3. Борисенко В.Д. Застосування кривих Безьє до профілювання лопаток робочих коліс радіальних реактивних турбін/ В.Д. Борисенко // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Мелитополь: Труды ТГАТА, 1999. – Вып. 4. – Т. 5. – С.47–51.
4. Борисенко В.Д. Геометричне моделювання профілів поперечних перерізів лопаток осьових турбін / В.Д. Борисенко, Д.В. Котляр // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: Праці ТДАТА, 2009. – Вип. 4. – Т. 45. – С. 26–31.
5. Борисенко В.Д. Геометричне моделювання обводів профілів лопаток осьових турбін раціональними кривими Безьє / В.Д. Борисенко, Д.В. Котляр // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: Праці ТДАТА, 2010. – Вип. 4. – Т. 46. – С. 19–26.
6. Борисенко В.Д., Геометричне моделювання еліптичних вхідних кромок профілів лопаток осьових турбін / В.Д. Борисенко, Д.В. Котляр // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Київ: КНУБА, 2010. – С. 5–10.
7. Bělik L. Aproximace listu lopatky turbostroje Bézierovými–Bernsteinovými polynomy/ L.Bělik, P. Havlik // Strojnicky casopis. – 1985. – 36. – P. 365–379.
8. Martin N. Goodhand and Robert J. Miller. Compressor leading edge spikes: A new performance criterion // Proceedings of the ASME, Paper GT–2009–59205.

БОРИСЕНКО Валерій Дмитрович – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інженерної графіки Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова.

Наукові інтереси:

– геометричне моделювання лопаткових апаратів нагнітальних і розширювальних турбомашин різного конструктивного оформлення.

КОТЛЯР Дмитро Володимирович – магістр, аспірант кафедри інженерної графіки Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова.

Наукові інтереси:

– математичне та геометричне моделювання охолоджуваних лопаток осьових турбін.

УДК 517.958:52/59; 519.711.3

И.А. Булавина, И.К. Кириченко, Н.Н. Чеканова, Н.А. Чеканов

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE ДЛЯ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФУНКЦИЙ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Анализ публикаций по теме исследования. **Постановка задачи.** Уравнение Матье, которое достаточно давно известно, широко и интенсивно используется во многих задачах прикладной математики, например, в задачах о колебаниях эллиптической формы мембраны, о распространении электромагнитных волн в среде с периодической структурой, о движении Луны, о поперечных колебаниях и их устойчивости в стержне при наложении на него периодической продольной нагрузки, о движении маятника с колеблющимся подвесом и во многих других задачах [1-5]. Уравнение Матье имеет много модификаций [6], в частности, в нашей работе исследуется уравнение в виде

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(\varepsilon-2\tau\cos(2\theta)\right)u=0, \tag{1}$$

где ε и τ – действительные параметры. Проведение вычислений, связанных с функциями Матье, значительно труднее вычислений, связанных с другими специальными функциями [1]. Так, при записи уравнения Матье в алгебраическом виде (при замене $z=\sin^2(\theta)$), оно имеет две регулярные особые точки $z=0$, $z=1$ и одну нерегулярную на бесконечности $z=\infty$. Из-за этой иррегулярной особенности уравнение Матье сравнительно трудно для изучения [6].

Решения уравнения (1) могут быть периодическими функциями, из которых наиболее широко используемыми являются решения с периодами π и 2π, собственно они и называются функциями Матье. Однако периодические решения возникают только при определенных значениях параметра ε_n, который зависит от величины τ. Зависимости $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\tau)$ называются характеристическими кривыми, а значения ε_n – собственными значениями [6]. Собственные значения и им соответствующие функции Матье вычислялись различными приближенными методами или численно при помощи представления решений уравнения (1) в виде непрерывных дробей [6-8] и последующего нахождения его решения.

Легко убедиться, что задачу вычисления собственных значений ε_n и соответствующих им функций Матье можно свести к задаче на собственные значения следующего самосопряженного дифференциального оператора

$$H=-\frac{d^2}{d\theta^2}+2\tau\cdot\cos(2\theta). \tag{2}$$

Постановка задачи заключается в том, чтобы методом диагонализации с использованием компьютерных систем вычислений решить задачу (2) на собственные значения.

Цель статьи. Найти базисный набор функций для проведения диагонализации оператора (2), вычислить матричные элементы в этом базисе, разработать алгоритм и в среде MAPLE составить программу для вычисления собственных значений и периодических решений уравнения Матье (1) посредством решения задачи на собственные значения оператора (2).

Основная часть. Базисный набор функций, в котором будем проводить диагонализацию оператора (2), выбираем в следующем виде

$$\varphi_m^{(j)}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_m(\theta) + j\cdot\varphi_{-m}(\theta)\right), \tag{3}$$

где $j = \pm 1$ и $m \geq 0$. Этот набор базисных функций обеспечивает вид диагонализуемой матрицы для оператора (2), в которой число строк и столбцов неограниченно увеличивается только вправо и вниз (в отличие, например, от представления Хилла [9]), что существенно при численной диагонализации с использованием вычислительных машин. Заметим, что функции (3) удовлетворяют следующей нормировке

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{m'}^{(j')}(\theta)\cdot\varphi_m^{(j)}(\theta)\cdot d\theta = (1 + j\cdot\delta_{m,0})\,\delta_{m,m'}\,\delta_{j,j'}\ . \tag{4}$$

Решение $u(\theta)$ задачи на собственные значения для оператора (2), то есть уравнения

$$Hu(\theta) \equiv \left(-\frac{d^2}{d\theta^2} + 2\tau\cdot\cos(2\theta)\right)u(\theta) = \varepsilon\ u(\theta) \tag{5}$$

представим в виде разложения

$$u(\theta) = \sum_{j=\pm j}\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(j)}\cdot\varphi_m^{(j)}(\theta)\ , \tag{6}$$

где $C_m^{(j)}$ – коэффициенты разложения.

Подставляя разложение (6) в уравнение (5), умножая затем слева полученное выражение на комплексно сопряженную базисную функцию $\varphi_{m'}^{(j')}(\theta)^*$ и интегрируя от 0 до 2π с учетом условия нормировки (4), получим следующие системы уравнения для неизвестных коэффициентов $C_m^{(+)}$ и $C_m^{(-)}$:

$$C_m^{(+)}\cdot(m^2 - \varepsilon)\cdot(1 + \delta_{m0}) - \tau\left(C_{m+2}^{(+)} + C_{m-2}^{(+)} + C_{2-m}^{(+)}\right) = 0\ , \tag{7}$$

$$C_m^{(-)}\cdot(m^2 - \varepsilon)\cdot(1 - \delta_{m0}) - \tau\left(C_{m+2}^{(-)} + C_{m-2}^{(-)} + C_{2-m}^{(-)}\right) = 0\ , \tag{8}$$

где $m = 0,1,2,3,\ldots$ Легко видеть, что бесконечные однородные системы (7), (8) из алгебраических уравнений расщепляется каждая еще на две в зависимости от четности числа m.

Эти полученные четыре системы можно представить в матричном виде:

$$\left(\mathbf{A}_0^{(+)}(\tau) - \boldsymbol{\varepsilon}\right)\mathbf{C}_0^{(+)} = 0, \qquad \left(\mathbf{A}_1^{(+)}(\tau) - \boldsymbol{\varepsilon}\right)\mathbf{C}_1^{(+)} = 0, \tag{9}$$

$$\left(\mathbf{A}_1^{(-)}(\tau) - \boldsymbol{\varepsilon}\right)\mathbf{C}_1^{(-)} = 0, \qquad \left(\mathbf{A}_2^{(-)}(\tau) - \boldsymbol{\varepsilon}\right)\mathbf{C}_2^{(-)} = 0, \tag{10}$$

где введены векторы

$$\mathbf{C}_0^{(+)} = \left\{C_0^{(+)}, C_2^{(+)}, \ldots, C_{2k}^{(+)}, \ldots\right\}, \qquad \mathbf{C}_1^{(+)} = \left\{C_1^{(+)}, C_3^{(+)}, \ldots, C_{2k+1}^{(+)}, \ldots\right\}, \tag{11}$$

$$\mathbf{C}_1^{(-)} = \left\{C_1^{(-)}, C_3^{(-)}, \ldots, C_{2k+1}^{(-)}, \ldots\right\}, \qquad \mathbf{C}_2^{(-)} = \left\{C_2^{(-)}, C_4^{(-)}, \ldots, C_{2k}^{(-)}, \ldots\right\} \tag{12}$$

и матрицы

$$\mathbf{A}_0^{(+)}(\tau)=\begin{Vmatrix}0^2 & -\tau & 0 & \cdots\\ -\tau & 2^2 & -\tau & \cdots\\ 0 & -\tau & 4^2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{Vmatrix},\qquad \mathbf{A}_1^{(+)}(\tau)=\begin{Vmatrix}1^2-\tau & -\tau & 0 & \cdots\\ -\tau & 3^2 & -\tau & \cdots\\ 0 & -\tau & 5^2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{Vmatrix}, \qquad (13)$$

$$\mathbf{A}_1^{(-)}(\tau)=\begin{Vmatrix}1^2+\tau & -\tau & 0 & \cdots\\ -\tau & 3^2 & -\tau & \cdots\\ 0 & -\tau & 5^2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{Vmatrix},\qquad \mathbf{A}_2^{(-)}(\tau)=\begin{Vmatrix}2^2 & -\tau & 0 & \cdots\\ -\tau & 4^2 & -\tau & \cdots\\ 0 & -\tau & 6^2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{Vmatrix}. \qquad (14)$$

Был разработан алгоритм и в среде MAPLE составлена программа символьно-численной диагонализации матриц (13), (14) для произвольной конечной размерности этих матриц, в результате работы которой можно вычислить собственные значения уравнения Матье (1) и соответствующие периодические функции с периодами π и 2π.

В частности, четные и нечетные функции с периодом π определяются по формулам

$$C_{ev}^{(1)}(\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m^{(+)}\cdot\varphi_m^{(+)}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(C_0^{(+)}+C_2^{(+)}\cos(2\theta)+\cdots\right), \qquad (15)$$

$$S_{od}^{(1)}(\theta)=\sum_{m=2}^{\infty}C_m^{(-)}\cdot\varphi_m^{(-)}(\theta)=-\frac{\iota}{\sqrt{\pi}}\left(C_2^{(-)}\sin(2\theta)+C_4^{(-)}\sin(4\theta)+\cdots\right), \qquad (16)$$

а четные и нечетные функции с периодом 2π – по формулам

$$C_{ev}^{(2)}(\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m^{(+)}\cdot\varphi_m^{(+)}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(C_1^{(+)}\cos(\theta)+C_3^{(+)}\cos(3\theta)+\cdots\right), \qquad (17)$$

$$S_{od}^{(2)}(\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m^{(-)}\cdot\varphi_m^{(-)}(\theta)=-\frac{\iota}{\sqrt{\pi}}\left(C_1^{(-)}\sin(\theta)+C_3^{(-)}\sin(3\theta)+\cdots\right). \qquad (18)$$

Так как системы линейных уравнений (7), (8), следовательно, и (9), (10) являются однородными, то их нетривиальные решения имеются только для определенных значений параметра ε_n в зависимости от величины другого параметра τ, собственно для которых получены периодические решения (15) – (18). Как принято обозначать (см., например, [1,7]), собственные значения $\varepsilon_n(\tau)\equiv a_{2k}$ относятся к четным периодическим решениям (15) с периодом π, $\varepsilon_n(\tau)\equiv a_{2k+1}$ – к четным решениям (17) с периодом 2π, $\varepsilon_n(\tau)\equiv b_{2k}$ – к нечетным решениям (16) с периодом π и $\varepsilon_n(\tau)\equiv b_{2k+1}$ – к нечетным решениям (18) с периодом 2π, где всюду $k=0,1,2,3,\ldots$. Также, как известно [1,7], при неотрицательных значениях $\tau\geq 0$ имеют место неравенства $a_{2k}<b_{2k+1}$ $<a_{2k+1}<b_{2k+2}$, $k=0,1,2,3,\ldots$. Кривые зависимости $a_{2k}=a_{2k}(\tau)$, $b_{2k+1}=b_{2k+1}(\tau)$, $a_{2k+1}=a_{2k+1}(\tau)$ и $b_{2k+2}=b_{2k+2}(\tau)$, которые нигде не пересекаются, определяют области устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров (ε,τ). Из проведенных нами численных вычислений обнаружена следующая особенность в поведении соседних кривых $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\tau)$: с увеличением значения параметра τ соседние кривые сильно сближаются, ограничивая таким образом, например, область устойчивости, но

затем при дальнейшем увеличении параметра τ эти соседние кривые опять расходятся, то есть область устойчивости опять расширяется.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. В дальнейшем планируется метод диагонализации распространить для нахождения периодических решений уравнения Хилла и применить их для приближенного решения некоторых двумерных уравнений Шредингера.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Мак-Лахлан, Н.В. Теория и приложения функций Матье / Н.В. Мак-Лахлан. – М.: ИЛ, 1953. – 476 с.
2. Найфэ А. Методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 456с.
3. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1984. – 535с.
4. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504с.
5. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом / П.Л. Капица // Успехи физических наук. – 1951. – Т.47. Вып.1. – С.7-20.
6. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции Ламе и Матье / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. –М.: Наука, 1967. – 300с.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832с.
8. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1965. – 780с.
9. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа. Трансцендентные функции / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. – М.: Физматлит, 1963. – 516с.

БУЛАВИНА Ирина Анатольевна – аспирант кафедры математического анализа Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– компьютерное и математическое моделирование, дифференциальные уравнения, гамильтоновы системы.

КИРИЧЕНКО Игорь Константинович – д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики Украинской инженерно-педагогической академии.

Научные интересы:

– теория элементарных частиц, уравнения математической физики.

ЧЕКАНОВА Наталья Николаевна – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры высшей математики Украинской инженерно-педагогической академии.

Научные интересы:

– компьютерное и математическое моделирование, дифференциальные уравнения, гамильтоновы системы.

ЧЕКАНОВ Николай Александрович – д.ф.-м.н., заведующий кафедрой физики Старооскольского технологического института (филиал) Национального исследовательского университета «МИСиС».

Научные интересы:

– классическая и квантовая механика, динамический хаос, дифференциальные уравнения, уравнение Шредингера, математическое моделирование.

УДК 519.6

Л.П. Вакал, А.А. Каленчук-Порханова, Е.С. Вакал

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧЕБЫШЁВСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Постановка проблемы. Изучение объектов и процессов различной природы связано, как правило, с получением массивов данных, которые являются дискретным представлением функциональных зависимостей, характеризующих эти объекты и процессы. Такая форма представления зависимостей существенно затрудняет их дальнейшее использование, в частности, в задачах математического моделирования. Решение этой проблемы достигается путем использования методов приближения функций для представления массивов в виде аналитических выражений с небольшим количеством параметров. При этом более эффективным и универсальным по сравнению с интерполяционным и среднеквадратичным способами приближения является способ наилучшей чебышевской (равномерной) аппроксимации.

Основы теории наилучшего равномерного приближения функций заложены П.Л. Чебышевым. Систематическая разработка общих методов нахождения таких приближений началась с появлением фундаментальных работ Е.Я. Ремеза [1], однако из-за вычислительной сложности мощного аппарата чебышевской аппроксимации возможность его численной реализации в целом появилась только после создания ЭВМ. Преимуществом методов Е.Я. Ремеза является сравнительно высокая скорость их сходимости (в некоторых случаях квадратичная) и возможность стандартизации вычислений. В Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины разработаны методы, алгоритмы и программные средства наилучшей чебышевской аппроксимации функций как одной, так и многих переменных, основанные на втором методе Е.Я. Ремеза [2, 3].

Чебышевские приближения широко используются в технике (при построении функциональных преобразователей, синтезе электрических цепей и др. [4]), для вычисления элементарных и специальных функций на ЭВМ, для аналитического представления экспериментальных данных и т. п. Одним из новых перспективных приложений чебышевской аппроксимации является использование её для сжатия больших и сверхбольших массивов числовых данных [5].

Учитывая потенциальные возможности аппарата наилучшей чебышевской аппроксимации, исследования авторов в настоящее время посвящены вопросам его адаптации и распространения для решения прикладных задач из разных предметных областей. В частности, недавно были получены результаты по применению чебышевских приближений для решения краевых задач математической физики. В развитие этого направления в данной статье рассматривается приложение аппарата чебышевской аппроксимации к решению смешанных (начально-краевых) задач.

Метод чебышёвских приближений для решения смешанных задач. При математическом моделировании различных физических процессов часто встречаются дифференциальные уравнения в частных производных параболического и гиперболического типов. Уравнения параболического типа описывают, например, процессы распространения тепла в стержнях и пластинах, диффузию жидкости или газа в различных средах. Уравнения гиперболического типа получают при математическом моделировании колебательных процессов, в частности, малых поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводах, продольных колебаний газа в трубке, малых поперечных колебаний мембраны. Для таких уравнений ставятся смешанные задачи, в которых в случае *p* пространственных координат необходимо найти функцию $u = u(t, x_1, \ldots, x_p)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$Lu = f(t, x_1, \ldots, x_p) \text{ в области } D \subset R^p, \tag{1}$$

краевым условиям

$$Su = g(t, x_1, \ldots, x_p),\ t > 0,\ (x_1, \ldots, x_p) \in \Gamma = \partial D \tag{2}$$

и начальным условиям

$$Tu = h(x_1, \ldots, x_p),\ t = 0,\ (x_1, \ldots, x_p) \in D. \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что операторы *L, S* и *T* – линейные.

Для приближенного решения задачи (1)–(3) предлагается метод, основная идея которого заключается в аппроксимации функции начальных условий (3) с помощью наилучших чебышевских приближений.

Пусть известен вид функций v, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (1) и краевым условиям (2), например, найден методом Фурье, и пусть эти функции линейно зависят от входящих в неё параметров c_k

$$v(t, x_1, \ldots, x_p; c_1, \ldots, c_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(t) \varphi_k(x_1, \ldots, x_p). \tag{4}$$

Необходимо найти такие значения параметров c_k, при которых функция вида (4) будет наилучшим образом приближать начальные условия (3) смешанной задачи. Предлагается определять c_k таким образом, чтобы максимальное по модулю уклонение функции Φ

$$\Phi(x_1, \ldots, x_p; c_1, \ldots, c_p) = Tv(0, x_1, \ldots, x_p; c_1, \ldots, c_p)$$

от функции начальных условий $h(x_1, \ldots, x_p)$ было минимальным

$$\max_{(x_1, \ldots, x_p) \in D} \left| \Phi(x_1, \ldots, x_p; c_1, \ldots, c_n) - h(x_1, \ldots, x_p) \right| = \rho(c_1, \ldots, c_n) = \min. \tag{5}$$

Задачу (5) можно рассматривать как задачу наилучшей чебышевской аппроксимации функции *p* переменных h в области *D* обобщённым полиномом Φ

$$\Phi(x_1, \ldots, x_p; c_1, \ldots, c_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x_1, \ldots, x_p) \tag{6}$$

по системе функций ψ_k

$$\psi_k(x_1, \ldots, x_p) = T\phi_k(0)\varphi_k(x_1, \ldots, x_p).$$

Поскольку неизвестные c_k входят в аппроксимирующую функцию (6) линейно, то наиболее эффективный подход для их определения на практике состоит в замене области $D \subset R^p$ некоторой *p*-мерной сеткой $E_N = \left\{ \left(x_1^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)} \right), i = \overline{1, N} \right\}$ и сведении дискретной задачи чебышевского приближения (5)–(6) к задаче линейного программирования

$$\begin{gathered} \rho(c_1, \ldots, c_n) = \min, \rho \ge 0, \\ h\left(x_1^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}\right) - \Phi\left(x_1^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}; c_1, \ldots, c_n\right) - \rho \le 0 \quad \left(i = \overline{1, N}\right), \\ \Phi\left(x_1^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}; c_1, \ldots, c_n\right) - h\left(x_1^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}\right) - \rho \le 0 \quad \left(i = \overline{1, N}\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Для нахождения оптимального решения задачи (7) можно применять общие методы линейного программирования, например симплекс-метод. Но учёт специфики задачи чебышевского приближения позволил разработать более эффективные методы и алгоритмы решения этой задачи. Так предложенный в работе [3] алгоритм использует сведение задачи приближения функции многих переменных (5)–(6) к задаче линейного программирования с ведущей двойственной максимум-задачей, которая решается модифицированным симплекс-методом с учетом того, что на практике число уравнений $2N$ значительно больше числа неизвестных (n+1) и таблица "расширенного базиса" в этом методе существенно меньше опорной таблицы прямого симплекс-метода. Данный алгоритм по сравнению с аналогичными позволяет находить наилучшие приближения функций обобщённым полиномом (6) с большей точностью и, как правило, за меньшее количество итераций.

Примеры решения смешанных задач. Рассмотрим детальнее предложенный метод на примерах решения задачи о распространении тепла в однородной изотропной пластине и задачи о колебаниях среднего слоя пластины с закреплёнными краями.

<u>Пример 1</u>. Найти закон распространения тепла в однородной изотропной квадратной пластине $\overline{D}=\{(x,y): 0\le x,y\le 1\}$ при условии свободного теплообмена (внутренние источники тепла отсутствуют), если начальная температура пластины равна $h(x,y)=x(1-x)y(1-y)$, а края пластины поддерживаются при нулевой температуре. Этот процесс описывается следующей математической моделью:

$$\begin{gathered}\mu\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,\ t>0\,,(x,y)\in D=\{0<x,y<1\},\\ u(t,x,y)=0\,,\ t>0\,,\ (x,y)\in\Gamma=\partial D\,,\\ u(0,x,y)=h(x,y)=x(1-x)y(1-y),\ (x,y)\in D\,.\end{gathered}\tag{8}$$

<u>Решение</u>. Приближённое решение задачи (8) ищем в виде [6]

$$v(t,x,y)=c_1S_{11}e^{-\lambda_{11}t}+c_2(S_{13}+S_{31})e^{-\lambda_{13}t}+c_3S_{33}e^{-\lambda_{33}t}+c_4(S_{15}+S_{51})e^{-\lambda_{15}t}\,,\tag{9}$$

где

$$S_{mn}(x,y)=sin(m\pi x)sin(n\pi y),\ \lambda_{mn}=\frac{1}{\mu}\left(m^2+n^2\right)\pi^2\,.$$

Функция (9) удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевым условиям для произвольных значений параметров c_k. В соответствии с предложенным подходом неизвестные c_k определяем таким образом, чтобы максимальное по модулю уклонение функции Φ

$$\Phi(x,y)\equiv v(0,x,y)=c_1S_{11}+c_2(S_{13}+S_{31})+c_3S_{33}+c_4(S_{15}+S_{51})\tag{10}$$

от функции начального условия $h(x,y)$ было минимальным

$$\max_{(x,y)\in D}\left|\Phi(\,x,y;c_1,\ldots,c_4\,)-h(x,y)\right|=\rho(c_1,\ldots,c_4)=min\,.\tag{11}$$

Задача (10)–(11) – это задача наилучшего чебышевского приближения функции $h(x,y)=x(1-x)y(1-y)$ в области D обобщенным полиномом Φ вида

$$\Phi(x,y;c_1,\ldots,c_4)=\sum_{k=1}^{4}c_k\psi_k(x,y)$$

по системе четырёх базисных функций

$$\psi_1(x,y)=S_{11}=sin\,\pi x\,sin\,\pi y\,,\ \psi_2(x,y)=S_{13}+S_{31}=sin\,\pi x\,sin\,3\pi y+sin\,3\pi x\,sin\,\pi y\,,$$

$$\psi_3(x,y)=S_{33}=sin\,3\pi x\,sin\,3\pi y\,,\ \psi_4(x,y)=S_{15}+S_{51}=sin\,\pi x\,sin\,5\pi y+sin\,5\pi x\,sin\,\pi y\,.$$

С использованием компьютерной программы [3] были получены такие результаты:

$$c_1=0{,}066486,\ c_2=0{,}002447,\ c_3=0{,}000085,\ c_4=0{,}000504,\ \rho=0{,}00018.$$

Таким образом, для погрешности приближенного решения (9) смешанной краевой задачи (8) имеет место оценка

$$|v-u| \le 0{,}00018 .$$

Заметим, что приведенное в работе [6] решение с коэффициентами $c_1 = 0{,}066561,\ c_2 = 0{,}002503,\ c_3 = 0{,}000086,\ c_4 = 0{,}000559$ имеет почти вдвое большую погрешность $\rho = 0{,}00030.$

Пример 2. Найти решение задачи о колебаниях среднего слоя однородной закрепленной по краям пластины, занимающей область $\overline{D} = \{(x,y): 0 \le x, y \le 1\}$:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta \Delta u ,\ t > 0, (x, y) \in D = \{(x,y): 0 < x,y < 1\},$$

$$u = 0 ,\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 ,\ t > 0 ,\ (x, y) \in \Gamma = \partial D , \tag{12}$$

$$u(0,x,y) = h(x,y) = [x(1-x)y(1-y)]^2 ,\ \frac{\partial u(0,x,y)}{\partial t} = 0 ,\ (x, y) \in D ,$$

где Δ – оператор Лапласа.

Решение. Задача (12) – это смешанная задача для уравнения 4-го порядка. Решением дифференциального уравнения, которое удовлетворяет также краевые условия, является функция вида [6]

$$v(t,x,y) = c_1 S_{11}(x,y) cos\,(\lambda_1 t) + c_2 (S_{12}(x,y) + S_{21}(x,y)) cos\,(\lambda_2 t) + \ldots, \tag{13}$$

где λ_k легко подбираются и

$$S_{mn}(x,y) = [1 - cos(2m\pi x)][1 - cos(2n\pi y)].$$

Для определённости ограничимся в формуле (13) первыми двумя слагаемыми.

Согласно предложенному методу для того, чтобы определить неизвестные параметры c_1 и c_2 приближенного решения (13), необходимо найти функцию Φ вида

$$\Phi(x,y;c_1,c_2) = v(0,x,y) = c_1 S_{11}(x,y) + c_2 [S_{12}(x,y) + S_{21}(x,y)], \tag{14}$$

которая является наилучшим чебышевским приближением для функции $h(x,y)$ в области *D*. Функция (14) представляет собой обобщенный полином по системе двух базисных функций ψ_1 и ψ_2

$$\psi_1(x,y) = S_{11} = (1 - cos\, 2\pi x)(1 - cos\, 2\pi y),$$

$$\psi_2(x,y) = S_{12} + S_{21} = (1 - cos\, 2\pi x)(1 - cos\, 4\pi y) + (1 - cos\, 4\pi x)(1 - cos\, 2\pi y) .$$

Поэтому для нахождения функции Φ можно воспользоваться программой наилучшего чебышевского приближения функции нескольких переменных обобщённым полиномом [3]. В результате применения этой программы были получены такие результаты:

$$c_1 = 0{,}00096634 ,\ c_2 = 0{,}00006965 ,\ \rho = 0{,}0000409 .$$

Таким образом, приближенным решением краевой задачи (12) является функция

$$v(t,x,y) = 0{,}00096634 S_{11}(x,y) cos\,(\lambda_1 t) + 0{,}00006965 (S_{12}(x,y) + S_{21}(x,y)) cos\,(\lambda_2 t), \tag{15}$$

при этом для погрешности решения имеет место оценка

$$|u - v| \le 0{,}0000409.$$

Если для сравнения в формуле (13) взять только первое слагаемое, то погрешность приближенного решения

$$v(t,x,y) = 0{,}001027\ (1 - cos\, 2\pi x)(1 - cos\, 2\pi y)\ cos\,(\lambda_1 t)$$

будет почти в 5 раз большей

$$|\,u - v\,| \le 0{,}000204.$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Предложенный метод решения начально-краевых задач с применением наилучших чебышевских приближений для аппроксимации начальных условий позволяет получать приближенное решение задачи с высокой точностью. Кроме того, описанный метод даёт возможность использовать для нахождения решения смешанной задачи программные средства наилучшего чебышевского приближения функций многих переменных. Эффективность данного подхода подтверждают приведенные примеры решения задачи для уравнения теплопроводности и задачи о колебаниях среднего слоя закреплённой по краям пластины.

В развитие этих работ планируется применение методов, алгоритмов и программных средств чебышевской аппроксимации функций для решения других классов задач, в частности, для решения интегральных уравнений Фредгольма.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. / Е.Я. Ремез. – К.: Наук. думка, 1969. – 623 с.
2. Каленчук-Порханова А.А. Аппроксимация функций одной и многих переменных. / А.А. Каленчук-Порханова // Численные методы для многопроцессорного вычислительного комплекса ЕС. – М.: Изд-во ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1987. – С. 366–395.
3. Каленчук-Порханова А.О. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних. / А.О. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі і системи. – 2007. – №6. – С. 141–148.
4. Попов Б.А. Приближение функций для технических приложений. / Б.А. Попов, Г.С. Теслер. – К.: Наук. думка, 1980. – 352 с.
5. Каленчук-Порханова А.А. Наилучшая чебышевская аппроксимация для сжатия численной информации. / А.А. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал // Компьютерная математика. – 2009. – № 1. – С. 99–107.
6. Коллатц Л. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. / Л. Коллатц, В. Крабс. – М.: Наука, 1978.

ВАКАЛ Лариса Петровна – научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

Научные интересы:

- теория приближения функций и её приложения в различных предметных областях.

КАЛЕНЧУК-ПОРХАНОВА Анжелина Алексеевна – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

Научные интересы:

- теория приближения функций и её приложения.

ВАКАЛ Евгений Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры математической физики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.

Научные интересы:

- приближенные методы решения нелинейных задач математической физики.

УДК 517.2

Ю.П. Вирченко

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ НА ПРОСТРАНСТВЕННО ПОДОБНОЙ ПРЯМОЙ

1. Постановка проблемы. В середине прошлого столетия в теоретической физике возникло направление в теории поля, в рамках которого частицы и поля, описывающие взаимодействия между ними, трактуются как нечто единое целое. Этот подход был впоследствии перенесён в квантовую физику. В рамках такой идеологии частицы и поля должны описываться математическими объектами одного и того же типа - лагранжевыми полями на пространстве Минковского $R^{(1,3)}$ (если не привлекать идей общей теории относительности).

Указанный теоретический подход привёл на первоначальном этапе к определённым успехам [1]. На этом пути были сформулированы две модели электродинамики (модели Э.Шредингера и М.Борна), которые не содержали т.н. расходимостей. Этот подход не утратил своей актуальности с точки зрения теоретической физики и по настоящее время. Существенно, что в рамках этого подхода в математической модели поля естественным образом появляются "частицы", которые, кроме того, обладают конечной собственной энергией. А именно, каждое решение полевого уравнения, у которого имеется только одна особенность, сосредоточенная на пространственно подобной прямой, описывает уединённую частицу.

В работе [2] рассматривалась нелинейная модель лагранжевого поля с одним свободным параметром g, который имеет смысл заряда. Считалось, что в этой модели существует единственное (с точностью до трансляций и преобразований Лоренца в пространстве Минковского) решение указанного выше типа, то есть существует только один тип частиц с фиксированным зарядом. В настоящей работе показано, для каких плотностей появляются частицеподобные решения с конечной полной энергией. Более того, имеется возможность такого выбора лагранжевой плотности, при которой проявляется множественность решений полевого уравнения при фиксированном параметре g. Существуют качественно различные решения, не переводящиеся друг в друга ни трансляциями, ни преобразованиями Лоренца.

2. Нелинейная модель скалярного поля. Пусть $R^{(1,3)}$ - псевдоевклидово пространство с метрическим тензором $g_{\mu\nu} =$ diag $\{1, -1, -1, -1\}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3$. Рассмотрим скалярное поле $\varphi : R^{(1,3)} \mapsto R$ с сингулярностями, сосредоточенными на пространственно подобных гладких кривых $\xi : R \mapsto R^{(3,1)}$, $\{\xi_\mu(s); s \in R, \mu = 0,1,2,3\}$. Такого рода "солитоны" полевых уравнений как раз и можно трактовать как частицы, "живущие" в пространстве Минковского.

Полевое уравнение, согласно канонам теории поля (см., например, [1]), является уравнением Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu(x)} - \frac{\partial L}{\partial \varphi(x)} = 0, \quad x \in R^{(1,3)}, \tag{1}$$

связанным с некоторой лагранжевой плотностью $L[x;\varphi]$, которая является функционалом от поля φ.

Если поле локализовано, то значения плотности $L[x;\varphi]$ в каждой точке $x \in R^{(1,3)}$ вычисляются по формуле $L = L(J,\varphi))$, где $L : R^2 \mapsto R$ и $J(x) = -\varphi_\mu^2/2$, $\varphi_\mu(x) \equiv \partial\varphi/\partial x_\mu$ - единственный инвариант группы Лоренца, связанный с полем φ и построенный из производных поля по координатам. Функция L, определяющая плотность, обладает гладкостью не ниже второй степени. Далее, пусть φ - поле с нулевой затравочной массой, то есть $\partial L/\partial\varphi = 0$.

Сингулярности поля φ описываются, по определению, обобщённой функцией ρ на $R^{(3,1)}$,

$$\rho(x) = g\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi(s))ds, \quad x\in R^{(3,1)}, \tag{2}$$

$g=$ const, где $\delta(x) = \delta(x_0)\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$, δ - символ распределения Дирака на R. В работе [1] рассматривалась модель с переменным зарядом.

Постановка задач для уравнения (1) такова, что её решение позволяет одновременно определять как кривую ξ, так и поле φ вне её. Для выделения решений, обладающих сингулярностями (2), постулируются следующие граничные условия [2].

Требуется, чтобы:

1) При $|\Delta_\mu|\to\infty$, $\Delta_\mu = x_\mu - \xi_\mu(s)$, где $\Delta_\mu\dot{\xi}_\mu(s) = 0$, $s\in R$, $\dot{\xi}_\mu = d\xi_\mu/ds$, асимптотика решения φ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2} = -\rho(x), \quad x\in R^{(1,3)},$$

где точкой обозначено дифференцирование по естественному параметру s кривой ξ. Такой вид асимптотики означает асимптотическую линейность поля на больших расстояниях от сингулярности, то есть заряд g проявляется на таких расстояниях "естественным образом".

2) При $|\Delta_\mu|\to 0$ должно иметь место

$$\lim_{|\Delta_\mu|\to 0}\dot{\xi}_\kappa(s)\int_{\Sigma(\Delta)} T_{\mu\nu}d\Sigma^{\kappa\nu} = 0, \tag{3}$$

где $\Sigma(\Delta)$ - двумерная замкнутая поверхность (например, сфера радиуса $|\Delta_\mu|$), охватывающая точку $\xi_\mu(s)$ в гиперплоскости коразмерности 1 векторов Δ_μ, подчиняющихся уравнению $\Delta_\mu\dot{\xi}_\mu(s) = 0$. Здесь

$$d\Sigma^{\kappa\nu} = (\dot{\xi}_\kappa(s)\Delta_\nu - \dot{\xi}_\nu(s)\Delta_\kappa)|\Delta_\mu|d\Omega, \tag{4}$$

$d\Omega$ - мера телесного угла в R^3;

$$T_{\mu\nu} = -\varphi_\mu\varphi_\nu\frac{\partial L}{\partial J} - \delta_{\mu\nu} \tag{5}$$

- так называемый тензор энергии-импульса. Условие (4), согласно канонам классической теории поля [1], означает, что изменение "полного импульса" в точках расположения сингулярности затрачивается на изменение состояния частицы. Именно это условие играет роль своеобразного динамического принципа [2], определяющего кривую ξ.

Краевая задача для уравнения (1) с описанными граничными условиями чрезвычайно сложна даже в смысле доказательства её разрешимости и выяснении степени однозначности этого решения. Корректность описанной выше постановки обоснована только лишь физическими соображениями. Имеющиеся сложности демонстрируется уже тем, что в линейном случае, когда $L=$ const J, задача оказывается неразрешимой, так как предельное выражение (3) бесконечно. Поэтому для того, чтобы поставленная задача имела смысл лагранжева плотность должна быть нелинейной функцией от инварианта J и, соответственно, также нелинейными являются уравнения

(1) для поля φ. Однако, при этом естественно потребовать, что имеет место асимптотическая линейность, то есть при $J \to 0$ выполняется $L(J) = constJ(1+o(1))$. В работе [2] рассматривалась схема асимптотического разложения

$$\varphi(x) = \varphi^{(0)}(x) + \varphi^{(1)}(x) + \varphi^{(2)}(x) + ...,$$

$$\xi(s) = \xi^{(0)}(s) + \xi^{(1)}(s) + \xi^{(2)}(s) + ...$$

по степеням малого параметра, который численно равен кривизне кривой $\xi(s)$. Наличие такой схемы асимптотических разложений, все члены которых оказываются конечными, если предположить бесконечную дифференцируемость функции $L(J)$ и кривой $\xi : R \mapsto R^{(1,3)}$, является доводом в пользу того, что сформулированная краевая задача "разумно" поставлена, по крайней мере, в какой-то области изменения параметров модели.

3. Решение для свободной частицы. При изучении поля уединённой частицы, то есть когда особенность поля сосредоточена на прямой в $R^{(3,1)}$, достаточно рассмотреть случай, когда частица покоится, то есть $\xi^{(0)} = \langle s, 0, 0, 0\rangle$. В этом случае полевое уравнение превращается в следующее нелинейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(L'(J)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) = 0 \tag{6}$$

с частными производными второго порядка (здесь, как обычно, по повторяющемуся индексу k подразумевается сумма по $k = 1,2,3$. Так как $\dot{\xi}_\kappa = \langle 1,0,0,0\rangle$, $\Delta_0 = 0$, $T_{0k} = 0$, $k = 1,2,3$, то отличны от нуля только компоненты $d\Sigma^{k0} = -d\Sigma^{0k}$, $k = 1,2,3$, и поэтому динамический принцип (3) принимает следующий вид

$$\lim_{|\Delta_l| \to 0} \oint_{\Sigma(\Delta)} T_{kl}\, dS^l = 0, \tag{7}$$

где $dS^l = -n_l \,|\,\Delta_m\,|^2 \, d\Omega$ с интегрированием в R^3 по замкнутой поверхности с элементом поверхности, направленным по внешней нормали $n_l, l = 1,2,3$, $n_k n_k = 1$ к поверхности $\Sigma(\Delta)$. Отсюда следует, что функция

$$\lim_{|\Delta_l| \to 0} [T_{kl} n_l \,|\,\Delta\,|^2](\Omega)$$

имеет нулевую фурье-компоненту в разложении по ортогональному базису сферических функций. Если все остальные фурье-компоненты также равны нулю, то есть соотношение

$$\lim_{|\Delta_l| \to 0} [T_{kl} n_l \,|\,\Delta_m\,|^2](\Omega) d\Omega = 0, \quad k = 1,2,3 \tag{8}$$

имеет место для любого самоподобного семейства поверхностей, окружающего точку 0 ($|\,\Delta_m\,|$ - параметр подобия), то $T_{kl} = |\,\Delta_m\,|^{-2}\, o(1)$ при $|\,\Delta_m\,| \to 0$. Мы в этой работе рассмотрим другой случай, когда $T_{kl} = |\,\Delta_m\,|^{-2}\, t_{kl}(\Omega)(1+o(1))$, где тензор $t_{kl}(\Omega)$ второго ранга в R^3 обладает свойством

$$\int t_{kl}(\Omega) n_l(\Omega) d\Omega = 0.$$

Это возможно, если $t_{kl} = A(\Omega)\delta_{kl} + B(\Omega) n_k n_l$. Тогда поле φ в системе покоя обладает сферической симметрией.

4. Сферически симметричные решения. Рассмотрим симметричные решения уравнения (6). Переходя к сферическим координатам $\langle r, \theta, \psi\rangle$ и учитывая, что φ

зависит только от r, получим

$$\frac{d}{dr}\left[r^2L'\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right)\cdot\frac{d\varphi}{dr}\right]=0,\quad L'\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right)=\frac{C}{r^2}$$

с постоянной C.

Введём в рассмотрение нечётную функцию $G(x)=xL(-x^2/2)$. Тогда из алгебраического уравнения $G(x)=C/r^2$, $x=d\varphi/dr$ находим решение

$$\frac{d\varphi}{dr}=G^{-1}\left(C/r^2\right).$$

Так как $L(J)=\Lambda J$ с $\Lambda=\text{const}$ при $J\to 0$, то в окрестности точки $x=0$ функция $G(x)$ имеет вид $\Lambda x(1+o(1))$ и, следовательно, монотонна. Это означает, что на больших расстояниях при $r\to\infty$ уравнение $G(x)=C/r^2$ имеет единственное решение. Согласно граничному условию 1), главная часть асимптотики поля $\varphi(r)$ подчиняется уравнению

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=-g\delta(x)$$

или, используя формулу Гаусса

$$\frac{d\varphi}{dr}=-\frac{g}{4\pi r^2}.$$

Подставляя в уравнение $G(x)=C/r^2$ это выражение, находим, что $C=-g\Lambda/4\pi$. При меньших значениях r, то есть не очень малых значениях $d\varphi/dr$, может возникнуть неединственность решения уравнения $G(x)=C/r^2$ в случае немонотонности функции $G(x)$. В этом случае правильное решение выбирается таким образом, чтобы оно при $r\to\infty$ переходило в найденное единственное решение $d\varphi/dr=-g\Lambda/4\pi r^2$ при $r\to\infty$.

В связи с выбранной асимптотикой для $d\varphi/dr$ при $r\to\infty$ имеем

$$\varphi(r)=\int_r^\infty G^{-1}\left(C/r^2\right)dr,$$

где интеграл сходится на верхнем пределе.

Потребуем теперь, чтобы полная собственная энергия поля φ была конечной, то есть

$$\int_{R^3}T_{00}dV=-4\pi\int_0^\infty r^2\left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2L'+L\right]dr<\infty.$$

Этот интеграл сходится на верхнем пределе, так как при $r\to\infty$ подинтегральная функция пропорциональна $r^2(d\varphi/dr)^2\sim r^{-2}$. На нижнем пределе сходимость интеграла возможна, если $G^{-1}(C/r^2)\sim r^{-2\alpha}$ при $r\to 0$ с $0<\alpha<1$, то есть $G^{-1}(z)\sim z^\alpha$ при $z\to\infty$. При этом $G(x)=x^{1/\alpha}$, $x\to\infty$. Следовательно, $L'(-x^2/2)\sim x^{1/\alpha-1}$, что означает $L'(J)\sim J^{(1-\alpha)/2\alpha}$, $J\to\infty$.

Пример с $\alpha=1/2$**.** Положим $L'(J)=\sqrt{1-a^2J}$. Тогда $G(x)=x\sqrt{1+a^2x^2/2}$. Решение с нужной асимптотикой при $r\to\infty$ имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dr}=a^{-1}\left(\sqrt{1+2C^2a^2/r^4}-1\right)^{1/2}\sim(2^{1/2}\,|\,C\,|\,/a)^{1/2}/r.$$

Другая возможность для сходимости интеграла для энергии поля на нижнем пределе реализуется, если $G^{-1}(z) \to$ const при $z \to \infty$. Тогда $d\varphi/dr \to$ const.

Пример. Пусть $G^{-1}(z) = z/\sqrt{1+a^2z^2}$. Тогда $G(x) = x/\sqrt{1-a^2x^2}$, $L'(J) = (1+2a^2J)^{-1/2}$ и поле имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C}{r^2} / \sqrt{1+\left(\frac{C}{r^2}\right)^2}.$$

Отметим, что если функция L является многолистной с точкой ветвления $J=0$, то уравнение $G(x) = C/r^2$ может иметь несколько решений в асимптотике $r \to \infty$, не переходящих друг в друга. Такая возможность реализуется, например при $L = -\ln\left(1-a^2 J arccos J\right)$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Иваненко Д.Д. Классическая теория поля. / Д.Д. Иваненко, А.А. Соколов .– М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
2. Пелетминский С.В. // ЖЭТФ. – 1963. – 44. – С.1023.

ВИРЧЕНКО Юрий Петрович – д.ф.-м.н., заведующий кафедрой теоретической физики Белгородского государственного университета, ведущий научный сотрудник Института монокристаллов НАНУ.

Научные интересы:

– математическая физика, статистическая физика, прикладная теория случайных процессов.

УДК 531.1

Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская

ЧАСТНЫЕ ОДНОИНТЕРВАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ С МАРКОВСКИМИ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯМИ В R

Постановка проблемы и анализ публикаций по теме исследования. Случайные множества с марковскими измельчениями были введены для моделирования фрактально неупорядоченных сред в физике [1]. Несмотря на то, что эти множества несепарабельны, они допускают описание на основе бесконечной совокупности согласованных частных многоинтервальных распределений в рамках некоторой общей вероятностной схемы, предложенной в [2]. Эта схема является обобщением схемы задания распределения вероятностей на основе частных распределений, определяющих случайное множество поточечно.

Целью данной работы является вычисление одноинтервального частного распределения для множеств с марковскими измельчениями в [0,1] при произвольном параметре дробления ν. Эта функция представляет интерес в статистической физике при вероятностном описании фрактально неупорядоченных сред на основе случайных множеств с марковскими измельчениями.

Основная часть.

Определение случайных множеств с марковскими измельчениями. Зафиксируем параметр дробления $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$, и для каждого $\mathrm{m} \in \mathbb{Z}_+$ определим дробление m-го порядка полуинтервала [0,1)

$$\mathcal{K}_m = \left\{ \left[\frac{\xi}{\nu^m}, \frac{\xi+1}{\nu^m} \right), \xi \in \{0,1,...,\nu^m - 1\} \right\}.$$

Клеточным измельчением полуинтервала [0,1) с параметром дробления ν назовем семейство $\mathcal{C}(\nu) = \langle \mathcal{K}_m ; m \in \mathbb{N} \rangle$. Для фиксированного $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ сопоставим каждому непустому подклассу $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}_\mathrm{m}$ множество $H_m(\mathcal{G}) = \bigcup_{C \in \mathcal{G}} C$, и обозначим класс всех таких множеств $\mathcal{Q}_\mathrm{m}$. Вместе с тем, для каждого класса $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}_\mathrm{m}$ подмножества $\overline{\mathrm{H}}_\mathrm{m}(\mathcal{G}) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\mathrm{C} \in \mathcal{G}} \mathrm{C}\right)$ введем соответствующий класс подмножеств $\overline{\mathcal{Q}}_\mathrm{m} = \{\mathrm{cl(H)}; \mathrm{H} \in \mathcal{Q}_\mathrm{m}\}$. Обозначим по аналогии $\overline{\mathcal{K}}_\mathrm{m} = \{\mathrm{cl(C)}; \mathrm{C} \in \mathcal{K}_\mathrm{m}\}$. Для данных $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ и $x \in [0,1)$, имеющего ν-адическое представление $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{\nu^i}$ определим оператор $T_m : [0,1) \mapsto [0,1)$ по правилу $T_m(x) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\xi_i}{\nu^i}$, при этом для $X \subset [0,1)$ под $T_m(X)$ будем понимать $T_m(X) = \{T_m(x),\ x \in X\}$. Оператором огрубления m-ого порядка будем называть оператор $\mathrm{K_m}(\cdot) : 2^{\mathrm{W}} \mapsto \overline{\mathcal{Q}}_\mathrm{m}$, такой что $\mathrm{K_m(X)} = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\mathrm{C} \in \mathcal{K}_\mathrm{m} : \mathrm{C} \cap \mathrm{X} \neq \varnothing} \mathrm{C} \right)$. Введем также оператор, который каждому подмножеству $\mathrm{H} \in \mathcal{Q}_\mathrm{m}$ ($\mathrm{H} \in \overline{\mathcal{Q}}_\mathrm{m}$) ставит в соответствие его покрытие полуинтервалами из $\mathcal{K}_m$ (соответственно $\overline{\mathcal{K}}_m$) $S_m(H) = \{C \in \mathcal{K}_m : C \cap H \neq \varnothing\}$ ($\overline{S}_m(H) = \{cl(C) : C \in \mathcal{K}_m, C \subseteq H\}$).

Пусть функция $\mathrm{q}(\cdot)$ определяет распределение вероятностей на $\overline{\mathcal{Q}}_1$.

Определение. *Случайным множеством с марковским измельчением в* [0,1] *при* *фиксированном параметре дробления* $\nu \geq 2$ *назовем вероятностное пространство* $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathrm{P} \rangle$*, у которого* Ω *- класс всех замкнутых подмножеств* $[0,1]$, $\mathfrak{B}$ *- минимальная* σ*-алгебра, которая содержит все возможные события* $\mathrm{H} = \{\Delta_\mathrm{m}(\mathrm{H}); \mathrm{H} \in \bar{Q}_\mathrm{m}, \mathrm{m} \in \mathbb{N}\}$, *и распределение вероятностей* P *такое, что вероятности* $\mathrm{P}_\mathrm{m}(\mathrm{H}) = \Pr\{\Delta_\mathrm{m}(\mathrm{H})\}, \quad \mathrm{H} \in \bar{Q}_\mathrm{m}, \quad \mathrm{m} \in \mathbb{N}$ *на измельчениях* $\mathcal{C}(\nu)$ *отрезка* $[0,1]$ *связаны соотношением*

$$P_{m+1}(H) = \prod_{C:\, C \in S_m(G)} q\left(T_m(H \cap \bar{C})\right) P_m(\mathrm{K}_m(\mathrm{H})), \tag{1}$$

а при $\mathrm{m} = 1$ *они определяются неотрицательной функцией* $\mathrm{q}(\mathrm{H}) \equiv \mathrm{P}_1(\mathrm{H})$, *удовлетворяющей условию нормировки и* $\mathrm{q}(\varnothing) = 0$.

Вычисление одноинтервальных распределений. С каждым произвольным $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{\nu^i}$ из $[0,1)$ при фиксированном натуральном n свяжем два числа: усечение с недостатком $x|_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\nu^i}$ и усечение с избытком $x|^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\nu^i} + \nu^{-n}$. Введем обозначение для полуинтервалов, представимых в виде объединения элементов дробления первого порядка $\left[\frac{\alpha}{\nu}, \frac{\beta}{\nu}\right) = \Gamma(\alpha, \beta), \alpha \in \{0,1,2,...\nu-1\}, \beta \in \{0,1,2,...\nu-1\}$.

Пусть имеется случайное множество с марковскими измельчениями $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathrm{P} \rangle$ с параметром дробления ν и распределением вероятностей, индуцированным фиксированной функцией $\mathrm{q}(\cdot)$ на $\bar{Q}_1$. Для заданного полуинтервала $[a,b) \subset [0,1)$ вычислим вероятность события $\Pr\{\tilde{X} : \tilde{X} \cap [a,b) = \varnothing\}$. Вычисление проведем в несколько этапов.

Прежде всего для произвольного $b \in [0,1)$ найдем вероятность события $F(0,b) = \Pr\{\tilde{X} : \tilde{X} \cap [0,b) = \varnothing\}$. Для $i = 0,1,2,...,\nu-1$ обозначим

$$f_i^- = \sum_{H \in \bar{Q}_1; H \cap \Gamma(0,i) = \varnothing} q(H), \qquad f_i^+ = \sum_{H \in \bar{Q}_1; H \cap \Gamma(i,\nu) = \varnothing} q(H). \tag{2}$$

Рассмотрим ν-адическое представление числа $b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{\nu^i}, \beta_i \geq 0$. В случае, когда число b имеет два таких представления, будем использовать то из них, которое конечно. Используя свойство марковости и учитывая что

$$\Pr\{\tilde{X} : \tilde{X} \cap [0,b) = \varnothing\} = \Pr\{\tilde{X} : \tilde{X} \cap [0,b|^n) = \varnothing\} +$$
$$+ \Pr\{\tilde{X} : \tilde{X} \cap [0,b) = \varnothing \wedge \tilde{X} \cap [0,b|^n) \neq \varnothing\} = \Pr\{\tilde{X} : \tilde{X} \cap [0,b|^n) = \varnothing\} +$$
$$+ \Pr\{\tilde{X} : \tilde{X} \cap [0,b|_n) = \varnothing \wedge \tilde{X} \cap [b|_n, b) = \varnothing \wedge \tilde{X} \cap [b,b|^n) \neq \varnothing\},$$

получим рекурсию, которая на шаге n имеет вид

$$F(0,b) = f_{\beta_1+1}^- + (f_{\beta_1}^- - f_{\beta_1+1}^-)(f_{\beta_2+1}^- + (f_{\beta_2}^- - f_{\beta_2+1}^-)(f_{\beta_3+1}^- + ... + (f_{\beta_{n-1}}^- - f_{\beta_{n-1}+1}^-)F(0,T_n(b)...))).$$

Следовательно,

$$F(0,b) = f_{\beta_1+1}^- + (f_{\beta_1}^- - f_{\beta_1+1}^-)(f_{\beta_2+1}^- + (f_{\beta_2}^- - f_{\beta_2+1}^-)(f_{\beta_3+1}^- + ...)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{\beta_k+1}^- \prod_{i=1}^{k-1} (f_{\beta_i}^- - f_{\beta_i+1}^-). \tag{3}$$

Аналогично для произвольного $a=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{\nu^i},\ \alpha_i\ge 0$ находим

$F(a,1)=\Pr\{\tilde{X}:\tilde{X}\cap[a,1)=\varnothing\}$,

$$F(a,1)=f^{+}_{\alpha_1}+(f^{+}_{\alpha_1+1}-f^{+}_{\alpha_1})(f^{+}_{\alpha_2}+(f^{+}_{\alpha_2+1}-f^{+}_{\alpha_2})(f^{+}_{\alpha_3}+\ldots))=\sum_{k=1}^{\infty}f^{+}_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}(f^{+}_{\alpha_i+1}-f^{+}_{\alpha_i}). \qquad (4)$$

Рассмотрим случай, когда числа $a=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{\nu^i}$ и $b=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{\nu^i}$ таковы, что $\alpha_i=\beta_i,\ \ i\le n-1$ и $\alpha_n\ne\beta_n$. Обозначим $q_i=\sum_{H\in\bar{Q}_1;H\supset\Gamma(i,i+1)=\varnothing}q(H)$. В силу сделанных предположений для всех $i\le n-1$ полуинтервал $[a,b)\subset\left[\frac{\alpha_i}{\nu^i},\frac{\alpha_i+1}{\nu^i}\right)$, тогда

$$F(a,b)=(1-q_{\alpha_1})+q_{\alpha_1}((1-q_{\alpha_2})+q_{\alpha_2}((1-q_{\alpha_3})+\ldots+$$

$$+q_{\alpha_{n-2}}((1-q_{\alpha_{n-1}})+q_{\alpha_{n-1}}((1-q_{\alpha_n})+\Pr\{\tilde{X}:T_n(\tilde{X})\cap[T_n(a),T_n(b))=\varnothing\}))\ldots))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(1-q_{\alpha_k})\prod_{i=1}^{k-1}q_{\alpha_i}+\prod_{i=1}^{n-1}q_{\alpha_i}\times\Pr\{\tilde{X}:T_n(\tilde{X})\cap[T_n(a),T_n(b))=\varnothing\}, \qquad (5)$$

при этом полуинтервал $[T_n(a),T_n(b))$ не содержится ни в каком полуинтервале дробления первого порядка.

Рассмотрим теперь случай, когда у чисел $a=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{\nu^i}$ и $b=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{\nu^i}$ первые коэффициенты различны $\alpha_1\ne\beta_1$. В этом случае

$$\Pr\{\tilde{X}:\tilde{X}\cap[a,b)=\varnothing\}=\sum_{H\in\bar{Q}_1;H\cap\Gamma(\alpha_1,\beta_1+1)=\varnothing}q(H)+$$

$$+\sum_{H\in\bar{Q}_1;H\cap\Gamma(\alpha_1,\beta_1)=\varnothing,H\supset\Gamma(\beta_1,\beta_1+1)}q(H)\Pr\{\tilde{X}:\tilde{X}\cap[0,\mathrm{T}_1(b))=\varnothing\}+$$

$$+\sum_{H\in\bar{Q}_1;H\cap\Gamma(\alpha_1+1,\beta_1+1)=\varnothing,H\supset\Gamma(\alpha_1,\alpha_1+1)}q(H)\Pr\{\tilde{X}:\tilde{X}\cap[\mathrm{T}_1(a),1)=\varnothing\}+$$

$$+\sum_{H\in\bar{Q}_1;H\cap\Gamma(\alpha_1+1,\beta_1)=\varnothing,H\supset\Gamma(\alpha_1,\alpha_1+1),H\supset\Gamma(\beta_1,\beta_1+1)}q(H)\Pr\{\tilde{X}:\tilde{X}\cap[\mathrm{T}_1(a),1)=\varnothing\}\times$$

$$\times\Pr\{\tilde{X}:\tilde{X}\cap[0,\mathrm{T}_1(b))=\varnothing\}=$$

$$=\sum_{H\in\bar{Q}_1;H\cap\Gamma(\alpha_1,\beta_1+1)=\varnothing}q(H)+\sum_{H\in\bar{Q}_1;H\cap\Gamma(\alpha_1,\beta_1)=\varnothing,H\supset\Gamma(\beta_1,\beta_1+1)}q(H)F(0,\mathrm{T}_1(b))+$$

$$+\sum_{H\in\bar{Q}_1;H\cap\Gamma(\alpha_1+1,\beta_1+1)=\varnothing,H\supset\Gamma(\alpha_1,\alpha_1+1)}q(H)F(\mathrm{T}_1(a),1)+$$

$$+\sum_{H\in\bar{Q}_1;H\cap\Gamma(\alpha_1+1,\beta_1)=\varnothing,H\supset\Gamma(\alpha_1,\alpha_1+1),H\supset\Gamma(\beta_1,\beta_1+1)}q(H)F(\mathrm{T}_1(a),1)F(0,\mathrm{T}_1(b)). \qquad (6)$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, алгоритм вычисления одноинтервального распределения вероятностей случайного множества с марковскими измельчениями с параметром распределения ν и распределением вероятностей q(·) на $\overline{Q}_1$ сводится к анализу коэффициентов ν-ичного разложения чисел a и b – начала и конца интервала. Если эти коэффициенты совпадают до порядка n включительно, то по формуле (5) производятся предварительные вычисления, позволяющие перейти к случаю, когда $\alpha_n \neq \beta_n$. После этого формула (6) позволяет закончить вычисления, опираясь на формулы (3) и (4). В заключении укажем, что в рассмотренной модели случайных множеств с марковскими измельчениями актуальным остается вопрос о вычислении многоинтервальных функций распределения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Virchenko Yu. P. Random Point Fields with Markivian Refinements and the Geometry of Fractally Disordered Media/ Yu. P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya // Theor. and Mathem. Phys. – 2000. – 124, № 3.
2. Virchenko Yu.P. Marginal probability distributions of random sets in R with markovian refinements/ Yu. P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya // Theory of stochastic processes. – 2005. – 11 (27). – № 3–4. – P. 121–130.
3. Matheron G. Random Sets and Integral Geometry/ G. Matheron // John Wiley and Sons, New York, 1975.

ВИРЧЕНКО Юрий Петрович – д.ф.-м.н., заведующий кафедрой теоретической физики Белгородского государственного университета, ведущий научный сотрудник Института монокристаллов НАНУ.

Научные интересы:

– математическая физика, статистическая физика, прикладная теория случайных процессов.

ШПИЛИНСКАЯ Ольга Леонидовна – инженер Института монокристаллов НАНУ.

Научные интересы:

– теория вероятностей, стохастическая геометрия.

УДК 621.64:519.8

С.А. Воцелка, С.А. Рожков

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА В ИРРИГАЦИОННОМ КАНАЛЕ

Постановка проблемы. Оросительные системы являются энергоемкими технологическими комплексами, которые ежегодно потребляют в Украине около 500 млн. кВт·ч электроэнергии. В связи с необходимостью экономного использования воды все большую актуальность приобретают задачи повышения эффективности управления. Однако на решение проблемы повышения энергоэффективности водораспределительных систем на орошаемых землях влияют следующие основные недостатки, которые нужно учитывать при модернизации оросительных систем Украины [1]:

- нерациональное размещение на магистральных и межхозяйственных каналах водозаборных сооружений, вследствие чего нагрузка на бьефы каналов не отвечают их регулировочным свойствам;
- применение схемы управления водораспределением (СУВ) «по верхнему бьефу» при неточных заявках водопотребителей приводит к завышенной водоподаче на орошаемый массив, что вызывает значительные потери воды на фильтрацию и сбросы;
- разветвленность и протяженность оросительной и коллекторно-сбросной сети определяет значительную инерционность процессов водораспределения и водоотвода;
- недостаточный объем и нерациональное размещение по каналам дополнительных емкостей, предназначенных для зарегулирования сбросов и утилизации коллекторно-дренажных вод;
- значительная дискретность гидрографов расходов воды на главных, перекачивающих и подкачивающих насосных станциях, которая служит причиной возникновения дисбаланса между водоподачей и водоразбором. При этом дисбаланс невозможно устранить компенсирующей емкостью бьефа канала;
- несовершенство технологического и коммерческого водо- и энергоучета как основы информационного обеспечения орошения, которое существенным образом снижает качество управления водопользованием.

Подтверждением сказанному могут служить данные обследования Ингулецкой оросительной системы [8], на которой из 2825 исследованных декад (дней) из которых только в 175 декадах водопотребление соответствовало плану, а отклонения на ±10% и более наблюдались в 80% случаях. В результате этих исследований установлено, что на ирригационных системах Украины потери оросительной воды на нетехнологические, холостые сбросы достигают 27-35% от объема, забранного головным водозабором из водоисточника.

Приведенный перечень проблем относится к системе водораспределения и может быть устранен полностью или частично при использовании автоматизированной системы управления, с оптимизацией управлением рассредоточенных русловых резервных емкостей [2, 6].

Анализ публикаций по теме исследования. Особенностью эксплуатации водораспределительных систем, как сложных технологических объектов управления, является функциональная зависимость энергоемкости водоподачи от ее объемов. Такая зависимость обусловлена низким организационно-техническим уровнем эксплуатации оросительных систем, и, прежде всего, при отсутствии эффективных информационных технологий управления межхозяйственным водораспределением "по потребности", оперативного контроля качества водопользования и управление электропотребления.

Основными направлениями снижения потребления энергоресурсов на водораспределительных системах является уменьшения удельных затрат электроэнергии на перекачивание воды насосными станциями (НС) и уровня потерь электроэнергии на водозабор, транспортировку воды и эффективное использование воды при орошении [1, 8].

Большая протяженность водохозяйственных систем (ВХС) и необходимость учета многих факторов позволяют получить количественные и качественные характеристики водных ресурсов только методами математического моделирования. Выбор математической модели, которая с требуемой точностью детализации будет описывать сложные процессы движения воды и позволит с допустимой погрешностью обосновывать инженерные решения при проектировании и эксплуатации ВХС, является весьма сложной задачей.

В настоящее время в задачах моделирования водораспределения наиболее широко применяют математические модели трех типов: стохастические, концептуальные и гидродинамические.

Задачи математического моделирования неустановившегося движения воды в открытых потоках исследовали Сен-Венан, Христианович С. А., Архангельский В. А., Васильева О. Ф., Маковского Э.Э., Стокер и др. [3, 4]. Усовершенствованию управлением водораспределения на ирригационных системах с применением автоматизированных систем посвящены работы: Бочкарёва Я.В., Коваленко П.И., Куротченка В.И., Попова В.Н., Михайленко А.И., Маковского Э.Э. и др.

Известные достоинства стохастических моделей [2, 3, 4]: их простота, небольшое количество исходной информации и возможность применения ЭВМ, оперативность получения информации, позволяют установить характеристики неустановившегося движения в створах, где проводились наблюдения. Однако такие модели дают мало информации о процессе и мало пригодны вне пределов и створов наблюдений.

К концептуальным моделям относятся модели гидрологического цикла: линейная и нелинейная модели одиночного водохранилища, модели Калинина–Милюкова, модель Маскингам и др. [4]. Более глубокое, чем у стохастических моделей, описание процесса, большая степень детализации результатов расчетов, возможности применения в реальном масштабе времени и небольшие объемы вычислений являются несомненными достоинствами этих моделей. Но в моделях такого типа появляется необходимость оценивания допустимости отказа от учета подпорных явлений в каждом конкретном случае применения.

В последнее время для описания процессов движения жидкости получили широкое распространение гидродинамические модели, как наиболее универсальные. Небольшое количество общепринятых и хорошо апробированных исходных положений, строгая математическая формулировка задач, является их существенным преимуществом. Практически всегда гидродинамические модели позволяют получать характеристики процессов движения воды с требуемой детализацией и приемлемой погрешностью, интерполировать и экстраполировать характеристики в широких пределах.

Однако, для создания гидродинамических моделей необходим большой объем дорогостоящей морфометрической, гидравлической и гидрологической информации, а ее проверка и подготовка к вычислениям приводит к значительным затратам. Результаты расчетов по численным характеристикам состояния водного объекта хотя громоздки и сложны для инженерного анализа, но уже значительно менее затратны в сравнении с исходной информацией.

В работе [6] для исследования СУВ использовались линеаризованные модели участков канала, как типичных объектов управления (ОУ), представленных в виде передаточных функций с транспортным запаздыванием, которые характеризуют динамику изменения уровней воды в канале после нанесения возмущений. Коэффициенты передаточных функций ОУ для контролируемых створов были получены по переходным характеристикам, которые определялись расчетно-экспериментальным методом по методике Попова В.Н.. При этом такие модели не решают задачу построения функций изменения уровней воды и расхода в контролируемых створах исследуемого участка канала при переходе от одного установившегося состояния к другому в широких пределах.

Анализ научных подходов к решению проблем энергоэффективного управления водораспределительными системами показывает, что они касаются в основном отдельных ее аспектов: технологических схем регулирования уровней воды в каналах, разработке методик гидравлических расчетов регуляторов и анализа переходных процессов при автоматизированном управлении водораспределением и т. п., а проблемы адаптивного оперативного управления межхозяйственным водораспределением на открытых каналах с резервными ёмкостями еще до конца не решены.

Цель статьи. Для решения задачи эффективного управления ирригационного канала следует реализовать нелинейную статическую и динамическую модели потока воды.

Основная часть. Для моделирования одномерного потока жидкости с постоянной плотностью применим уравнения Сен-Венана [2, 4]. В модели применяют два типа нелинейных уравнений первого порядка, описывающие баланс массы и моменты в виде двух переменных: сечения потока воды $S(x,t)$ и расхода потока $Q(x,t)$, как зависимости от основных пространственных координат потока (бьефа канала) x и от времени t (рис. 1).

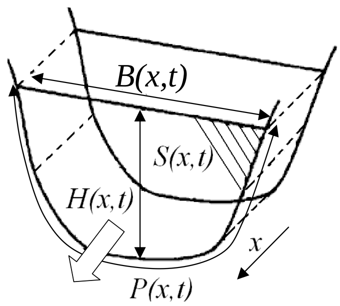


Рис. 1. Переменные в схеме сечения потока ирригационного канала

В формулах (1) и (2) первое уравнение отражает условие сохранения массы, а второе – уравнение сохранения импульса.

Вариант 1
$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q^2}{S}\right) + gS \cdot \dfrac{\partial H}{\partial x} + gS \cdot (I_f - I_0) = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

Вариант 2
$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{1}{g} \cdot \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{Q}{S}\right) + \dfrac{1}{2g} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q^2}{S^2}\right) + \dfrac{\partial H}{\partial x} + I_f - I_0 = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

где: $S(x,t)$ – площадь живого сечения потока;

$Q(x,t)$ – расход потока в сечении $S(x,t)$ по глубине $H(x,t)$;

$I_f(x,t)$ – угол гидравлического трения;

I_0 – уклон дна русла;

g – гравитационное ускорение.

Угол гидравлического трения определяют [3, 4]:

$$I_f(x,t) = \frac{(Q/S)^2}{C^2 \cdot R}, \qquad R = \frac{S}{P}, \tag{3}$$

где: $C(x,t)$ – коэффициент Шези,

$R(x,t)$ – гидравлический радиус,

$P(x,t)$ –смоченный периметр сечения канала.

Учитывая, что в большинстве случаев сечение ирригационного канала имеет трапецеидальную форму, введем следующие расчетные соотношения:

$$P = b + 2H \cdot \sqrt{1+m^2},$$

где: b – ширина канала по дну,

m – заложение откоса.

Тогда: $B = b + 2mH$ – ширина канала поверху (по урезу воды); $v = Q/S$ – средняя скорость в сечении потока.

Для призматических русел площадь живого сечения зависит только от глубины $\partial S/\partial H = B$, тогда:

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial H(x,t)}{\partial t}. \tag{4}$$

Замена этих уравнений в формулах Сен-Венана (1) - (2) для модели канала позволяет получить полную систему уравнений в частных производных в форме Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{1}{B} \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t} = -2v \cdot \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \left[B \cdot v^2 - gS\right] \cdot \dfrac{\partial H}{\partial x} + gS(I_o - I_f) \end{cases}. \tag{5}$$

Реализация и моделирование выполнено путем решения дифференциальных уравнений, подставляя в пространственные производные соответствующие конечные разности. Для этого целесообразно разбить весь бьеф на N сечений вдоль направления потока, каждое из которых длиной $dx = X / N$, где X – общая длина бьефа канала. Схему пространственного разделения переменных потока (5) показано на рис. 2.

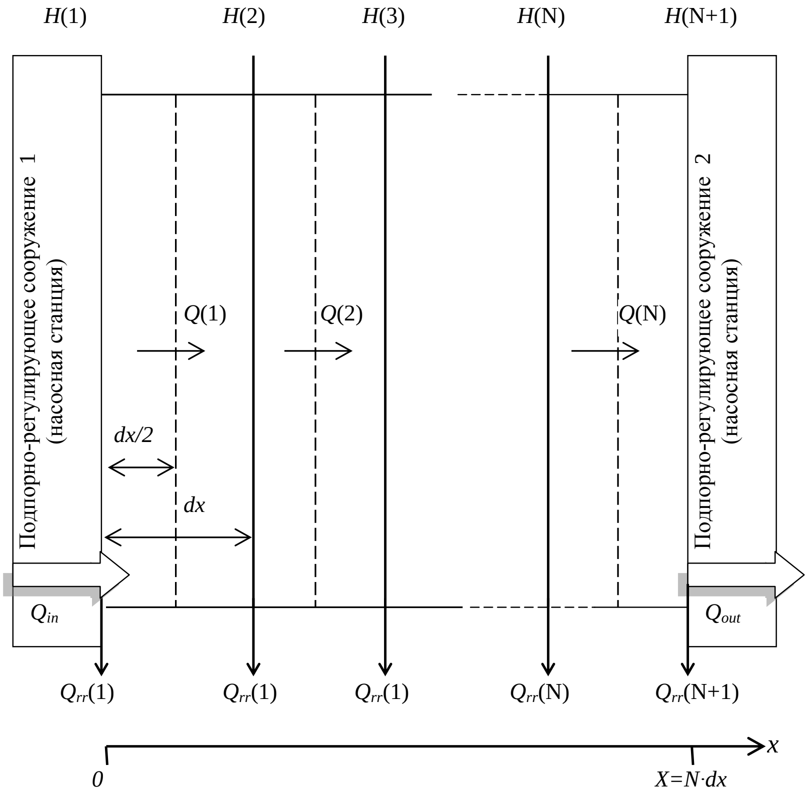


Рис. 2. Схема дискретизации по длине потока в бьефе

Определим производные по длине канала через конечные разности (6) и (7):

$$\frac{\partial H_i}{\partial x} \approx \frac{(H_{i+1} - H_i)}{dx} \quad , \tag{6}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x} \approx \frac{(Q_i - Q_{i-1})}{dx} \quad . \tag{7}$$

Полученные системы уравнений (8)-(10) в конечных разностях можно использовать при моделировании потока в бьефе.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_1}{\partial t} = -\dfrac{2}{B_1} \cdot \dfrac{Q_1 - Q_{in} + Q_{rr1}}{dx} \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial t} = -2v_1 \cdot \dfrac{Q_1 - Q_{in}}{dx} + \left[(B_1 \cdot {v_1}^2 - g \cdot S_1) \cdot \left(\dfrac{H_2 - H_1}{dx} \right) + g \cdot S_1 \cdot \left(I_0 - \dfrac{{v_1}^2}{R_1 \cdot {C_1}^2} \right) \right] \end{cases} , \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial t} = -\dfrac{1}{B_i} \cdot \dfrac{Q_i - Q_{i-1} + Q_{rr(i)}}{dx} \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial t} = -2v_i \cdot \dfrac{Q_i - Q_{i-1}}{dx} + \left[(B_i \cdot vi^2 - g \cdot S_i) \cdot \left(\dfrac{H_{i+1} - H_i}{dx} \right) + g \cdot S_i \cdot \left(I_0 - \dfrac{{v_i}^2}{R_i \cdot {C_i}^2} \right) \right] , \\ i \in [2, N] \end{cases} \tag{9}$$

$$\frac{\partial H_{N+1}}{\partial t} = -\frac{2}{B_N} \cdot \frac{Q_{out} - Q_N + Q_{rr(N+1)}}{dx}. \tag{10}$$

Моделирование выполнено в среде Matlab-Simulink [7]. На рис. 3 показана схема реализации модели потока в бьефе ирригационного канала в Simulink.

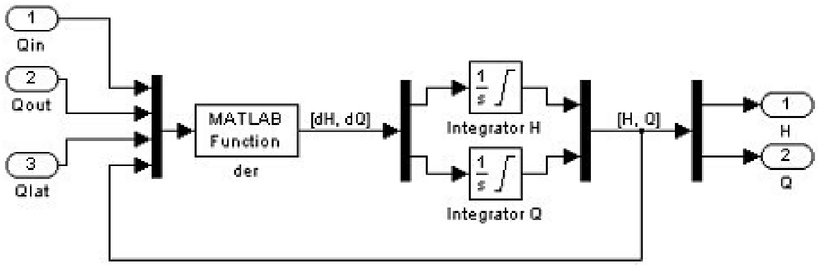


Рис. 3. Схема реализации модели бьефа канала в Simulink

Результаты моделирования показаны на рис. 4 и рис. 5. Для проверки модели была использована модель потока, разработанная академиком Васильевым О.Ф. [4] и реализованная В/О «Союзводпроект» [5].

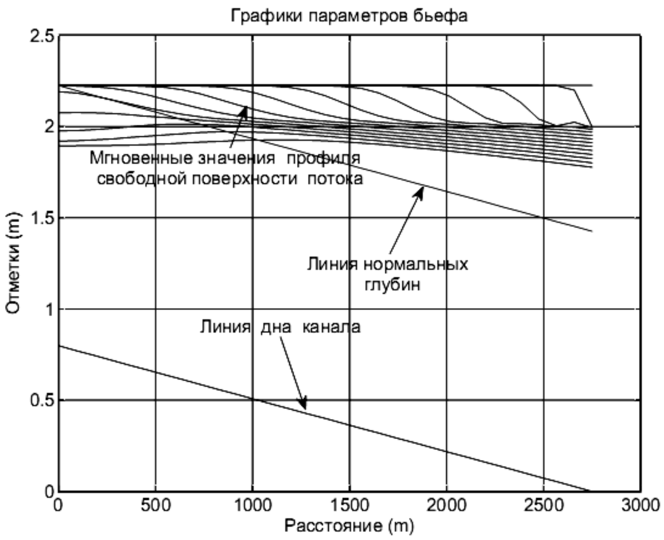


Рис. 4. Мгновенные значения продольного профиля канала

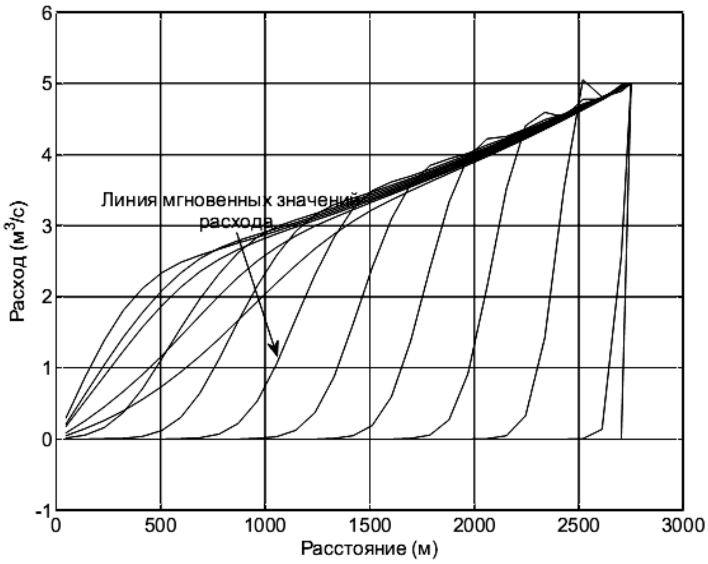


Рис. 5. Изменение расхода воды вдоль бьефа

При сравнении мгновенных значений профилей свободной поверхности потока и расходов выявлено полное их совпадение с расчетами по программе В/О «Союзводпроекта». Несущественные различия в результатах моделирования имеют место только в начальный период времени.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Разработанная гидродинамическая модель бьефа позволяет с достаточной точностью моделировать переходные процессы во всем диапазоне изменений нагрузки. Это позволит решить задачу оперативной оценки наличия резервных емкостей в бьефах и оптимизации их использования для управления каналом в целом.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Коваленко П.І. Концепція модернізації зрошувальних систем України /Петро Іванович Коваленко, Юрій Олексійович Михайлов// Меліорація і водне господарство. –2002. –Вип. 88. –С 3-14.
2. Маковский Э.Э. Автоматизация гидротехнических сооружений в системах каскадного регулирования расходов воды /Эдуард Эдуардович Маковский. –Фрунзе: Илим, 1972. –302 с.
3. Рогунович В.П. Автоматизация математического моделирования движения воды и примесей в системах водотоков /Василий Петрович Рогунович //Монография. –Л.:Гидрометеоиздат, 1989. –264 с.
4. Грушевский М.С. Неустановившееся движение воды в реках и каналах /Михаил Соломонович Грушевский. –Л.:Гидрометеоиздат, 1982. –288 с.
5. Марголин М.Ш. Вопросы проектирования оросительных систем /М.Ш.Марголин //Сб.научн.трудов –М.: В/О Союзводпроект, 1983. –С.140-155.
6. Воцелка С.А. Моделирование каскадной системы управления магистральным каналом / С.А. Воцелка, С.А. Рожков // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008. – №2 (31). –С.123–129.
7. Дьяконов В.П. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник /Владимир Павлович Дьяконов, Владимир Васильевич Круглов.– СПб.:Питер, 2002. – 448 с.
8. Каналы саморегулирующиеся с расходом до 2 м^3/с для оросителей и тупиковых распределителей автоматизированных оросительных систем с широкозахватной

дождевальной техникой. Технические решения/[А.М.Жарковский, М.Ш.Марголин, М.Р.Линович и др.]. – М.: В/О Союзводпроект, 1985. – 100 с.

ВОЦЕЛКА Сергей Александрович – ст. преподаватель Херсонского государственного аграрного университета

Научные интересы:

– математическое моделирование технологических процессов и систем управления в мелиорации.

РОЖКОВ Сергей Александрович – к.т.н., доцент кафедры Технической кибернетики Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

– автоматизированное управление в сложных системах, автоматизированные системы идентификации.

УДК 539.3

В.И. Гнитько, У.Е. Марченко, В.В. Науменко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Введение. Оболочки вращения, заполненные жидкостью, представляют собой наиболее распространенный тип резервуаров для хранения химически опасных веществ. Разрушение подобных резервуаров под действием сейсмических нагрузок может привести к негативным экологическим последствиям. Изучению данной проблемы посвящены работы [1-3]. В данной работе предложен метод расчета динамических характеристик оболочек вращения с жидкостью, подверженных действию кратковременных импульсных нагрузок. Метод основан на сведении задачи об определении давления жидкости к системе сингулярных интегральных уравнений. Связанная задача теории упругости решается с помощью комбинации МКЭ и МГЭ. Дифференциальные уравнения нестационарной задачи решаются численно методом Рунге-Кутта 4-го и 5-го порядка.

Постановка задачи. Рассматривается связанная задача о движении оболочки вращения, частично заполненной жидкостью, которая подвергается сейсмическому воздействию. Будут рассмотрены задачи о свободных и вынужденных колебаниях таких оболочек.

На первом этапе рассмотрим задачу о собственных колебаниях "пустой" оболочки, т.е. рассмотрим задачу:

$$L[\vec{U}]+M[\ddot{\vec{U}}]=0 \tag{1}$$

и представим $\vec{U}$ в виде $e^{i\Omega t}\vec{u}(x,y,z)$. Тогда уравнение (1) примет вид $L[\vec{u}]-\Omega^2 M[\vec{u}]=0$, что соответствует проблеме определения собственных частот и собственных форм. Допустим, эта задача решена и найдены Ω_k, w_k – собственные частоты и собственные формы "пустой" оболочки. При этом выполнены следующие соотношения:

$$L[w_k]-\Omega_k^2 M[w_k]=0 \qquad k=1,2,...$$

$$(M[w_k],w_j)=\delta_{kj}$$

т.е. формы колебаний "пустой" оболочки ортонормированны по матрице масс. Следовательно

$$(L[w_k],w_j)=\Omega_k^2\delta_{kj}.$$

Потенциал скоростей φ будем искать в виде суммы двух слагаемых, относительно которых сформулируем соответствующие краевые задачи:

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2. \tag{2}$$

Решение задачи о свободных колебаниях идеальной невесомой жидкости в упругом резервуаре. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} L[\vec{U}]+M[\ddot{\vec{U}}]=-\rho_l\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t} \\ \Delta\varphi_1=0 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{S_1};\quad \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big|_{S_0}=0 \end{cases} \tag{3}$$

Предположим, что $\vec{U}=e^{i\omega t}\vec{u};\ \varphi_1=e^{i\omega t}\phi_1$. Будем искать $\vec{u}$ в виде ряда по собственным колебаниям "пустой" оболочки:

$$\vec{u}=\sum_{k=1}^{m}c_k w_k\ . \tag{4}$$

Рассмотрим ряд смешанных краевых задач для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases}\Delta\phi_{1k}=0\\ \dfrac{\partial\phi_{1k}}{\partial n}=w_k\ \Big|_{S_1};\quad \phi_{1k}\Big|_{S_0}=0\end{cases} \tag{5}$$

Решение краевых задач вида (5) описано в [4]. После нахождения соответствующих функций ϕ_{1k}, потенциал скоростей φ_1 представим в следующем виде:

$$\varphi_1=i\omega e^{i\omega t}\sum_{k=1}^{m}c_k\phi_{1k}\ . \tag{6}$$

С учетом соотношений (4) и (6) первое уравнение в системе дифференциальных уравнений (3) примет вид после сокращения на $e^{i\omega t}$:

$$L\left[\sum_{k=1}^{m}c_k w_k\right]-\omega^2 M\left[\sum_{k=1}^{m}c_k w_k\right]=-\rho_l i^2\omega^2\sum_{k=1}^{m}c_k\phi_{1k}\ . \tag{7}$$

В силу линейности операторов *L* и *M* имеем

$$\sum_{k=1}^{m}c_k\Omega_k^2 M[w_k]-\omega^2\sum_{k=1}^{m}c_k\left[M[w_k]+\rho_l\phi_{1k}\right]=0\,. \tag{8}$$

Умножим скалярно обе части равенства (8) на собственные формы w_j "пустой" оболочки. Получим

$$c_k\Omega_k^2\delta_{kj}-\omega^2\sum_{k=1}^{m}c_k\left[\delta_{kj}+\rho_l\left(\phi_{1k},w_j\right)\right]=0\,.$$

Эта проблема собственных значений для оболочки, частично заполненной жидкостью. Матрица $\left(\phi_{1k},w_j\right)=\left\{P_{kj}\right\}$ называется матрицей присоединенных масс.

Решение задачи о собственных колебаниях жидкости в жестком сосуде с учетом сил гравитации. Рассматривается следующая краевая задача для уравнения Лапласа относительно φ_2

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{S_1}=0\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}+g\xi=0;\quad \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\dot{\xi}\end{cases}$$

Требуется найти собственные частоты и формы колебаний жидкости.

Рассмотрим $\varphi_2=e^{i\kappa t}\phi_2$. Первое из условий на свободной поверхности продифференцируем по *t* и, подставив $\dot{\xi}$ из второго условия на свободной поверхности, получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\dfrac{\kappa^2}{g}\phi_2\ \Big|_{S_0}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=0\ \Big|_{S_1}\end{cases} \tag{9}$$

Эта задача сводится сначала к решению системы сингулярных интегральных уравнений [5], затем к проблеме собственных значений. Обозначим решение задачи (9) через $\kappa_k ; \phi_{2k}$.

Представим потенциал φ_2 в следующем виде:

$$\varphi_2(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{d}_k(t)\phi_{2k}(x,y,z).$$

Здесь

$d_k(t)$ – неизвестные коэффициенты,

$\phi_{2k}(x,y,z)$ – решение краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta\phi_{2k} = 0 \\ \dfrac{\partial\phi_{2k}}{\partial n} = 0 \ \Big|_{S_1}; \quad \dfrac{\partial\phi_{2k}}{\partial n}\Big|_{S_0} = \dfrac{\kappa_k^2}{g}\phi_{2k} \end{cases}$$

Построение системы дифференциальных уравнений. Землетрясение начинается из состояния покоя, что приводит к нулевым начальным условиям. Ненулевое решение системы дифференциальных уравнений будет иметь место только для нулевой и первой гармоники. Поскольку правая часть имеет вид $A(t,\rho,z) + B(t,\rho,z)\cos\theta$. Для применения стандартных процедур решения системы ОДУ требуется свести полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений II порядка к системам обыкновенных дифференциальных уравнений I порядка.

Приведем систему дифференциальных уравнений нулевой гармоники в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m_0} \dot{c}_{k0}^p(t)\left[\delta_{kj} + \left(\phi_{1k}^0, w_{j0}\right)\right] + \rho_l \sum\limits_{l=1}^{n_0} \dot{d}_{l0}^p(t)\left(\phi_{2l}^0, w_{j0}\right) + \Omega_{jo}^2 c_j(t) = -\rho_l g\left(z, w_{j0}\right) \\ j = 1,2,...,m_0 \\ \left[\dot{d}_{i0}^p(t) + \kappa_{i0}^2 d_{i0}(t)\right]a_i + g\sum\limits_{k=1}^{n_0} c_{k0}(t)\left(\dfrac{\partial\phi_{1k}^0}{\partial n}, \phi_{2i}^0\right) + g(H, \phi_{2i}^0) = 0 \\ i = 1,2,...,n_0 \\ c_{k0}^p(t) = \dot{c}_{ko}(t) \quad k = 1,2,...,m_0 \\ d_{l0}^p(t) = \dot{d}_{l0}(t) \quad l = 1,2,...,n_0 \end{cases} \tag{10}$$

при нулевых начальных условиях $c_{k0}^p(0) = 0,\ d_{l0}^p(0) = 0$ и систему дифференциальных уравнений первой гармоники в виде

$$\begin{cases} \rho_l \sum\limits_{k=1}^{m_1} \dot{c}_{k1}^p(t)\left[\delta_{kj} + \left(\phi_{1k}^1, w_{j1}\right)\right] + \Omega_{j1}^2 c_{j1}(t) + \rho_l \sum\limits_{l=1}^{n_1} \dot{d}_{l1}^p(t)\left(\phi_{2l}^1, w_{j1}\right) = -\rho_l a_{st}(t)\left(\rho(z), w_{j1}\right) \\ j = 1,2,...m_1 \\ \left[\dot{d}_{i1}^p(t) + \kappa_{i1}^2 d_{i1}(t)\right]b_i + g\sum\limits_{k=1}^{m_1} c_{k1}(t)\left(\dfrac{\partial\phi_{1k}^1}{\partial n}, \phi_{2i}^1\right) = -a_{st}(t)(\rho, \phi_{2i}^1) \\ i = 1,2,...n_1 \\ c_{k1}^p(t) = \dot{c}_{k1}(t) \quad k = 1,2,...m_1 \\ d_{l1}^p(t) = \dot{d}_{l1}(t) \quad l = 1,2,...n_1 \end{cases} \tag{11}$$

при нулевых начальных условиях $c_{k1}^p(0) = 0,\ d_{l1}^p(0) = 0$.

Численные результаты. Чтобы убедится в надежности предложенного числового алгоритма проведено сравнение с результатами, полученными при помощи МКЭ для первой и нулевой гармоник. Рассмотрим цилиндрическую оболочку с плоским дном частично заполненную жидкостью.

Параметры резервуара следующие: радиус - R=1м, толщина - h=0.01м, длина L=2м, модуль упругости $E=2\cdot10^5$ МПа, коэффициент Пуассона ν=0.3, плотность материала ρ=7800 кг/м^3, плотность жидкости ρ_l=1000 кг/м^3. Уровень заполняющей жидкости – H=0.8 м. Граничные условия: $u_r=u_z=u_\theta=0$ при z=0 и r=R.

Мы анализируем связанную задачу вынужденных колебаний. Радиальное нагружение (рис. 1) было внезапно приложено на цилиндрическую поверхность резервуара, $q(r,z,t)=q_0\cos k\varphi(r,z)\exp(-t/\tau)$, где q_0=0.1 МПа, $\tau=14.2\cdot10^{-6}$ с. Время в конце $t_n=5\cdot10^{-3}c$.

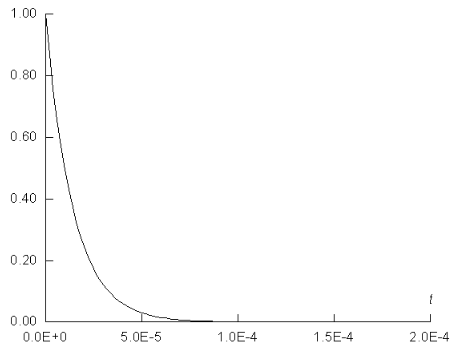


Рис. 1. Импульсное нагружение

Радиальное перемещение отклика было вычислено в четырех точках, точка 1 (узел 91) расположена на смоченной части стены, точка 2 (узел 121) принадлежит границе свободной поверхности жидкости, точка 3 (узел 69) находится вблизи основания, точка 4 (узел 161) находится на вершине стенки оболочки. На рис. 2-3 представлен отклик на вынужденное движение вычисленный предложенным методом – сплошная линия и конечно-элементным комплексом – штриховая линия.

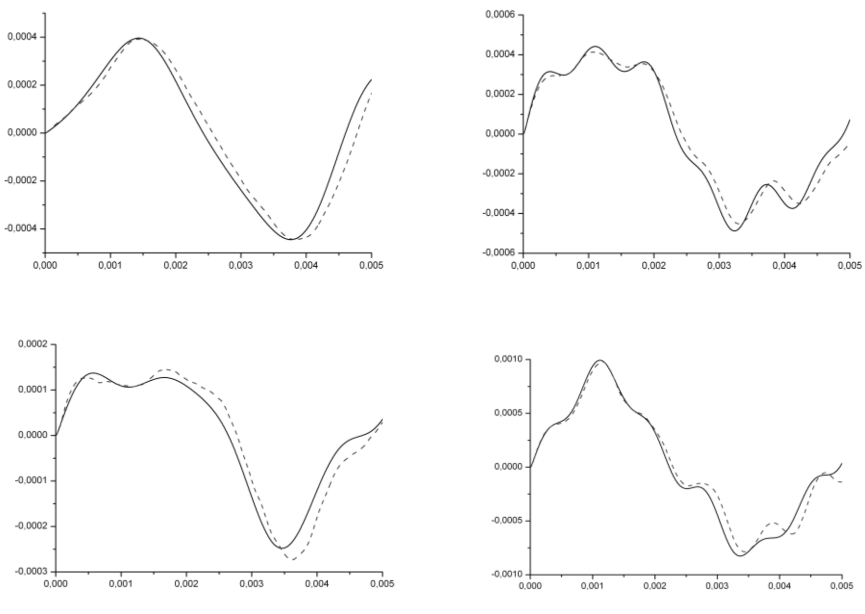


Рис. 2. Временная диаграмма радиального перемещения в точках 1, 2, 3, 4 (α=1)

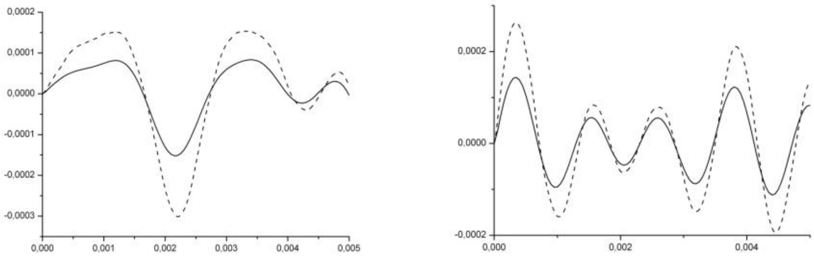


Рис. 3. Временная диаграмма радиального перемещения в точках 1, 2, (α=0)

Иллюстрации демонстрируют хорошее согласование результатов, полученных различными методами. Это свидетельствует о надежности метода и предложенного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Sanchez-Sanchez H. Structural behaviour of liquid filled storage tanks of large capacity placed in seismic zones of high risk in Mexico [Электронный ресурс] / H. Sanchez-Sanchez, S.C. Cortes, A.M. Dominguez // Proc. of 13th World Conference on Earthquake Engineering (1-6 of August 2004). — Vancouver, B.C., Canada, 2004. — Paper No 2665. — Режим доступа:http://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/13_2665.pdf.
2. Sanchez-Sanchez H. Seismic response of cylindrical tanks for oil [Электронный ресурс] / H. Sanchez-Sanchez, S.C. Cortes // Proc. of 14th World Conference on Earthquake Engineering (12-17 of October 2008). — Beijing, China, 2008. — Режим доступа: http://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/14_06-0156.PDF.
3. Jhung M.J. Impact analysis of a water storage tank [Электронный ресурс] / M.J. Jhung, J.C. Jo, S.J. Jeong // Nuclear Engineering and Technology. — 2006. — Vol. 38. — N 7. — P. 681—688. — Режим доступа: http://article.nuclear.or.kr/jknsfile/v38/JK0380681.pdf.
4. Strelnikova E. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid / E. Strelnikova, E. Yeseleva, V. Gnitko, V. Naumenko // Proc. of XXXII Conference "Boundary elements and other mesh reduction methods". Transaction: Modeling and Simulation. — New Forest: Wessex Institute of Technology, 2010. — V. 50. — P. 203—211.
5. Brebbia C.A. Boundary element techniques: theory and applications in engineering / C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel. — Berlin and New York: Springer-Verlag, 1984. — 464 p.

Гнитько Василий Иванович – старший научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

– нелинейные задачи статики и динамики оболочек, МКЭ и МГЭ.

Марченко Ульяна Евгеньевна – аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

– компьютерное моделирование статических и динамических процессов в механике сплошной среды.

Науменко Виталий Васильевич – доцент Харьковской Государственной Академии железнодорожного транспорта.

Научные интересы:

– математическое моделирование процессов плескания жидкости в резервуарах.

УДК [519.674:519.688]:62-11

С.И. Гоменюк, С.В. Чопоров

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ, ЗАДАННЫХ R-ФУНКЦИЯМИ, НА ШЕСТИГРАННЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Постановка проблемы. Исследование прочности и долговечности проектируемых инженерных конструкций является важной составляющей современной техники. В настоящее время для этих целей широко применяется компьютерное моделирование, позволяющее заменить длительное и дорогостоящее испытание опытного образца изучением соответствующих математических моделей. Большинство современных вычислительных методов предполагает замену исходного непрерывного объекта его некоторой конечной дискретной моделью. Например, в широко практически применяемом методе конечных элементов исходный континуальный объект заменяется дискретной моделью, состоящей их конечной совокупности непересекающихся геометрических областей простой формы – конечных элементов.

Множество физических объектов реального мира можно определить как сплошные тела, геометрическое моделирование которых можно рассматривать как процесс формализации представления геометрии существующего или воображаемого объекта. Наиболее общим методом определения множества точек, принадлежащих объекту, является введение предиката, являющегося индикатором принадлежности объекту точки пространства (неявное определение). Простейшей формой такого предиката будет ограничение на знак некоторой действительной функции [1]. Использование математического аппарата функций В.Л. Рвачева позволяет получить описание некоторого объекта как последовательности логических операций над неявными функциями в виде единой R-функции [2-4]. Например, функция вида:

$$S(x,y,z) = 1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \tag{1}$$

описывает эллипсоид, центр которого находится в точке (x_0, y_0, z_0), а полуоси равны a, b и c. Функции, соответствующие более сложным геометрическим объектам, могут быть получены конструктивно путем композиции более простых функций при помощи R-операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции одной из систем R-функций [2, 4]. Наиболее распространенная на практике система R-функций имеет вид:

$$\begin{gathered} \neg x \equiv -x, \\ x \wedge y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \vee y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}. \end{gathered} \tag{2}$$

Используя систему (2) можно получить, к примеру, R-функцию, соответствующую объединению пересечения куба и шара с цилиндрической ножкой (рис. 9).

$$\begin{gathered} Cube(x,y,z,a) = \left(a^2 - x^2\right) \wedge \left(a^2 - y^2\right) \wedge \left(a^2 - z^2\right), \\ Ball(x,y,z,R) = R^2 - x^2 - y^2 - z^2, \\ Cylinder_y(x,y,z,r,l) = \left(r^2 - x^2 - z^2\right) \wedge \left(l^2 - y^2\right), \\ W(x,y,z) = \left[Cube(x,y,z,0.8) \wedge Ball(x,y,z,1)\right] \vee Cylinder_y(x,y+0.8,z,0.4,0.8). \end{gathered} \tag{3}$$

Центральной проблемой применения данного подхода, обусловленной неявностью описания топологии геометрической области, является сложность построения первоначального множества опорных узлов на границе (поверхности) объекта.

Среди конечных элементов, используемых в пространстве, наиболее распространенными являются элементы тетраэдрической и шестигранной форм. Преимуществом первого типа элементов является большая топологическая гибкость, второго – возможность уменьшения размерности систем линейных алгебраических уравнений за счет использования меньшего количества элементов (необходимо использовать пять тетраэдров для представления элемента объема, представленного одним шестигранником, рис. 1).

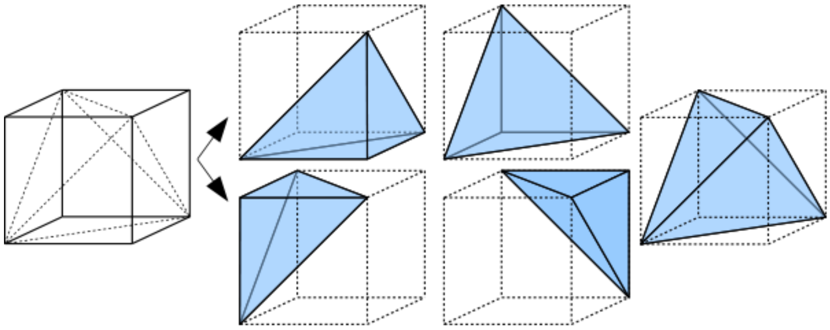


Рис. 1. Представление шестигранника пятью тетраэдрами

Однако использование шестигранных конечных элементов в методе конечных элементов позволяет получить более точное решение при меньшем количестве узлов. Действительно, функции формы линейного тетраэдрического конечного элемента имеют вид:

$$N_T(x,y,z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad \alpha_i \in R, i = \overline{0,3}, \tag{4}$$

а функции формы шестигранного конечного элемента:

$$N_H(x,y,z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 xy + \alpha_5 xz + \alpha_6 yz + \alpha_7 xyz, \\ \alpha_i \in R, i = \overline{0,7}. \tag{5}$$

Наличие нелинейных членов в соотношении (5) приводит к тому, что градиенты шестигранного конечного элемента (в отличии тетраэдрического) не постоянны и изменяются вдоль одной из координатных плоскостей. Таким образом, применение шестигранных конечных элементов является более предпочтительным в вычислительном плане.

В контрасте с вычислительными преимуществами сеток из четырехугольных или шестигранных элементов выступает сложность их генерации. Сетка шестигранных элементов является очень негибкой с геометрической точки зрения, что может быть показано следующим примером: пусть структурированная сетка, в которую необходимо добавить узел, используя только локальные перестроения. Хоть это и возможно в плоском случае (рис. 2), но в трехмерном пространстве не представляется возможным [5]. Таким образом, является не возможным использование алгоритмов генерации сеток шестигранных элементов методом вставки узла – техники, которая активно используется для генерации сеток тетраэдрических элементов (методы на основе критерия Делоне) [5].

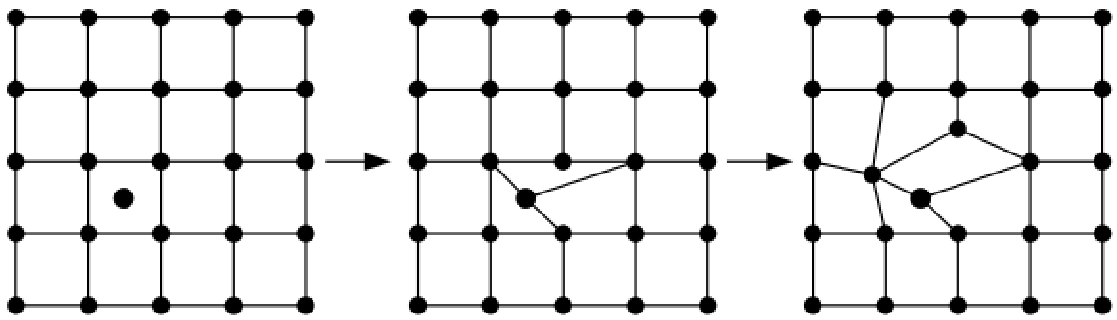


Рис. 2. Добавление узла к сетке четырехугольных элементов

Таким образом, разработка методов дискретизации трехмерных объектов, заданных при помощи *R*-функций, на шестигранные конечные элементы является сложной и актуальной задачей.

Анализ публикаций по теме исследования. Методы построения нерегулярной сетки шестигранных конечных элементов можно разделить на прямые и непрямые. Прямые методы используют непосредственное построение шестигранных ячеек внутри заданной границы, в то время как непрямые базируются на преобразовании некоторого исходного дискретного представления области.

Среди прямых методов можно выделить фронтальные методы (наиболее распространенной тут идеей является исчерпание области пласт за пластом, формируя таким образом и дискретизацию границы, и дискретизацию внутренней части области [6]) и методы, использующие блочную декомпозицию [7-9] или суперпозицию [10-12].

Методы декомпозиции и блочной декомпозиции основаны на идее (полуавтоматической или автоматической) декомпозиции тела на кубоподобыне блоки, для каждого из которых дискретизация может быть получена отображением на дискретизацию единичного куба, с последующим объединением дискретизаций частей. Для автоматизации процесса декомпозиции на блоки используются срединные поверхности. Достоинством данной группы методов является их высокая скорость и качество получаемой сетки. Основным недостатком – затруднительность их применения для дискретизации сложных нестандартных областей.

Основная идея методов суперпозиции заключается в использовании начальной сетки, которая может быть более или менее просто созданая для части пространства, содержащей объект, и последующей адаптации сетки к границе области. Ключевым шагом данной группы методов является генерация сетки высокого качества около границы объекта. Для адаптации начальной сетки могут быть использованы техники изоморфизма [10,11] и проекции. При всей прагматичности такого подхода результирующие алгоритмы данного типа методов является весьма трудоемкими для реализации [5].

Непрямые методы можно разделить на фронтальные, в основе которых идея послойной конвертации начальной сетки тетраэдров [13, 14], методы, использующие двойственное представление (STC-представление [15]) и методы поэлементной конвертации (например, на основе шаблонов). Преимуществом данной группы методов является отсутствие вырожденных элементов. Недостатком – необходимость построения качественной начальной дискретизации, что само по себе является трудоемкой задачей.

Цель статьи. Целью статьи является разработка методов и алгоритмов построения дискретного представления трехмерных тел, заданных при помощи *R*-функций, на шестигранные конечные элементы.

Основная часть. Пусть тело Ω представлено неявно: геометрическое место точек, соответствующих телу, определено неравенством . При этом $F(x, y, z) > 0$ во внутренних точках, $F(x, y, z) = 0$ – в граничных и $F(x, y, z) < 0$ – во внешних точках. Функция может быть получена как результат решения обратной задачи геометрии или как результат построения некоторой геометрической модели (например, результат интерполирования некоторого массива точек или результат агрегирования более простых функций методом R-функций [2-4]).

Использование метода R-функций при неявном представлении тела Ω требует учета особенностей такого представления при разработке алгоритмов получения дискретного представления. Неявное представление дает правило для проверки принадлежности точки Ω, однако, не дает правило генерации системы точек и топологии элементов, образующих Ω. Это делает более предпочтительным использование в качестве алгоритмической базы метода суперпозиции [10-12] совместно с сеточным методом и техникой изоморфизма на шаге адаптации пограничного слоя элементов. Тогда общий алгоритм получения дискретного представления тела заданного неявной функций можно представить схемой, приведенной на рис. 3.

На первом шаге алгоритма для формирования начальной сетки достаточно покрыть область равномерной сеткой с шагом h и определить значение R-функции в узлах сетки. Затем последовательно отсеивать, элементы, в узлах которых есть внешние точки или которые не соответствуют критерию близости к границе области (на расстоянии $\Delta = 0.5h$ есть внешние точки).

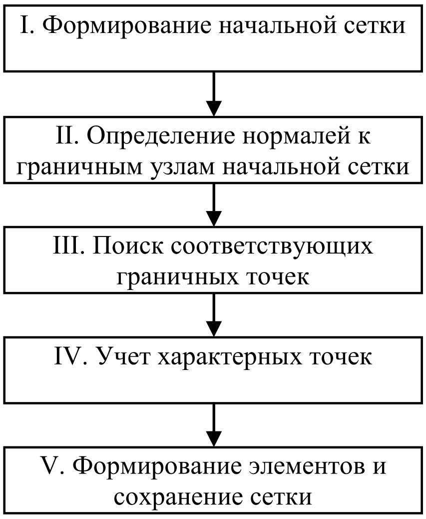


Рис. 3. Схема получения дискретного представления

Пусть $S = (V, E)$ – исходная сетка, где $V = \{v_i = (x_i, y_i, z_i)\}$ – множество узлов (упорядоченных троек координат), $E = \{e_j = (i_{j0}, i_{j1}, i_{j2}, i_{j3}, i_{j4}, i_{j5}, i_{j6}, i_{j7})\}$ – множество упорядоченных последовательностей номеров узлов, которые формируют ячейки. Тогда начальную сетку M определим формулой:

$$M = I(S), \tag{6}$$

где I – оператор который возвращает узлы внутренних элементов и сами внутренние элементы. При этом узел будет считаться внутренним, если на расстоянии $0.5\,h$ нет внешних или граничных точек:

$$i_{vertex}(v) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если}} \quad \forall \delta \in (0{,}0.5] \quad F(v \pm \delta h) > 0, \\ 0, & \text{\textit{если}} \quad \exists \delta \in (0{,}0.5]: \quad F(v \pm \delta h) \le 0, \end{cases} \tag{7}$$

Соответственно ячейка исходной сетки будет считаться внутренней (принадлежать начальной сетке), если все ее узлы внутренние:

$$i_{cell}\left(e_j\right)=\begin{cases}1, & \textit{если} \quad \forall i_{jk}\in e_j \quad i_{vertex}\left(v_{i_{jk}}\right)=1,\\ 0, & \textit{если} \quad \exists i_{jk}\in e_j : \ i_{vertex}\left(v_{i_{jk}}\right)=0.\end{cases} \tag{8}$$

Тогда оператор I (S) можно представить в виде:

$$I(S)=\{v_i \ \textit{если} \ \exists h_j \quad v_i : i_{cell}\left(h_j\right)=1, h_k \ \textit{если} \ i_{cell}\left(h_k\right)=1\}. \tag{9}$$

Граница полученной таким образом начальной сетки является многогранником, каждая грань которого является четырехугольником. Следовательно, ее можно рассматривать как неструктурированную сетку четырехугольных элементов Q (пример на рис. 4), для которой может быть получена изоморфная сетка Q' на границе тела. Для получения изоморфной сетки необходимо для каждого узла $v\in Q$ определить узел на границе тела $v'\in Q'$, соответственно, для каждого ребра $(v,w)\in Q$ ребро $(v',w')\in Q'$. Таким образом, каждому четырехугольнику $q\in Q$ будет соответствовать грань на границе тела $q'\in Q'$, которые совместно определяют шестигранный элемент.

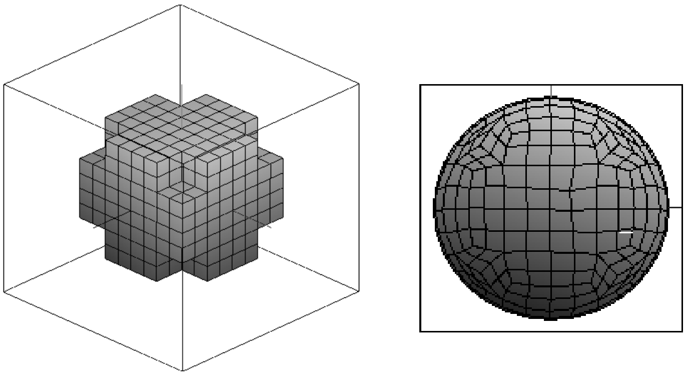


Рис. 4. Начальная сетка и изоморфная ей на границе шара

На втором шаге к каждому граничному узлу начальной сетки определяется нормаль как среднее арифметическое нормалей смежных в узле граней (рис. 5):

$$N(v)=\frac{1}{k}\sum_{v\in f_i} n_{f_i}, \tag{10}$$

где k – количество граней смежных в узле v; n_{f_i} – нормаль к i-й грани, содержащей v.

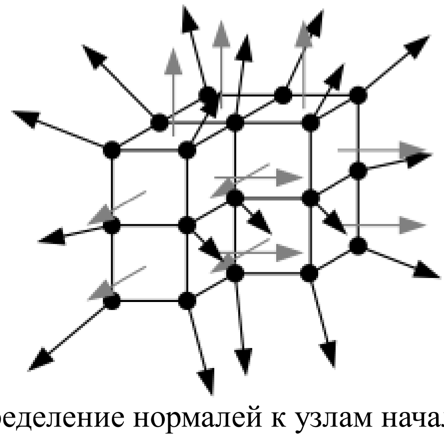


Рис. 5. Определение нормалей к узлам начальной сетки

На этом этапе могут проявится конфигурации начальной сетки (примеры на рис. 6), при которых нормали будут обладать нулевой длинной или их направление будет приводить к получению вырожденных элементов.

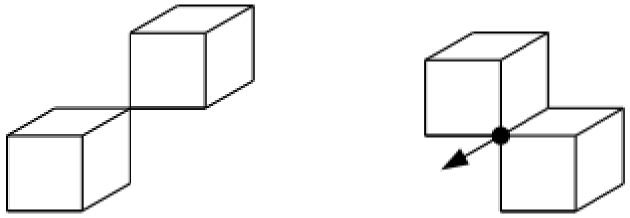


Рис. 6. Конфигурации начальной сетки, приводящие к вырожденным элементам

Устранить ситуации подобные изображенным на рис. 6 можно подбором шага h. Однако, так как при формировании начальной сетки были исключены из рассмотрения элементы, находящиеся на расстоянии ближе $0.5h$ к границе тела, тогда с целью автоматизации процесса устранения нежелательных конфигураций можно воспользоваться приемом двойного сгущения начальной сетки (идея которого изображена на рис. 5).

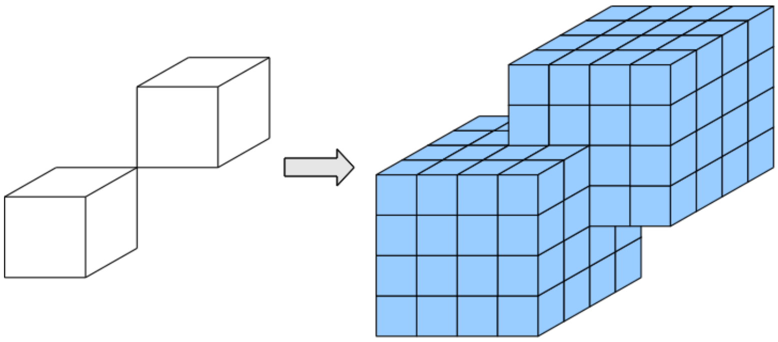


Рис. 7. Устранение ситуации, приводящей у нулевой нормали

На четвертом шаге происходит учет характерных точек (геометрических особенностей, концентраторов напряжений и т. д.), так как утеря таковых может приводить к значительной утери точности при использовании полученного дискретного представления численными методами. При этом характерные точки могут быть учтены как при помощи техники перемещения необходимого граничного узла, так и при помощи коррекции направления нормали соответствующего узла начальной сетки и последующей репроэкции.

На последнем шаге алгоритма при помощи техники изоморфизма формируются элементы, соединяя узлы начальной сетки с соответствующими узлами на границе (рис. 8).

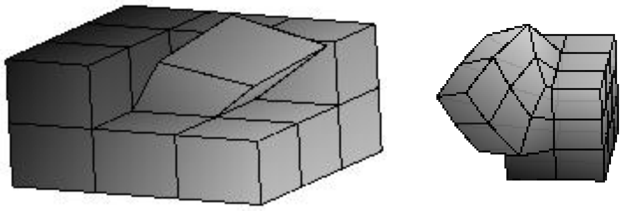


Рис. 8. Построение шестигранного элемента

Следует отметить, что в результате применения описанного подхода генерируются элементы приблизительно одинакового размера, что позволяет применять для последующего улучшения качества сеток методы на основе локального сглаживания Лапласа (некоторые примеры полученных сеток с помощью предложенного подхода представлены на рис. 9).

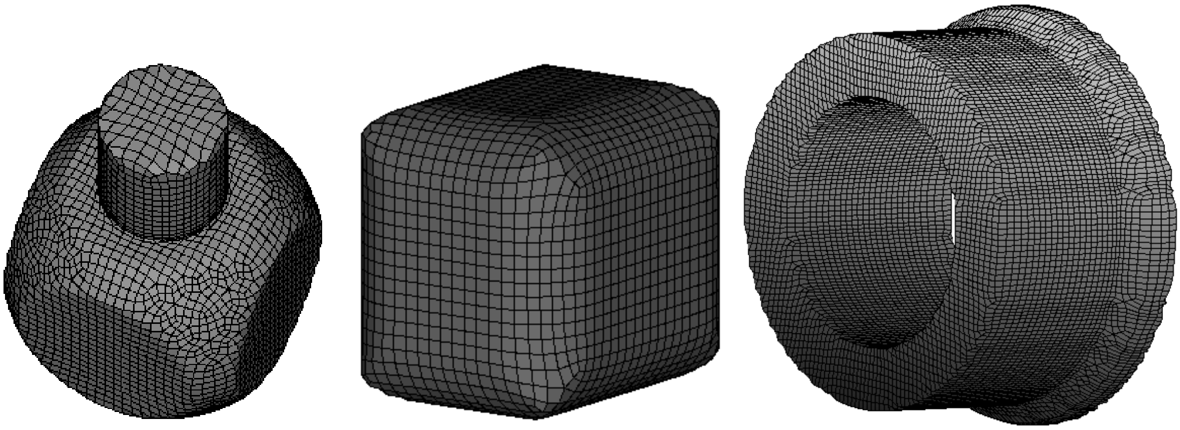


Рис. 9. Некоторые примеры дискретизации

Выводы. Таким образом, разработанная методика позволяет получать близкую к равномерной дискретизацию на шестигранные конечные элементы сложных трехмерных объектов и конструкций. Разработанные алгоритмы имеют линейную зависимость от количества точек в начальной сетке, а использованные в них простые геометрические операции позволяют минимизировать число вырожденных элементов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Farin G. Handbook of computer-aided geometric design / G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2002. – 848 p.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наукова думка, 1982. – 566 с.
3. Рвачев В.Л. Введение в теорию R-функций / В.Л. Рвачев, Т.И. Шейко // Проблемы машиностроения. – 2001. – Т. 4, № 1–2. – С. 46-58.
4. Shapiro V. Semi-analytic geometry with R-functions / V. Shapiro, dedicated to V.L. Rvachev // Acta Numerica. – 2007. – № 16. – P. 239 – 303.
5. Thompson J.F. Hand book of grid generation / Joe F. Thompson, Bharat K. Soni, Nigel P. Weatheril. – New York: CRC Press, 1999. – 1200 p.
6. Staten M.L. Unconstrained Paving & Plastering: A New Idea for All Hexahedral Mesh Generation / M.L. Staten, S.J. Owen, T.D. Blacker // Proceedings, 14th International Meshing Roundtable. – Sandia National Laboratories: Springer-Verlag, 2005. – P. 399-416.
7. Armstrong C.G. Medials for Meshing and More / C.G. Armstrong, D.J. Robinson, R.M. McKeag, T.S. Li, S.J. Bridgett, R.J. Donaghy, C.A. McGleenan // Proceedings, 4th International Meshing Roundtable. – Sandia National Laboratories, 1995. – P. 277-288.
8. Holmes D.J. Generalized Method of Decomposition Solid Geometry into Hexahedron Finite Elements / D.J. Holmes // Proceedings, 4th International Meshing Roundtable. – Sandia National Laboratories, 1995. – P. 141-152.
9. Liu S.-S. Automatic Hexahedral Mesh Generation by Recursive Convex and Swept Volume Decomposition / S.-S. Liu, R. Gadh // Proceedings, 6th International Meshing Roundtable. – Sandia National Laboratories, 1997. – P. 217-231.
10. Schneiders R. A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders // Engineering with Computers. – 1996. – № 12. – P. 168-177.

11. Schneiders R. Octree-based Generation of Hexahedral Element Element Meshes / R. Schneiders, R. Schindler, F. Weiler // 5th Annual International Meshing Roundtable. – 1996. – P. 205-216.
12. Ito Y. Octree-based reasonable-quality hexahedral mesh generation using a new set of refinement templates / Yasushi Ito, Alan M. Shih, Bharat K. Soni // International Journal For Numerical Methods in Engineering. – 2009. – № 77(13). – P. 1809-1833.
13. Owen S.J. H-Morph: An Indirect Approach to Advancing Front Hex Meshing / S.J. Owen, S. Saigal // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – №1(33). – P. 289-312.
14. Owen S.J. Hex-domain mesh generation using 3D constrained triangulation / S.J. Owen // Computer Aided Design. – 2001. – №3(33). – P. 211-220.
15. Murdoch P. The spatial twist continuum: A connectivity based method for representing all-hexahedral finite element meshes / P. Murdoch, S.E. Benzley, T.D. Blacker, S.A. Mitchel // Finite Elements in Analysis and Design. – 1997. – №28. – P. 137-149.

ГОМЕНЮК Сергей Иванович – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, декан математического факультета Запорожского национального университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование, метод конечных элементов, визуализация научной информации, САПР.

ЧОПОРОВ Сергей Викторович - заведующий научно-методической лабораторией геоинформационных технологий, Запорожский национальный университет.

Научные интересы:

– математическое моделирование, метод конечных элементов, визуализация научной информации, САПР.

УДК 541.536

В.І.Горбенко

АЛГОРИТМ ТЕРМОДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНОСУ В СИСТЕМІ "ГАЗ-ТВЕРДЕ ТІЛО"

Постановка проблеми. Дану роботу присвячено алгоритму, що дозволяє застосовувати методи рівноважної термодинаміки до проведення моделювання проточної системи, швидкість хімічних реакцій в якій значно перевищує швидкість масопереносу як реагентів, так і продуктів реакцій.

Аналіз публікацій з теми дослідження. Експериментальні дослідження стають більш продуктивними, якщо перед ними проводиться прогностичний аналіз досліджуваної системи. Для моделювання фізико-хімічних процесів в складних гетерогенних системах застосовуються різноманітні теоретичні методи [1-4]. Найбільшу продуктивність серед них мають методи рівноважної термодинаміки [3,5-7], що разом з достатньо добрим узгодженням з експериментальними даними та значною базою термодинамічних даних робить їх найбільш привабливими для експрес-аналізів досліджуваних систем.

Основна частина. Математична модель гетерогенної системи «газова фаза – тверде тіло» представляється системою рівнянь, що складається з k рівнянь для кожної речовини в газоподібному стані, R рівнянь для кожної речовини в конденсованому стані, m рівнянь матеріального балансу для кожного хімічного елементу в системі та одного рівняння стану газової фази:

$$\left.\begin{aligned}
&S_i^\circ - \frac{I_{ni}}{T} - R_\circ \ln \frac{R_\circ T M_i}{v} + R_\circ \ln p^\circ + \sum_{j=1}^{m} n_{ij}\lambda_j = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,k) \\
&S_r^\circ - \frac{U_{nr}}{T} + \sum_{j=1}^{m} n_{rj}\lambda_j = 0, \quad (r = 1,2,\ldots,R) \\
&[El_j] - \sum_{i=1}^{k} M_i n_{ij} - \sum_{r=1}^{R} M_r n_{rj} = 0, (j = 1,2,\ldots,m) \\
&pv - R_\circ T \sum_{i=1}^{k} M_i = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

де S_i°, S_r° – стандартна ентропія i–тої газоподібної та r–тої конденсованої речовини, відповідно; I_{ni} – повна ентальпія утворення i–тої газоподібної речовини; U_{nr} – повна внутрішня енергія r–тої конденсованої речовини; M_i, M_r – число молей i–тої газоподібної та r–тої конденсованої речовини, відповідно; $R_\circ$ – газова стала; v – питомий об'єм; λ_j – невизначені множники Лагранжа; p° – стандартний тиск (101325 Па); p – загальний тиск в системі; n_{ij}, n_{rj} – стехіометричні коефіцієнти j-того елементу в i-тій та r-тій речовині, відповідно; $[El_j]$ –кількість молей j-того елементу.

Для проведення розрахунків система представлялась з чотирьох взаємодіючих частин (рис.1): джерела газоподібних реагентів (I), область змішування та реакцій газів (II), область твердотілого зразка (III), система відводу газоподібних продуктів реакцій (IV). Фізико-хімічні процеси, що змінюють склад поверхні твердотілого зразка, відбуваються в частині (III). Система рівнянь (1) використовувалась для проведення розрахунків фізико-хімічного складу частин II та III. При моделюванні вважалось, що в частині I реакції, що змінюють співвідношення між реагентами, не відбуваються і тому вихідні реагенти та їх співвідношення можуть бути точно визначеними та заданими.

При моделюванні проточної системи до математичної моделі (1) додавались рівняння, що відображають як підведення реагентів до частин II та III, так і відвід продуктів реакції.

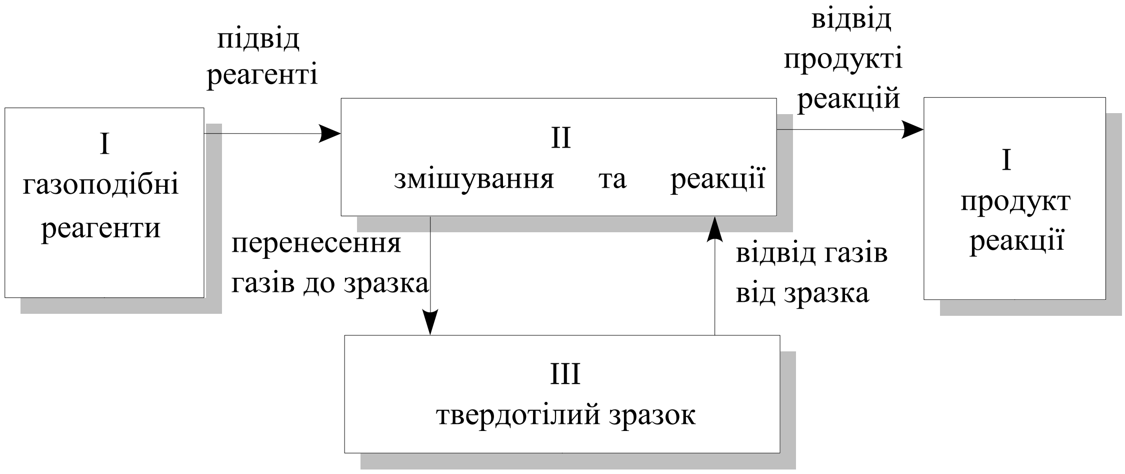


Рис.1. Загальна схема проточної системи “газ – тверде тіло”

Відповідно до принципу локальної рівноваги [8] швидкість зміни стану частин II та III повинна бути значно меншою в порівнянні зі швидкостями елементарних процесів в них. Для масопереносу, умовою цього принципу є співвідношення між градієнтом концентрації індивідуальної речовини, її середньою величиною n_i та довжиною вільного пробігу часток λ:

$$\frac{\Delta n_i}{\Delta x} << \frac{n_i}{\lambda},$$

де Δn_i – зміна вмісту i-тої речовини на відстані Δx.

Наведена умова буде виконуватись, якщо в досліджуваній системі підвід реагентів та відвід продуктів реакції є лімітуючими стадіями взаємодії в ній. В цьому випадку можна вважати, що на протязі деякого часу Δt матеріальний баланс в частинах II та III залишається незмінним, тому для розрахунків складу системи можна використовувати систему рівнянь (1). Усі зміни матеріального балансу, що відбуваються за час Δt, враховуються по його завершенню.

Зміна матеріального балансу в системі обумовлено наявністю потоків газоподібних речовин і описується рівнянням:

$$\frac{\partial [El_j]}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{k} n_{ij} \cdot div\, \vec{j_i}\ ,$$

де $\vec{j_i}$ – потік i-тої речовини.

Якщо вважати, що потік речовин за час Δt залишається незмінним, то величину зміни матеріального балансу можна визначити у вигляді:

$$\Delta [El_j] = -\sum_{i=1}^{k} \left(n_{ij} \cdot div\, \vec{j_i} \right) \cdot \Delta t\ . \tag{2}$$

Це дозволяє в розрахунковій системі послідовно визначати зміну матеріального балансу:

$$[El_j](t+\Delta t) = [El_j](t) + \Delta [El_j](t+\Delta t), \tag{3}$$

де $\Delta[El_j](t+\Delta t)$ – зміна матеріального балансу, що відбулася в системі з моменту часу t на протязі Δt.

Тому що

$$div\,\vec{j_i} = -\frac{\partial M_i}{\partial t},$$

то для виконання розрахунків достатньо прийняти, що

$$\Delta t \cdot div\,\vec{j_i} \approx -\Delta M_i\,.$$

Тоді рівняння матеріального балансу j-того елементу буде мати вигляд:

$$[El_j](t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}\left(M_i(t) + \Delta M_i(t+\Delta t)\right) + \sum_{r=1}^{R} n_{rj} M_r(t)\,. \quad (4)$$

Використання рівняння (4) в моделюванні дозволяє виявити тенденції розвитку складу фаз системи з часом, що в багатьох реальних випадках є цілком достатнім. Величина ΔM_i або задається на початку розрахунків, або визначається після кожної ітерації. В найбільш простій розрахунковій моделі після чергового циклу обчислень весь склад газової фази видаляється із системи в якості продуктів реакції. Поповнення системи здійснюється за рахунок підводу газоподібних реагентів у співвідношенні, яке задається на початку моделювання.

Результати моделювання:

Наведену техніку було застосовано до моделювання зміни складу системи H-O-In-P. До складу системи було включено 22 речовини в газоподібному стані та 9 речовин в конденсованому стані. В якості твердотілого зразка було обрано фосфід індію, тому початкове співвідношення між атомами *In* та *P* дорівнювало 1.

Для моделювання різної вихідної ступіні окислення зразка в циклі $N_t = 1$ розрахунок проводився для різних співвідношень матеріального балансу $[O]/[H]$. Так для «формування» зразка, що не має окислів, перший розрахунковий цикл проводився при $[O]/[H]$=0. При співвідношенні $[O]/[H]$=1 близько 1/3 речовин в конденсованому стані складали оксиди, а при $[O]/[H]$=5 в складі конденсованих фаз були тільки окисли індію та фосфору.

Проведене моделювання показало, що механізм змін складу системи має чутливість як до співвідношення $[O]/[H]$ в газовому потоці, так і до вихідної ступені окислення зразка. Кінцевий результат змін в складі системи залежить тільки від величини $[O]/[H]$ в газовому потоці. Так система розвивається в напрямку збільшення вмісту фази твердотілого *In,* якщо співвідношення $[O]/[H]$ в газовому потоці дорівнювало 0.1 (рис.2). Збільшення атомів кисню в потоці газових реагентів веде до утворення та збереженню фази In_2O_3 (рис.3).

Висновки та перспективи поданних досліджень. Запропоновано алгоритм перерахунку матеріального балансу в термодинамічній системі відповідно до моделі проточного реактору. Показано, що перерахунок може робитись з деякою періодичністю Δt, яка задається при моделюванні. Введення до розрахунків такого часового параметру дозволяє виявляти еволюційні зміни в складі досліджуваних систем. Наведений підхід було застосовано до комп'ютерного моделювання багатокомпонентної системи H-O-In-P. Було встановлено етапи та механізми зміни складу системи, а також умови утворення на зразку *InP* фази *In* та оксидів P_2O_5 і In_2O_3.

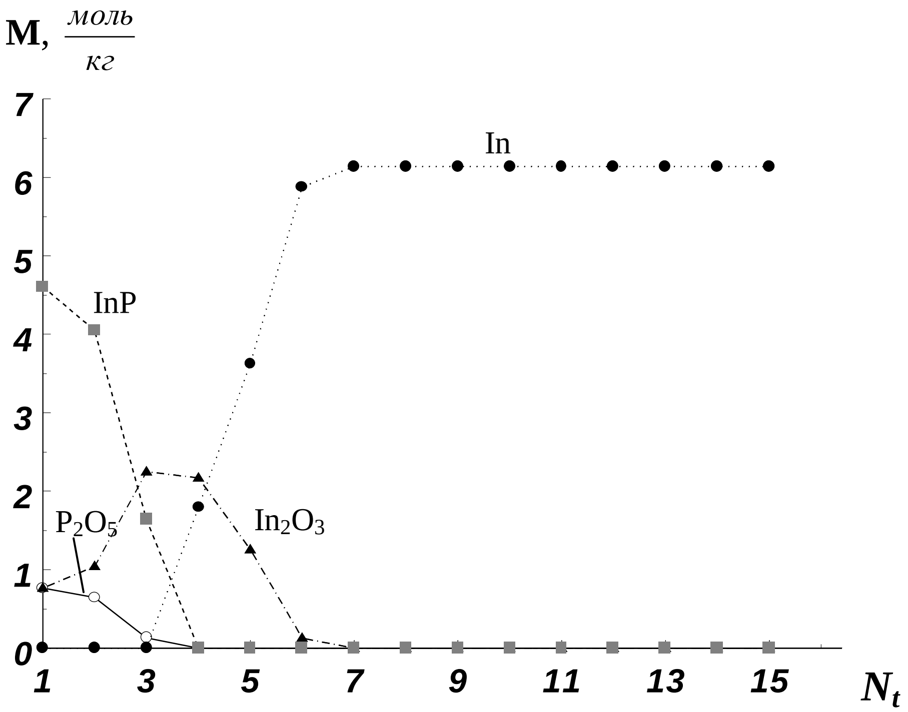


Рис.2. Результат моделювання зміни складу конденсованих фаз при Т=400К, початковому матеріальному балансі [O]/[H]=1.0, [In]/[H]=[P]/[H]=1 та матеріальному балансі в газовому потоці [O]/[H]=0.1

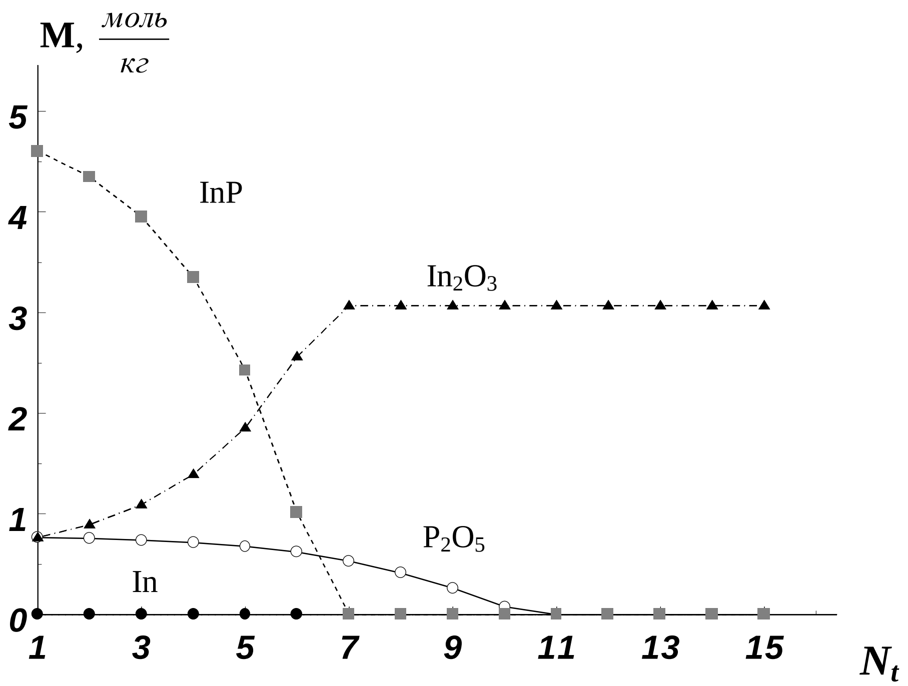


Рис.3. Результат моделювання зміни складу конденсованих фаз при Т=400К, початковому співвідношенні матеріального балансу [O]/[H]=1.0, [In]/[H]=[P]/[H]=1 та матеріальному балансі в газовому потоці [O]/[H]=0.4

ЛІТЕРАТУРА:

1. Математические методы химической термодинамики: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1982. – 220 с.
2. Математические методы в химической кинетике: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 285 с.
3. Сурис А.Л. Плазмохимические процессы и аппараты/ А.Л. Сурис. – М.: Химия, 1989. – 304 с.
4. Hinchliffe A. Modelling molecular structures/ A. Hinchliffe. – N.Y.: Wiley, 1995. – 336 p.
5. Gibbs J.W. Elementary principles in statistical mechanics/ J.W. Gibbs. – N.Y.: Scribner's sons, 1902. – 208 p.
6. Гиббс Дж.В. Термодинамика. Статистическая механика / Дж.В. Гиббс; [пер. с англ., под ред. Д.И.Зубарева]. – М.: Наука, 1982. – 584 с.
7. Глазов В.М. Химическая термодинамика и фазовые равновесия/ В.М. Глазов, Л.М. Павлова. – М.: Металлургия, 1988. – 560с.
8. Пригожин И. Химическая термодинамика/ И. Пригожин, Р. Дэфэй; [пер. с англ.; под ред. В.А.Михайлова]. – Новосибирск: Наука, 1966. – 509с.

ГОРБЕНКО Віталій Іванович – к.ф.-м.н., доцент кафедри програмування та інформаційних технологій Класичного приватного університету (м.Запоріжжя).

Наукові інтереси:

– комп'ютерне моделювання взаємодії в складних фізико-хімічних системах;

– алгоритми паралельних та розподілених обчислень.

УДК 514.75

М.Ф. Гребенюк, В.І. Макаров, М.В. Терехова

ІНВОЛЮТИВНІСТЬ ПРОСТОРІВ АФІННОЇ ЗВ′ЯЗНОСТІ

Постановка проблеми. У геометрії підбагатовидів грассманова різноманіття, яка інтенсивно розвивається, а також у геометрії різноманіть пар фігур дослідження розподілів, гіперсмуг, смуг, поверхонь повного і неповного рангу займає важливе місце у зв'язку з застосуваннями в прикладній геометрії, механіці, теоретичній фізиці, варіаційному численні. Наукова проблема полягає у необхідності побудови і дослідження нових геометричних моделей багатовимірних просторів на якісно новому рівні, а також методів їх реалізації у промисловості.

Аналіз досліджень і публікацій. При вивченні гіперсмуг багатовимірних просторів головним напрямком досліджень є подвійні зв'язності, асоційовані з ними. Теорія зв'язності у різних просторах становить важливий напрям досліджень сучасної диференціальної геометрії. Початок цієї теорії поклала у 1917 р. робота Леві-Чівіта про паралельне перенесення вектора у рімановому просторі. Ця ідея знайшла важливі застосування в загальній теорії відносності і була узагальнена в різних напрямках. Для побудови єдиної теорії поля Г. Вейль дав поняття простору афінної зв'язності. Р. Keніг розглядав лінійні зв'язності у векторному розшаруванні над областю числового простору. У 1926 році Е. Картан ввів загальне поняття неголономного простору з фундаментальної групою G. Зв'язок між концепціями Кеніга і Картана встановив І.А. Схоутен. У 1950 р. В.В. Вагнер і Ш. Ересман незалежно один від одного ввели загальне поняття зв'язності в розшарованому просторі.

Поняття нормальної зв'язності у проективному просторі ввів А. П. Норден [6] (він називає таку зв'язність зовнішньою). Подальший розвиток теорії зв'язності із залученням методів Е. Картана і теорії геометричних об'єктів дано в роботах Г.Ф. Лаптєва, де він ототожнив поняття зв'язності, що виникло як узагальнення поняття паралельного перенесення, з поняттям геометричного об'єкта спеціального виду. Об'єкт зв'язності, відповідно до теорії Г.Ф. Лаптєва [1, 4], є геометричним об'єктом щодо диференціальної групи відповідного порядку (наприклад, проективної диференціальної групи). Нарис подальшого розвитку теорії зв'язності наведений у роботі Ю.Г. Лумісте [5].

У даний час (у зв'язку з актуальністю проблеми) продовжуються дослідження з теорії зв'язності на різних підбагатовидах класичних просторів. Перш за все, відзначимо цикл робіт А.В. Чакмазяна [11–12] по вивченню підбагатовидів проективного, афінного, проективно-метричного, евклідового просторів із залученням зв'язності у нормальних розшаруваннях.

Потім, ряд робіт А.В. Столярова [8], який вводить поняття двоїстої нормальної зв'язності на гіперсмузі і гіперсмужному розподілі простору проективної зв'язності. Конструкція подвійних просторів з проективною, афінною і нормальними зв'язностями, розроблена А.В. Столяровим, дозволяє істотно просунутися у вивченні (дослідженні) геометрії оснащених підбагатовидів (у тому числі і неголономних). Загальноафінна і центральнопроективна теорія гіперсмуг досліджується в ряді робіт П.М. Олонічева [7].

Постановка завдання. Отримати закон перетворення форм афінних зв'язностей, довівши тим самим подвійність просторів побудованих зв'язностей, індукованих з гіперсмугою багатовимірних неевклідового простору.

Основна частина. У роботі продовжені дослідження, викладені в статтях [2, 9–10].

Нехай в проективному просторі P_n задано невироджену гіперквадрику:

$$q'_{IJ}x^I x^J = 0, \quad q'_{IJ} = q'_{JI}, \quad \det\|q'_{IJ}\| \neq 0 \quad , \qquad (1)$$

причому в канонічному вигляді її рівняння менше з чисел коефіцієнтів одного знаку рівне ℓ. Тоді можна визначити підгрупу колінеації простору P_n, що зберігає цю гіперквадрику, а отже, і відповідну проективну метрику. Одержаний таким чином метричний проективний простір з цією фундаментальною групою назвемо [3] розширеним неевклідовим простором ${}^{\ell}S_n$ індексу ℓ, а гіперквадрику (1) – його абсолютом.

Розглянемо у просторі ${}^{\ell}S_n$ плоский елемент (A,τ), що складається з точки A та інціндентної їй гіперплощини τ.

Гіперсмугою $SH_r \subset {}^{\ell}S_n$ називається r-параметричний багатовид таких плоских елементів (A,τ), що точка A описує поверхню V_r, а гіперплощина $\tau(A)$ дотикається до площини V_r в відповідних точках $A \in V_r$. Поверхня V_r називається базисною поверхнею гіперсмуги SH_r, а гіперплощини $\tau(A)$ називаються головними дотичними гіперплощинами гіперсмуги SH_r.

Гіперсмуга SH_r називається регулярною, якщо характеристика $X_{n-r-1}(A)$ та дотична площина $T_r(A)$ базисної поверхні V_r гіперсмуги SH_r в кожній точці $A \in V_r$ знаходяться в загальному положенні, тобто, не мають спільних прямих.

Нехай в неевклідовому просторі ${}^{\ell}S_n$ задано регулярну гіперсмугу SH_r. В просторі ${}^{\ell}S_n$ гіперсмуга SH_r стосовно рухомого автополярного репера $\{A_o, A_1, \ldots, A_n\}$ визначається у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\omega_o^n = 0, \quad \omega_o^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^n = 0, \quad \omega_n^o = 0, \quad \omega_n^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^o = 0,\\
&\omega_i^n = a_{ij}\omega^j, \quad \nabla a_{ij} = -a_{ij}\omega_n^n - a_{ijk}\omega^k,\\
&\omega_\alpha^i = b_{\alpha j}^i\omega^j, \quad \nabla b_{\alpha j}^i = b_{\alpha jk}^i\omega^k,\\
&\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha\omega^j, \quad \nabla b_{ij}^\alpha = b_{ijk}^\alpha\omega^k,\\
&\omega_i^o = -\varepsilon_{oi}\omega^i, \quad \omega_n^i = -\varepsilon_{in}a_{ij}\omega^j,
\end{aligned}$$

при цьому $b_{\alpha j}^i a_{i\ell} = b_{\alpha\ell}^i a_{ij}, b_{ik}^\alpha = -\varepsilon_{\alpha i} b_\alpha^{ij} a_{jk}, b_{\alpha k}^i = b_\alpha^{ij} a_{jk}$, функції $b_{\alpha jk}^i$ симетричні за індексами j, k.

Системи величин $\Gamma_2 = \{a_{ij}, b_{\alpha j}^i\}, \Gamma_3 = \{\Gamma_2, a_{ijk}, b_{\alpha jk}^i\}$ утворюють фундаментальні об'єкти відповідно другого та третього порядків гіперсмуги $SH_r \subset {}^{\ell}S_n$.

Знаходимо закон перетворення форм ω_I^J в наступнім вигляду:

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}_o^n = \omega_o^n = 0, \quad \overline{\omega}_o^\alpha = \omega_o^\alpha = 0, \quad \overline{\omega}_\alpha^n = \omega_\alpha^n = 0, \quad \overline{\omega}_n^o = \omega_n^o = 0,\\
&\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_o^o = -\omega_n^n, \quad \overline{\omega}_i^n = -a_{ik}\omega^k, \quad \overline{\omega}_i^o = a_{ik}\omega_n^k, \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i\omega_n^n + a^{is}a_{sjk}\omega^k, \quad \overline{\omega}_\gamma^\alpha = -\omega_\alpha^\gamma, \quad \overline{\omega}_n^i = -a^{ik}\omega_k^o, \qquad (2^*)\\
&\overline{\omega}_i^\alpha = -a_{ik}\omega_\alpha^k, \quad \overline{\omega}_\alpha^i = -a^{ik}\omega_k^\alpha, \quad \overline{\omega}_n^\alpha = -\omega_\alpha^o = 0, \quad \overline{\omega}_\alpha^o = \omega_n^\alpha = 0
\end{aligned}$$

Відповідно до результатів, приведених в праці [6], перетворення форм ω_I^J за законом (2) є майже інволютивним, причому інволютивність порушується лише по відношенню до форм (2*).

Із співвідношень (2) отримуємо

$$\overline{\omega}_i^n = \overline{a}_{ij}\overline{\omega}^j, \qquad (3)$$

де $\quad \bar{a}_{ij} = -a_{ij}$.

Згідно рівнянь (3) знаходимо

$$d\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{ij}\bar{\omega}^{\mathrm{o}}_{\mathrm{o}} - \bar{a}_{kj}\bar{\omega}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{i}} - \bar{a}_{ik}\bar{\omega}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{j}} = \bar{a}_{ijk}\omega^{\mathrm{k}}, \tag{4}$$

де $\quad \bar{a}_{ijk} = a_{ijk}$.

За результатом роботи [10] форми афінної зв'язності $\overset{1}{\nabla}$, внутрішнім чином приєднаної до гіперсмуги SH_r, мають вигляд:

$$\omega^{\mathrm{i}}, \quad \overset{1}{\theta}{}^i_j = \omega^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}} - \left(H^{\mathrm{i}}_{\beta} b^{\beta}_{jk} + H^i_n a_{jk}\right)\omega^{\mathrm{k}},$$

де

$$H^{\mathrm{j}}_{\beta} = b^{\mathrm{j}}_{\beta\mathrm{i}} L^{i\ell} d_{\ell}, \quad \nabla_{\delta} H^{\mathrm{j}}_{\beta} = 0,$$

$$H^{\mathrm{j}}_n = a^{ji}\ell_{ik\ell}L^{k\ell}, \quad \nabla_{\delta} H^{\mathrm{j}}_n = 0,$$

причому тензори H^{j}_{β} *и* H^{j}_n разом з тензорами

$$H^o_n = a^{ij}L_{ij}, \quad \nabla_{\delta} H^{\mathrm{o}}_n = H^o_n \pi^{\mathrm{n}}_{\mathrm{n}},$$

$$H^{\mathrm{o}}_{\alpha} = B_{\alpha}, \qquad \nabla_{\delta} H^{\mathrm{o}}_{\alpha} = 0$$

внутрішнім чином визначають (n–r–1)–вимірну площину Е.Картана $\pi_{n-r-1}=[K_n, K_{\alpha}]$, де $K_n = A_n + H^o_n A_o + H^i_n A_i, \quad K_{\alpha} = A_{\alpha} + H^o_{\alpha} A_o + H^i_{\alpha} A_i$.

Компоненти тензора кручення–кривини $\overset{1}{R}{}^i_{jkp}$ [10] мають такий вигляд::

$$\begin{aligned}\overset{1}{R}{}^i_{jkp} = 2\Big[&H^i_{\beta[\mathrm{p}} b^{\beta}_{|j|k]} + H^i_{n[p} a_{|j|k]} + b^{\alpha}_{j[k} b^i_{|\alpha|\mathrm{p}} - a_{j[k} a_{|i|p]}\varepsilon_{\mathrm{in}} + \varepsilon_{\mathrm{oj}}\delta^{\mathrm{i}}_{[\mathrm{k}}\delta^{\mathrm{j}}_{\mathrm{p}]} - \\ &- H^{\ell}_{\beta} H^{\mathrm{i}}_{\gamma} b^{\beta}_{j[k} b^{\gamma}_{|\ell|p]} - H^{\ell}_n H^{\mathrm{i}}_{\gamma} a_{j[k} b^{\gamma}_{|\ell|p} + H^{\ell}_{\beta} H^{\mathrm{i}}_n b^{\beta}_{j[k} a_{|\ell|p]} + H^{\ell}_n H^i_n a_{j[k} a_{|\ell|p]}\Big].\end{aligned} \tag{5}$$

Другий простір афінної зв'язності визначимо системою форм [10]:

$$\omega^{\mathrm{i}}, \quad \overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j - \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}\ \omega^{\mathrm{k}}.$$

де

$$\Delta\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jkp}\ \omega^{\mathrm{p}}. \tag{6}$$

Рівняння (6) задовольняють наступні охвати:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} = a^{i\ell} a_{\ell jk}. \tag{7}$$

Таким чином, форми афінної зв'язності $\overset{2}{\nabla}$ мають вигляд:

$$\omega^{\mathrm{i}}, \quad \overset{2}{\theta}{}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}} = \overset{1}{\theta}{}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}} - a^{i\ell} a_{\ell jk}\omega^{\mathrm{k}}. \tag{8}$$

Компоненти тензора кручення–кривини $\overset{2}{R}{}^i_{jks}$ цього простору мають такий вигляд [10]:

$$\begin{aligned}\overset{2}{R}{}^i_{jks} = \overset{1}{R}{}^i_{jks} + 2\Big(&- a^{m\ell} a^{ip} a_{\ell j[k} a_{|pm|s]} - a^{m\ell} H^i_{\beta} a_{\ell j[k} b^{\beta}_{|m|s]} - a^{m\ell} H^i_n a_{\ell j[k} a_{|m|s]} + \\ &+ a^{i\ell} H^m_{\beta} a_{\ell m[k} b^{\beta}_{|j|s]} + a^{i\ell} a_{\ell j[ks]} + a^{i\ell} H^m_n a_{\ell m[k} a_{|j|s]} - a^{i\ell p} a_{p[k} a_{|\ell j|s]}\Big).\end{aligned} \tag{9}$$

Форми афінної зв'язності $\overset{1}{\nabla}$ через форми зв'язності $\overset{2}{\nabla}$, згідно (8), (2)–(4), записуються таким чином:

$$\overset{1}{\theta}{}^i_j = \overset{2}{\theta}{}^i_j - \bar{a}^{i\ell}\bar{a}_{\ell jk}\omega^{\mathrm{k}}.$$

Отже, форми афінних зв'язностей $\overset{1}{\nabla}$ та $\overset{2}{\nabla}$ перетворюються одна в одну за інволютивним законом, внаслідок чого простори афінної зв'язності є двоїстими. Справедливе наступне твердження:

З гіперсмугою SH_r індукується два двоїстих простори афінної зв'язності $\overset{1}{\nabla}$ та $\overset{2}{\nabla}$ (двоїстість стосовно перетворення за законом (2)). Тензори кручення–кривини цих просторів мають структуру (5) і (9) відповідно.

Двоїсті афінні зв'язності без кручення на регулярній гіперсмузі $H_m \subset P_n$, оснащеної в сенсі А.П. Нордена, розглядались А.В.Столяровим в праці [8]. У даному випадку двоїсті афінні зв'язності $\overset{1}{\nabla}$ та $\overset{2}{\nabla}$ побудовано за допомогою оснащення Е. Картана, причому оснащуюча площина π_{n-r-1} приєднана до гіперсмуги SH_r внутрішнім чином в диференціальному околі другого порядку твірного елемента цієї гіперсмуги.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Отримані результати доповнюють загальну теорію різноманіть багатовимірних просторів і можуть бути використані в подальших дослідженнях з теорії смуг багатовимірних афінних та проективних просторів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований / Г.Ф. Лаптев // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т.2. – С. 275–382.
2. Косаренко М.Ф. Поля геометрических объектов регулярной гиперполосы $SH_r \subset {}^{\ell}S_n$. Дифференциальная геометрия многообразий фигур / М.Ф. Косаренко // Сб. научн. тр. Калинингр. ун-т. – Калининград, 1982. – Вып.13. – С. 38–44.
3. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометри / Б.А. Розенфельд. – М.: Гостехиздат, 1955. – 744 с.
4. Лаптев Г.Ф. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности 1 / Г.Ф. Лаптев, М.Н. Остиану // Тр. геометр. семинара. – ВИНИТИ АН СССР, 1971. – Т.3. – С. 49–94.
5. Лумисте Ю.Г. Теория связностей в расслоенных пространствах. Алгебра. Топология. Геометрия / Ю.Г. Лумисте. 1969. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 123–168.
6. Норден А.П. Пространства аффинной связности / А.П. Норден. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 464 с.
7. Олоничев П.М. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос / П.М. Олоничев // ДАН СССР. Математика. – 1951. – Т. 80. – №2. – С. 165–168.
8. Столяров А.В. Дифференциальная геометрия полос / А.В. Столяров // Проблемы геометри: Сб. научн. тр. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1978. – Т. 10. – С. 25–54.
9. Гребенюк М.Ф. Нормализация гиперполос в неевклидовом пространстве / М.Ф. Гребенюк, В.И. Макаров, М.В. Терехова // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2010. – Вип. 26. – С. 85–89.
10. Гребенюк М.Ф. Пространства аффинной связности / М.Ф. Гребенюк, В.И. Макаров, М.В. Терехова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: Київський національний університет будівництва і архітектури, 2010. – Вип. 84. – С. 305–309.

11. Чакмазян А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия / А.В. Чакмазян // Проблемы геометрии: Сб.науч.тр. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1978. – Т.10. – С. 55–74.
12. Чакмазян А.В. Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография / А.В. Чакмазян. – Ереван: Армянск. пед. ин-т, 1990. – 116 с.

ГРЕБЕНЮК Марина Федорівна – д-р техн. наук, професор, професор кафедри математичної кібернетики Національного авіаційного університету (м. Київ).

Наукові інтереси:

– вивчення проблеми геометричних перетворень багатовимірних афінних просторів.

ТЕРЕХОВА Марина Вікторівна – доцент, доцент кафедри прикладної геометрії та комп'ютерної графіки Національного авіаційного університету (м. Київ).

Наукові інтереси:

– вивчення проблеми геометричних перетворень багатовимірних афінних просторів.

МАКАРОВ Василь Іванович – доцент, доцент кафедри прикладної геометрії та комп'ютерної графіки Національного авіаційного університету (м. Київ).

Наукові інтереси:

– вивчення проблеми геометричних перетворень багатовимірних афінних просторів.

УДК 539.3

С.Н. Гребенюк, Е.С. Решевская, В.М. Тархова

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛАСТОМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Постановка проблемы. В настоящее время в качестве составляющих конструкций в различных отраслях промышленности используются эластомерные элементы. При моделировании условий эксплуатации эластомерных конструкций важным моментом является учет их силового взаимодействия с другими элементами. В частности, возникает задача учета контакта между упругими виброизоляторами и металлическими элементами конструкций.

Вследствие значительной сложности данных задач аналитические методы дают решение лишь для поверхностей, вступающих в контактное взаимодействие, относительно простой формы. Применение численных методов позволяет получать решение задачи контакта эластомерных элементов сложной геометрической формы с другими деталями конструкций.

Анализ публикаций по теме исследования.

История развития исследований в области контактных взаимодействий берет свое начало с 1881 г., когда Генрихом Герцем [1] была сформулирована первая задача о контакте двух тел. Далее получили свое развитие различные аналитические методы решения задач подобного класса в работах [2, 3, 4]. Необходимость расчета конструкций сложной геометрии привело к применению численных методов. Одним из наиболее распространенных численных методов является метод конечных элементов. Применительно к решению контактных задач МКЭ существует два направления: в одном случае контактные усилия моделируются введением слоя промежуточных «контактных» элементов, обладающих определенными свойствами [5, 6], в другом – непосредственно через узлы конечных элементов, расположенных на границах контактирующих тел [7, 8, 9].

Формулировка целей статьи. Представлена методика учета контактного взаимодействия эластомерных элементов на основе моментной схемы метода конечных элементов с целью исследования напряженно-деформированного состояния конструкций в условиях контактных взаимодействий.

Основная часть.

Анализ контактного взаимодействия эластомерных виброизоляторов в условиях эксплуатации показывает, что данные элементы взаимодействуют с металлическими плитами, модуль упругости которых на несколько порядков превышает модуль упругости эластомеров. Поэтому плита предполагается абсолютно жесткой.

Пусть имеем поверхность S_c тела Ω, ограниченную функцией $g(x)$, в недеформированном и деформированном состоянии. Область Ω контактирует с абсолютно жестким телом, поверхность которого ограничена функцией $f(x)$. Первоначальный зазор между телами отсутствует:

$$\Delta(x) = 0,\ x \in S\ . \tag{1}$$

Нагрузка, действующая со стороны поверхностных сил $p_i(x)$, вызывает перемещение точек тела $u(x)$. Если в некоторой точке $x \in S$ происходит контакт двух тел, то в этой точке $|\, f(x) - g(x) - u(x)| = 0$. Кроме того, нормальные напряжения должны быть сжимающими $\sigma_\nu(x) < 0$. Если же в точке x контакт отсутствует, то $| f(x) - g(x) - u(x)| > 0$, $\sigma_\nu(x) = 0$.

Таким образом, для всех точек поверхности должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered} | f(x) - g(x) - u(x)| \geq 0; \\ \sigma_\nu(x) \leq 0; \\ \sigma_\nu(x) \cdot | f(x) - g(x) - u(x)| = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Выражения (2) моделируют граничные условия контактного взаимодействия двух тел, здесь указаны условия непроникания без указания площадки контактной области.

Учитывая принцип виртуальных перемещений (сумма всей виртуальной работы на возможных перемещениях меньше или равно нулю), получаем вариационную постановку задачи в перемещениях:

$$\begin{gathered} \delta\Pi \leq 0; \\ | f(x) - g(x) - u(x)| \geq 0; \\ \sigma_\nu(x) \leq 0; \\ \sigma_\nu(x) \cdot | f(x) - g(x) - u(x)| = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Имеем вариационную постановку контактной задачи, которая заключается в отыскании функций, удовлетворяющих неравенствам при наличии условий в виде неравенств. В работе А.С. Кравчука [17] обосновывается переход от вариационных неравенств к вариационным равенствам применительно к контактным задачам. Доказано, что эквивалентны следующие постановки задач:

$$\left\{ \begin{gathered} \delta\Pi \leq 0; \\ | f(x) - g(x) - u(x)| \geq 0; \\ \sigma_\nu(x) \leq 0; \\ \sigma_\nu(x) \cdot | f(x) - g(x) - u(x)| = 0 \end{gathered} \right\} \equiv \left\{ \begin{gathered} \delta\Pi = 0; \\ | f(x) - g(x) - u(x)| \geq 0; \end{gathered} \right\} \tag{4}$$

Основной особенностью такой задачи является наличие условий в виде неравенств. В работе при решении контактной задачи методом конечных элементов условия непроникания задаются итерационно путем подбора вектора дополнительной нагрузки, моделирующего влияние контактных взаимодействий между упругим элементом и абсолютно жесткой плитой.

Расчет НДС деталей эластомерных конструкций методом конечных элементов приводит к необходимости применения специальных методик, позволяющих обходить трудности, связанные со специфическими свойствами данных материалов (коэффициент Пуассона стремится к 0,5). В работе использована моментная схема метода конечных элементов [10] с введением специального конечного элемента на основе полинома Эрмита [11].

Расчет напряженно-деформированного состояния эластомерного виброизолятора цилиндрической формы. Рассмотрим эластомерный амортизатор в виде полого цилиндра, лежащего между двумя абсолютно жесткими металлическими ложементами (рис. 2). Эластомерный элемент имеет следующие расчетные характеристики: h=0,175 м, R_H=0,1 м, R_B=0,035 м, где h – высота ложементов; R_H – наружный радиус цилиндра; R_B – внутренний радиус цилиндра. Марка резины – 2959, модуль сдвига $G_0 = 1{,}76 \times 10^6$ Па, коэффициент Пуассона ν =0,49.

К ложементам приложена равномерно распределенная по поверхности нагрузка. Вследствие симметрии данной задачи и для упрощения расчетной схемы будем рассматривать четвертую часть исходной конструкции.

При изготовлении эластомерных виброизоляторов важным моментом является анализ параметров, влияющих на их жесткостные характеритики. Расчет величин напряженно-деформированного состояния виброизолятора при различных значениях его размеров позволяет проследить значения максимально допустимых нагрузок. Определим характер изменения прогиба виброизолятора при варьировании его толщины $h_э = R_H - R_B$ и величины нагрузки (рис. 2).

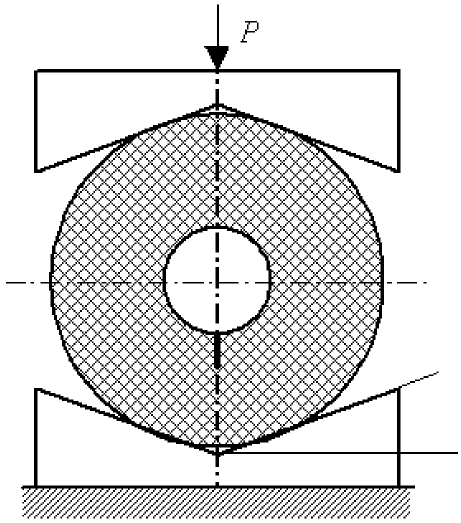


Рис. 1 – Расчетная схема цилиндрического виброизолятора

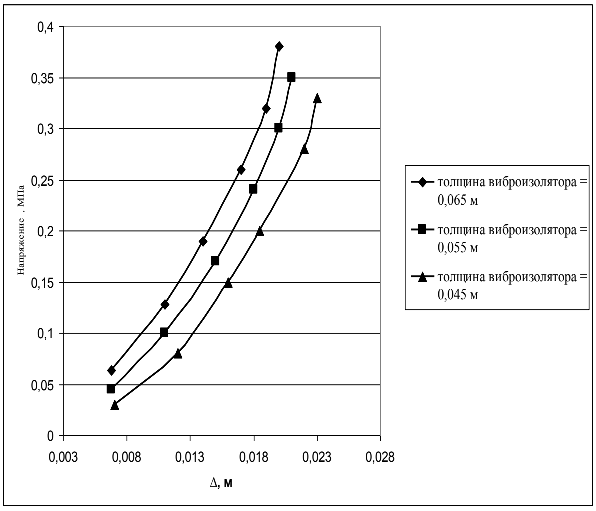


Рис. 2 - Зависимость нормальных напряжений от величины прогиба

Допустимые деформации сжатия для резины марки 2959 5-10% от высоты (диаметра) элемента, что составляет 0,01-0,02 м. Принимая это во внимание, можно сделать вывод о величине максимально допустимых напряжений для цилиндрических виброизоляторов с различными величинами толщины стенок: для виброизолятора толщиной 65 мм величина напряжений не должна превышать 0,4 МПа, толщиной 55 мм - 0,35 МПа, а толщиной 45 мм – 0,3 МПа. Значения напряжений, превышающие приведенные, являются критическими и приводят к разрушению эластомерных элементов в процессе их эксплуатации.

Изначально в контакт вступают тела несогласованной поверхности вдоль линии. Под действием нагрузки эластомерный элемент деформируется в окрестности начального контакта и приходит в соприкосновение с жестким ложементом по конечной области. Форма области контакта и закономерность ее роста при увеличении нагрузок устанавливается итерационно в процессе работы алгоритма, описанного выше.

Для цилиндрического виброизолятора была определена контактная область. Изменение величины области контакта при различных значениях равномерно распределенных нагрузок показано на рис.3.

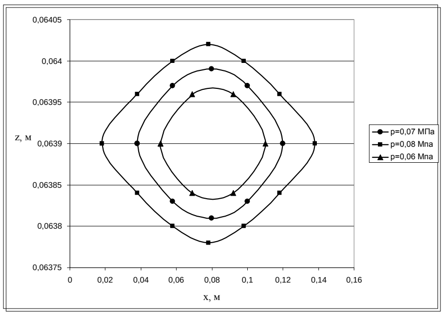


Рис.3 – Контактная область цилиндрического виброизолятора при варьировании величины нагрузки

Исследование распределения напряжений возникающих в данной области, позволит выявить напряжения, превышающие прочностные характеристики виброизолятора.

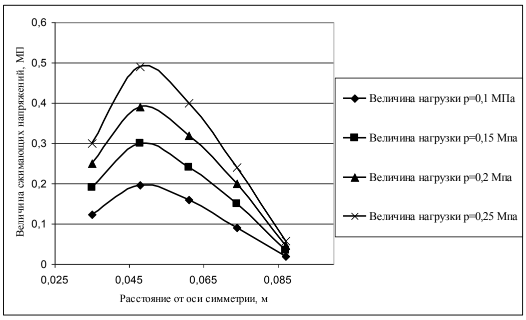


Рис.4 – Характер распределения нормальных напряжений в контактной области цилиндрического виброизолятора (угол наклона ложемента 30^0, толщина стенок виброизолятора 0,065 м)

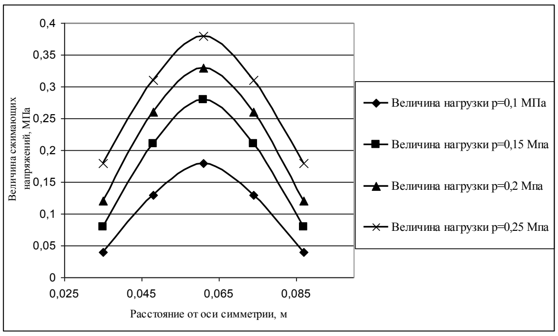


Рис.5 – Характер распределения нормальных напряжений в контактной области цилиндрического виброизолятора (угол наклона ложемента 45^0, толщина стенок виброизолятора 0,065 м)

Численное исследование характера распределения контактных напряжений в цилиндрическом эластомерном виброизоляторе (рис.4, 5) показывает, что напряжения достигают максимальных значений внутри контактной области и их интенсивность быстро уменьшается с увеличением расстояния от области контакта. Причем, расположение ложементов под углом 45^0 позволяет снизить значения напряжений при тех же величинах нагрузок, что и в случае расположения ложементов под углом 30^0.

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

Предложенная методика учета контактного взаимодействия эластомерных элементов на основе моментной схемы метода конечных элементов с целью исследования напряженно-деформированного состояния конструкций в условиях контактных взаимодействий. Применение метода конечных элементов позволит в дальнейшем использовать предложенную методику для исследования контактных взаимодействий элементов конструкций более сложной геометрической формы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Korper/H. Hertz// Gessammelte Werke. Leipzig. – 1895. - Bd 1. - S. 155 –173.
2. Галин Н. А. Контактные задачи теории упругости/Н.А. Галин. – М. : Гостехиздат, 1953. - 264 с.
3. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел/ А. Н. Динник. – Киев: Изд-во АН УССР. Механика, 1952. – 151 с.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости/ А. И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
5. Бабич А. П. Конечно-элементный алгоритм решения контактных задач с учетом нелинейных эффектов/А.П. Бабич// Динамика, прочность и надежность транспортных машин: Сборник научных трудов. Брянский государственный технический университет. Брянск: Изд-во БГТУ, 2002. – С.138-148.
6. Неустроева Н.В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин/ Н.В. Неустроева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. №4(40). – С. 51 64.
7. Кузьменко В. И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих тел / В. И. Кузьменко // ПММ. – 1979. – Т. 43, вып. 5. – С.893-901.
8. Дюво Г. Неравенства в механике и физике. / Г. Дюво, Ж.-Л.Лионс. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
9. Кравчук А. С. Численная реализация вариационного подхода к решению контактных задач теории упругости методом потенциалов/А. С. Кравчук, Е. Р. Ахуджанов // Расчеты на прочность. – М: Машиностроение, 1983. - №25. – С. 12 – 18.
10. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров/ В.В. Киричевский. – К.: Наук. Думка, 2002. – 655 с.
11. Специальные конечные элементы в программном комплексе «МІРЕЛА+»/ С.Н.Гребенюк, Е.Л. Мизерная, Е.С.Решевская, В.М. Тархова // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон ХНТУ, 2010. – Вып.3(39). – С. 132-136.

ГРЕБЕНЮК Сергей Николаевич – к.т.н., доцент, зав. кафедры математического моделирования Запорожского национального университета.

Научные интересы:

– механика разрушения, моделирование поведения резинокордных материалов.

РЕШЕВСКАЯ Екатерина Сергеевна – сотрудник Запорожского национального университета.

Научные интересы:

– контактная механика эластомеров.

ТАРХОВА Виктория Михайловна – сотрудник Запорожского национального университета.

Научные интересы:

– контактная механика эластомеров.

УДК 001.5.629.11.534.143

В.А. Дзензерский, Т.И. Кузнецова, Н.А. Радченко, Н.М. Хачапуридзе

ОЦЕНКА ЛЕВИТАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ ЭКИПАЖА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ПУТЕВОЙ СТРУКТУРЫ УПРОЩЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Постановка проблемы. Левитационное движение экипажа электродинамической транспортной системы с плоской путевой структурой может быть реализовано, как показано в работах [1,2], путем укладки четырех либо двух рядов токопроводящих контуров.

Из соображений, связанных с небольшим расходом неферромагнитного металла для путевых контуров, представляет интерес выяснить возможность реализации левитационного движения экипажа в случае, когда на плоской путевой структуре крепится один ряд токопроводящих контуров.

Анализ публикаций по теме исследования. В ранее опубликованных работах рассматривались случаи движения экипажей для систем с двумя или четырьмя рядами путевых контуров [1,2].

Для решения этой актуальной задачи предложена упрощенная конструктивная схема транспортной системы, кузов экипажа которой опирается на две тележки с помощью упруго-диссипативных элементов в вертикальном и поперечном направлениях. На донных горизонтальных поверхностях тележек экипажа крепятся два ряда сверхпроводящих магнитов (всего 16 магнитов), разнесенных в поперечном направлении так, чтобы проекции продольных сторон соленоидов магнитов на поверхность путевой структуры находились по разные стороны от продольных сторон путевых контуров, продольные оси которых совпадают с осью путевой структуры.

Цель статьи состоит в изложении разработанной конструктивной схемы транспортной системы с одним рядом контуров путевой структуры и оценке колебаний и устойчивости левитационного прямолинейного и криволинейного движения экипажа.

Основная часть. При исследовании пространственных колебаний экипажа выберем в качестве обобщенных координат линейные вертикальные z и поперечные y перемещения твердых тел системы, их угловые перемещения θ, φ, ψ, соответствующие боковой качке, галопированию и вилянию, а также токи в путевых контурах (координата z направлена сверху вниз).

Математическая модель движения исследуемого экипажа вдоль плоской путевой структуры представляется в виде связанных дифференциальных уравнений Лагранжа, описывающих перемещения твердых тел системы, и уравнений токов в токопроводящих контурах путевой структуры. Подробно математическая модель движения экипажа не приводится из-за ее громоздкости, поэтому приведем математическую модель движения экипажа в общем виде.

Уравнения состояния транспортной системы: движущийся экипаж и перемещение токов в токопроводящих контурах путевой структуры будем получать с помощью уравнений Лагранжа II-го рода, которые можно представить в виде:

$$D_{qv} + \Pi_{qv} + \Phi_{qv} = Q_v, \quad (\mathrm{v} = 1,2,\ldots,\mathrm{N}), \tag{1}$$

и уравнений токов, которые в матричном виде имеют вид:

$$L\frac{dI}{dt} + rI = f, \tag{2}$$

где

$$D_{qv} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v}; \quad \Pi_{qv} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_v};$$
$$\Phi_{qv} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_v}; \qquad Q_v = f(F_L, F_s); \tag{3}$$

Q_v - обобщенные силы, являющиеся функцией электродинамических сил F_L, F_s, действующих на экипаж в поперечных, вертикальных плоскостях вдоль нормалей и касательных к поверхностям сверхпроводящих магнитов; N -число степеней свободы; $L = |L_{ik}|$ - матрица коэффициентов самоиндукции $i = k$ и взаимоиндукции $i \neq k$ путевых контуров; r - активное сопротивление путевого контура, I -вектор - столбец токов i_k в k -х путевых контурах, f -вектор э.д.с. f_k наводимых экипажными сверхпроводящими магнитами в k -х путевых контурах.

В выражениях (1, 2, 3):

$D_{qv}, \Pi_{qv}, \Phi_{qv}, Q_v$ - дифференциальные операторы и обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам q_v; Т, П, Ф - кинетическая, потенциальная энергия и функция рассеяния системы; F_L, F_S - нормальные и касательные электродинамические силы взаимодействия сверхпроводящих магнитов и путевых контуров.

Величины f_k определяются из выражения:

$$f_k = -\sum_{m=1}^{n} i_m^c \frac{\partial M_{km}}{\partial t}, \tag{4}$$

где M_{km} - коэффициенты взаимоиндукции между *m-м* сверхпроводящим магнитом и *k*-м контуром; *n*- число поездных сверхпроводящих магнитов; i_m^c- ток в *m-м* сверхпроводящем магните.

Электродинамические силы взаимодействия сверхпроводящих магнитов с путевыми контурами F_{Lm}, F_{sm} вдоль нормали и касательной к поверхностям магнитов в поперечной плоскости определяются из выражения:

$$F_{Lm} = i_m^c \sum_{k=1}^{p} i_k \frac{\partial M_{km}}{\partial \Delta_m};$$
$$F_{sm} = i_m^c \sum_{k=1}^{p} i_k \frac{\partial M}{\partial \delta_m}, \tag{5}$$

где Δ_m и δ_m - значения зазоров, т.е. смещений *m*-ых сверхпроводящих магнитов относительно контуров путевой структуры в вертикальном и поперечном направлениях; *p*- число учитываемых контуров.

Решая совместно системы уравнений вида (1) и (2) будем оценивать динамические качества экипажа в случае левитационного движения экипажа.

Необходимым условием обеспечения устойчивого левитационного движения экипажа является выполнение следующего требования: движущиеся вдоль оси пути два магнита, расположенные в одной поперечной плоскости относительно одного ряда путевых контуров, при их поперечном перемещении должны иметь нисходящую зависимость касательных электродинамических сил взаимодействия с контурами, т.е.

эти силы должны быть восстанавливающими против поперечного сдвига двух магнитов относительно контуров. Кроме этого, нормальные электродинамические силы при таком взаимодействии двух магнитов с контурами должны иметь минимальное значение в положении, соответствующем их симметричному расположению относительно оси пути.

Таким образом, для реализации устойчивого левитационного движения экипажа необходимо определить рациональные значения основных параметров системы, в первую очередь, размеры соленоидов сверхпроводящих магнитов и путевых контуров, а также условия их взаимного размещения в состоянии равновесия экипажа.

На основании полученных значений этих параметров сотрудниками Института транспортных систем и технологий НАН Украины предложена описанная ниже транспортная система с одним рядом контуров на плоской путевой структуре.

Для экипажа, масса кузова которого равна 25т и масса двух тележек по 3,75т, получены значения размеров соответственно в продольном и поперечном направлениях соленоидов сверхпроводящих магнитов равные 1,2м и 0,5м, а путевых контуров 1,0м и 1,4м. Путевые контуры приняты диаметром 0,03м, а продольные оси соленоидов сверхпроводящих магнитов разнесены в поперечном направлении от оси пути на 0,58м. Намагничивающая сила в соленоидах магнита принята равной 690000А витков.

Для экипажа описанной транспортной системы было оценено левитационное движение вдоль пути, имеющего следующее очертание в плане: прямолинейный участок пути протяженностью 150м, входная переходная кривая длиной 500 м, круговая кривая радиусом 8000м с наклоном поверхности пути к горизонтальной плоскости на угол 0,1 рад в сторону центра кривизны протяженностью 150м, выходная переходная кривая - 400м, прямая – 400м. Кривизна переходных кривых имеет синусоидальную зависимость от протяженности [3] .

Для математического описания пространственных колебаний экипажа при его левитационном движении вдоль участка пути переменной кривизны в плане экипаж вместе с путевой структурой были представлены электромеханической системой, состоящей из трех твердых тел: кузова и двух тележек вместе с прикрепленными к горизонтальным поверхностям тележек сверхпроводящими магнитами и путевых контуров.

Оценка пространственных колебаний экипажа проводилась при значениях скорости движения 30 и 100 м/с по значениям левитационных зазоров тележек, перемещениям всех твердых тел системы, а также по значениям ускорений кузова в вертикальном и поперечном направлениях.

Результаты интегрирования уравнений движения показали, что на вертикальные перемещения кузова и тележек z_i (i=1,2 – номера тележек), углов их галопирования и виляния не оказывает влияния кривизна пути, а перемещения поперечного относа и углы боковой качки имеют максимальные значения в круговой кривой. Поэтому в дальнейшем будем оценивать левитационное движение экипажа по максимальным значениям вертикальных перемещений тележек z_i , поперечных перемещений кузова y_k и тележек y_i и углов их боковой качки θ_k , θ_i , и по значениям ускорений в поперечном и вертикальном направлениях кузова $\ddot{y}_k$, $\ddot{z}_k$.

Приведем значения оцениваемых величин для скоростей 30 м/с и 100 м/с:

а) значение скорости 30 м/с :

z_i =0,075м, y_k =0,07м, y_i =0,01м, θ_k =0,029рад, θ_i =0,022рад,

$\ddot{y}_k$ =1,25м/с^2, $\ddot{z}_k$ = 1,25 м/с^2 ;

б) значение скорости 100 м/с :

z_i =0,177м, y_k=0,025м, y_i=0,008м, θ_k =0,0077рад, θ_i =0,0043рад, $\ddot{y}_k$= 0,3м/с^2, $\ddot{z}_k$ =0,2м/с^2 .

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Как видно из приведенных результатов расчетов в рассмотренных случаях имеет место устойчивое левитационное движение экипажа при небольших отклонениях кузова и тележек от равновесного его состояния на прямолинейных и криволинейных участках пути.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Дзензерский В.А. Колебания и устойчивость движения экипажей электродинамических транспортных систем нетрадиционных конструкций / В.А. Дзензерский, О.В. Звонарева, В.В. Малый и др.//Вестник Херсонского национального университета «ХНТУ». – 2009. – Вып. 35. – С.185-189.
2. Радченко Н.А. К выбору рациональных конструктивных схем электродинамических транспортных систем /Н.А. Радченко, Т.Л. Губа, О.В. Звонарева, В.В. Малый //Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка Лазаряна. – 2009. – Вип. 26. – С. 18-22.
3. Шахунянц Г.М. Железнодорожный путь/Г.М. Шахунянц. – М.: Транспорт, 1969.– 536 с.

ДЗЕНЗЕРСКИЙ Виктор Александрович – д.т.н., профессор, директор Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– динамика наземных транспортных систем.

КУЗНЕЦОВА Татьяна Ивановна – вед. инженер Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– динамика транспортных электромеханических систем.

РАДЧЕНКО Николай Алексеевич – д.т.н., ст. научн. сотр., вед. научн. сотрудник Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– динамика наземного транспорта.

ХАЧАПУРИДЗЕ Николай Михайлович – к. т. н., ст. научн. сотр., зам. директора по научной работе Института транспортних систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– динамика наземных транспортных систем.

УДК 004.94:656.11

Е. В. Диденко, В. Т. Лазурик, Ю.В. Рогов

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВЕТВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Постановка проблемы. Решение проблем проектирования и модернизации транспортной системы больших городов опирается на знание детальных закономерностей, характерных для автомобильных транспортных потоков. Математическое моделирование транспортных потоков является одним из основных методов получения необходимых знаний о них [1,2]. В стохастических моделях учитывается дискретность транспортного потока, т.е. поток рассматривается как совокупность элементов, движущихся по компонентам транспортной системы, и базовые характеристики потока описываются как плотности вероятности значений этих характеристик. В этих моделях одной из важнейших характеристик транспортного потока является распределение временных интервалов между его элементами [1].

Взаимодействие потока с компонентами транспортной системы может существенно изменять характеристики потока. В этой статье рассматривается класс компонентов транспортной сети типа пересечения (например, перекресток в улично-дорожной сети). В качестве простой модели класса пересечений выбираем разветвление транспортных потоков. В настоящей работе представлены результаты математического и компьютерного моделирования разветвления транспортных потоков в рамках стохастической модели. Компьютерное моделирование разветвления потоков проводится методом Монте-Карло. Полученные результаты являются базовыми для анализа потоков в сложных транспортных системах.

Разветвление транспортных потоков. Разветвление транспортных потоков является одним из основных компонентов транспортной системы класса пересечений. Пусть, взаимодействуя с разветвлением, входной поток φ_0 разделяется на k потоков. В качестве выходного потока φ_1 выделим любой из k потоков. Остальные потоки после разветвления будем рассматривать как единый поток ответвления φ_2, который содержит все элементы φ_0 не попавшие в φ_1. Поэтому, не уменьшая общности рассмотрения, можно использовать модель разветвления, представленную на рис.1.

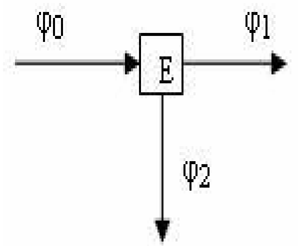


Рис.1. Модель разветвления

Пусть, разветвление характеризуется набором правил T, согласно которым происходит изменение входного потока φ_0. Рассмотрим случай, когда набор правил T = [T1], где T1 – правило, согласно которому элементы при преобразовании транспортного потока выбывают из него с вероятностью w_1. Предположим, что плотность вероятности интервалов между элементами во входном потоке φ_0 равна $\rho_1(t)$. Определим плотность вероятности интервалов между элементами $\rho_{\varphi 1}(t)$ выходного потока φ_1. При отсутствии корреляции между элементами потока, два последовательных элемента входного потока с вероятностью $(1\text{-}w_1)^2$ не выбывают из него. Следовательно, в выходном потоке φ_1 с этой вероятностью будут появляться интервалы между элементами, определяемые распределением $\rho_1(t)$ входного потока. С вероятностью $(1\text{-}w_1)^2 * w_1$ реализуется ситуация, когда только один элемент выбывает из потока. В этом случае интервал между элементами в выходном потоке будет равен сумме двух случайных интервалов из входного потока. Здесь предполагается, что элементы входного потока φ_0 имеют нулевой размер по времени. Увеличивая число элементов, выбывающих последовательно один за другим из потока и проводя рассуждения аналогичные приведенным выше, не сложно получить соотношение для $\rho_{\varphi 1}(t)$ в виде бесконечного ряда распределений сумм случайных величин:

$$\rho_{\varphi_1}(t) = (1 - w_1)\sum_{i=0}^{\infty}(w_1)^i \rho_{i+1}(t)\,, \tag{1}$$

здесь $\rho_i(t)$ - плотность вероятности суммы i случайных величин, распределенных с плотностью $\rho_1(t)$ входного потока.

Аналитическая оценка распределения выходных потоков. В работе [1] в качестве распределения временных интервалов между элементами (для низких уровней плотности транспортного потока) предлагается использовать экспоненциальное распределение. Кроме того, не сложно показать, что плотность вероятности $\rho_{\varphi 1}(t)$ при больших значениях временных интервалов t, имеет асимптотическое поведение, которое можно хорошо аппроксимировать экспоненциальной зависимостью. Поэтому, исследование поведения на разветвлении входного потока с экспоненциальным распределением временных интервалов между элементами представляет особый интерес.

Пусть распределение временных интервалов между элементами входного потока φ_0 является экспоненциальным с параметром $\lambda = 1/\theta$. Определим плотность вероятности временных интервалов в выходном потоке φ_1 в результате воздействия компонента разветвления на входной поток.

Известно, что экспоненциальное распределение является частным случаем гамма распределения Gamma(k, θ) (2) с параметром k = 1

$$\mathrm{Gamma}(k, \theta) = t^{k-1}\,\frac{e^{-\frac{t}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k}\ . \tag{2}$$

Распределение суммы n случайных величин, распределенных по гамма закону с параметром $k = k_1$, является гамма распределением с параметром $k = k_1 n$. Подставляя соответствующие плотности вероятности в формулу (1), получим:

$$\rho_{\varphi_1}(t) = (1 - w_1)\sum_{i=0}^{\infty}(w_1)^i\, Gamma(k(i+1), \theta)\ . \tag{3}$$

Упростим и положим k = 1:

$$\rho_{\varphi_1}(t) = (1 - w_1)e^{-\frac{t}{\theta}}\,\frac{1}{\theta}\sum_{i=0}^{\infty}(w_1)^i t^i\,\frac{1}{\theta^i i!}\ . \tag{4}$$

Выражение под знаком суммы является разложением ряда Тейлора для экспоненты:

$$\rho_{\varphi_1}(t) = (1 - w_1)e^{-\frac{t}{\theta}}\,\frac{1}{\theta}e^{\frac{t w_1}{\theta}}\ . \tag{5}$$

Упростив (5), получим, что плотность вероятности интервалов между элементами выходного потока описывается формулой (6)

$$\rho_{\varphi_1}(t) = (1 - w_1)\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}(1-w_1)} \quad . \qquad (6)$$

То есть, при разделении входного потока с экспоненциальным распределением интервалов, распределение потока на выходе разветвления будет экспоненциальным.

Отметим, что полученный результат справедлив лишь в предположении, что элементы входного потока имеют нулевой размер по времени. Это означает, что использовать экспоненциальное распределение интервалов для аппроксимации эмпирических данных следует для низких уровней плотности транспортного потока, т.е. при выполнении условия θ >> dCar, где dCar - размер по времени элементов входного потока.

Моделирование разветвления транспортного потока. Разработанное авторами статьи программное обеспечение SFMS (Stochastic Flow Modeling System) позволяет моделировать разветвление транспортных потоков методом Монте-Карло в рамках стохастической модели. В виду того, что базовый алгоритм моделирования процесса разветвления не зависит от закона, по которому распределены временные интервалы между элементами, SFMS позволяет варьировать тип распределения входного потока в зависимости от требований конкретной задачи (при необходимости можно добавить генератор случайных величин с требуемым законом распределения).

С помощью SFMS проведена серия компьютерных экспериментов. Входной поток φ_0 имел экспоненциальное распределение временных интервалов. Величину среднего временного интервала полагали равной единице, а число элементов во входном потоке $N=10^6$. Отметим, что средний временной интервал распределения входного потока можно выбирать произвольно, так как его можно полагать масштабом времени.

Результаты моделирования распределения интервалов выходных потоков φ_1 и φ_2 для различных значений w_1 представлены на рисунке 2. Из рисунка 2 видно, что средние временные интервалы распределений выходных потоков определяются параметрами разветвления w_1, то есть вероятностью выбывания элементов из входного потока.

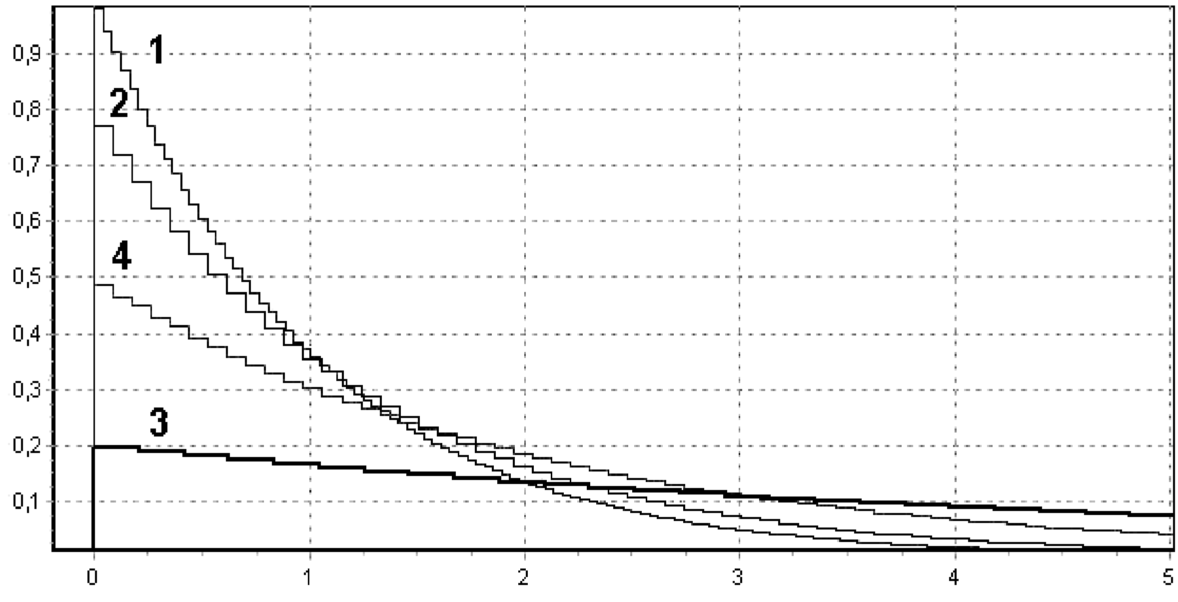


Рис.2. Распределение временных интервалов между элементами во входном потоке φ_0 (кривая 1), выходных потоках φ_1 (при w_1 = 0.2 - кривая 2; при w_1 = 0.5 - кривая 4) и φ_2 (при w_1 = 0.2 - кривая 3; при w_1 = 0.5 - кривая 4).

Проведена параметрическая подгонка выходных распределений, основываясь на предположении, что интервалы в выходных потоках распределены согласно экспоненциальному закону. Для каждой вероятности выбывания элементов из входного потока w_1 компьютерный эксперимент был выполнен 100 раз, и затем была проведена статистическая обработка полученного набора результатов.

Оценка параметра θ выходного потока φ_1 проводилась методом моментов для каждого из результатов компьютерного эксперимента. Для значений w_1, используемых при компьютерном моделировании, в соответствии с формулой (6) определяли параметр θ распределения выходного потока. Результаты статистической обработки компьютерных экспериментов и расчетов согласно (6) представлены в таблице 1.

Таблица 1.

θ	$w_1=0.1$		$w_1 = 0.5$		$w_1= 0.9$	
	теория	компьютерный эксперимент	теория	компьютерный эксперимент	теория	компьютерный эксперимент
1	1,1	1.11 ± 0.005	2	$1,99 \pm 0.01$	10	$10,00 \pm 0.07$

Как следует из приведенных в таблице 1 данных, моделирование процесса разветвления потоков методом Монте-Карло с помощью программного обеспечения SFMS позволяет с высокой точностью определять детальные характеристики выходных потоков, такие как плотности вероятности временных интервалов между элементами в потоке.

Выводы. В рамках стохастической модели исследован процесс разветвления транспортных потоков. Предложена простая модель базового компонента транспортной системы класса пересечений, позволяющая описать процесс разветвления потоков.

Получено общее соотношение для процесса разветвления, связывающее распределение временных интервалов входного и выходного потоков с параметром разветвления. Показано, что при разделении потока с экспоненциальным распределением интервалов, на выходе разветвления потоки имеют также экспоненциальные распределения интервалов.

Разработано и реализовано программное обеспечение SFMS для моделирования методом Монте-Карло процесса разделения транспортных потоков в рамках стохастической модели. Показано, что программное обеспечения SFMS представляет интерес как поставщик базовых данных для численного анализа потоков в сложных транспортных системах.

ЛИТЕРАТУРА:

1. May, Adolf. Traffic Flow Fundamentals. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990
2. Prigogine I. Theory of Vehicular Traffic/ I. Prigogine, R. Kinetic Herman. – N.Y.: Elsevier, 1971.
3. Garavello M. Traffic Flow on Networks. Conservation Laws Models/ M. Garavello, B. Piccoli// American Institute of Mathematical Sciences. – 2006. – V.1. – 257 p.

ДИДЕНКО Евгений Владимирович – аспирант кафедры моделирования систем и технологий факультета компьютерных наук Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина.

Научные интересы:

– математическое и компьютерное моделирование транспортных потоков.

ЛАЗУРИК Валентин Тимофеевич – д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, заведующий кафедрой моделирования систем и технологий факультета компьютерных наук Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина.

Научные интересы:

– развитие моделей и вычислительных методов для компьютерного моделирования физических явлений, создание программного обеспечения для наукоемких технологий.

РОГОВ Юрий Викторович – к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, старший научный сотрудник НИЧ Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина.

Научные интересы:

– математическое моделирование переноса излучения в гетерогенных системах, создание программного обеспечения для наукоемких технологий.

УДК 517.946

Д.В. Дмитришин, А.В. Усов, А.Д. Дмитришина, Е.В. Билоус

ПРОБЛЕМЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И ПОДАВЛЕНИЯ ХАОСА

Постановка проблемы и анализ публикаций по теме исследования. Одним из центральных результатов теории динамических систем является открытый М. Фейгенбаумом универсальный сценарий перехода от устойчивого типа движения к неустойчивому, или сценарий возникновения хаоса [1]. В теории Фейгенбаума особую роль играют отображения отрезка в себя со специальными свойствами. Эти отображения порождаются динамической системой, задаваемой разностным уравнением

$$x(t) = f\big(x(t-\tau)\big)\,, \tag{1}$$

где *f*(*z*)- непрерывная функция, отображающая унимодально отрезок [0,1] в себя; начальная функция $x_0(\theta)$- кусочно-непрерывная и для всех $\theta\epsilon[-\tau,0]$ $x_0(\theta)\epsilon[0{,}1]$; τ- положительное запаздывание.

Среди уравнений вида (1) наиболее распространено и изучено, так называемое, логистическое уравнение, в котором функция *f*(*z*) имеет вид:

$$f(z) = \mu z(1-z)\,,\ \mu\ \epsilon\ (0{,}4]. \tag{2}$$

Дж.Ф. Нейман впервые построил пример динамической системы с хаосом именно для функции (2) при $\mu = 4$.

Уравнение (1) является хорошей математической моделью многих прикладных задач в биофизике, экономике, экологии и др. [2], в которых состояние системы в текущий момент времени *t* определяется известным образом состоянием системы в предшествующий момент $t-\tau$. В этих случаях запаздывание называется сосредоточенным. Однако более точные законы должны учитывать зависимость текущего состояния системы от состояний во все предыдущие моменты времени от $t-\tau$ до t, т.е. запаздывание становится распределённым, а разностное уравнение (1) перейдет в функциональное уравнение

$$x(t) = \tilde{f}(x_t)\,,$$

где x_t - элемент функционального пространства X кусочно-непрерывных функций и $x_t = x(t+\theta)\epsilon[0{,}1]$ при $\theta\ \epsilon\ [-\tau,0), t \ge 0$; $\tilde{f}(\cdot)$ - непрерывный функционал, отображающий X в [0,1], имеющий единственный экстремальный элемент и обладающий определенными свойствами.

Цель статьи. В настоящей работе исследованы уравнения

$$x(t) = \int_\alpha^1 f\big(x(t-\sigma\tau)\big)dg(\sigma), \tag{3}$$

где $0 < \alpha < 1$; *f*(*z*)- унимодальное отображение с отрицательным шварцианом отрезка [0,1] в себя; $g(\sigma)$ – неубывающая функция ограниченной вариации и $\int_\alpha^1 tg(\sigma) = 1$, а интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса. Кроме того, так как величина запаздывания τ не влияет на устойчивость или неустойчивость движений, то, не нарушая общности, можно считать $\int_{1-\varepsilon}^1 dg(\sigma) > 0$, где ε- произвольное малое положительное число. При

$$g(\sigma) = \begin{cases} 0, & 0 \le \sigma < 1, \\ 1, & \sigma = 1 \end{cases}$$

уравнение (3) перейдёт в (1).

Оказалось, что существуют функции $g(\sigma)$, при которых уравнение (3) обладает свойствами, не присущими уравнению (1). Например, в уравнении (3) может отсутствовать порядок Шарковского возникновения периодических движений, иметься несколько устойчивых периодических движений и т.п.

Появление новых свойств у систем при переходе от сосредоточенных запаздываний к распределённым для функционально-дифференциальных уравнений рассматривалось в [3].

Основная часть. Пусть отображение $f(z)$ имеет в интервале (0,1) единственную неподвижную точку z_0, причём

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=z_0} = -a, \qquad a > 1.$$

Это означает, что уравнение (1) имеет на (0,1) единственное положение равновесия, причём неустойчивое. Например, для $f(z) = 4z(1-z)$ будет a=2 и положение равновесия $z_0 = \frac{3}{4}$ неустойчиво.

Уравнение (3) имеет то же самое положение равновесия, которое, однако, может оказаться устойчивым. Действительно, уравнение линейного приближения в окрестности положения равновесия имеет вид:

$$x(t) = -a\int_\alpha^1 x(t-\sigma\tau)dg(\sigma),$$

а его характеристическое уравнение

$$1 + a\int_\alpha^1 e^{-\lambda\tau\sigma}\,dg(\sigma) = 0.$$

Обозначим

$$\rho = \inf_{\omega>0}\left\{\int_\alpha^1 \cos\omega\tau\sigma\,dg(\sigma) : \int_\alpha^1 \sin\omega\tau\sigma\,dg(\sigma) = 0\right\}.$$

Можно показать, что при $\alpha > 0$ $\rho < 0$. Заметим, что при $\alpha > 0$ величина ρ может равняться нулю или даже не существовать.

<u>Теорема 1.</u> Для того, чтобы положение равновесия уравнения (3) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{\rho} > -a$.

Пример 1. Для функции равномерных скачков

$$g(\sigma) = \begin{cases} 0, & \alpha \le \sigma < \frac{1}{n} \\ \frac{j}{n}, & \frac{j}{n} \le \sigma < \frac{j+1}{n}, \quad j = \overline{1, n-1} \\ 1, & \sigma = 1 \end{cases},$$

$\rho = -\frac{1}{n}$. Это означает, что для любой функции $f(z)$ (с указанными выше свойствами) существует функционал $\tilde{f}(\cdot)$ такой, что положение равновесия уравнения (3) асимптотически устойчиво.

Пример 2. Пусть

$$g(\sigma) = \begin{cases} 0, & \alpha \le \sigma < \beta \\ 1-\gamma, & \beta \le \sigma < 1, \\ 1, & \sigma = 1 \end{cases}$$

где $\alpha < \beta < 1$. Уравнение (3) имеет вид

$$x(t) = (1-\gamma)f\big(x(t-\beta\tau)\big) + \gamma f\big(x(t-\tau)\big). \tag{4}$$

<u>Теорема 2.</u> При β- иррациональном $\rho = -1$. Пусть $\beta = \frac{m}{n}$; m, n - взаимно простые натуральные числа. Для любого m справедлива оценка

$$\rho \le -\frac{n-1}{n+1}.$$

При этом, если числа m и n оба нечетные, то $\rho = -1$; если m=1, n - четное, то $\rho = -\frac{n-1}{n+1}$; во всех остальных случаях -1< ρ<$-\frac{n-1}{n+1}$.

Для логистической функции a=2 и положение равновесия может быть устойчивым только при $\beta = \frac{1}{2}$. В этом случае

$$\rho(\gamma) = \begin{cases} -1 + 2\gamma, & \gamma \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ -\gamma, & \gamma \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases},$$

Следовательно, устойчивость будет тогда и только тогда, когда $\frac{1}{4} < \gamma < \frac{1}{2}$.

Отметим ещё некоторые свойства уравнения (4) с логистической функцией $f(z)$ при $\beta = \frac{1}{2}$:

- при $\gamma < \frac{1}{4}$ в уравнении (4) появляются τ- периодические решения, которые устойчивы при 0,161< γ<0,25 и неустойчивы при $\gamma < 0{,}161$;
- при 0,0494< γ<0,0592 и $0{,}4334 < \gamma < 0{,}5663$ в уравнении (4) появляются $\frac{3\tau}{2}$- периодические устойчивые решения, а при $\gamma < 0{,}0494$ неустойчивые;
- при $\gamma > 0{,}8139$ и $\gamma < 0{,}247$ в уравнении (4) появляются 2τ- периодические решения, которые неустойчивы при $\gamma > 0{,}8139$ и $\gamma < 0{,}127$;
- при надлежащем выборе γ в уравнении (4) имеется $k\frac{\tau}{2}$ - периодическое решение (k = 0, 1, 2, 3, …), которое будет неустойчивым при $\gamma < \bar{\gamma}_k$, где $\bar{\gamma}_k$– некоторые коестанты, аналогично, существуют константы $\bar{\bar{\gamma}}_k$ (k = 2, 4, …) такие, что при $\gamma > \bar{\bar{\gamma}}_k$ существуют неустойчивые $k\tau$ - периодические решения.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Модели с распределёнными и сосредоточенными запаздываниями относятся к одной и той же реальной системе и отражают все её существенные свойства. Можно ожидать, что и математические свойства модельных уравнений должны быть близкими. Однако конкретные примеры показывают, что это в общем случае не так. В рассматриваемых моделях с сосредоточенными запаздываниями процесс возникновения хаоса идет по известному бифуркационному сценарию Фейгенбаума, при котором выполняются различные закономерности (Шарковского, Якобсона, Зингера и др.) В системах с распределённым запаздыванием сценарий Фейгенбаума не имеет места, а, следовательно, не имеют места и закономерности, порождённые этим сценарием.

В статье отмечены лишь некоторые особенности, возникающие при замене сосредоточенных запаздываний на распределённые. Нам представляется перспективным нахождение универсального сценария возникновения и исчезновения хаоса, который (сценарий) должен существовать. Исследование таких вопросов позволит решать задачу синтеза: на основе измеренных состояний в некоторые сдвинутые моменты времени требуется построить управления нелинейной системой, которые будут подавлять в ней хаос. Такие управляемые системы могут иметь важное прикладное значение, например, в медицине [4].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бул Е.Б. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм/ Е.Б. Бул, Я.Г. Синай, К.М. Ханин // Успехи мат. наук. – 1984. – Т.39, вып. 3(237). – С. 3-37.
2. Ризниченко Г.Ю. Математические модели биологических продукционных процессов/ Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин. – М.: Изд. МГУ, 1993. – 301 с.

3. Усов А.В. Моделирование систем с распределёнными параметрами/ А.В. Усов, А.Н. Дубров, Д.В. Дмитришин. – Одесса: Изд. Астропринт, 2002. – 664 с.
4. Гельфанд И.М. Очерки о совместной работе математиков и врачей/ И. М. Гельфанд, Б.И. Розенфельд, М.А. Шифрин. – М.: Изд. Едиториал УРСС, 2005. – 320 с.

УСОВ Анатолий Васильевич – д.т.н., профессор, зав. кафедрой высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета.

Научные интересы:

– математические модели технических и социально-экономических систем.

УДК 539.3

Е.Н. Довбня, Н.Н. Гордиенко, М.А. Штакина, В.В. Яртемик

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С НЕСКВОЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Разрушение реальных тел является одной из важнейших проблем механики деформируемого твердого тела. Реальные тела часто содержат дефекты, которые могут быть описаны трещинами разного типа (сквозные и несквозные). Процесс разрушения связывают с наличием и распространением трещин.

Экспериментальные исследования показывают, что материал конструкции может оставаться упругим вплоть до разрушения, или на продолжении трещин могут появляться пластические зоны. Различают квазихрупкое и вязкое разрушения. Понятие квазихрупкого разрушения связывают с наличием у вершины трещины пластической зоны, малой по сравнению с ее длиной. Вязкое разрушения рассматривается только тогда, когда размер пластической зоны превышает 20% длины трещины. И тогда в этой зоне выполняется условие пластичности, или комбинация между напряжениями достигла критического значения. Модель линейных пружин (line-spring model) и δ_c-модель позволяют рассчитывать критический коэффициэнт интенсивности напряжений K_c для квазихрупкого и относительное критическое раскрытие δ_c для вязкого разрушения, соответственно.

Постановка задачи. Пусть рассматривается изотропная оболочка произвольной кривизны постоянной толщины h. Система координат выбрана таким образом, что оси x, y, ориентированные вдоль линий главных кривизн оболочки, а ось z направлена по нормали к ней. Оболочка находится под действием симметричной нагрузки и ослаблена системой двух несквозных (поверхностных или внутренних) трещин длины $2l$ (рис.1), расстояние между центрами которых равно $2d$. Трещины расположены симметрично относительно толщины оболочки.

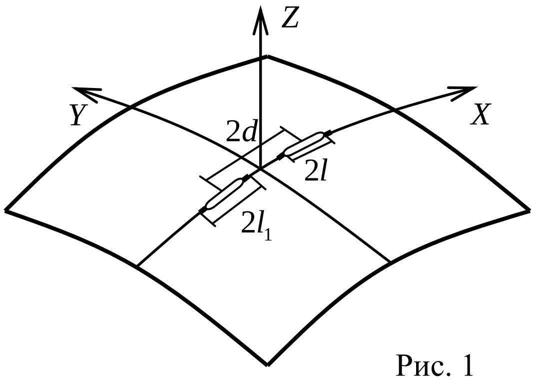


Рис. 1

Анализ публикаций по теме исследования. На сегодня существует множество работ, посвященных упругим или упруго-пластическим оболочкам с трещинами различного типа [1-9]. При этом используются различные методы и модели, в том числе line-spring model и δ_c-модель. Эти модели были разработаны для исследования пластины со сквозной трещиной. Впоследствии их распространили на случай оболочек с одной и системами трещин. На данный момент исследованы на прочность изотропные и ортотропные оболочки определенной кривизны (сферические и цилиндрические) с одной и системой поверхностных или внутренних трещин [5, 7-9]. А также решены задачи о напряженном состоянии изотропных, ортотропных оболочек произвольной кривизны с одной трещиной [2] и системой трещин [1, 3, 4, 6].

Цель статьи. Обобщение математических моделей с учетом вида разрушения при решении задачи о напряженном состоянии упругой или упруго-пластической оболочки произвольной кривизны с системой несквозных трещин.

Основная часть. Для решения используются выше упомянутые модели, которые сводят решение трехмерной задачи о напряженном состоянии упругой или упруго-пластической оболочки с несквозными трещинами к двумерной задаче в упругой постановке.

Аналог δ_c-модели. Обобщим аналог δ_c-модели для оболочек с одной несквозной трещиной на случай оболочек произвольной кривизны с системой несквозных трещин (рис.2). Согласно предположениям на берегах трещин в упруго-пластической оболочке выполняются граничные условия:

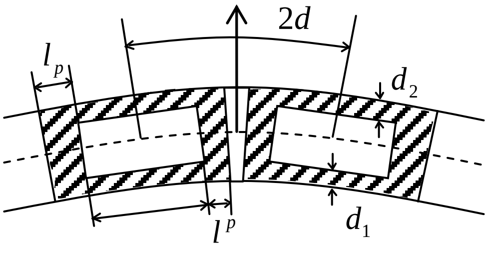


Рис.2

$$F_i = \begin{cases} F_i^{(1)} - F_i^*, & d+l \le |x| \le d+l+l_p \\ F_i^l - F_i^*, & d-l \le |x| \le d+l \\ F_i^{(2)} - F_i^*, & d-l-l^p \le |x| \le d-l \end{cases}, \quad i=1,3 \quad (1)$$

где $F_1^* = T_2^*$, $F_3^* = M_2^*$ – характеристики внешней нагрузки, $F_1^l = T^l(d_1, d_2)$ и $F_3^l = M^l(d_1, d_2)$ действуют в слое материала над и под фронтом трещин и определяются в работах [2, 5], $F_1^{(j)} = T^{(j)}$, $F_3^{(j)} = M^{(j)}$, $j=1,2$ – неизвестные усилия и моменты, удовлетворяющих условию пластичности Треска, l^p та l_p - размер внутренней и внешней пластических зон.

Вместо трещин длины $2l$ вводятся новые фиктивные трещины длиной $2l_1$, где $l_1 = l + \left(l_p + l^p\right)/2$, $l_p \ne l^p$, расстояние между центрами которых равно $d^1 = d + \left(l_p - l^p\right)/2$. При решении задачи используется система сингулярных интегральных уравнений (СИР) для ортотропной оболочки произвольной кривизны с двумя коллинеарными трещинами, полученная в работе [6], при этом удовлетворяются граничные условия (1):

$$\sum_{j=1,3} \int_{-1}^{1} \left(K_{ij}(s-x) + K_{ij}(s+x-2\gamma_1) \right) \psi_j(s) ds = \pi \Phi_i^*(x), \quad \left(|x| < 1, \quad i=1,3 \right), \qquad (2)$$

$\gamma_1 = d^1 / l_1$, где $\Phi_1^* = T_2$, $\Phi_3^* = M_2$, а ядра K_{ij} и неизвестные функции ψ_j приведены в работе [6].

При подстановке (1) в (2) получается, что Φ_1^*, Φ_3^* – функции имеют разрыв первого рода. Чтобы иметь возможность применить метод механических квадратур (ММК) представим неизвестные функции в виде суммы двух функций:

$$\psi_j(s) = g_j(s) + h_j(s), \quad \left(j=1,3 \right), \qquad (3)$$

где $g_j(s)$ – новая неизвестной функция, а $h_j(s)$ – аналитическое решение уравнения

$$\int_{-1}^{1} \frac{h_j(s)}{s-x} ds = \pi f_j(x), \qquad f_j(x) = \begin{cases} f_j^{(1)} - a_j, & -1 < x < -1+\tau^* \\ f_j^l - a_j, & -1+\tau^* < x < 1-\tau_{in} \\ f_j^{(2)} - a_j, & 1-\tau_{in} < x < 1 \end{cases}, \qquad (4)$$

где $f_1^{(j)} = T^{(j)}$, $f_3^{(j)} = c^2 R_2 M^{(j)}$, $f_1^l = T^l$, $f_3^l = c^2 R_2 M^l$, $\tau^{(1)} = l_p / l_1$, $\tau^{(2)} = l^p / l_1$.

Константа a определяется из условия существования решения уравнения (4):

$$a_j = \frac{f_j^{(1)} - f_j^l}{\pi} \arccos(1-\tau^{(1)}) + \frac{f_j^{(2)} - f_j^l}{\pi} \arccos(1-\tau^{(2)}) + f_j^l. \qquad (5)$$

Решение уравнения (4) имеет вид:

$$h_j(s)=\frac{f_j^{(1)}-f_j^l}{\pi}\ln\left|\frac{1+s(1-\tau^{(1)})+\sqrt{(1-(1-\tau^{(1)})^2)(1-s^2)}}{1-\tau^{(1)}+s}\right|+$$

$$+\frac{f_j^{(2)}-f_j^l}{\pi}\ln\left|\frac{1-\tau^{(2)}-s}{1-s(1-\tau^{(2)})+\sqrt{(1-(1-\tau^{(2)})^2)(1-s^2)}}\right|. \qquad (6)$$

После подстановки в систему СИР (1)-(2) неизвестных функций в виде (3), получим непрерывные правые части Φ_1^* и Φ_3^*. Далее можно применить ММК для функций, *ограниченных* на концах промежутка интегрирования.

Относительное раскрытие трещин (ОРТ) вычисляется по формуле:

$$\delta^*(x,\tilde{\gamma})=\frac{4}{\tau^*}\frac{\sigma_2^*}{\sigma_\tau}\left(\int_{-1}^{x}\left(g_1(s)+\left(t^{(1)}h^{(1)}(s)+t^{(2)}h^{(2)}(s)\right)\right)ds\pm\right.$$

$$\left.\pm\tilde{\gamma}\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{(1-\nu)(3+\nu)}\int_{-1}^{x}\left(g_3(s)+\left(m^{(1)}h^{(1)}(s)+m^{(2)}h^{(2)}(s)\right)\right)ds\right), \qquad (7)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $t^{(i)}=T^{(i)}/T_2^*$, $m^{(i)}=c^2R_2M^{(i)}/T_2^*$, $\tilde{\gamma}\in[-1/2;1/2]$.

Модель линейных пружин. Для упругой оболочки предполагается выполнение на берегах трещин граничных условий в виде:

$$F_i=F_i^l-F_i^*,\qquad d-l\le|x|\le d+l,\qquad i=1,3, \qquad (8)$$

где $T^l=T^l(x)$ и $M^l=M^l(x)$ – нагрузки, действующие в прослойке материала над и под фронтом трещин, определяются из соотношения, связывающего коэффициенты интенсивности напряжений и энергию, которая выделяется при разрушении трещины:

$$\begin{pmatrix}T^l\\ \dfrac{6M^l}{h}\end{pmatrix}=\frac{E}{2(1-\nu^2)}C\bar{b},\ \text{где } C=\left(\frac{1}{h}\int_0^{\Gamma_p}Ad\Gamma_p\right)^{-1}, \qquad (9)$$

$$A=\{a_{ij}\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=1,2}g_{mt}^2 & \sum\limits_{m=1,2}g_{mt}g_{mb}\\ \sum\limits_{m=1,2}g_{mt}g_{mb} & \sum\limits_{m=1,2}g_{mb}^2\end{pmatrix},\ \bar{b}=\begin{pmatrix}\int_{-1}^{1}\psi_1^{(1)}(t)sign(\tau-t)dt\\ \dfrac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{3}(1-\nu)(3+\nu)}\int_{-1}^{1}\psi_3^{(1)}(t)sign(\tau-t)dt\end{pmatrix},$$

$s=\Gamma_p(x)/h$, $\Gamma_p(x)$ – функция, которая задает контур глубины несквозной трещины. Вид функций $g_{t,m}(s)$, $g_{b,m}(s)$ приведен в работах [3, 4, 7].

Система СИР (2) с граничными условиями (8) – разрешающая система для задачи про напряженное состояние упругой оболочки произвольной кривизны с двумя коллинеарными несквозными трещинами. При этом $\gamma_1=\gamma=d/l$. Для решения этой системы сразу можно применить ММК для функций, *неограниченных* на концах промежутка интегрирования.

K_I вычисляется по формуле:

$$K_I(x)=\left(T^l(x)g_{mt}(s)+(6M^l(x)/h)g_{mb}(s)\right)/\sqrt{h} \qquad (10)$$

и сравнивается с K_c.

На рис. 3-4 изображена зависимость ОРТ $\delta^*(x,\eta)$ от расстояния между трещинами ρ ($\rho=1/\gamma$, $\eta=1/2-d_2/h$) в псевдосферической оболочке. Кривая 1 соответствует упругой задаче, 2 – упруго-пластической. На рис. 3 ОРТ вычислялось по формуле (7) в центральной точке трещин, а на рис.4 – в вершинах (пунктирная линия – внешняя вершина, сплошная – внутренняя).

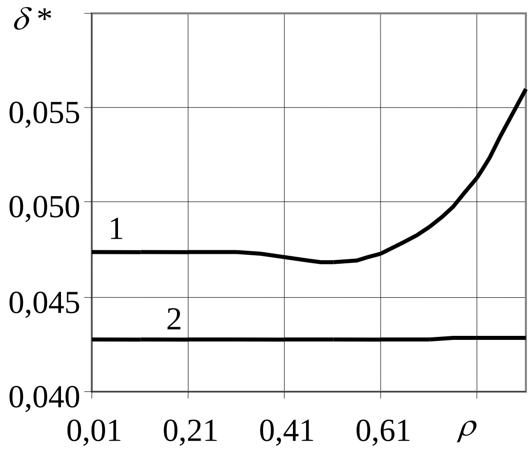


Рис.3

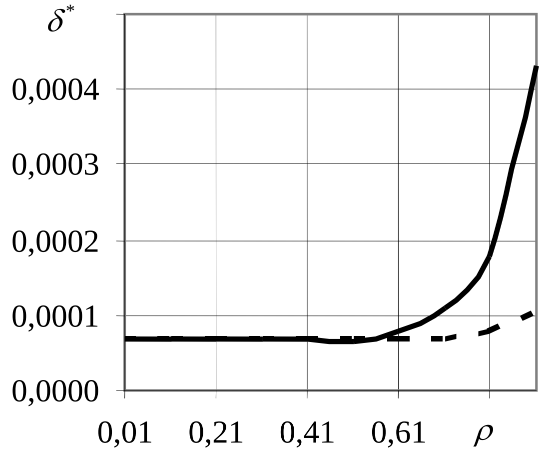


Рис.4

На рис.5 изображена зависимость коэффициэнта интенсивности напряжений K_I от ρ в псевдосферической оболочке. При этом $\sigma_2^*/\sigma_\tau = 0{,}51$, $l/R = 0{,}1$, $h/R = 0{,}02$, $d_1/h = d_2/h = 0{,}25$.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Из приведенных выше рисунков и проведенных расчетов следует, что при увеличении расстояния между трещинами наблюдается уменьшение δ^* при $0{,}2 \le \rho \le 0{,}5$ и увеличение – при $\rho > 0{,}5$, для K_I уменьшение – при $0{,}4 \le \rho \le 0{,}7$ и увеличение – при $\rho > 0{,}7$.

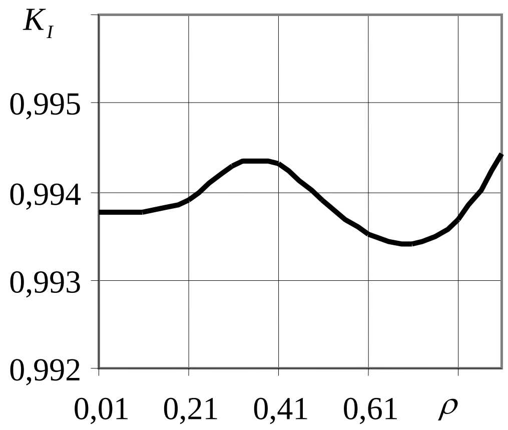


Рис.5

При этом в упруго-пластической задаче $\delta^*(\tau^{(2)},\eta)$, $\delta^*(0,\eta)$ при $\rho \to 1$ увеличиваются в 2-6 раз, в упругой задаче $\delta^*(0,\eta)$, K_I – увеличиваются на 0,2-0,5 %.

В дальнейшем будет исследовано в упруго-пластических оболочках взаимовлияние трещин разного типа и конфигурации. А также влияние ортотропии материала на характеристики напряженного состояния оболочек с системами трещин.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Довбня К.М. Взаємовплив двох наскрізних колінеарних тріщин в пружно-пластичній ортотропній оболонці / К.М. Довбня, М.М. Гордієнко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 160–165.
2. Довбня К.М. Дослідження з використанням двох моделей розкриття поверхневої тріщини в оболонці / К.М. Довбня, О.А. Корохіна, В.В. Яртемик // Труды ИПММ. – 2005. – Т. 11. – С. 30–34.
3. Довбня Е.Н. Исследование напряженно-деформированного состояния оболочки произвольной кривизны с тремя параллельными поверхностными трещинами /

Е.Н. Довбня, М.А. Чернышенко (Штакина) // Труды ИПММ. – 2006. – Т. 12. – С. 51–55.

4. Довбня Е. Взаимодействие сквозных и несквозных трещин в оболочке произвольной кривизны / К.М. Довбня, В.В. Яртемик // Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions: "Theoretical Foundations of Civil Engineering". – Warsawa: Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, 2008. – Vol. 16. – С. 91–98.
5. Кир'ян В.І. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій / В.І. Кир'ян, В.А. Осадчук, М.М. Николишин. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
6. Шевченко В. П. Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статики пологих ортотропних оболонок із розрізами й отворами / В.П. Шевченко, К.М. Довбня // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 1 – С. 47–59.
7. Эрдоган Ф. Модель в виде линейных пружин / Ф. Эрдоган // Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. Атлури. – М.: Мир, 1990. – С.243–265.
8. Lee Hyung Yil. Assessment Diagrams of Semi-Elliptical Surface Crack with Constraint Effect / Hyung Yil Lee, Jin Haeng Lee, Tae Hyung Kim Failure Assessment // Key Engineering Materials. – 2007. – V. 353 – 358. – P. 98-101.
9. Skallerud B. Thin shell and surface crack finite elements for simulation of combined failure modes / B. Skallerud, K. Holthe, B. Haugen // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2005. – Vol. 194. – P. 2619–2640.

ДОВБНЯ Екатерина Николаевна – д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной механики и компьютерных технологий Донецкого национального университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование в механике деформируемого твердого тела, интегральные преобразования, обобщенные функции;

ГОРДИЕНКО Николай Николаевич – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры прикладной механики и компьютерных технологий Донецкого национального университета.

Научные интересы:

– нелинейная механика разрушения, сингулярные интегральные уравнения.

ШТАКИНА Мария Александровна – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры прикладной механики и компьютерных технологий Донецкого национального университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование в механике деформируемого твердого тела, сингулярные интегральные уравнения и методы их решения.

ЯРТЕМИК Виктория Владимировна – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры прикладной механики и компьютерных технологий Донецкого национального университета.

Научные интересы:

– нелинейная механика разрушения, сингулярные интегральные уравнения и методы их решения.

УДК 536.24:622.233

А. Ю. Дреус, Е. Е. Лысенко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ТЕПЛОВЫХ И ВЛАЖНОСТНЫХ ПОЛЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Постановка проблемы. Проблема промерзания (протаивания) пористой среды одна из наиболее сложных задач в теплофизике, имеющая важное прикладное значение в различных технологиях. Несмотря на достаточно большое количество работ, получить решение, которое может быть непосредственно использовано для широкого круга практических задач, на сегодняшний день не удалось. В большинстве случаев, при рассмотрении конкретного технологического процесса, исследователям приходиться учитывать многочисленные особенности его физической модели и обращаться к численным методам.

Одной из новых задач, которая требует исследования динамики тепловых и влажностных полей в пористой среде при наличии фазовых переходов, является разработка новой низкотемпературной технологии изготовления гравийных фильтров для оборудования буровых скважин [1]. Особенность предложенной технологии заключается в замораживании фильтра перед установкой в скважину (для обеспечения его целостности), и последующим обратным фазовым переходом при эксплуатации. Таким образом, процессы тепло– массопереноса играют одну из ведущих ролей в определении эффективности технологии.

Гравийный фильтр представляет собой полый цилиндр, который может рассматриваться как многокомпонентная дисперсная система, состоящая из скелета (песок, гравий), воздуха и воды. Проблема определения тепло– и массообменных параметров дисперсной системы, а также выбор рациональных методов решения освещена, в частности, в работах [2–7]. Из анализа публикаций следует, что параметры дисперсной пористой системы (функция льдистости и уравнение состояния воды) главным образом зависят от температуры, влажности и пористости, и не имеют однозначного аналитического описания, вследствие чего появляется необходимость использования эмпирических данных [3, 7]. Отметим, что построение эффективного численного алгоритма расчета взаимосвязанных уравнений тепло– и массопереноса в полидисперсной пористой среде при фазовых переходах одного из компонентов связано с целым рядом трудностей вычислительного характера, которые рассмотрены в работе [8]. Предложенный в [8] алгоритм, основан на введении вместо истинного влагосодержания некоторого «фиктивного» значения, позволил упростить построение процедуры расчета полей температуры и влажности в цилиндрической стенке для одномерного случая.

Целью настоящей работы является развитие предложенного в работе [8] подхода на двумерный случай промерзания пористого цилиндра.

Математическая модель. Рассмотрим процесс промерзания влажной цилиндрической стенки фильтра из крупнодисперсного материала (гравий). Перед началом замораживания гравий засыпается в форму, изготовленную из низкотеплопроводного материала. Расчетная область представлена на рис.1.

Предположим, что теплообмен на внешних границах происходит только посредством конвекции, и на границе между оболочкой формы и образцом соблюдается идеальный тепловой контакт, задача является осесимметричной. Будем пренебрегать явлением морозного пучения материала и переносом влаги вследствие температурного градиента.

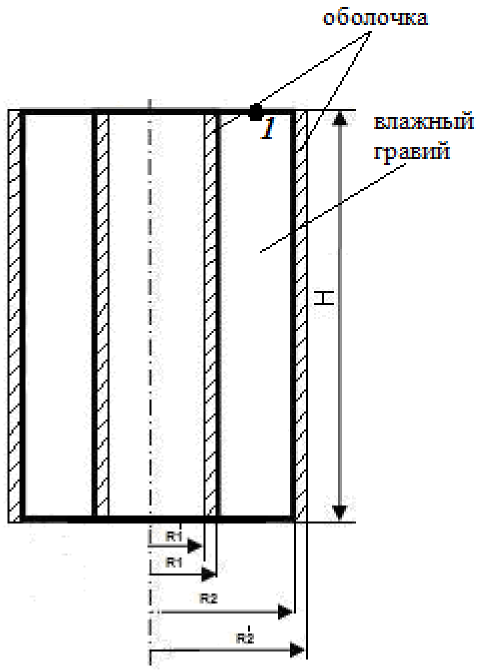


Рис. 1 Модель фильтра.

Известно [3,4], что в дисперсных системах фазовый переход связанной воды происходит в некотором спектре температур, и всегда остается некоторое количество незамерзшей прочносвязанной воды. С учетом того, что рассматривается крупнодисперсный материал, основываясь на экспериментальных данных [3,7], будем считать, что в гравийном фильтре основная масса воды находится в свободном состоянии, и ее фазовый переход почти полностью происходит в узком интервале температур. Процессы распространения тепла и влаги промерзающих–протаивающих дисперсных сред описывается системой уравнений А. В. Лыкова [2]:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau} = -div\ q_T - L\rho m\frac{\partial i}{\partial \tau}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \omega_w}{\partial \tau} = -div\ q_\omega - \rho\frac{\partial \omega_l}{\partial \tau}, \tag{2}$$

$$q_T = -\lambda\nabla T + cTq_\omega, \tag{3}$$

$$q_\omega = -k\rho\left(\nabla\omega_w + \delta\nabla T\right). \tag{4}$$

где T – температура, c - теплоемкость дисперсной системы, ρ – плотность дисперсной системы, λ – коэффициент теплопроводности дисперсной системы, L – теплота фазового перехода, m - пористость, ω_w, ω_l – влагосодержание в талой и мерзлой зонах соответственно, k – коэффициент влагопроводности, δ - термоградиентный коэффициент, q_T, q_ω - векторы плотности удельного теплового и влажностного потоков, τ - время.

В (1) $i(T)$ - функция льдистости, которая выражает отношение массы льда к массе всей воды. Очевидно, что в талой зоне $i(T)=0$ (отсутствие льда), в мерзлой зоне $i(T)\to 1$, а в зоне фазового перехода льдистость определяется выражением [3]

$$i(T) = i_k\frac{1-e^{\gamma(T-T_n)}}{1-e^{\gamma(T_k-T_n)}},$$

где T_n, T_k – температура начала и конца фазового перехода, i_k – значение льдистости при температуре T_k, соответствующее концу экспериментальной кривой, γ – коэффициент, характеризующий степень связанности воды с дисперсным материалом, зависящий от пористости.

Введем эффективную теплоемкость c_{eff} дисперсной системы [4,5]

$$c_{eff} = (1-m)c_{sk} + m(1-i(T))c_w + m \cdot i(T)c_l + \frac{\rho_l}{\rho} \cdot m \cdot L \cdot \frac{di(T)}{dT}, \tag{5}$$

где c_{sk}, c_w, c_l – теплоемкость скелета, воды и льда соответственно, ρ_l – плотность льда.

С учетом (5) и принятых допущений запишем (1–4) в виде

$$c_{eff}\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \lambda(T,\omega)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T,\omega)\frac{\partial T}{\partial z}\right), \; R_1' \le r \le R_2', \; 0 \le z \le H, \; \tau > 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot k(T,\omega)\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(T,\omega)\frac{\partial \omega}{\partial z}\right), \; R_1 \le r \le R_2, \; 0 \le z \le H, \; \tau > 0, \tag{7}$$

где R_1', R_2' – внутренний и внешний радиусы оболочки, R_1, R_2 - внутренний и внешний радиусы гравийного фильтра, H - высота.

Коэффициенты теплопроводности и влагопроводности определяются следующим образом:

$$\lambda(T) = \lambda_l + (\lambda_w - \lambda_l)(1-i(T)),$$

$$k(T,\omega_w,\omega_l) = k_1(T) \cdot e^{(k_2\omega_w - k_3\omega_l)},$$

$$k_1(T) = 1{,}4 \cdot 10^{-8}(1+0{,}04T), \; k_2 = 0{,}172, \; k_3 = 0{,}23,$$

где λ_l, λ_w - теплопроводность мерзлой и талой областей соответственно, k_1, k_2, k_3 - коэффициенты, известные из эксперимента [4].

Сложность решения (7) заключается в необходимости формулировки граничных условий для влагосодержания на фронте фазового перехода, что требует отслеживания его положения во времени. В соответствии с процедурой, предложенной в [8], введем вместо истинного значения некоторое «фиктивное» влагосодержание

$$\varpi = (1-i(T))\omega,$$

которое совпадает с истинным лишь в талой зоне. Данное определение позволяет решать вместо (7) уравнение

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot k(T,\omega)\frac{\partial \varpi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(T,\omega)\frac{\partial \varpi}{\partial z}\right), \tag{8}$$

краевые условия для которого формулируются на границах расчетной области.

Тогда начальные и граничные условия для (6)–(8) имеют вид

$$T\big|_{\tau=0} = T_0,$$

$$\varpi\big|_{\tau=0} = \varpi_0,$$

$$\lambda(T,\omega)\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s = \alpha_s\left(T\big|_s - T_\infty\right),$$

$$k(T,\omega)\frac{\partial \varpi}{\partial n}\bigg|_s = 0,$$

где T_0 – начальная температура системы, ω_0 – начальное влагосодержание системы, α_s - коэффициент теплоотдачи, $T|_s$ – температура поверхности, T_∞ – температура среды вдали от тела.

Такая модель позволила построить расчетную процедуру сквозного счета без явного выделения фронта фазового перехода.

Результаты моделирования. В качестве примера реализации предложенной методики рассмотрим расчет процесса промерзания образца гравийного фильтра, изготавливаемого по низкотемпературной технологии. Исходные данные взяты в соответствии с [2]:

$T_0 = 298K$, $\omega_0 = 15\%$, $T_s = 252K$, $R_1' = 0,05м$, $R_1 = 0,055м$, $R_2 = 0,09м$, $R_2' = 0,095м$,

$c_{sk} = 0,92\frac{кДж}{кг \cdot K}$, $c_w = 4,19\frac{кДж}{кг \cdot K}$, $c_l = 2,1\frac{кДж}{кг \cdot K}$, $\rho_{sk} = 1650\frac{кг}{м^3}$, $\rho_l = 920\frac{кг}{м^3}$,

$\rho_w = 1000\frac{кг}{м^3}$, $\lambda_{sk} = 2\frac{Вт}{м \cdot K}$, $\lambda_l = 2,22\frac{Вт}{м \cdot K}$, $\lambda_w = 0,612\frac{Вт}{м \cdot K}$, $m = 0,3$,

$L = 334 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг}$, $i_0 = 0,98$.

Результаты расчета по вышеизложенной математической модели и алгоритму расчета представлены на рис. 2 – 5.

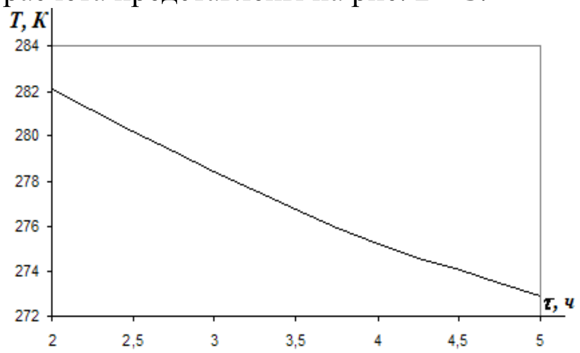


Рис. 2 Зависимость температуры образца от времени в точке 1 (рис. 1).

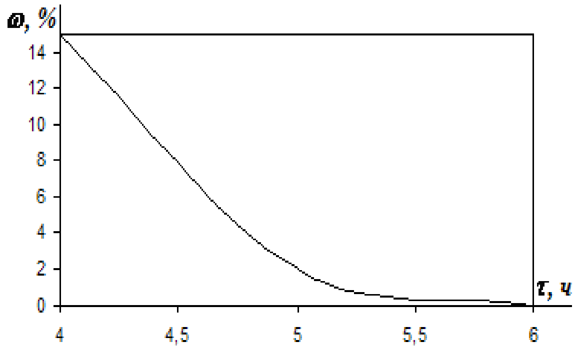


Рис. 3 Зависимость влагосодержания образца от времени в точке 1 (рис. 1).

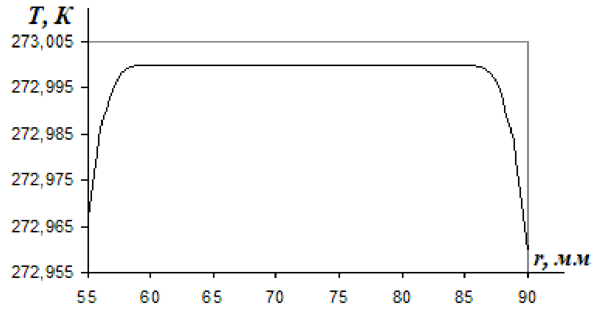


Рис. 4 Распределение температуры по радиусу в середине образца через 6 ч.

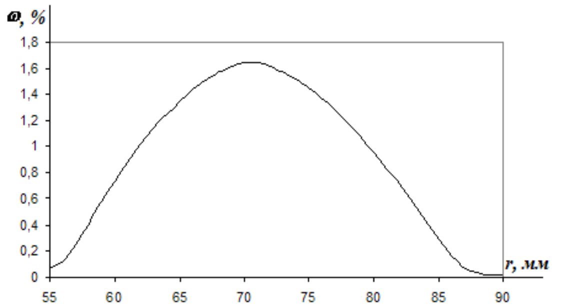


Рис. 5 Распределение влагосодержания по радиусу в середине образца через 6 ч.

Представленные результаты позволяют оценить динамику процесса промерзания фильтра, соответственно, определить такой режимный параметр технологии, как время замораживания.

Выводы. Предложенные в работе математическая модель и алгоритм расчета позволяют моделировать двумерные взаимосвязанные поля температуры и влагосодержания в промерзающей пористой среде, при этом организация процедуры расчета является более простой по сравнению с методами, которые требует явного выделения фронта фазового перехода. Результаты работы могут быть использованы для расчетов низкотемпературной технологии изготовления гравийных фильтров.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кожевников А. А. Технология оборудования криогенно–гравийными фильтрами водоприемной части буровой скважины. / А. А. Кожевников, С. В. Гошовский, А. К. Судаков// Породоразрушающий и металлообрабатывающий инструмент.– 2009. – Вып. 12. – С. 62–64.
2. Лыков А. В. Теория сушки. / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 472 с.
3. Колесников А. Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта. / А. Г. Колесников // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 6. – С. 889 – 891.
4. Пермяков П. П. Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах. / П. П. Пермяков. – Новосибирск: Наука. Сиб. Отд–ние, 1989. – 86 с.
5. Поврезнюк Е. Б. Математическая модель промерзания (оттаивания) малопроницаемой водонасыщеной пористой среды, содержащей воздух. / Е. Б. Поврезнюк, А. А. Рядно. // Вісник ДНУ. Серія Механіка. – 1999. – Т.1, № 6. – Вип. 2. – С. 89 – 94.
6. Иванов Н.С. Тепло– и массоперенос в мерзлых горных грунтах. / Н. С. Иванов. – М.: Наука, 1969. – 240 с.
7. Нерсесова З. А. Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры. / З. А. Нерсесова. // Доклады АН СССР. – 1950. – Т.75, № 6. – С. 845 – 846.
8. Дреус А. Ю. Математическая модель и алгоритм расчета тепловлагопереноса в промерзающей крупнодисперсной среде. / А. Ю. Дреус, Е. Е. Лысенко. // Системні технології: Дніпропетровськ, 2011. – Т. 73, № 2. – С. 72 – 77.

ДРЕУС Андрей Юльевич – к. т. н., доцент кафедры аэрогидромеханики и энергомассопереноса ДНУ им. О. Гончара.

Научные интересы:

– математическое моделирование теплофизических процессов в природе и технологических процессах.

ЛЫСЕНКО Екатерина Евгеньевна – аспирантка кафедры аэрогидромеханики и энергомассопереноса ДНУ им. О. Гончара.

Научные интересы:

– математическое моделирование теплофизических процессов в природе и технологических процессах.

УДК 621.396:681.3.07

О.О. Дробахин, А.В. Доронин, Е.Н. Привалов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОЗОНДОВОГО СВЧ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ ПАРАМЕТРОВ ВИБРАЦИЙ

Постановка проблеммы. Измерение параметров механического перемещения, вибраций является задачей, потребность в решении которой возникает во многих технологических процессах. Это обусловливает актуальность усовершенствования средств измерения вибраций. К достоинствам СВЧ методов следует отнести безинерционность и бесконтактность измерений. При нахождении исследуемого объекта в условиях термических нагрузок, наличия агрессивной среды именно эти обстоятельства являются решающим фактором в пользу выбора СВЧ методов.

Анализ публикаций по теме исследования. Наиболее популярным из микроволновых методов измерения параметров движения является интерференционный метод [1]. Аппаратурно он реализуется при помощи устройства, в состав которого входят: СВЧ-генератор, работающий на одной частоте; развязывающий вентиль; первичный измерительный преобразователь в виде отрезка волновода с набором из двух, трех или четырех зондов с детекторами; рупорной антенны. Измеренные сигналы могут быть обработаны несколькими способами. Один из них предусматривает определение фазы коэффициента отражения (КО), которая при условии зондирования плоской волной линейно связана с расстоянием до исследуемого объекта. При наличии четырех зондов обработка может быть проведена на основе классического подхода [2]. При наличии двух зондов необходимая информация может быть получена в соответствии с алгоритмом, изложенным в [3].

Постановка задачи. В идеальной постановке считается, что зонды не имеют собственного отражения. Однако в реальной ситуации отражения указанного класса имеют место. Это обстоятельство приводит к отличию сигналов, реально поступающих на зонды, от сигналов, которые рассматриваются для идеального преобразователя. Для обеспечения сигнала более высокого уровня зонды должны быть погружены более глубоко в волновод, что приводит к росту их собственного отражения и соответствующего искажения поля в волноводе. Будем моделировать каждый зонд в виде тонкого слоя диэлектрика, что позволяет учесть как эффект отражения, так и эффект прохождения через неоднородность зонда, наличие эффекта переотражения между неоднородностями. Толщина слоя позволяет учесть реальные размеры зонда. Варьирование толщины и диэлектрической проницаемости (ДП) слоя позволяет имитировать значение КО зонда в широких пределах. А поле внутри тонкого слоя позволяет получить оценку поля в точке размещения зонда. Исходя из того, что в рассмотрение принимается интегральный эффект отражения по электрической компоненте поля, можно рассмотреть указанное явление в предположении, что распространяется ТЕМ волна, это упрощает построение математической модели.

Цель статьи. Получение оценок точности определения местоположений объекта при использовании многозондового СВЧ преобразователя в интерференционном методе измерения параметров вибраций на основе построения математической модели первичного преобразователя с учетом собственных отражений от зондов.

Основная часть. Выражение для КО электромагнитной волны от диэлектрического слоя толщиной d со значением ДП ε_2 с использованием классической схемы метода частичных областей [4] может быть получено, если всю рассматриваемую область определения электромагнитного поля разбить на три области: первая область – область со стороны генератора, где на расстоянии L от передней грани слоя измеряется КО, предполагается, что ДП вещества, заполняющего эту область, ε_1 ; вторая область – область, совпадающая со слоем; третья область – область неограниченной толщины, заполненная веществом с ДП ε_1.

С учетом распространения прямой и отраженной волн в первой и второй областях для каждой из областей уравнения для электрического E и магнитного H поля принимают соответствующий вид:

$$E_1 = A_1(e^{-jk_1 z} + r_1 e^{jk_1 z}),, \qquad H_1 = A_1 \cdot \frac{k_1}{\omega\mu}(e^{-jk_1 z} - r_1 e^{jk_1 z}),$$

$$E_2 = A_2(e^{-jk_2 z} + r_2 e^{jk_2 z}), \qquad H_2 = A_2 \cdot \frac{k_2}{\omega\mu}(e^{-jk_2 z} - r_1 e^{jk_2 z}), \qquad (1)$$

$$E_3 = A_3 e^{-jk_1 z}, \qquad H_3 = A_3 \cdot \frac{k_1}{\omega\mu} e^{-jk_1 z}.$$

где A_1, A_2, A_3 – постоянные коэффициенты; $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu}$, $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu}$ – постоянные распространения в соответствующих областях; – круговая частота; μ – магнитная проницаемость; r_1, r_2 – КО электромагнитной волны от соответствующих границ областей (передней и задней граней слоя диэлектрика).

Предполагается, что в первой и третьей областях отсутствуют отражения от генератора и объекта соответственно. Такая модель позволяет исследовать собственное отражение зонда. Наложение граничных условий на электрическое и магнитное поля ($E_1=E_2$, $H_1=H_2$) при $z = L$ и ($E_2=E_3$, $H_2=H_3$) при $z = L+d$ дает следующую систему уравнений относительно КО r_1, r_2:

$$\frac{e^{-jk_1 L} + r_1 e^{jk_1 L}}{e^{-jk_1 L} - r_1 e^{jk_1 L}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{e^{-jk_2 L} + r_2 e^{jk_2 L}}{e^{-jk_2 L} - r_2 e^{jk_2 L}}, \qquad \frac{e^{-jk_2(L+d)} + r_2 e^{jk_2(L+d)}}{e^{-jk_2(L+d)} - r_2 e^{jk_2(L+d)}} = \frac{k_2}{k_1}. \qquad (2)$$

Решение системы уравнений (2) дает выражение для искомого КО от диэлектрического слоя:

$$r_1 = -\frac{1-q_1}{1+q_1} e^{-2jk_1 L}, \quad q_1 = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{e^{-jk_2 L} + r_2 e^{jk_2 L}}{e^{-jk_2 L} - r_2 e^{jk_2 L}}, \quad r_2 = -\frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2} e^{-2jk_2(L+d)}. \qquad (3)$$

Как правило, электрический зонд, представляет собой отрезок круглой проволоки, которая в зависимости от используемого диапазона электромагнитных волн имеет диаметр от 0,1 до 0,3 мм. Исходя из этого, для численного моделирования с использованием выбранной модели толщину 2-го диэлектрического слоя также будем выбирать в этих пределах.

Известно, что для большинства измерительных линий, одним из основных элементов которых является электрический зонд, КСВ не превосходит значения 1,05. Из проведенных расчетов следует, что такое значение КСВ может быть получено для диэлектрического слоя с толщиной d=0,1 мм и ДП ε_2=6. Выбор относительно небольшого значения ДП для модельной задачи обусловлено тем, что реальный металлический зонд имеет неглубокое погружение и перекрывает только малую часть поперечного сечения волновода.

Таким образом, проведенные исследования показали, что подбирая соответствующую толщину диэлектрического слоя и значение ДП вещества слоя, можно обеспечить идентичность электродинамических параметров измерительного зонда и диэлектрического слоя по характеристикам прохождения и отражения.

Рассмотрим модель системы из четырех измерительных зондов. Введем следующие рекуррентные соотношения, описывающие координаты соответствующих границ раздела диэлектрических слоев $h_1 = L_1$, $h_{2i} = h_{2i-1} + d_i$, $h_{2i+1} = h_{2i} + L_{i+1}$, где i = 1, 2, 3, 4.

С учетом промежутков между слоями диэлектрика, заполненными воздухом, рассмотрению подлежит семислойная структура, расположенная между двумя полубесконечными полупространствами. Поля во всех областях могут быть записаны в виде, аналогичном (1).

Удовлетворение граничных условий для составляющих электромагнитного поля на границе раздела j–й и j+1 –й областей приводит к системе уравнений:

$$A_j(e^{-jk_jh_j} + r_je^{jk_jh_j}) = A_{j+1}(e^{-jk_{j+1}h_{j+1}} + r_{j+1}e^{jk_{j+1}h_{j+1}}), \quad (4)$$

$$k_jA_j(e^{-jk_jh_j} - r_je^{jk_jh_j}) = k_{j+1}A_{j+1}(e^{-jk_{j+1}h_{j+1}} - r_{j+1}e^{jk_{j+1}h_{j+1}}).$$

Исключая из (4) постоянные коэффициенты A_j и A_{j+1} можно получить рекуррентные соотношения между локальными КО r_j и r_{j+1}.

Полагая, что положение измерительных зондов соответствует серединам диэлектрических слоев, запишем выражения для напряженностей электрического поля в местах расположения зондов:

$$E_2 = A_2(e^{-jk_2(h_1+d_1/2)} + r_2e^{jk_2(h_1+d_1/2)}), \quad E_4 = A_4(e^{-jk_4(h_3+d_2/2)} + r_4e^{jk_4(h_3+d_2/2)}), \quad (5)$$

$$E_6 = A_6(e^{-jk_6(h_5+d_3/2)} + r_6e^{jk_6(h_5+d_3/2)}), \quad E_8 = A_8(e^{-jk_8(h_7+d_4/2)} + r_8e^{jk_8(h_7+d_4/2)}).$$

Для построения эпюр напряженностей электрического поля в местах расположения зондов при перемещении отражающей поверхности необходимо знать коэффициенты A_2, A_4, A_6, A_8. Для их определения можно воспользоваться граничными условиями (4) для электрического или магнитного полей.

Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться лишь нормированные к амплитуде A_1 падающей волны напряженности электрических полей, то достаточно выразить коэффициенты A_j областей 2 – 8 через коэффициент A_1 по следующим рекуррентным соотношениям:

$$A_{j+1} = A_j \cdot \frac{e^{-jk_jh_j} + r_je^{jk_jh_j}}{e^{-jk_{j+1}h_{j+1}} + r_{j+1}e^{jk_{j+1}h_{j+1}}}. \quad (6)$$

Наличие собственных отражения измерительных зондов влияет на распределение электрического поля при перемещении отражающей поверхности. Оценим это влияние для случая электромагнитного излучения с длиной волны 30 мм, при одинаковой толщине диэлектрических слоев, которые моделируют зонды, равной 0,1 мм. Предполагается также, что отражающая поверхность объекта наблюдения перемещается в пространстве по линейному закону. Отметим, что в рассматриваемой эквивалентной схеме четырехзондового интерференционного измерителя, имитация перемещений контролируемого (отражающего) объекта осуществляется посредством варьирования продольного положения граничной поверхности с координатой h_9 , характеризуемой произвольным значением КО r_{10}. Для определения значения r_9 можно использовать следующее выражение $r_9 = r_{10}e^{-2ik_9h_9}$, а остальные значения r_j вычислять согласно рекуррентному соотношению.

Сравнение результатов расчета напряженности электрического поля в местах размещения зондов при r_{10} = 0,2 и собственном КСВ зонда 1,043 показывает, что наличие собственных КО от зондов приводит к изменению интерференционной картины. Так значения напряженности электрического поля в местах расположения 1-го и 4-го зондов остались практически неизменными, а в местах расположения 2-го и 3-го зондов уменьшились по сравнению со случаем, когда измерительные зонды не отражают электромагнитную волну.

Для оценки эффективности восстановления траектории многозондовыми интерференционными измерителями был проведен сравнительный анализ точности восстановления однозондовым, двухзондовым и четырехзондовым измерителями.

При проведении расчетов для однозондового измерителя рассматривался самый благоприятный случай. Принималось, что собственный КСВ измерительного зонда равен 1,043, а внесенный КО объекта составляет 0,9. Результаты этой оценки показали, что даже в этом случае с помощью однозондового измерителя перемещений невозможно полностью восстановить траекторию наблюдаемого объекта. При его перемещении по линейному закону в восстановленной траектории будут наблюдаться разрывы.

При расчетном анализе возможностей применения двухзондового интерференционного измерителя перемещений предполагалось, что объект наблюдения также перемещается по линейному закону, а собственные КСВ измерительных зондов равны 1,043. Были исследованы три случая восстановления траектории для объектов наблюдения с внесенным коэффициентом, принимающим последовательно значения 0,2, 0,5 и 0,9. Из полученных результатов следует, что с уменьшением КО от объекта наблюдается увеличение погрешности восстановления его траектории. Поскольку значение внесенного КО в реальных условиях зависит от расстояния и может изменяться в широких пределах, то, несмотря на конструктивную простоту реализации интерференционных измерителей параметров вибрации, применение одно- и двухзондовых измерителей в режиме реального времени невозможно.

На рисунке 1 графически представлены зависимости максимальной абсолютной погрешности восстановления траектории от значения КСВ измерительных зондов в четырехзондовом измерителе для различных значениях внесенного КО объекта.

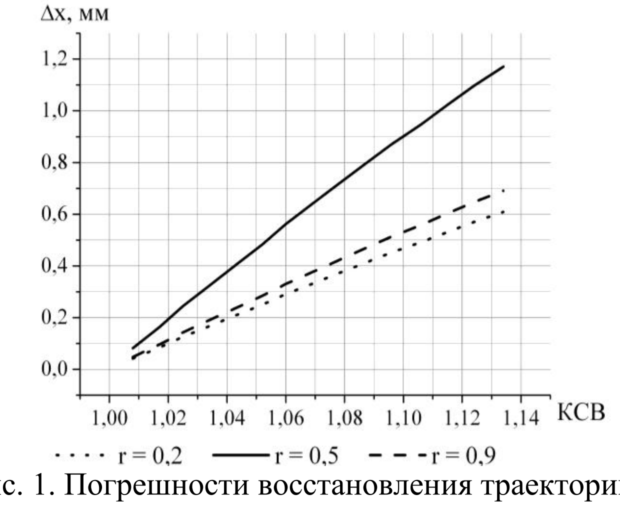


Рис. 1. Погрешности восстановления траектории

Расчетный анализ возможностей четырехзондового интерференционного измерителя перемещений проводился для тех же условий, что и для двухзондового. Также предполагалось, что объект наблюдения перемещается по линейному закону, собственные КСВ измерительных зондов равны 1,043 (ДП моделирующего диэлектрического слоя ε=3), а внесенный КО поочередно принимал значения 0,2, 0,5 и 0,9. Результаты численного моделирования показывают, что наличие собственных КО от зондов приводит к изменению интерференционной картины.Так значения напряженности электрического поля в местах расположения 1-го и 4-го зондов остались практически неизменными, а в местах расположения 2-го и 3-го зондов уменьшились по сравнению со случаем, когда измерительные зонды не отражают электромагнитную волну.

Исследование влияния изменения интерференционной картины вследствие собственного отражения зондов на погрешность восстановления траектории отражающей поверхности при r_{10}=0,2 показало, что максимум расхождения значений заданной и восстановленной координат отражающей поверхности в этом случае не превышает 0,4 мм.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, в процессе моделирования влияния собственного КО измерительного зонда на интерференционную картину в измерителе перемещений было показано, что она может претерпевать существенные изменения, которые влекут возникновение погрешности в определении местоположения объекта. Эти изменения сложно учесть при определении траектории объекта наблюдения с помощью одно- и двухзондовых измерителей перемещений, что приводит к невозможности использования измерителей указанного класса. Применение четырехзондовых интерференционных измерителей перемещений и вибраций позволяет влияние собственных отражений зондов на точность определения координат объекта минимизировать.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Руденко Д. Ф. Радиоволновой измеритель параметров вибраций / А. И. Волковец, А. В. Гусинский, А. М. Кострикин, О. О. Герасименок, А. Б. Дзисяк // СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии : 15-я Международная конференция, 12 – 16 сентября, 2005 г., Севастополь : материалы конференции. – Севастополь : Вебер, 2005. – С. 829 – 830.
2. Бондаренко И.К. Автоматизация измерений параметров СВЧ трактов / Дейнега Г.А., Маграчев З.В.. – М. : Советское радио, 1969. – 304 с.
4. Пилипенко О. В. Измерение параметров движения интерференционным методом в широком диапазоне амплитуд перемещений / Горев Н. Б. , Запольский Л. Г. , Заболотный П. И., Коджеспирова И. Ф., Привалов Е. Н.// Техническая механика. – 2008. – № 1. – С. 100 – 107.
5. Гольдштейн Л. Д. Электромагнитные поля и волны / – М. : Советское радио, 1971. – 325 с.

ДРОБАХИН Олег Олегович – заведующий кафедрой прикладной и компьютерной радиофизики Днепропетровского национального университета, профессор, доктор физико–математических наук.

Научные интересы:

- моделирование СВЧ измерений и цифровая обработка.

ДОРОНИН Алексей Владимирович – младший научный сотрудника отдела функциональных элементов систем управления Института Технической Механики.

Научные интересы:

- компьютерное моделирование, IT технологии

ПРИВАЛОВ Евгений Николаевич – заведующий отделом функциональных элементов систем управления Института технической механики, доцент, кандидат физико–математических наук.

Научные интересы:

- математическое и компьютерное моделирование СВЧ измерителей.

УДК 621.391

О. О. Дробахин, С. Г. Лебедев

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ПРОНИ ПРИ ОЦЕНКЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭКСПОНЕНТ ПРИ НАЛИЧИИ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ

Постановка проблемы. В случае определения собственных частот различных объектов возникает задача оценивания комплексных частот, то есть не только собственно частоты, но и затухания синусоидальной компоненты. С математической точки зрения речь идет о приближении экспериментальной зависимости суммой взвешенных экспонент с неизвестными комплексными показателями. При сравнении применимости алгоритмов одним из наиболее важных критериев является его корректная работа при совместном наличии гауссовского шума и импульсных помех.

Анализ публикаций по теме исследования. Для определения комплексных частот для сигнала в виде суммы затухающих синусоид наиболее широко используются метод Прони [1] и метод пучка матриц [2], они применимы в случае гауссовского шума, но наличие импульсных помех приводит к появлению некорректных результатов. Для сигнала в виде суммы незатухающих синусоид является перспективным подход, когда при помощи алгоритма [3] из сигнала удаляются импульсные выбросы, а затем на основе указанных методов производится оценка значения собственно частоты, однако такой подход строго адекватен случаю наличия незатухающих синусоид.

Цель статьи. Разработка варианта реализации метода Прони, который обеспечивает высокую точность оценки значений комплексных частот для сигнала в виде суммы затухающих синусоид при наличии как аддитивного гауссовского шума, так и импульсной помехи.

Основная часть. Рассматриваемый сигнал имеет вид

$$y_n = \cos(2\pi f n) * \exp(-\alpha n). \tag{1}$$

Уравнения линейного предсказания для сигнала (1) имеют такой же вид, как и в методе Прони:

$$\begin{aligned} &-y_2 + a_1 y_1 + a_0 y_0 = e_0, \\ &-y_3 + a_1 y_2 + a_0 y_1 = e_1, \\ &\qquad \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

где a_0 и a_1 - коэффициенты линейного предсказания, e_i- ошибки, зависящие от искажений сигнала и от правильности определения коэффициентов линейного предсказания.

Значение частоты и коэффициента затухания находят путем поиска корней полинома с коэффициентами a_i с последующим их логарифмированием.

Известно, что классический вариант метода Прони дает коэффициенты линейного предсказания, полученные по методу наименьших квадратов [1]. Это равносильно минимизации ошибки с квадратичной целевой функцией:

$$\rho = \sum e_i^2. \tag{3}$$

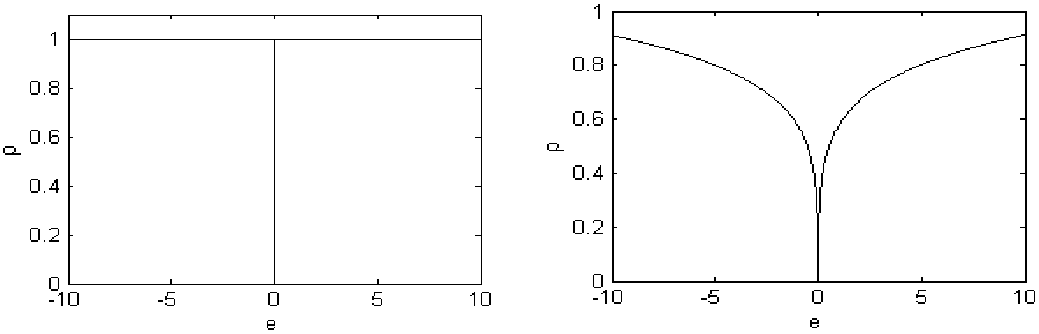
Такой подход является оптимальным при наличии гауссовского шума. Если же сигнал искажается импульсными помехами, то квадратичная целевая функция перестает быть оптимальной. При наличии единичных выбросов и отсутствии других видов искажений наилучшим вариантом будет использование следующей функции (рис. 1а):

$$\rho_i = \begin{bmatrix} 0, e_i = 0 \\ 1, e_i \neq 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Но минимизацию в таком случае проводить сложно, поэтому заменим ее функцией, построенной на основе функционала квазидлительности (рис. 1b) [4]:

$$\rho = \sum \left(e_i^2 + \sigma^2\right)^{\beta} - \sigma^{2\beta}, \tag{5}$$

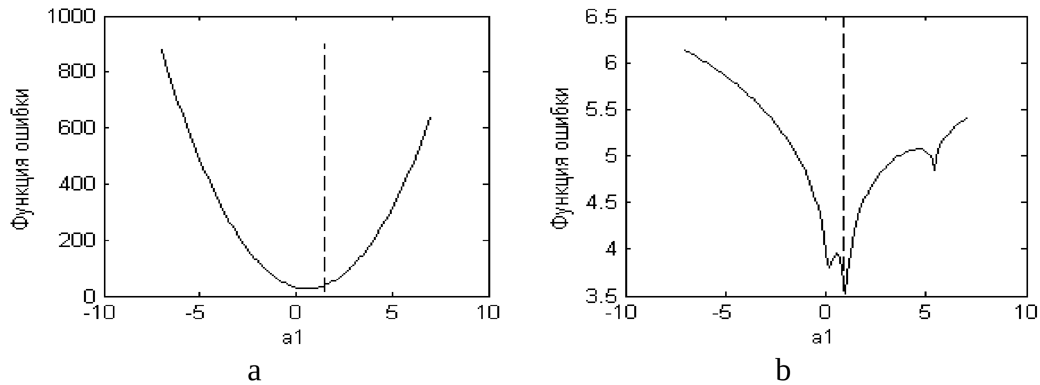
где e_i - ошибка, σ - СКВ шума, β - подстроечный параметр, который чаще всего равен 1/16. Параметр σ дает возможность использовать функционал квазидлительности при наличии гауссовского шума.



a b

Рис. 1. Робастные целевые функции

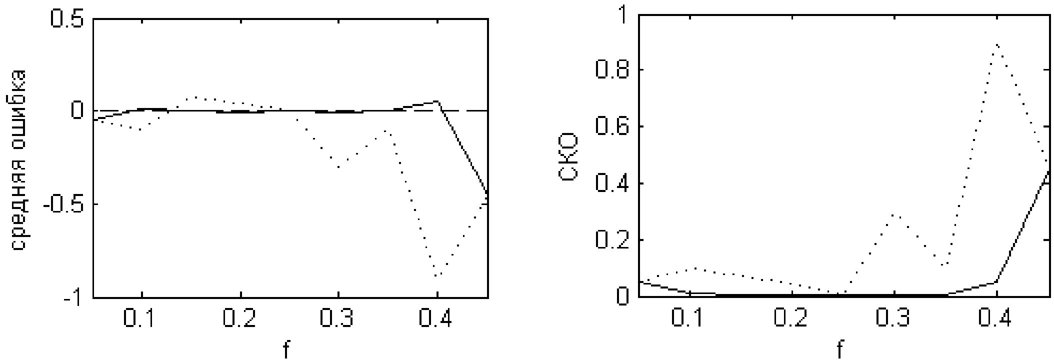
Для демонстрации особенностей использования различных целевых функций сформируем сигнал с помощью уравнения (1). Количество отсчетов возьмем равным 11, амплитуда сигнала равна 1, нормированная частота равна 0.4, параметр α, отвечающий за затухание, равен 0.01. Добавим сюда два выброса: в третьем отсчете, равный 3, и в седьмом отсчете, равный -2. На рис. 2 видна зависимость суммы квадратичной функции ошибки (3) и функционала квазидлительности (5) от точности определения коэффициента a_1 при установленном истинном a_0.



a b

Рис. 2. Зависимость суммы квадратичной функции ошибки (a) и функционала квазидлительности (b) от коэффициента a_1 при заданном сигнале с двумя импульсными выбросами. Пунктиром обозначено истинное положение a_1

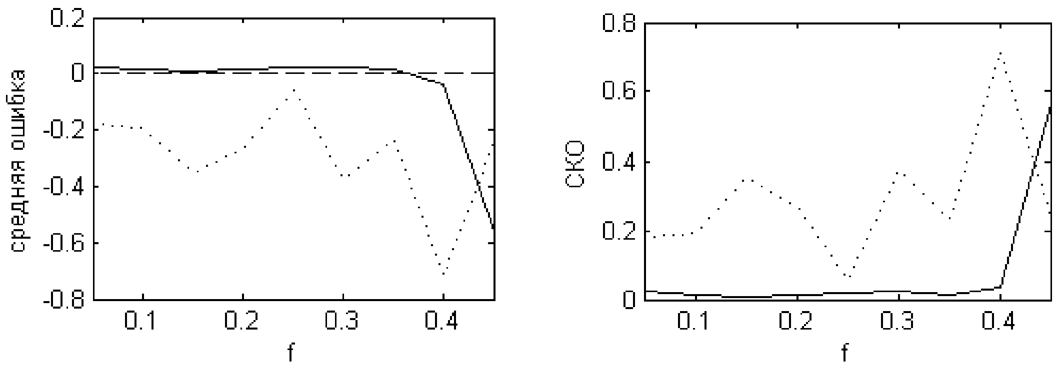
Очевидно, что при наличии выбросов минимизация квадратичной целевой функции даст смещенное значение коэффициентов линейного предсказания. В то же время использование функционала квазидлительности дает минимум, несмещенный относительно истинного значения a_1, но кроме глобального минимума, появляются еще и локальные минимумы, что затрудняет применение обычных методов минимизации. Аналогичные результаты получаются для коэффициента a_0 при установленном истинном a_1. Для решения этой проблемы были использованы генетические алгоритмы, с последующей минимизацией результата с помощью симплекс-метода Нелдера-Мида [5].



a b

Рис. 3. Зависимость средней ошибки (а) и СКО (б) определения частоты сигнала от истинной частоты с помощью метода минимума длительности и метода Прони (ММДМП, пунктир) и минимизации функционала квазидлительности с помощью генетических алгоритмов (МФК, сплошная линия)

Для исследования разработанного метода возьмем сигнал, сформированный на основе формулы (1) длиной 20 отсчетов и с единичной амплитудой. Популяция генетического алгоритма равна 800, количество поколений – 1000. В целевой функции (5) параметр сигма равен 0.01, меньшие значения этого параметра делают зависимость функционала квазидлительности от ошибки (рис. 1b) более острой, что усложняет нахождение минимума. Коэффициент затухания в показателе экспоненты равен 0.01. Среднее квадратичное отклонение аддитивного гауссовского шума равно 0.05. Сравнение производится с алгоритмом, в котором сначала выбросы устраняются методом минимума длительности [6], а потом применяется метод Прони. На рис. 3 приведена зависимость ошибки нахождения действительной частоты синусоиды от истинной частоты сигнала. В сигнале присутствуют два выброса $y_9 = 2$, $y_{15} = -4$.



a b

Рис. 4. Зависимость средней ошибки (а) и СКО (б) определения коэффициента затухания от истинного значения с помощью метода минимума длительности и метода Прони (ММДМП, пунктир) и минимизации функционала квазидлительности с помощью генетических алгоритмов (МФК, сплошная линия)

Как видно из рис. 3 применение метода минимума длительности дает более плохие результаты на всех частотах кроме 0.25, в то же время минимизация функционала квазидлительности демонстрирует приемлемую точность на частотах от 0.1 до 0.35. Аналогичные результаты получены и при определении коэффициента затухания.

К недостаткам метода, основанного на минимизации функционала квазидлительности, следует отнести значительные требования к вычислительным ресурсам.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Разработанный метод минимизации функционала квазидлительности с помощью генетических алгоритмов позволяет определить частоту и коэффициент затухания синусоидального сигнала, искаженного смесью импульсных помех и гауссовского шума. В дальнейших исследованиях следует рассмотреть метод для нахождения частот сигнала, состоящего из двух и более гармонических компонент.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Дробахин О.О. Идентификация параметров модели в виде суммы экспоненциальных функций при помощи метода Прони./ О. О. Дробахин // Автометрия. – 1989. – № 4. – С. 36 – 42.
2. Hua Yingbo. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. /Yingbo Hua, Tapan K. Sarkar// IEEE Transactions on acoustics speech and signal processing. – 1990. – V.38, № 5.
3. Прокопенко І. Г. Квазіоптимальна оцінка частоти гармонічного сигналу на обмеженому інтервалі спостереження./ І. Г. Прокопенко, І. П. Омельчук // Електроніка та системи управління. – 2009. – №1(19). – С. 39 – 45.
4. Вовк С. М. Метод минимума длительности для восстановления финитных сигналов./ С. М. Вовк, В. Ф. Борулько// Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1991. – Т. 34, №8 – С. 66-69.
5. Haupt, Randy L. Practical Genetic Algorithms / Randy L. Haupt, Sue Ellen Haupt – 2nd ed. // A Wiley-Interscience publication. – 2004. – 272 p.
6. Вовк С. М. Определение параметров синусоидального сигнала, искаженного неизвестными импульсами./ С. М. Вовк, О.С.Антропов, В. Ф. Борулько// Изв. вузов. Радиоэлектроника. –2008. – Т.51, №9. – С. 40-51.

ДРОБАХИН Олег Олегович – д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной и компьютерной радиофизики Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара.

Научные интересы:

– измерения на СВЧ и обработка сигналов.

ЛЕБЕДЕВ Сергей Геннадиевич – аспирант кафедры прикладной и компьютерной радиофизики Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара.

Научные интересы:

– обработка сигналов.

УДК 624.073.4

Т.А.Ємельянова

МОДЕЛЮВАННЯ СТІЙКОСТІ ТРИШАРОВОЇ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ З ЛЕГКИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ, ЯКА ПІДКРІПЛЕНА ПОЗДОВЖНІМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ

Постановка проблеми. У сучасний час шарові конструкції, а саме тришарові оболонки, знаходять широке застосування в таких наукоємних галузях, як промислове та цивільне будівництво, літакобудування, суднобудування та ін. Для подібних конструкцій суттєво зростає роль розрахунків на стійкість, оскільки втрата стійкості початкової форми рівноваги для більшості конструкцій є причиною вичерпання їх працездатності.

Розглядається тришарова полога оболонка з легким трансверсально – ізотропним заповнювачем, яка підкріплена поздовжніми ребрами однакової жорсткості та розташованими на однакових відстанях (рис.1). Для зовнішніх несучих шарів оболонки прийняті гіпотези Кірхгофа – Лява, для заповнювача – лінійний закон зміни тангенціальних переміщень за товщиною. Поперечні деформації заповнювача не враховуються. Для ребер прийняті гіпотези Бернуллі та враховується тільки згин ребер в вертикальній площині [1].

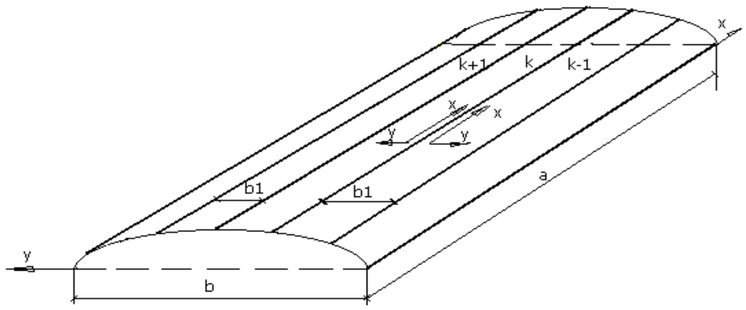


Рис. 1. Схема тришарової пологої оболонки, підкріпленої поздовжніми ребрами жорсткості

Аналіз публікацій за темою дослідження. Варіаційним шляхом, використовуючи функціонал - дію за Остроградським – Гамільтоном, отримані диференціальні рівняння стійкості участка оболонки, замкненого між ребрами, а також умови по лініях ребер і по краях тришарової пологої оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості, при шарнірному опиранні кромок [2].

$$\nabla^4\phi-\frac{\overline{B}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi-\frac{Bh}{G_3}\nabla^2\varphi\right)=0, \tag{1}$$

$$\nabla^4\varphi-\frac{1}{RD^*}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{2Tx}{D^*}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi-\frac{Bh}{G_3}\nabla^2\varphi\right)=0, \tag{2}$$

$$\psi-\frac{1-\mu}{2G_3}Bh\nabla^2\psi=0. \tag{3}$$

Зроблено спрощення системи диференціальних рівнянь за допомогою функції переміщень F [3].

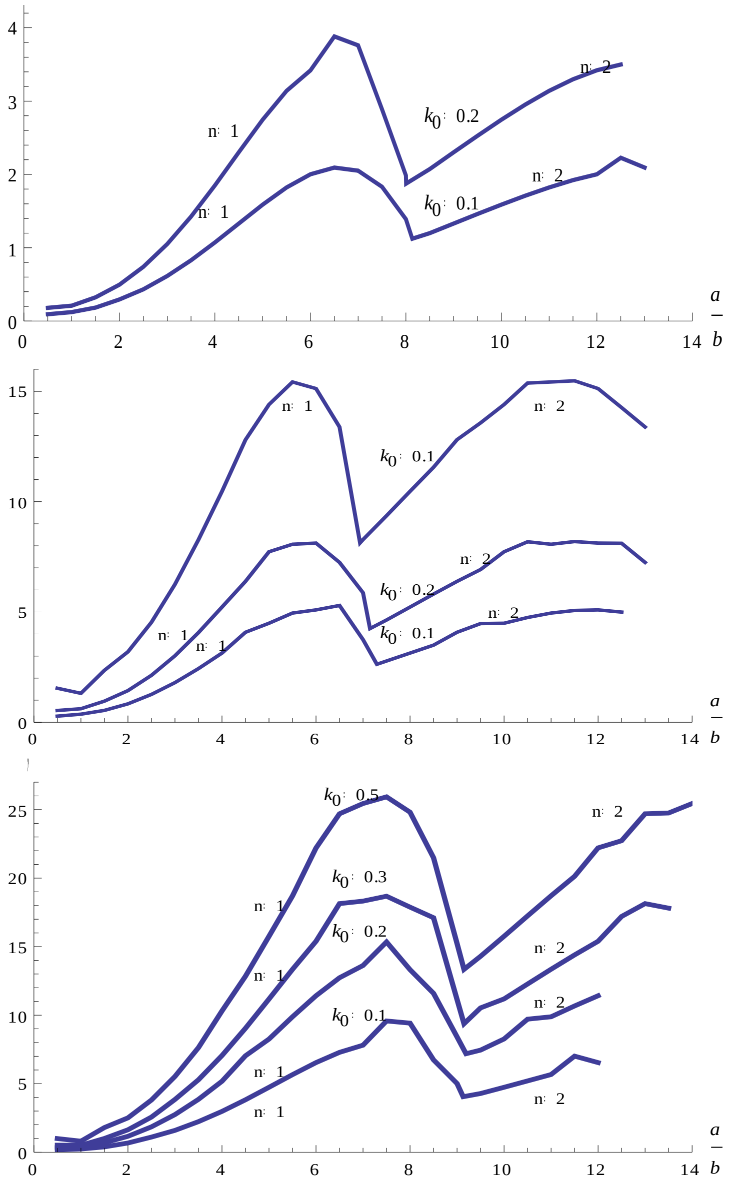
$$\nabla^4\nabla^4F+\frac{\overline{B}}{R^2D^*}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(1-\frac{Bh}{G^3}\nabla^2\right)F+\frac{2\mathrm{T}_1}{D^*}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(1-\frac{Bh}{G^3}\nabla^2\right)\nabla^4F=0. \tag{4}$$

В результаті математичних перетворень з урахуванням граничних умов, отримано рівняння стійкості тришарової пологої оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості [4].

Мета статті. Для оцінки стійкості тришарової пологої оболонки з легким трансверсально – ізотропним заповнювачем, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості, отримати залежність між параметром жорсткості оболонки та відднošенням лінійних розмірів оболонки в плані.

Основна частина. За результатами розв'язання задачі про стійкість тришарової оболонки, підкріпленої поздовжніми ребрами жорсткості, була створена комп'ютерна програма в середовищі Mathematica 7, за допомогою якої досліджувалися форми втрати стійкості оболонки [3].

Задамося параметром критичного навантаження m_t та визначимо параметр жорсткості γ (рис.2,3) в залежності від співвідношення розмірів оболонки в плані.



параметр критичного навантаження $m_t = 1$;

параметр кривизни оболонки $\alpha^2 = 5$.

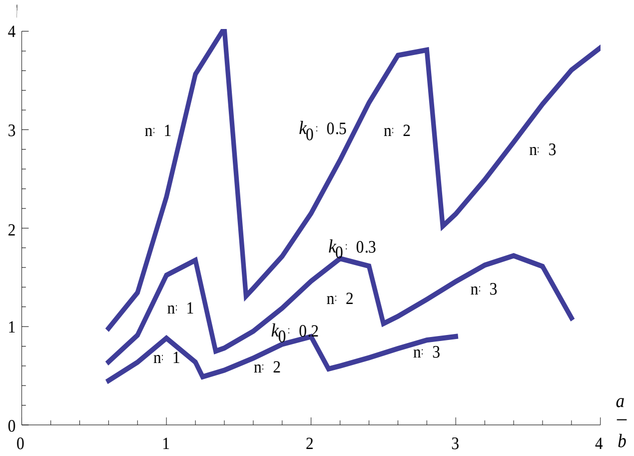
параметр критичного навантаження $m_t = 3$;

параметр кривизни оболонки $\alpha^2 = 5$.

параметр критичного навантаження $m_t = 2$;

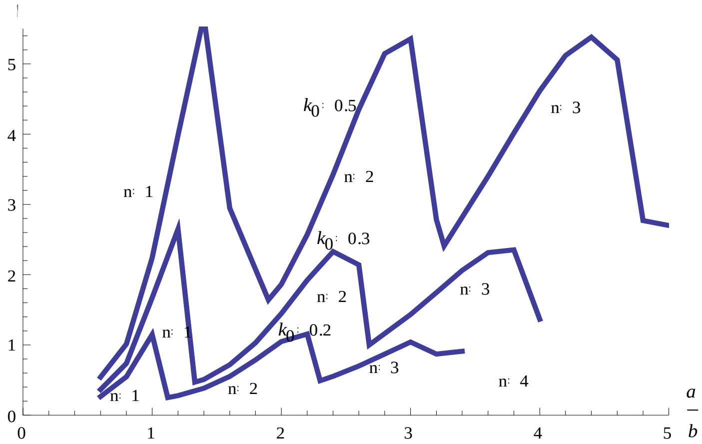
параметр кривизни оболонки $\alpha^2 = 10$

Рис. 2. Графіки залежності між γ та відношенням лінійних розмірів оболонки $\frac{a}{в}$ для оболонки, підкріпленої одним ребром жорсткості



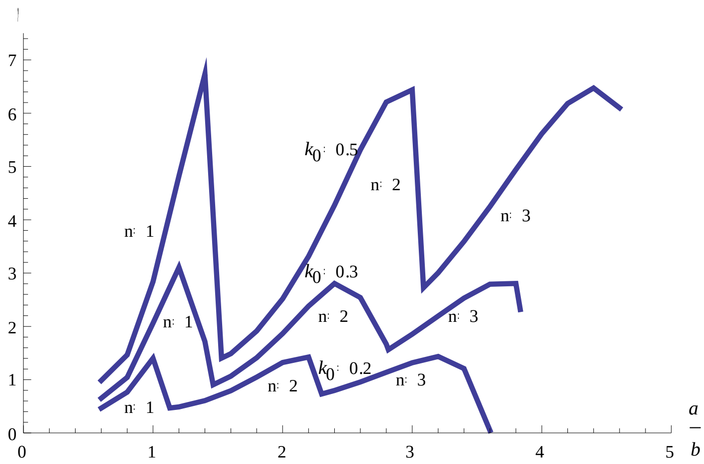
параметр критичного навантаження $m_t = 2$;

параметр кривизни оболонки $\alpha^2 = 5$.



параметр критичного навантаження $m_t = 1$;

параметр кривизни оболонки $\alpha^2 = 10$.



параметр критичного навантаження $m_t = 2$;

параметр кривизни оболонки $\alpha^2 = 10$.

Рис. 3. Графіки залежності між γ та відношенням лінійних розмірів оболонки $\frac{a}{в}$ для оболонки, підкріпленої трьома ребрами жорсткості

На рисунках позначено: $m_t = \frac{2T_1 b^2}{\pi^2 D^*}$ - параметр критичного навантаження; $\alpha^2 = \frac{\overline{B}b^4}{R^2 D^* \pi^4}$ - параметр кривизни оболонки; a, b – розміри оболонки в плані; n – кількість напівхвиль; γ_0 – параметр жорсткості.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Оболонка, підкріплена одним ребром жорсткості, є симетричною відносно вісі X. В наслідок цього випинання оболонки буде або симетричним, або антисиметричним, коли ребро жорсткості залишається прямим. В останньому випадку вузлова лінія випинання співпадає з віссю ребра і кожна половина оболонки поводить себе як вільно оперта оболонка довжиною *а* і шириною *в/2*, але з величиною параметра зсуву $k_0 = \frac{\pi^2 Bh}{G_3 b^2}$ більшим в чотири рази. В цьому випадку критичне навантаження оболонки з ребром досягає свого максимального значення.

Антисиметрична форма втрати стійкості має місце у випадку, коли відношення згинальних жорсткостей $\gamma = \frac{D_p}{D^* b}$ більше деякого значення γ_0, яке назвемо критичним.

При підвищенні $\gamma > \gamma_0$ ми вже не будемо отримувати підвищення критичного навантаження для оболонки (воно буде залишатися постійним та дорівнювати критичному навантаженню вільно опертої оболонки шириною *в/2*).

Симетрична форма втрати стійкості, коли ребро жорсткості згинається разом з оболонкою, має місце при $\gamma < \gamma_0$. При $\gamma = \gamma_0$ можливі обидві форми втрати стійкості. Таким чином, дослідження можна обмежити розгляданням тільки симетричної форми втрати стійкості для $\gamma < \gamma_0$ і визначенням критичного значення $\gamma = \gamma_0$.

Якщо γ відома, можна знайти згинальну жорсткість ребра $D_p = \gamma D^* b$. При цьому параметр критичного навантаження m_t не може бути більше параметра критичного навантаження шарнірно опертої оболонки шириною *в/2*. Якщо параметр критичного навантаження підкріпленої оболонки досягає значення параметра критичного навантаження шарнірно опертої оболонки шириною *в/2* і с параметром k_0 в чотири рази більшим, то отримаємо критичне значення параметра $\gamma = \gamma_0$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кириченко В.Л. Устойчивость трехслойной пластины, подкрепленной продольными ребрами жесткости/ В.Л. Кириченко //Первая республиканская конференция молодых ученых по механике твердого деформируемого тела. – К.,1969.
2. Кириченко В.Л. Дифференциальные уравнения устойчивости пологой трехслойной оболочки с легким заполнителем, подкрепленной ребрами жесткости/В.Л. Кириченко, Т.А. Емельянова//Вестник ХГТУ.– 1999. – №3(6).
3. Емельянова Т.А. Устойчивость трехслойной пологой оболочки с легким заполнителем, подкрепленной продольными ребрами жесткости/ Т.А. Емельянова // Сборник «Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике» (по материалам Международной научно – технической конференции). – Минск: УП «Технопринт», 2001.
4. Кириченко В.Л. Стійкість тришарової пологої циліндричної панелі з легким заповнювачем, яка підкріплена прямолінійними ребрами жорсткості. Состояние современной строительной науки 2005/ В.Л. Кириченко, Т.А. Ємельянова // Сборник научных трудов III Международной научно – практической Интернет-конференции. – Полтава: Полтавский ЦНТЭИ, 2005.

ЄМЕЛЬЯНОВА Тетяна Анатоліївна – старший викладач кафедри інженерної механіки і фізики Херсонського державного аграрного університету.

Наукові інтереси:

– стійкість та вільні коливання тришарових оболонок.

УДК 519.85

О.О.Ємець, О.М.Середа

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З УНАРНИМИ НЕЧІТКИМИ ЧИСЛАМИ

Постановка проблеми. При оптимізації часто треба враховувати невизначеність вхідних даних. Це необхідно і в задачах комбінаторної оптимізації (див., зокрема [1,2]).

Недостатньо розробленою є проблема моделювання оптимізаційних задач з урахуванням невизначеності, що описується нечіткими числами. Побудові деяких таких моделей присвячена робота.

Аналіз публікацій за темою дослідження. При моделюванні задач необхідно знаходити суму нечітких чисел, їх добуток, мінімальне, максимальне нечітке число, а також порівнювати нечіткі числа між собою.

Нечітким числом x (див. [3,4]) називають $X = \{(x_1 \mid \mu_1),\ldots,(x_k \mid \mu_k)\}$ нечітку множину (див. [5]) вигляду $x_j \in R^1$, $\forall j \in J_k$, де J_k – множина перших k натуральних чисел.

Основна частина. Розглянемо випадок, коли $k = 1$. Тоді нечітке число X набуває вигляду $X = \{x \mid \mu\}$. Називатимемо таке число *унарним нечітким числом*. Дійсне число можна представити, як унарне нечітке число з носієм рівним дійсному числу, та функцією належності рівній одиниці. Зокрема, нуль це $0 = \{0 \mid 1\}$.

Для математичної постановки задач на множині унарних нечітких чисел необхідно ввести поняття суми, добутку та лінійної впорядкованості.

Введемо поняття суми, добутку та порядку двох унарних нечітких чисел. Вони є наслідками означень, що використовуються в [3], а також [4,5] при $k = 1$.

Сумою $A + B$ двох унарних нечітких чисел $A = \{a \mid \mu^a\}$, $B = \{b \mid \mu^b\}$ будемо вважати унарне нечітке число $C = \{c \mid \mu^c\}$, де $c = a + b$, $\mu^c = \min(\mu^a, \mu^b)$.

Добутком $A \cdot B$ двох унарних нечітких чисел $A = \{a \mid \mu^a\}$, $B = \{b \mid \mu^b\}$ будемо вважати унарне нечітке число $C = \{c \mid \mu^c\}$, де $c = a \cdot b$, $\mu^c = \min(\mu^a, \mu^b)$.

Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за зростанням ($A < B$), якщо $a < b$, або $a = b$, але $\mu^a < \mu^b$.

Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за неспаданням ($A \prec B$), якщо:

а) або $A < B$;

б) або $A = B$, тобто тоді, коли $a = b$ і $\mu^a = \mu^b$.

Нечітке число A_1 називається мінімальним серед нечітких чисел $A_1, A_2, \ldots, A_k$, якщо $A_1 \prec A_2 \prec \ldots \prec A_k$.

Нечітке число A_k називається максимальним серед нечітких чисел $A_1, A_2, \ldots, A_k$, якщо $A_1 \prec A_2 \prec \ldots \prec A_k$ (див. [3]).

Введемо частку $\frac{A}{B}$ унарних нечітких чисел $A = (a \mid \mu)$, $B = (b \mid \eta)$.

Це можна робити в декілька способів: $\frac{A}{B}=\left(\frac{a}{b}\,|\min\{\mu,\eta\}\right)$, $\frac{A}{B}=\left(\frac{a}{b}\,|\max\{\mu,\eta\}\right)$, $\frac{A}{B}=\left(\frac{a\mu}{b\eta}\,|\min\{\mu,\eta\}\right)$, $\frac{A}{B}=\left(\frac{a\mu}{b\eta}\,|\max\{\mu,\eta\}\right)$, $\frac{A}{B}=\left(\frac{a}{b}\,|\min\{\mu+\eta,1\}\right)$, $\frac{A}{B}=\left(\frac{a\mu}{b\eta}\,|\min\{\mu+\eta,1\}\right)$.

Такі означення випливають з означень, розглянутих в [3,5].

Означення частки нечітких чисел необхідне для розгляду узагальнень дробово-лінійних цільових функцій на нечіткі випадки.

При визначенні суми, добутку також можна використовувати підходи, наведені при викладі операції ділення.

ЗАДАЧА ВИБОРУ ПОРТФЕЛЮ ЦІННИХ ПАПЕРІВ І ЇЇ МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Визначення оптимального портфелю цінних паперів є однією з найважливіших задач, з якими стикаються різні інвестори (банки, страхові компанії, тощо). Під портфелем розуміють розміри вкладень в різні види цінних паперів: звичайні облігації, облігації короткотермінових державних позик, банківські депозитні сертифікати, звичайні акції та інше). Для аналізу задачі вибору портфелю цінних паперів, зважаючи на її складність і економічну важливість розроблено ряд математичних моделей. Ми сформулюємо математичну модель, що дозволить позбутися невизначеності шляхом використання нечітких чисел.

Нехай наявний капітал $\{C\,|\,\mu^{c}\}$ в наступному інвестиційному періоді можна вкласти в цінні папери N видів. Потрібно визначити відповідні долі вкладень.

Нехай G_k унарне нечітке число виду $\{g_k\,|\,\mu^{g_k}\}$ – розмір капіталу (в грошових одиницях), що можна вкласти в цінні папери. $G=\left(\{g_1\,|\,\mu^{g_1}\},\{g_2\,|\,\mu^{g_2}\},\ldots,\{g_N\,|\,\mu^{g_N}\}\right)$ – множина всіх можливих розмірів таких капіталів.

Тоді на змінні x_j накладаються обмеження:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \prec \{C\,|\,\mu^{c}\}; \tag{1.1}$$

$$x_j \succ 0, \forall j \in J_N, \tag{1.2}$$

де 0 – це унарне нечітке число $0=\{0\,|\,1\}$.

Можна утворити множину нечітких переставлень $E_N(G)$. Кожне переставлення $\left(\{g_{i_1}\,|\,\mu^{g_{i_1}}\},\{g_{i_2}\,|\,\mu^{g_{i_2}}\},\ldots,\{g_{i_k}\,|\,\mu^{g_{i_k}}\}\right)$ відображає розподіл капіталів $x_j=\left\{g_{i_j}\,|\,\mu^{g_{i_j}}\right\}$.

Тоді нам потрібно знайти вектор

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)\in E_N(G), \tag{1.3}$$

де $E_N(G)$ – множина нечітких переставлень на множині G, що знаходиться із (1.1), (1.2), та максимізує прибуток.

Запишемо цільову функцію.

Нехай є дані по кожному виду вкладень за останні T років (або інших інвестиційних періодів), що відображають прибуток від вкладень для кожного виду цінних паперів. Нехай $\left(r_j(t)\,|\,\mu^{r_j(t)}\right)$ – загальний прибуток в році (періоді) t на одну грошову одиницю вкладень в цінні папери виду j.

Зазначимо, що прибутки $\left(r_j(t)\,|\,\mu^{r_j(t)}\right)$ непостійні і можуть сильно коливатися рік від року (період від періоду). Тому, для оцінки того, чи варто вкладати капітал в цінні папери виду j, знайдемо середній за T років (періодів) прибуток ϕ_j (унарне нечітке число) на одну вкладену грошову одиницю:

$$\phi_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(r_j(t) \mid \mu^{r_j(t)}\right). \tag{1.4}$$

Загальна величина прибутку (унарне нечітке число), що очікується, задається так:

$$Z = \sum_{j=1}^{N}\phi_j x_j . \tag{1.5}$$

Таким чином, одержали математичну модель цієї задачі: знайти $\left\langle Z^*, x^*\right\rangle$, де

$$Z^* = \max_{x\in X}\sum_{j=1}^{N}\phi_j x_j ; \tag{1.6}$$

$$x^* = \arg\max_{x\in X}\sum_{j=1}^{N}\phi_j x_j , \tag{1.7}$$

за обмежень (1.1)-(1.2), де ϕ_j обчислюється за допомогою формули (1.4).

ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ В НЕЧІТКІЙ ПОСТАНОВЦІ

Нехай є n претендентів на n місць роботи.

Нехай відома множина унарних нечітких чисел $C = \{c_{ij} \mid \mu_{ij}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, де c_{ij} – це ефект від призначення i-го претендента на j-те місце роботи; μ_{ij} – функція належності, яку можна інтерпретувати як ступінь відповідності i-го працівника j-му робочому місцю.

Необхідно розподілити претендентів по робочих місцях так, щоб кожен претендент зайняв одне місце, кожне місце було зайняте одним претендентом, і так, щоб претенденти максимально відповідали вимогам робочих місць, а сумарна ефективність від розподілу працівників була максимальною.

Ефективність від призначення визначається виразом: $c_{1i_1} + c_{2i_2} + \ldots + c_{ni_n} = C(i)$, де $i_1, i_2, ..., i_n$ – місця роботи претендентів $1,2,...,n$ відповідно, $i = (i_1, i_2, ..., i_n) \in E_n(J_n)$, $J_n = \{1,2,...,n\}$ – множина перших n натуральних чисел.

$$C(i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji_j} \to \max , \tag{1.8}$$

за умови

$$i \in E_n(J_n). \tag{1.9}$$

Введемо змінні x_{ij}, таким чином:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 - \text{ якщо } i\text{-тий претендент займає } j\text{-те робоче місце,} \\ 0 - \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Обмеження, яке вказує на те, що кожне робоче місце зайняте тільки одним претендентом, має наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j \in J_n . \tag{1.10}$$

Обмеження, яке показує, що кожен претендент займає тільки одне робоче місце, має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j \in J_n. \quad (1.11)$$

Можна ввести додаткові обмеження кількома способами:

1. Зважена ефективність призначення не повинна бути меншою якогось мінімально допустимого граничного $C_{граничне}$:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ji_j}\mu_{ji_j}\right)}{\sum_{j}\mu_{ji_j}} \geq C_{граничне}.$$

2. Загальна відповідність працівників призначеним їм робочим місцям має бути не менше якогось граничного $\mu_{граничне}$. Якщо сумарна ефективність – це $\{C(i) \mid \mu^C(i)\}$, де $C(i)$ обраховується за формулою (1.8), то повинно виконуватись:

$$\mu^C(i) \geq \mu_{гран}.$$

3. Відповідність працівника призначеному йому робочому місцю повинна бути не менше якогось граничного $\mu_{гран}^{роб.місць}$ для робочих місць, що може займати цей працівник:

$$\mu_{ji_j} \geq \mu_{гран}^{роб.місць}.$$

4. Відповідність працівника призначеному йому робочому місцю повинна бути не менше якогось граничного $\mu_{гран}^{прац}$ для працівників, що можуть займати це робоче місце:

$$\mu_{ij_i} \geq \mu_{гран}^{прац}.$$

Граничні значення відповідності працівників можна задавати різними способами, наприклад:

$$\mu_{гран} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}}{n^2}, \quad (1.12)$$

для випадку 2;

$$\mu_{гран}^{роб.місц} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{роб.місц}}{n}, \quad (1.13)$$

для випадку 3;

$$\mu_{гран}^{прац} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\mu_j^{прац}}{n}, \quad (1.14)$$

для випадку 4, чи взагалі може бути заданим безпосередньо.

ЗАДАЧА ПРО РОЗМІЩЕННЯ ПУНКТІВ ОБСЛУГОВУВАННЯ З НЕЧІТКИМИ ДАНИМИ

Нехай є $P_1, P_2, \ldots P_n$ множина пунктів споживання послуг, які є одночасно пунктами можливого розміщення центрів обслуговування. Нехай, відома вартість c_j розміщення центра обслуговування в пункті P_j (можливо числа c_j – унарні нечіткі числа). Позначимо через u_j коефіцієнт ефективності такого розміщення. Нехай відома $D = \{d_{ij} \mid \mu_{ij}\}$ множина унарних нечітких чисел, де d_{ij} – відстань між пунктами P_i та P_j, а μ_{ij} – умовний безвимірний рівень якості обслуговування пункту споживання P_j при розміщенні центру обслуговування в пункті P_i, $0 \le \mu_{ij} \le 1$.

Нехай відома L_j – кількість населення в пункті споживання P_j. Для цього пункту коефіцієнт ефективності може обраховуватися так:

$$u_j = L_j \mu_{ij}, \qquad (1.15)$$

де μ_{ij} – рівень якості обслуговування пункту споживання P_j при розміщенні центру обслуговування в пункті P_i.

Необхідно розмістити центри обслуговування таким чином, щоб всі пункти споживання були забезпечені послугами як мінімум на задовільному рівні, і при цьому мінімізувати загальну вартість створення центрів та максимізувати їх сумарну ефективність.

Введемо змінні x_j, таким чином:

$$x_j = \begin{cases} 1 - \text{ якщо центр обслуговування розміщено в пункті споживання } P_j, \\ 0 - \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Тоді цільова функція матиме наступний вигляд:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} u_j x_j} \to \min . \qquad (1.16)$$

Нехай $\mu_j^{задовільн}$ – задовільний рівень обслуговування в пункті j.

Для того, щоб сумарна якість обслуговування в кожному пункті споживання була на задовільному рівні, повинна виконуватися наступна нерівність:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ d_{ij} \prec d_{гран.}}}^{n} \mu_{ij} \ge \mu_j^{задовільн}, \; j = \overline{1,n}. \qquad (1.17)$$

Умова $d_{ij} \prec d_{гран.}$ враховує в нечіткому варіанті досяжність обслуговування пункту P_j з P_i, де $d_{гран.}$ – унарне нечітке число $d_{гран.} = \{\delta \mid \mu^{\delta}\}$.

Висновки і перспективи подальших досліджень. В роботі введено поняття унарного нечіткого числа та побудовані математичні моделі оптимізаційних задач, де є потреба у використанні таких чисел.

Напрямом подальших досліджень є розробка підходів та методів розв'язування таких задач.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К.: Наукова думка, 2003. – 263 с.
2. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К.: Ін-т системн. досліджень освіти,1993. – 188 с.
3. Ємець О.О. Операції та відношення над нечіткими числами / О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ „КПІ". – 2008. – №.5. – С. 39 – 46.

4. Беллман Р. Принятие решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. Заде – В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976. – С. 172–215.
5. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

ЄМЕЦЬ Олег Олексійович – д.ф.-м.н., професор кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики Полтавського університету економіки і торгівлі.

Наукові інтереси:
– теорія та методи евклідової комбінаторної оптимізації;
– нечітка оптимізація;
– системний аналіз.

СЕРЕДА Олег Миколайович – здобувач кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики Полтавського університету економіки і торгівлі.

Наукові інтереси:
– теорія та методи евклідової комбінаторної оптимізації;
– нечітка оптимізація.

УДК 539.3:533.6.013.42

О.Л. Зайденварг

АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ТРЕЩИН В ЭЛЕМЕНТАХ ГИДРОТУРБИННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Постановка проблеммы. Значительная часть энергетического оборудования в Украине практически исчерпала свой нормативный ресурс, что выражается, в частности, в возникновении и развитии трещин и других дефектов, характерных для конструкций, работающих в условиях повышенных технологических нагрузок. Наличие трещин приводит к снижению надежности работы конструкции. Поэтому актуальной задачей при уточнении остаточного ресурса является учет влияния трещин, развившихся в процессе эксплуатации. Изучению прочности элементов конструкций с трещинами посвящено большое количество научных публикаций [1-3] и др.

Очень часто невозможно получить реальные данные относительно размеров трещин и расстояний между ними с помощью визуальных наблюдений, так как это связано с остановкой работающего оборудования. Таким образом, представляет интерес рассмотрение часто встречающихся дефектов и их конфигураций. В частности, часто встречаются одиночные трещины и комбинации коллинеарных трещин. Важной характеристикой решения задачи о прочности элемента конструкции, ослабленного трещиной, являются коэффициенты интенсивности напряжений вблизи вершин трещины.

Целью данной работы является определение наиболее опасной конфигурации трещин из таких, как изолированная трещина (рис.1), цепочка трещин (рис.2), две неравные коллинеарные трещины (рис. 3) для уточнения технических требований к сварно-литым конструкциям.

Основная часть. В [8] указывается, что работа элементов гидротурбинного оборудования в рабочих диапазонах нагрузок допускается при наличии дефектов, если дефекты или их скопления не превышают 7 см. Группа дефектов считается скоплением (или цепочкой), если в ней присутствует не менее четырех дефектов. Результаты данной работы позволяют уточнить техническое определение цепочки.

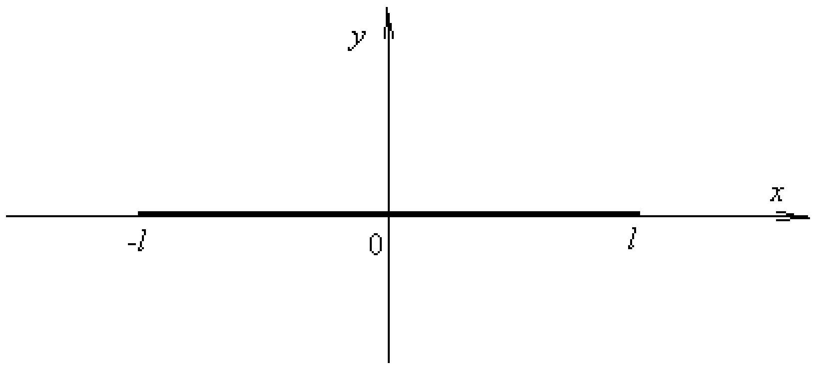


Рис.1. Изолированная трещина

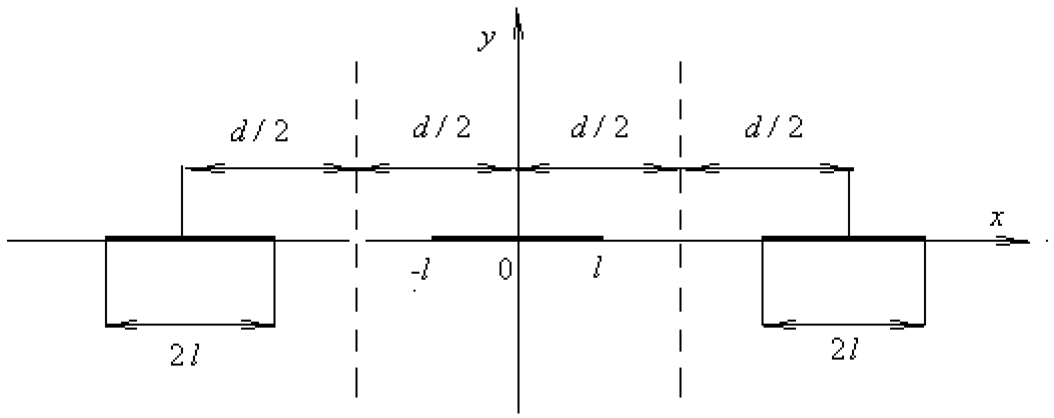


Рис.2. Цепочка трещин

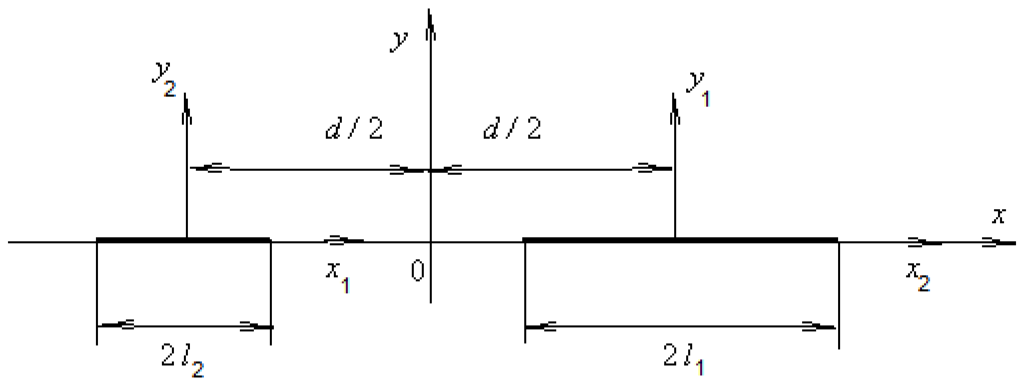


Рис.3. Две неравные коллинеарные трещины

Для решения задачи об определении наиболее опасной конфигурации трещин, в каждом из перечисленных случаев найдем коэффициенты интенсивности напряжений вблизи вершин трещины.

Рассмотрим бесконечную пластину с каждым из перечисленных дефектов. Пусть σ – нормальная нагрузка, действующая на пластину вблизи трещин, симметричная на берегах трещины. Для изолированной трещины длины $2l$ (рис. 1) коэффициенты интенсивности напряжений находятся по формуле

$$k = \sigma\sqrt{l} \quad . \tag{1}$$

Для цепочки трещин коэффициенты интенсивности напряжений будем искать по формуле

$$k = \sigma\sqrt{\frac{d}{\pi} tg\, \frac{\pi l}{d}} \quad , \tag{2}$$

где $2l$ – длина трещины, d – расстояние между серединами трещин (рис. 2).

В случае же задачи для двух неравных коллинеарных трещин решим систему интегральных уравнений [3]:

$$\begin{cases} \int\limits_{-l_1}^{l_1} \frac{\Gamma_1'(t)}{t-x} + \int\limits_{-l_2}^{l_2} \frac{\Gamma_2'(t)}{t-x-d} = \pi\sigma, |x| \langle l_1 \\ \int\limits_{-l_1}^{l_1} \frac{\Gamma_1'(t)}{t-x+d} + \int\limits_{-l_2}^{l_2} \frac{\Gamma_2'(t)}{t-x} = \pi\sigma, |x| \langle l_2 \end{cases} \quad . \tag{3}$$

Интегрируя в (3) по частям при условии $\int\limits_{-l_i}^{l_i}\Gamma_i'(t)dt = 0, i = 1;2$, получаем систему гиперсингулярных интегральных уравнений

$$\begin{cases} \int\limits_{-l_1}^{l_1}\frac{\Gamma_1(t)}{(t-x)^2} + \int\limits_{-l_2}^{l_2}\frac{\Gamma_2(t)}{(t-x-d)_2} = -\pi\sigma, |x|\langle l_1 \\ \int\limits_{-l_1}^{l_1}\frac{\Gamma_1(t)}{(t-x+d)^2} + \int\limits_{-l_2}^{l_2}\frac{\Gamma_2(t)}{(t-x)^2} = -\pi\sigma, |x|\langle l_2 \end{cases}. \quad (4)$$

Систему (4) решаем методом дискретных особенностей [4].
Коэффициент интенсивности напряжений вблизи вершин трещин будем искать следующим образом:
Из [3] следует, что

$$k_{2i}^{\pm} - ik_{1i}^{\pm} = \mp \lim_{x_i \to \pm l_i}\left[\sqrt{\frac{l_i^2 - x_i^2}{l_i}}\Gamma_i'(x_i)\right], i = 1;2.. \quad (5)$$

где $k_{2i}^{\pm}$ и $k_{1i}^{\pm}, i = 1;2$ - соответственно нормальные и касательные составляющие коэффициента интенсивности напряжений. Так как σ – нормальная нагрузка, симметричная на берегах трещины, то $k_{1i}^{+} = k_{1i}^{-} = 0, i = 1;2$,

$$k_{2i} = k_{2i}^{+} = k_{2i}^{-} = \lim_{x_i \to \pm l_i}\left[\sqrt{\frac{l_i^2 - x_i^2}{l_i}}\Gamma_i'(x_i)\right], i = 1;2. \quad (6)$$

(Под $k_{2i}^{+} = k_{2i}^{-} = k_{2i}$ будем понимать абсолютную величину нормальных компонентов коэффициента интенсивности.)

Так как система уравнений (4) решена численно, то есть, функции $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x)$ найдены в виде таблицы чисел $\Gamma_{1k}, k = \overline{1;n_1}, \Gamma_{2j}, j = \overline{1;n_2}$, то $k_{2i}, i = \overline{1;2}$ также найдем приблизительно по формуле

$$k_{2i} = \sqrt{\frac{l_i^2 - x_{p_i}^2}{l_i}}\frac{\Gamma_{p_i} - \Gamma_{p_i - 1}}{x_{p_i} - x_{p_i - 1}}, i = 1;2. \quad (7)$$

Здесь $n_i, i = \overline{1;2}$ - количество отрезков, на которые разбивается отрезок $[-l_i; l_i], i = \overline{1;2}$, $n_2 = \left[\frac{l_2}{l_1}n_1\right]$ при решении системы уравнений (4) методом дискретных особенностей.

Номер $p_i, i = \overline{1;2}$ выберем достаточно близким к $n_i, i = \overline{1;2}$, так как нас интересуют коэффициенты интенсивности напряжений вблизи вершины трещины, однако неравным $n_i, i = \overline{1;2}$, так как метод дискретных особенностей дает существенную погрешность на концах рассматриваемого промежутка.

Так как сравнивать результаты имеет смысл при одинаковой нагрузке на пластину, коэффициенты интенсивности напряжений вычислим, полагая нагрузку $\sigma = 1$.

Также будем рассматривать все описанные дефекты таким образом, чтобы общая длина дефекта оставалась неизменной для каждого случая.

Пусть общая длина дефекта равна 7 см, что соответствует требованиям, приведенным в [8]. Отметим, что в [8] рекомендуется не допускать дефектов, состоящих более, чем из трех трещин.

Для изолированной трещины в соответствии с формулой (1) получим

$$k = \sigma\sqrt{l}\Big|_{\sigma=1,2l=7} = \sqrt{3.5} \approx 1.871 \text{ Мпа}\cdot\text{м}^{1/2}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь цепочку трещин. В [9] показано, что конечная периодическая система трещин (то есть, система равных коллинеарных трещин, расстояние между которыми постоянно) может рассматриваться как цепочка, если содержит не менее трех трещин. В процессе исследования были рассмотрены различные цепочки с сохранением расстояния между ближайшими вершинами соседних трещин. Здесь приведем результаты для цепочки из трех, четырех и пяти трещин при b=0.5 см, b=0.25 см и b=0.125 см, где b - расстояние между ближайшими вершинами соседних трещин. Результаты, полученные согласно формуле (2), приведены в таблице 1.

Таблица 1.

b,см	3 трещины	4 трещины	5 трещин
0.5	$k\big\|_{2l=2} \approx 1.565$ Мпа·м$^{1/2}$	$k\big\|_{2l=1.375} \approx 1.158$ Мпа·м$^{1/2}$	$k\big\|_{2l=1} \approx 0.909$ Мпа·м$^{1/2}$.
0.25	$k\big\|_{2l=2} \approx 2.162$ Мпа·м$^{1/2}$	$k\big\|_{2l=1.375} \approx 1.619$ Мпа·м$^{1/2}$	$k\big\|_{2l=1} \approx 1.289$ Мпа·м$^{1/2}$.
0.125	$k\big\|_{2l=2} \approx 3.020$ Мпа·м$^{1/2}$	$k\big\|_{2l=1.375} \approx 2.263$ Мпа·м$^{1/2}$	$k\big\|_{2l=1} \approx 2.223$ Мпа·м$^{1/2}$.

Можно видеть, что при увеличении длины одной трещины в цепочке при сохранении расстояния между ближайшими вершинами соседних трещин, растет значение коэффициентов интенсивности напряжений вблизи вершин трещин.

При таком же расстоянии между ближайшими вершинами соседних трещин рассмотрим и случай двух неравных коллинеарных трещин (при различных значениях длин трещин). В таблице 2 приведены некоторые результаты для данного случая. Из четырех значений коэффициентов интенсивности напряжений для каждого случая приведено максимальное (различие коэффициентов вызвано тем, что трещины неравной длины).

Таблица 2.

b,см			
0.5	$k \approx 1.596$ Мпа·м$^{1/2}$, $2l_1$=2, $2l_2$=4.5	$k \approx 1.598$ Мпа·м$^{1/2}$, $2l_1$=2,5, $2l_2$=4	$k \approx 1.682$ Мпа·м$^{1/2}$, $2l_1$=3, $2l_2$=3.5
0.25	$k \approx 1.849$ Мпа·м$^{1/2}$, $2l_1$=2.25, $2l_2$=4.5	$k \approx 1.950$ Мпа·м$^{1/2}$, $2l_1$=2.75, $2l_2$=4	$k \approx 2.020$ Мпа·м$^{1/2}$, $2l_1$=3.25, $2l_2$=3.5
0.125	$k \approx 2.158$ Мпа·м$^{1/2}$, $2l_1$=2.125, $2l_2$=4,75	$k \approx 2.278$ Мпа·м$^{1/2}$, $2l_1$=2.625, $2l_2$=4,25	$k \approx 2.358$ Мпа·м$^{1/2}$, $2l_1$=3,125, $2l_2$=3,75

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Анализ результатов показывает, что наиболее безопасным и предсказуемым из рассмотренных дефектов является изолированная трещина, а влияние двух неравных коллинеарных трещин на время работы конструкции сопоставимо с влиянием цепочки. При этом значение коэффициентов интенсивности в случае неравных трещин зависит от соотношения их длин, что делает поведение такого дефекта менее предсказуемым по сравнению с цепочкой.

Таким образом, рекомендуется пересмотреть требования к работе сварно-литых конструкций при наличии дефектов [8] с учетом того, что скопление трех трещин представляет не меньшую опасность, нежели скопление большего их числа, а также с учетом влияния суммарной длины трещин внутри дефекта и соотношения их длин на время непрерывной работы конструкции.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Андрейкив А.Е. Усталостное разрушение и долговечность конструкций/ А.Е. Андрейкив, А.И. Дарчук. – Киев: Наук. думка, 1987. – 404 с.
2. Панасюк В.В. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов / В.В.Панасюк, А.Е.Андрейкив, С.Е Ковчик. – Киев: Наук. думка, 1971. – 278 с.
3. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Кантор Б.Я. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды/Б.Я. Кантор, Е.А. Стрельникова. – Харьков: Новое слово, 2005.– 252 с.
5. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов/Ю.В. Гандель. – Харьков: Изд. Харьк. национального ун-та им. В.Н.Каразина, 2000. – 92 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения/Н.И. Мусхелишвили – М: Наука, 1968. – 512 с.
7. Пэрис П. Критерии усталостного распространения трещин/П. Пэрис, Ф. Эрдоган //Техн. механика. Сер. Д.– 1987. –№ 4. – С. 60-68.
8. Веремеенко И.С. Турбины гидравлические. Технические требования к сварно-литым конструкциям. ПО «Харьковский турбинный завод»/ И.С. Веремеенко.– 1988.–14 с.
9. Zaydenvarg O. The Method of Discrete Singularities in Justification of The Number of Cracks in a Chain/O. Zaydenvarg, E. Strelnikova // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. – Львів: видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2009. – С. 88.

ЗАЙДЕНВАРГ Ольга Леонидовна – аспирант Института проблем машиностроения им.А.Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков.

Научные интересы:

– сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, механика хрупкого разрушения, преподавание фундаментальных дисциплин в высшей школе.

УДК 517.938

А.А. Зевин, С.Ю. Пославский

КРИТЕРИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Постановка проблемы. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = B(t)x(t-\tau_B(t)) + f(x(t-\tau(t),t) + C(t)\int_{t-\mu}^{t} x(s)ds, \qquad (1)$$

$x \in \mathrm{R}^n$, $\tau(t) \in [0,h]$, $\tau_B(t) \in [0,h_B]$, $x(t) = x_0(t)$ при $t \in [-h_*,0]$, $h_* = \max(h,h_B)$, где $A(t), B(t)$ и $C(t)$ – заданные матрицы. Функции $\tau(t)$, $\tau_B(t)$, $x_0(t)$ и $f(x,t)$ кусочно-непрерывны, причем $\|x_0(t)\| \le M$ и

$$\|f(x,t)\| \le k\|x\|, \qquad (2)$$

где $\|\cdot\|$ –любая норма вектора и согласованная норма матрицы.

Наибольший показатель Ляпунова равен

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(k,h) = \sup \lambda(\tau,\tau_B, f, x_0), \qquad (3)$$

где $\lambda(\tau, f, x_0)$ – показатель Ляпунова решения $x(\tau,\tau_B,x_0, f)$, а супремум вычисляется по всем функциям $\tau(t)$, $\tau_B(t)$, $x_0(t)$ и $f(x,t)$, удовлетворяющим указанным условиям.

Таким образом, начиная с некоторого N, для любого решения системы (1), (2)

$$\|x(t)\| \le N\exp(\bar{\lambda}t), \quad t \in (0,\infty). \qquad (4)$$

Поэтому необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости системы служит неравенство $\bar{\lambda} < 0$.

Анализ публикаций по теме исследования. Исследованию уравнений рассматриваемого типа посвящена значительная литература. В большинстве исследований выводятся условия устойчивости, выраженные с помощью заданной нормы нелинейных членов и максимумов функций запаздывания; значительно меньшее число работ связано с вычислением верхней границы максимального показателя Ляпунова. Для решения таких задач разработаны различные методы, основанные, главным образом, на использовании функций или функционалов Ляпунова (см., например, монографии [1-5] и обзор [6]). Более явные результаты, выраженные непосредственно в параметрах системы, получены с использованием неравенств для решений соответствующих дифференциальных уравнений [7-9].

Для некоторых систем рассматриваемого типа найдены необходимые и достаточные условия устойчивости [9-12], однако подавляющее большинство условий являются лишь достаточными. Недостатком таких условий (равно как и известных оценок показателей Ляпунова) является то, что степень их консерватизма остается неизвестной.

Цель статьи. Получить условия экспоненциальной устойчивости рассматриваемой системы. Найти двусторонние границы, позволяющие локализовывать максимальный показатель Ляпунова и тем самым оценивать возможный консерватизм их вычисления.

Основная часть. Представим решение (1) в виде

$$x(t) = W(t,0)x(0) + \int_0^t W(t,s)\left[f(x(s-\tau(s)),s) + B(s)x(s-\tau_B(s)) + C(s)\int_{s-\mu}^{s} x(u)du \right] ds, \quad (5)$$

где $W(t,s)-$ матрицант уравнения $\dot{x}(t) + A(t)x(t) = 0$. Пусть $\alpha-$ его наибольший показатель Ляпунова, тогда при некотором $M > 0$ и любых $0 \le s \le t < \infty$

$$\|W(t,s)\| \le M \exp(\alpha(t-s)). \quad (6)$$

Верхние границы величины λ^{-} будем искать в интервале

$$\lambda > \alpha. \quad (7)$$

Положим

$$v(t,\lambda,\tau) =)\int_0^t \exp[-\lambda(t-s+\tau(s)]\|W(t,s)\|ds,$$

$$v_1(t,\lambda,\tau_B) = \int_0^t \|W(t,s)B(s)\| \exp[-\lambda(t-s+\tau_B(s))]ds +$$

$$+\frac{1-\exp(-\lambda\mu)}{\lambda}\int_0^t \|W(t,s)C(s)\| \exp(-\lambda(t-s))ds.$$

В силу (6) и (7) функции $v(t,\lambda)$ и $v_1(t,\lambda)$ ограничены на $[0,\infty)$; положим

$$v(\lambda,\tau) = \sup_t v(t,\lambda,\tau), \quad v_1(\lambda,\tau_B) = \sup_t v_1(t,\lambda,\tau_B) \text{ при } t \ge 0. \quad (8)$$

Заметим, что если матрицы A, B и C постоянны, то

$$W(t,s) = W(t-s),$$

$$v(t,\lambda,\tau) = \int_0^t \exp[-\lambda(t-s)+\tau(s)]\|W(t-s)\|ds = \int_0^t \exp[-\lambda(s+\tau(s)]\|W(s)\|ds,$$

$$v_1(t,\lambda,\tau_B) = \int_0^t \|W(s)B\| \exp[-\lambda(s+\tau_B(s)]ds + \frac{1-\exp(-\lambda\mu)}{\lambda}\int_0^t \|W(s)C\| \exp(-\lambda s)ds. \quad (9)$$

Очевидно, что здесь $v(t,\lambda,\tau)$ и $v_1(t,\lambda,\tau_B)$ монотонно возрастают по t, поэтому

$$v(\lambda,\tau) = \lim v(t,\lambda,\tau), \ v_1(\lambda,\tau_B) = \lim v_1(t,\lambda,\tau_B) \quad \text{при } t \to \infty.$$

Учитывая, что $\lim[1-\exp(-\lambda\mu)]\lambda^{-1} = \mu$ при $\lambda \to 0$, получим

$$v_1(0) = \int_0^t \|W(t,s)B(s)\|ds + \mu\int_0^t \|W(t,s)C(s)\|ds.$$

Обозначим $\lambda_+ = \lambda_+(k)$ – наибольший по $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$ корень уравнения

$$kv(\lambda,\tau) + v_1(\lambda,\tau_B) = 1. \quad (10)$$

Соответствующие функции $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$ определяются из следующих соображений. Как видно из (9), $v(t,\lambda,\tau)$ и $v_1(t,\lambda,\tau_B)$ убывают по λ. Поэтому $\lambda_+ < 0$ и $\lambda_+ > 0$ $kv(0) + v_1(0) < 1$ и $kv(0) + v_1(0) > 1$, соответственно. С другой стороны, при возрастании $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$ функции $v(t,\lambda,\tau)$ и $v_1(t,\lambda,\tau_B)$ убывают при $\lambda > 0$ и возрастают при $\lambda < 0$. Поэтому при вычислении $v(\lambda,\tau)$ и $v_1(\lambda,\tau_B)$ в (10) полагаем $\tau = h$, $\tau_B = h_B$ в случае $kv(0) + v_1(0) < 1$ и $\tau = 0$, $\tau_B = 0$ в случае $kv(0) + v_1(0) > 1$ (при $kv(0) + v_1(0) = 1$ левая часть (10) не зависит от $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$).

Следующая теорема дает верхнюю границу показателя λ^{-}.

Теорема 1. В системе (1), (2)

$$\lambda^{-} \le \lambda_+. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ – решение (1) при некоторых $x_0(t)$, $\tau(t)$, $\tau_B(t)$ и $f(x,t)$. Положив в (5) $x(t) = y(t)\exp(\lambda t)$, получим

$$y(t) = \exp(-\lambda t)W(t,0)x(0) + \exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)\, f[\exp(\lambda(s-\tau(s)]y(s-\tau(s)), s)ds +$$

$$+\exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)B(s)\exp[\lambda(s-\tau_B(s))\}y(s-\tau_B(s))ds +$$

$$+\exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)C(s)\int_{s-\mu}^{s} y(u)\exp(\lambda u)duds.$$

Используя условия (1), (2), найдем

$$\|y(t)\| \le \exp(-\lambda t)\|W(t,0)x(0))\| + k\int_0^t \exp(-\lambda(t-s+\tau(s)))\|W(t,s)\|\|y(s-\tau(s))\|ds +$$

$$+\int_0^t \|W(t,s)B(s)\|\exp[-\lambda(t-s+\tau_B(s))]\|y(s-\tau_B(s))\|ds + \tag{12}$$

$$+\exp(-\lambda t)\int_0^t \|W(t,s)C(s)\|\int_{s-\mu}^{s}\|y(u)\|\exp(\lambda u)duds.$$

Пусть

$$\|y(t_*)\| = \max\|y(t)\| \text{ при } t\in[0,t_+], \tag{13}$$

где $t_* = t_*(t_+)$. Положив в (12) $t = t_*$ и учитывая (13) и (8), получим

$$\|y(t_*)\| \le \exp(-\lambda t_*)\|W(t_*,0)x(0))\| + \|y(t_*)\|[kv(\lambda,\tau) + v_1(\lambda,\tau_B)], \tag{14}$$

Покажем, что при $\lambda \ge \lambda_+$ функция $\|y(t)\|$ ограничена на $(0,\infty)$. Действительно, в противном случае $t_* \to \infty$ при $t_+ \to \infty$ и, в силу (6) и (7), $\exp(-\lambda t_*)\|W(t,0)x(0))\| \to 0$. Так как $v(t,\lambda,\tau)$ и $v_1(t,\lambda,\tau_B)$ убывают по λ, то $kv(\lambda,\tau) + v_1(\lambda,\tau_B) < 1$ при $\lambda > \lambda_+$ и любых допустимых $\tau(t)$, $\tau_B(t)$ (как показано выше, λ_+ определяется при тех значениях $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$, при которых левая часть (10) максимальна). Но при этом неравенство (14) не выполняется для достаточно больших t_*. Полученное противоречие доказывает, что $\|y(t)\| = \|x(t)\|\exp(-\lambda t) < \infty$ при $\lambda > \lambda_+$ и $t > 0$; следовательно, $\bar{\lambda} \le \lambda_+$. Теорема доказана.

Для вычисления нижней границы максимального показателя Ляпунова воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = Bx(t-\tau_B^0) + kD(\varphi)x(t-\tau^0) + C\int_{t-\mu}^{t} x(s)ds, \tag{15}$$

где $\tau_B^0 \in [0,h_B]$ и $\tau^0 \in [0,h]$ – постоянные, $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_k)$, $\|D(\varphi)\| = 1$. В силу последнего равенства функция $f(x) = kD(\varphi)x$ удовлетворяет условию (2), поэтому уравнение (15) принадлежит к рассмотренному выше классу. Следовательно, $\bar{\lambda}_1 \le \bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}$ – наибольшие показатели Ляпунова систем (15) и (1).

Представив решение (15) в виде $x(t) = \exp(\lambda t)y$, получим уравнение относительно λ:

$$\det\left[\exp(-\lambda\tau_B^0)B + k\exp(-\lambda\tau^0)D(\varphi) + \frac{1-\exp(\lambda\mu)}{\lambda}C - A - \lambda I\right] = 0, \tag{16}$$

где I – единичная матрица.

Пусть $\lambda_p = a_p \pm b_p i,\ p = 1,..,n, a_p \ge a_{p+1}$ – корни уравнения (16), тогда $\bar{\lambda}_1 = a_p$. Поэтому нижнюю оценку λ_- величины $\bar{\lambda}$ можно определять по формуле

$$\lambda_- = \sup_{\tau^0, \tau_B^0, \varphi} \left[a_1(\tau^0, \tau_B^0, \varphi) \right]. \tag{17}$$

Заметим, что в случае эвклидовой нормы в качестве $D(\varphi)$ можно принять любую ортогональную матрицу (как известно, для такой матрицы $\|D(\varphi)\| = 1$).

Если в некоторой системе найденные оценки λ_-, λ_+ совпадают, то очевидно, что точное значение наибольшего показателя Ляпунова $\bar{\lambda} = \lambda_- = \lambda_+$. Укажем системы, для которых это равенство имеет место; при этом полагаем, что в (2) используется эвклидова норма.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t - \tau(t))) + c \int_{t-\mu}^{t} x(s)ds, \tag{18}$$

где c – константа, A – постоянная симметрическая положительно определенная матрица. Как известно, собственные значения такой матрицы действительны и положительны; обозначим их. $\lambda_i, i = 1,...,n-1\ (\lambda_i \le \lambda_{i+1})$.

Теорема 2. В системе (18), (2) наибольший показатель Ляпунова $\bar{\lambda} = \lambda_+$, где λ_+ определяется из уравнения (10) при

$$v(\lambda, \tau^*) = \frac{\exp(-\lambda\tau^*)}{\lambda_1 + \lambda}, \quad v_1(\lambda) = \frac{1 - \exp(-\lambda c\mu)}{\lambda(\lambda_1 + \lambda)}, \tag{19}$$

где $\tau^* = h$ при $kv(0) + v_1(0) < 1$, $\tau^* = 0$ при $kv(0) + v_1(0) \ge 1$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $W(t,s) = \exp[-(t-s)A]$, поэтому собственные значения матрицы $W(t,s)$ равны $\exp[-(t-s)\lambda_i]$, $i = 1,...,n$. В силу симметрии A матрица $W(t,s)$ также симметрична, поэтому ее эвклидова норма равна максимальному собственному значению, т.е., $\|W(t,s)\| = \exp[-\lambda_1(t-s)]$. Подставив это выражение в (8) и (9), получим (19).

В соответствии с теоремой 1, $\bar{\lambda} \le \lambda_+$; покажем, что на самом деле имеет место равенство $\bar{\lambda} = \lambda_+$.

Положим в (18) $f(x) = kx$ и $x(t) = \exp(\lambda_+ t)a_1$, где a_1 – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_1. Учитывая, что $Aa_1 = \lambda_1 a_1$ и, по определению λ_+,

$$k\frac{\exp(-\lambda_+\tau^*)}{\lambda_+ + \lambda_1} + \frac{1 - \exp(-\lambda_+ c\mu)}{\lambda_+(\lambda_+ + \lambda_1)} = 1, \tag{20}$$

найдем, что $x(t) = \exp(\lambda_+ t)a_1$ является решением уравнения (18) с показателем λ_+.По определению, показатель любого решения не превышает $\bar{\lambda}$; с другой стороны, в силу теоремы 1 $\bar{\lambda} \le \lambda_+$. Таким образом, $\bar{\lambda} = \lambda_+$. Теорема доказана.

Следующая теорема дает достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы (1),(2), инвариантное относительно запаздываний $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$.

Теорема 3. При условии

$$k < k_* = \frac{1 - v_1(0)}{v(0)} \tag{21}$$

система (1),(2) экспоненциально устойчива.

Доказательство. Как отмечено выше, необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости служит неравенство $\bar{\lambda} < 0$. Как следует из (21), при $k = k_*$ корень уравнения (10) $\lambda_+ = 0$ при любых $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$. Так как $v(\lambda)$ и $v_1(\lambda)$ убывают по λ, то $\lambda_+ < 0$ при $k < k_*$ и, следовательно, $\bar{\lambda} < 0$. Теорема доказана.

Как установлено выше, для уравнения (18) $\lambda_+ = \bar{\lambda}$. Следовательно, для него неравенство (21) является не только достаточным, но и необходимым условием экспоненциальной устойчивости.

Проиллюстрируем применение полученных оценок на примерах.

Пример 1. Рассмотрим уравнение с сосредоточенным и распределенным запаздываниями

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = Bx(t - \tau(t)) + C\int_{t-\mu}^{t} x(s)ds, \tag{22}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix},\; C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Условие экспоненциальной устойчивости для системы (22) принимает вид

$$a_1 > \sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2}\ . \tag{23}$$

Заметим, что для системы (22) с произвольным постоянным запаздыванием τ методом функций Ляпунова получено следующее условие устойчивости [13] :

$$a_1 > (1+\mu)^{1/2}(b_1^2 + b_2^2 + \mu(c_1^2 + c_2^2))^{1/2}\ . \tag{24}$$

Нетрудно проверить, что условие (32) менее консервативно, чем (24) (лишь при $b_1^2 + b_2^2 = \mu c_1^2 + c_2^2$ они совпадают). При этом условие (23) является более общим, охватывая системы с произвольным переменным запаздыванием $\tau(t)$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t - \tau(t), t)\,, \tag{25}$$

$$x \in R^2,\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

где $\|f(x,t)\| \le k\|x\|$ и $\tau(t) \in [0, h]$.

Так как матрица A постоянна, то $W(t,s) = W(t-s)$. Легко проверить, что

$$W(t) = \begin{bmatrix} 2b(t) - a(t) & 2b(t) - 2a(t) \\ -b(t) + a(t) & -b(t) + 2a(t) \end{bmatrix},$$

где $a(t) = \exp(-t)$, $b(t) = \exp(-2t)$.

Уравнение (10) для определения верхней границы λ_+ показателя $\bar{\lambda}$ принимает вид

$$kv(\lambda, \tau) = 1, \tag{26}$$

$$v(\lambda, \tau) = \int_0^\infty \exp(-\lambda(s + \tau(s))\|W(s)\|ds\,,$$

где $\tau = h$ при $kv(0) < 1$ и $\tau = 0$ при $kv(0) \ge 1$.

Нижняя граница λ_- определялась с помощью соотношений (16), (17), где $B = C = 0$, а матрица D принималась в виде

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

На рис.1 представлены графики $\lambda_+(k)$, $\lambda_-(k)$ при различных значениях параметра h (в расчетах использовалась эвклидова норма). Функции $\lambda_+(k,h)$ возрастают по h и k, однако $\lim k(\lambda,h) = k_* = 0.5184$ при $\lambda \to 0$ не зависит от h. Поэтому условие $k < 0.5184$ гарантирует экспоненциальную устойчивость системы при любых конечных h (этот вывод согласуется с полученным выше общим результатом). Заметим, что найденное условие устойчивости существенно улучшает известные условия $k \le 0.1458$, $k \le 0.178$ и $k \le 0.2389$, установленные другими методами в [14,15].

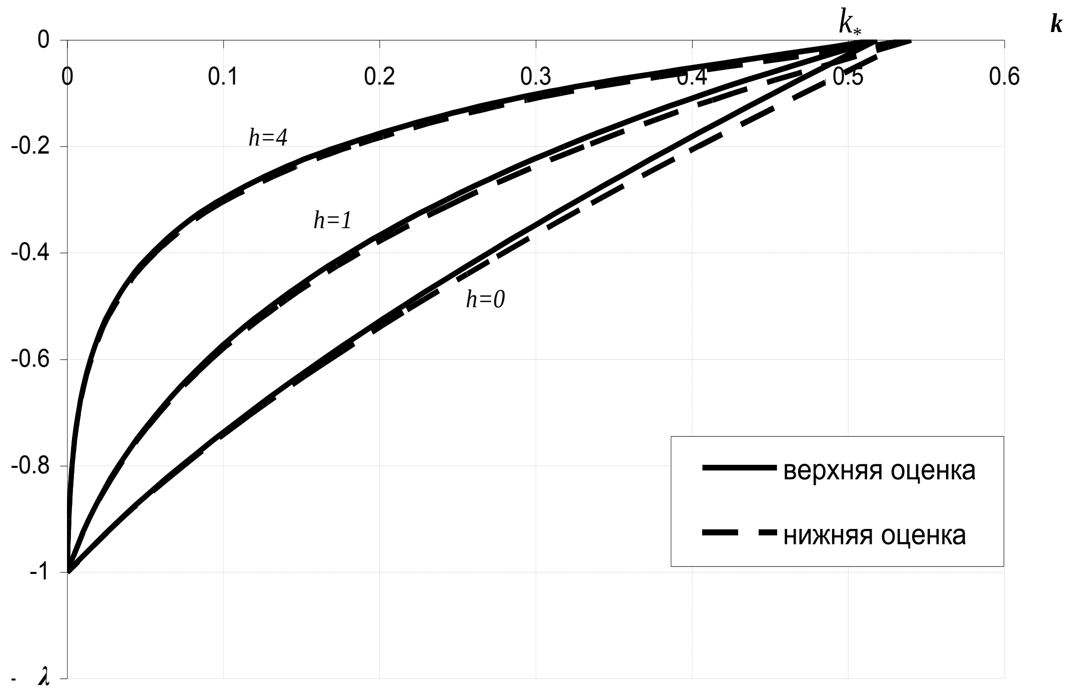


Рис. 1. Границы $\lambda_+(k)$ и $\lambda_-(k)$ показателя $\bar{\lambda}$ при различных значениях параметра h

Как видно из рисунка, функции $\lambda_+(k,h)$ и $\lambda_-(k,h)$ весьма близки друг к другу в достаточно широкой области параметров k и h, что свидетельствует о высокой точности полученных оценок. Интересно, что при увеличении максимального запаздывания h точность возрастает.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. В данной работе найдены двусторонние границы, позволяющие локализовывать максимальный показатель Ляпунова и тем самым оценивать возможный консерватизм их вычисления. Указаны случаи, для которых указанные границы совпадают и, следовательно, дают точное значение максимального показателя; соответствующие условия устойчивости являются необходимыми и достаточными. Заметим, что верхние границы получены с помощью методики, развитой в [9,10], в то время нижние границы получены, по-видимому, впервые.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1959. – 211 с.

2. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1972. – 362 с.
3. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.:Наука, 1971. – 296 с.
4. Колмановский В.Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
5. Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем / Б.С. Разумихин. – М.: Наука, 1988. – 108 с.
6. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems / J.-P. Richard // Automatica. – 2003. –V. 39. – P. 1667–1694.
7. Rozhkov V. I. Inequalities for solutions of certain systems of of differential equations with large time-lag / V. I. Rozhkov, A.M. Popov // Diff.Eq. – 1971. – V.7. – P. 271–278.
8. Niculescu S. I. Robust exponential stability of a class of uncertain with time-varying delays / S. I. Niculescu, C. E de Souza, L. Dugard, J. M. Dion // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1998. – V. 43 (5).
9. Zevin A.A. Delay-independent stability conditions for time-varying nonlinear uncertain systems / A.A. Zevin, M.A. Pinsky // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2006. – V.51 (9). – P. 1482–1485.
10. Зевин А.А. Критерии экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: сб. науч. стат. посв. пам. акад. В.В. Румянцева. – М.: Изд. физ.-мат. лит, 2009. – С. 227–237.
11. Зевин А.А. Решение обобщенной задачи Лурье для двух классов управляемых систем / А.А. Зевин // Доклады РАН. – 2005. – Т.403, №1. – С. 25–29.
12. Зевин А.А. Критерии экспоненциальной устойчивости решений нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений с запаздыванием / А.А. Зевин // Доклады РАН. – 2006. – Т. 410, № 5. – С. 592–595.
13. Kolmanovskii V.B. Stability of some linear systems with delay / V.B. Kolmanovskii, J.-P. Richard // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1999. – V. 44 (5). – P. 984–989.
14. Cheres E. Quantitative measures of robustness for systems including delayed perturbations / E. Cheres, Z. J. Palmor, S. Gutman // IEEE Trans. Autom. Control. – 1989. –V. 34, № 11. – P. 1203-1205.
15. Wuand H. Robust stability criteria for dynamical systems including delayed perturbations / H. Wuand, K. Mizukami // IEEE Trans. Autom. Control. – 1995. – V. 40, №3. – P. 487-490.

ЗЕВИН Александр Аронович – д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– нелинейные динамические системы, теория колебаний и устойчивости.

ПОСЛАВСКИЙ Сергей Юрьевич – аспирант, младший научный сотрудник, Институт транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– теория устойчивости нелинейных систем с запаздыванием.

УДК 336.051; 338.45

П.И. Иванов, Д.Д. Корнилецкий

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ «СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ» ДЛЯ РЫНКА СПОРТИВНОЙ ПАРАШЮТНОЙ ПРОДУКЦИИ

Постановка проблемы. Сущность проблемы состоит в необходимости непрерывного совершенствования рынка парашютной продукции, что, в свою очередь, связано с задачами оптимизации процессов маркетинга.

Анализ публикаций по теме исследования. Последние достижения и публикации, в которых начато решение данной проблемы и на которые опираются авторы, представлены в работах [1-5]. Не решенной ранее частью общей проблемы, которой посвящается настоящая работа, являются вопросы разработки и детального исследования более совершенных математических моделей «спрос-предложение».

Цель статьи. Целью настоящей работы является разработка и детальное исследование моделей «спрос-предложение» для рынка парашютной продукции.

Основная часть.

Анализ рынка парашютной продукции показал следующее.

Спрос q на рынке парашютной продукции является функцией от ее цены p и тенденции формирования цены – производной цены по времени: $\frac{dp}{dt}$, т.е. $q = f\left(p, \frac{dp}{dt}\right)$. Предложение s на рынке парашютной продукции также является функцией от ее цены p и производной цены по времени: $\frac{dp}{dt}$, т.е. $s = f\left(p, \frac{dp}{dt}\right)$.

Возникает экономически важный вопрос, как должна изменяться во времени цена для того, чтобы спрос все время был равен предложению.

Изучение спроса q показало, что спрос тем выше, чем меньше цена и чем больше производная (приращение цены в единицу времени).

Изучение предложения s показало, что предложение тем выше, чем больше цена продукта и чем больше производная (приращение цены в единицу времени). Приращение цены в единицу времени для покупателя является чисто психологическим фактором ценовой угрозы о том, что завтра продукт будет стоить больше, чем сегодня, и поэтому его нужно как можно быстрее приобрести.

Тогда по аналогии с [2] можно предложить следующие зависимости для моделирования спроса и предложения на рынке парашютной продукции:

$$q = ap' - bp + c; \tag{1}$$

$$s = dp' + gp + h. \tag{2}$$

Здесь a, b, c, d, g, h – эмпирические коэффициенты, определяемые по результатам исследования спроса и предложения рынка парашютной продукции.

Для приближенного определения эмпирических коэффициентов a, b, c, d, g, h в функциях спроса и предложения предлагается следующий метод.

1. Учитывая возможную сезонную цикличность спроса и предложения спортивной парашютной продукции, выбрать для рассмотрения начало летнего или зимнего сезонов.

2. Выбрать достаточно короткий временной интервал Δt (например, декаду).

3. Подсчитать количество реализованных q и предложенных s фирмами-производителями за время Δt изделий на рынке рассматриваемого продукта

(например, планирующих парашютов, спасательных парашютов и т.д.) в рассматриваемом регионе.

4. Определить значение цены p на рассматриваемый продукт в начале временного интервала Δt.

5. Вычислить значение тенденции роста цены – производной p' за промежуток времени Δt по формуле $p' = \Delta p / \Delta t = (p_1 - p) / \Delta t$, где p_1– цена изделия в конце первого рассматриваемого промежутка времени Δt.

6. Подставить полученные значения для q, s, p', p в выражения (1) и (2). Таким образом, имеем уже два уравнения для определения шести неизвестных a, b, c, d, g, h.

7. Выбрать далее два следующих друг за другом интервала времени Δt (следующие две декады, для дополнения к двум полученным, еще четырех линейных уравнений) и повторить пункты 3 – 6. Таким образом, получим систему из шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую определим коэффициенты a, b, c, d, g, h.

Вместо выбора последнего интервала времени, при определении коэффициентов, можно, используя любую систему компьютерной математики (MathCad, MathLab), подобрать коэффициенты A и B (см. ниже) так, чтобы форма кривой баланса спроса и предложения (зависимости цены продукта от времени) хорошо ложилась на экспериментальные точки. Из этого условия, получив удовлетворительные коэффициенты A и B, имеем два дополнительных уравнения для определения эмпирических коэффициентов a, b, c, d, g, h.

После определения эмпирических коэффициентов перейдем вначале к рассмотрению общего случая для равновесия спроса и предложения (1) и (2).

В случае равновесия [2] имеем: $q = s$ или

$$ap' - bp + c = dp' + gp + h.$$

Выполняя преобразования, имеем: $p'(a-d) = p(b+g) + (h-c)$.

Отсюда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dp}{dt} = p\frac{(b+g)}{(a-d)} + \frac{(h-c)}{(a-d)}.$$

Обозначим константы: $A = \dfrac{(b+g)}{(a-d)}$, $B = \dfrac{(h-c)}{(a-d)}$. Тогда:

$$\frac{dp}{dt} = pA + B. \qquad (3)$$

Разделяя переменные и интегрируя последнее уравнение, получим:

$$\frac{1}{A}\frac{d(pA+B)}{pA+B} = dt, \quad \frac{1}{A}\int\frac{d(pA+B)}{pA+B} = \int dt + \ln|C_1|. \quad \ln\left|\frac{(pA+B)}{C_1}\right| = At,$$

$pA + B = C_1 e^{At}$, $p = Ce^{At} - \dfrac{B}{A}$, где $C = \dfrac{C_1}{A}$. Используем начальные условия для определения константы C. Пусть при $t = 0$, $p = p_0$. Тогда из последнего уравнения имеем:

$p_0 = C - \dfrac{B}{A}$, откуда $C = p_0 + \dfrac{B}{A}$ и окончательно получим:

$$p = \left(p_0 + \frac{B}{A}\right)e^{At} - \frac{B}{A}. \qquad (4)$$

Исследуем последнее уравнение, определяющее характер изменения цены продукта в зависимости от значений коэффициентов A и B.

Исследования, проведенные в среде MatchCad, показали, что при $A > 0$ и любом знаке коэффициента B, цена продукта возрастает, а при $A < 0$ и любом знаке коэффициента B, цена продукта убывает с течением времени.

На рис.1 и рис.2 представлена зависимость (4) – цены от условного времени реализации продукта при различных значениях входящих в нее параметров.

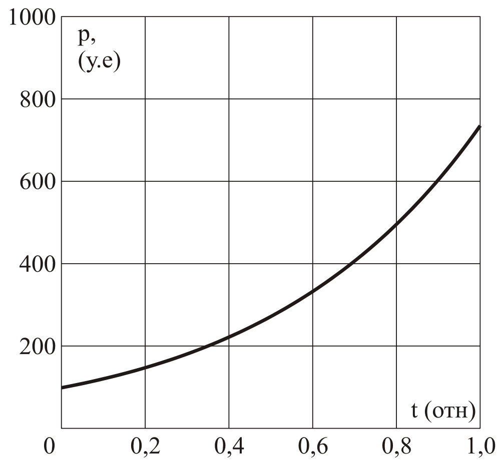


Рис.1. Зависимость (4) при $p_0 = 100$, $A = 2$, $B = 1$

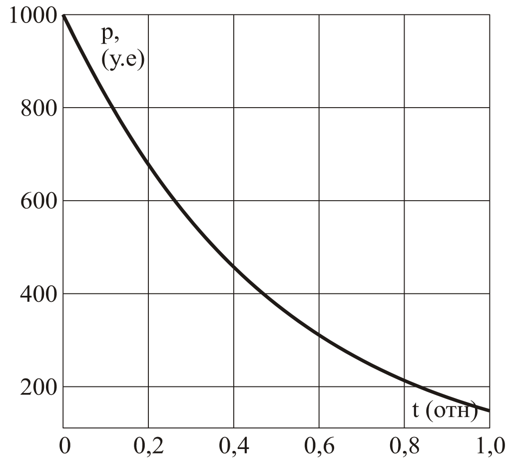


Рис.2. Зависимость (4) при $p_0 = 1000$, $A = -2$, $B = 1$

Представляет интерес исследование модели спроса и предложения на рынке парашютной продукции при условии нелинейности изменения цены изделия в функциях спроса и предложения, т.е. когда функции спроса и предложения имеют вид:

$$q = ap' - bp^m + c; \tag{5}$$

$$s = dp' + gp^m + h. \tag{6}$$

Здесь a, b, c, d, g, h – эмпирические коэффициенты, определяемые по результатам исследования спроса и предложения рынка парашютной продукции; m –константа.

В случае равновесия имеем: $ap' - bp^m + c = dp' + gp^m + h$.

Выполняя преобразования, получим:

$$\frac{dp}{dt} = p^m \frac{b+g}{a-d} + \frac{h-c}{a-d} = p^m A + B.$$

Откуда:

$$\frac{dp}{dt} = p^m \frac{b+g}{a-d} + \frac{h-c}{a-d} = p^m A + B \text{ и } \frac{dp}{p^m A + B} = dt, \text{ и } \int \frac{dp}{p^m A + B} = t + C.$$

Рассмотрим несколько практически важных случаев для величины коэффициента m.

Случай 1: m=2. Тогда с учетом начальных условий: при $t = 0$, $p = p_0$ решение примет вид: $p = \sqrt{\frac{B}{A}} \cdot tg\left(\sqrt{AB} \cdot t + arctg\sqrt{\frac{A}{B}} \cdot p_0\right)$. В данном случае коэффициенты A и B должны иметь одинаковые знаки. Например, при A=0,1, B=1, $p_0 = 100$, наблюдается интенсивный рост цены продукта при сохранении равновесия спроса и предложения.

Случай 2: m =1/2. Тогда с учетом тех же начальных условий решение примет вид: $t = \frac{2}{A}\left(\sqrt{p} - \sqrt{p_0}\right) + \frac{2B}{A^2}\ln\left|\frac{\sqrt{p_0} + \frac{B}{A}}{\sqrt{p} + \frac{B}{A}}\right|$. В данном случае коэффициенты A и B уже могут иметь разные знаки. Например, при A>0, B=1, $p_0 = 100$ наблюдается плавный рост цены продукта, а при при A< 0 –плавное снижение цены продукта при условии сохранении равновесия спроса и предложения.

Случай 3: m = –1. Тогда с учетом тех же начальных условий решение примет вид: $t = \frac{1}{B}\left(p - p_0\right) + \frac{A}{B^2}\ln\left|\frac{A + Bp_0}{A + Bp}\right|$. В данном случае роль коэффициента A менее значима по сравнению с коэффициентом B, увеличение которого плавно увеличивает цену продукта при условии сохранения равновесия спроса и предложения.

Представляет интерес исследование модели спроса и предложения на рынке парашютной продукции при условии нелинейности изменения производной цены изделия в функциях спроса и предложения, т.е. когда функции спроса и предложения имеют вид: $q = a\left(p'\right)^n - bp + c$; $s = d(p')^n + gp + h$, где n – константа.

В случае равновесия имеем: $a(p')^n - bp + c = d(p')^n + gp + h$.

Выполняя преобразования, получим: $\frac{dp}{dt} = \sqrt[n]{Ap + B}$.

Рассмотрим несколько практически важных случаев для величины коэффициента n.

Случай 1: n=2. Тогда с учетом начальных условий: при $t = 0$, $p = p_0$ решение примет вид:

$$p = \left(\frac{\sqrt{A}}{2}t + \sqrt{p_0 + \frac{B}{A}}\right)^2 - \frac{B}{A}. \qquad (7)$$

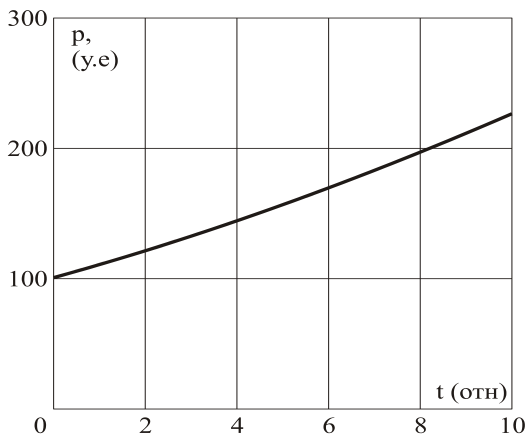


Рис.3. Зависимость (7) при $p_0 = 100$, $A = 1$, $B = 1$.

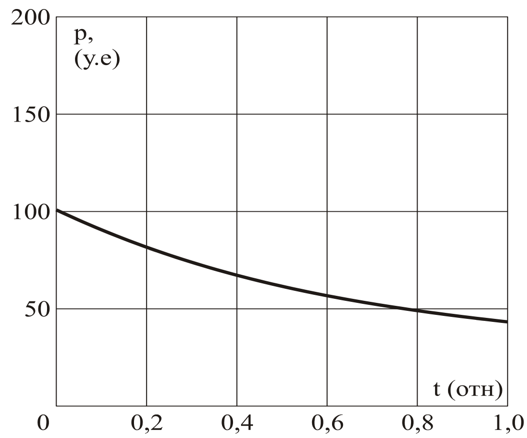


Рис.4. Зависимость (8) при $p_0 = 100$, $A = 0{,}1$, $B = 1$.

На рис.3 представлена зависимость (7) цены от условного времени реализации продукта при различных значениях входящих в нее параметров.

В данном случае коэффициент A не может быть отрицательным. Увеличение коэффициента A при неизменном значении B существенно увеличивает крутизну характеристики $p(t)$ в состоянии равновесия между спросом и предложением. Увеличение же коэффициента B при неизменном значении A значительно менее эффективно увеличивает крутизну характеристики $p(t)$ в этом же состоянии.

Случай 2: n=1/2. Тогда с учетом начальных условий: при $t=0$, $p=p_0$ решение примет вид:

$$p=\frac{p_0+\dfrac{B}{A}}{1+At(p_0A+B)}-\frac{B}{A}. \tag{8}$$

На рис.4 представлена зависимость (8) при различных значениях входящих в нее параметров. Увеличение коэффициента A по модулю при неизменном значении B существенно увеличивает крутизну характеристики $p(t)$ в состоянии равновесия между спросом и предложением.

Увеличение положительного значения коэффициента B при неизменном значении A также существенно увеличивает крутизну характеристики $p(t)$ в этом же состоянии.

Рассмотрим структуру коэффициента $A=\dfrac{(b+g)}{(a-d)}$ и установим его экономический смысл. Очевидно, что это есть отношение весовых коэффициентов (значимости) цены товара к весовым коэффициентам производных (скорости нарастания) цены товара в формулах спроса и предложения.

Коэффициент A может быть отрицательным только в случаях, когда $d>a$, т.е. когда коэффициент при производной цены в формуле предложения больше коэффициента при производной цены в формуле спроса, т.е. когда скорость нарастания цены предложения превышает скорость нарастания цены спроса.

Структура коэффициента $B=\dfrac{(h-c)}{(a-d)}$ – есть отношение свободных членов в формулах спроса и предложения к весовым коэффициентам производных (скорости нарастания) цены товара в формулах спроса и предложения.

Коэффициенты $c=q_0$, а $h=s_0$, некоторые опорные значения соответственно спроса и предложения в начальный момент времени $t=0$.

Производные цены изделия p' в формулах спроса и предложения могут быть как положительными, так и отрицательными. В тех случаях, когда из-за разных знаков члены с p и p', стоящие в правых частях равенств спроса и предложения взаимно уничтожаются, тогда в такой ситуации коэффициенты $c=q_0$, и $h=s_0$ представляют собой некоторые опорные значения соответственно спроса и предложения.

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

1. Рассмотрена традиционная линейная модель спроса и предложения и выполнен анализ зависимости цены изделия при сохранении условия равновесия от времени, рис.1, рис.2.

2. Предложены и рассмотрены некоторые варианты математических моделей, имеющих нелинейность как самого значения цены, так и ее производной, что

значительно расширяет возможности математического моделирования в задачах экономики с нелинейностью характеристик.

3. Варианты математических моделей как линейных, так и имеющих нелинейность могут быть использованы при анализе баланса спрос-предложение на рынке спортивной парашютной продукции. При этом предполагается разработать методику определения эмпирических коэффициентов, входящих в полученные зависимости.

4. В перспективе необходимо будет выполнять проверку применимости и эффективности той или иной модели в зависимости от начальных условий и динамики изменения спроса и предложения на рынке спортивной продукции в отрасли парашютостроения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Иванов П.И., Корнилецкий Д.Д. Математические модели для решения ряда экономических задач с учетом специфики производства парашютных систем./П.И.Иванов//МКММ-2008.–Херсон: –2008.– Вестник ХНТУ №2 (31). – С.195-200.
2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях./ В.В. Амелькин.– М.: Наука, 1987.–158с.
3. Гаркавенко С.С. Маркетинг./ С.С. Гаркавенко.– Киев: Либра, 2004.–712с.
4. Котляр Ф. Основы маркетинга. / Ф. Котляр.– Киев: Либра, 2002.–700с.
5. Мартыненко Н.М. Основы менеджмента. / Н.М. Мартыненко.– Киев: Каравелла, 2003.–496с.

ИВАНОВ Петр Иванович – д.т.н., профессор, ведущий специалист по летным испытаниям парашютных и парапланерных систем, НИИ аэроупругих систем, г. Феодосия.

Научные интересы:

– проектирование и испытания систем спасения летательных и космических аппаратов.

КОРНИЛЕЦКИЙ Дмитрий Дмитриевич – специалист по экономике и маркетинговым исследованиям рынка продукции парашютостроения, НИИ аэроупругих систем, г. Феодосия.

Научные интересы:

– экономика парашютостроения.

УДК 533.666.2

П.И. Иванов, И.С. Купавский

ПРЕДЕЛЬНО УПРОЩЕННЫЙ ФОРМАТ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ ПЛАНИРУЮЩЕЙ ПАРАШЮТНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ДАЛЬНЕМ НАВЕДЕНИИ

Постановка проблемы. Сущность проблемы состоит в необходимости постоянного совершенствования методов экстренной доставки грузов в заранее запланированную точку цели, что связано с важными задачами обеспечения экстренной помощи и спасения людей.

Анализ публикаций по теме исследования. Последние достижения и публикации, в которых начато решение данной проблемы и на которые опираются авторы, представлены в работах [1-3]. Не решенной ранее до конца частью общей проблемы, которой посвящается настоящая работа, являются вопросы оптимального программирования бортовых компьютеров и микроконтроллеров при дальнем наведении.

Цель статьи. Целью настоящей работы является построение и анализ блок-схемы алгоритма для управления системой груз-управляемый планирующий парашют (УППС) на этапе дальнего наведения.

Основная часть.

Полный формат программы наведения на цель должен содержать этапы дальнего, ближнего наведения и собственно этап посадки.

С целью максимально возможного упрощения навигационной программы и состава аппаратуры навигационного комплекса может быть использован предельно упрощенный формат программы управления полетом.

В этом формате достаточно сложный этап ближнего наведения (этап точного прицеливания) может быть исключен, а вместо него включен в программу этап аварийной посадки. В таком случае навигационная программа уже состоит из программы дальнего наведения DN и программы аварийной посадки AVARPOS, включающей в себя непосредственно реализацию этапа мягкой посадки.

В случае предельно упрощенного формата, программа дальнего наведения ведет систему в окрестность цели, а по достижении минимальной, предельно допустимой высоты $H_{\min}^{np}$, программа аварийной посадки перехватывает управление и выполняет мягкую посадку системы строго против ветра в окрестности цели.

Т.е. в случае использования предельно упрощенного формата навигационной программы точного наведения на точку цели не происходит. Зато существенно упрощается состав навигационного комплекса, повышается его надежность и значительно снижается стоимость, что крайне важно в условиях массового десантирования систем.

Программа DN ориентирует и направляет систему груз-парашют в окрестность цели путем периодического опроса датчиков и доворота вектора горизонтальной составляющей скорости $\overline{V}_г$ (продольной плоскости системы) на цель.

Ниже приводится описание блок-схемы алгоритма (БСА) программы дальнего наведения, рис.1.

1. Ввод в бортовой компьютер (микропроцессор) данных: $x, y, z, \varphi, \psi, V_П, H$.

2. Расчет угла fa – отклонения вектора горизонтальной составляющей скорости системы $\overline{V}_г$ (продольной плоскости системы) от проекции на горизонтальную плоскость линии направления на цель с помощью программы доворота системы на новый курс –DOV.

3. Проверка условия не превышения угла fa заранее заданного предельно допустимого значения (~10°–15°).

3.1. Если fa <10°–15°, то корректировка курса не выполняется, и система продолжает двигаться в данном направлении в окрестность цели. Это условие не превышения угла fa необходимо для того, чтобы, учитывая существующие погрешности измерений, значительно сократить количество мелких управляющих воздействий и снизить энергопотребление почти непрерывно работающих рулевых механизмов, что позволит иметь на борту менее мощные, а, значит, более легкие аккумуляторы.

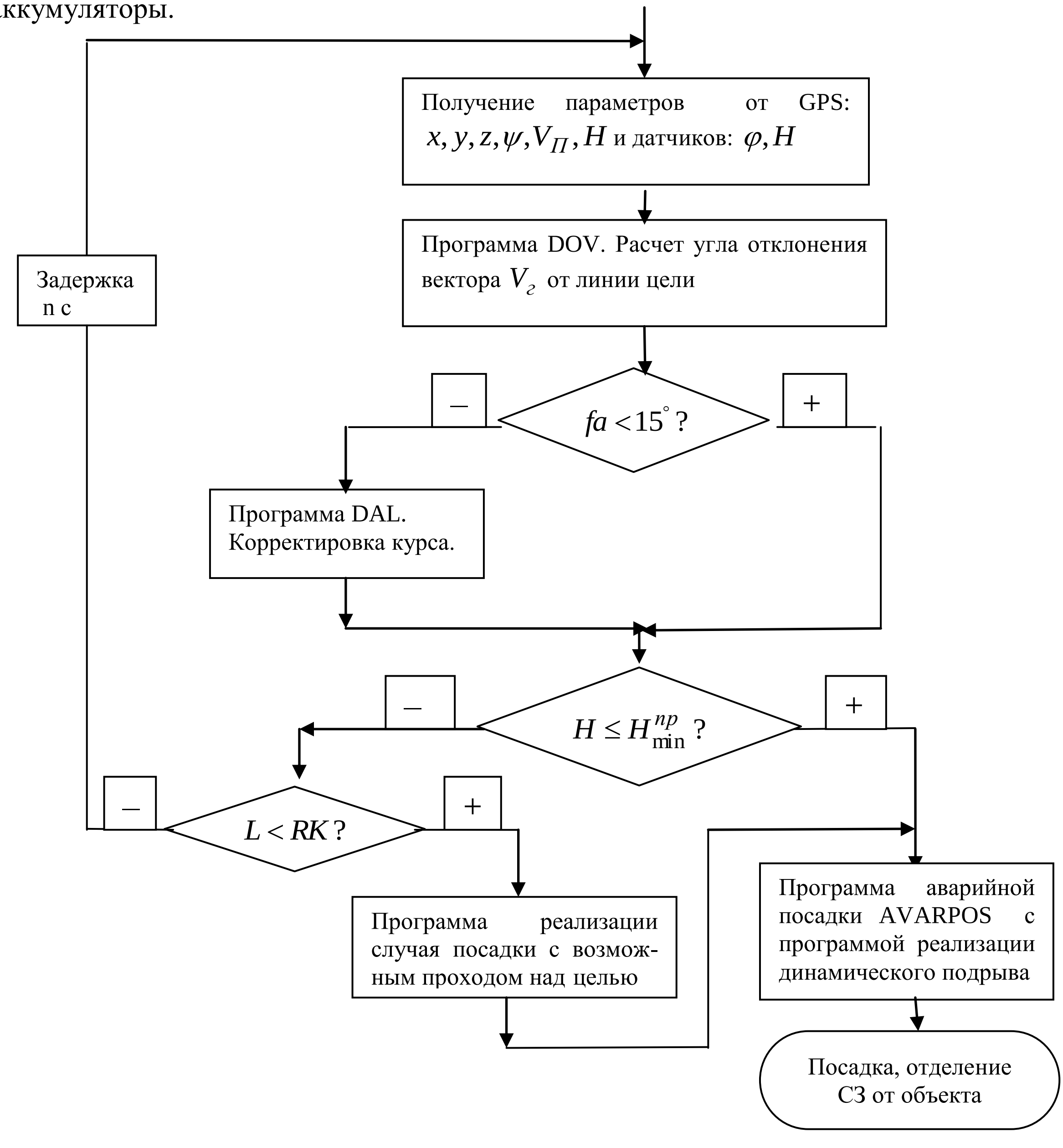


Рис.1. Блок–схема алгоритма предельно упрощенного формата программы DN дальнего наведения системы на цель

3.2. Если fa >10°–15°, то с помощью программы DAL выполняется корректировка курса так, чтобы вектор горизонтальной составляющей скорости системы $\overline{V}_г$ был сориентирован на цель.

4. Выполняется проверка превышения предельной, минимально допустимой высоты $H_{\min}^{np}$, при достижении которой управление передается программе аварийной посадки.

4.1. Если для системы, еще не долетевшей до цели, выполнится условие $H \le H_{\min}^{np}$, то управление автоматически будет передано программе аварийной посадки AVARPOS, которая осуществляет разворот против ветра, выход на глиссаду предпосадочного планирования (ГПП) и полет по глиссаде. По достижении высоты динамического подрыва, по команде ударного датчика-контактора или любого другого сигнализатора высоты, выполняется динамический подрыв, система совершает мягкую посадку. При посадке на сушу производится отделение одного из соединительных звеньев парашютной системы. При посадке на воду должны быть отделены оба соединительных звена.

Существует некоторое контрольное, критическое расстояние до цели, радиус круга RK, после пересечения которого, с большой степенью вероятности (определяемой вероятностью возможного изменения вектора ветра в точке посадки), становится ясным направление захода на посадку и положение точки посадки относительно цели.

Здесь могут быть три основных случая.

1. Система садится с недолетом до цели.
2. Система садится непосредственно в точку цели.
3. Система садится с перелетом точки цели.

При использовании простейшего программного навигационного комплекса, включающего в себя только программу дальнего наведения и аварийной посадки, т.е. при отсутствии навигационной программы ближнего наведения с прицеливанием в точку цели, вероятность второго случая крайне мала. Вероятности реализации первого и третьего случаев примерно равны при большом количестве испытаний. В первом и втором случае оптимальная стратегия, по критерию минимально возможного удаления от цели точки посадки, заключается только в том, чтобы удерживать курс в направлении цели и для обеспечения мягкой посадки вовремя выполнить динамический подрыв стропами управления (СУ). В третьем случае сценариев развития событий может быть несколько.

На практике обычно реализуется два случая, первый или третий.

Случай 1. Система, по каким-либо причинам (сильный встречный ветер, ошибка в определении точки сбрасывания) не долетает до цели и по достижении минимальной, предельно допустимой высоты управление автоматически передается программе аварийной посадки, которая осуществляет разворот против ветра и выполняет вынужденную мягкую посадку с недолетом до цели.

Случай 2. На определенном, критическом расстоянии RK от цели становится ясно, что над целью система окажется с избытком высоты. В этом случае, затягивая обе СУ, система переводится на расчетную ГПП, с которой уже управление передается программе аварийной посадки. Осуществляется разворот против ветра и, находясь в зоне вертикального угла посадки, выход на глиссаду предпосадочного планирования, а затем выполняется мягкая посадка в окрестности цели.

4.2. Проверяется условие входа в зону заранее выбранного контрольного расстояния от цели: RK.

4.2.1. Если расстояние до цели больше RK, то с некоторой задержкой по времени выполняется переход к началу программы и сбор новых параметров от датчиков с целью дальнейшей возможной корректировки курса.

4.2.2. Если система с относительным качеством $K = \dfrac{V_г - W}{V_у}$ (определяемым углом планирования системы с учетом встречного ветра) вошла в зону круга радиуса RK на высоте H_{RK}, то выполняется следующее.

А). Рассчитывается H_0 – высота линии ГПП под точкой нахождения системы

$$H_0 = H_{\min}^{np} + \frac{RK - \Delta}{K}$$

и проверяется условие по превышению высоты $H_{RK} > H_0$. Здесь Δ – расстояние от цели, на котором вступает в работу программа аварийной посадки AVARPOS.

Б). Рассчитывается расстояние от цели x_1, на котором следует отпускать обе СУ для перехода на ГПП:

$$\rho_1 = |x_1|, \text{ где } \quad x_1 = \frac{H_{RK} - \left(H_{\min}^{np} - \dfrac{\Delta}{K}\right) - \dfrac{RK}{K_2}}{\left(\dfrac{1}{K_2} - \dfrac{1}{K}\right)}.$$

В). Рассчитывается высота H_1, на которой следует отпускать обе СУ для перехода на ГПП:

$$H_1 = -\frac{x_1}{K_2} - \frac{RK}{K_2} + H_{RK}, \text{ или } H_1 = -\frac{x_1}{K} + \left(H_{\min}^{np} - \frac{\Delta}{K}\right).$$

Здесь: $K_2 = \dfrac{V_{г2} - W}{V_{у2}}$ – относительное качество системы при полностью затянутых (на предельно допустимую величину) стропах управления; K – относительное качество системы при отпущенных стропах управления.

В ряде случаев в первом приближении можно принять $\Delta \approx H_{\min}^{np}$.

Г). Рассчитывается время $t_Э$ удержания обеих строп управления, которое соответствует пути, пройденному в режиме экстренного снижения, деленному на скорость экстренного снижения:

$$t_Э = \sqrt{\frac{(RK - |x_1|)^2 + (H_{RK} - H_1)^2}{V_{2x}^2 + V_{2y}^2}}.$$

Очевидно, что имеет смысл переходить с большей высоты H_{RK} на ГПП только в том случае, если время экстренного снижения $t_Э$ не менее, чем удвоенное время переходного процесса на втягивание и отпускание СУ на предельно допустимую величину: $t_Э \geq 2t_П$.

Это условие будет определять нижнюю границу высоты, с которой имеет смысл выполнять экстренное снижение для перехода на ГПП.

Д). Проверяются два условия $H_{RK} > H_0$ и $t_Э \geq 2t_П$.

Если оба условия выполняются, то производится затягивание обеих СУ на предельно допустимую величину и выполняется экстренное снижение для перехода на линию ГПП, т.е. до момента, пока первым не выполнится одно из условий $\rho_1 = |x_1|$, либо $H = H_1$.

Если хотя бы одно из условий $t_Э \geq 2t_П$ или $H_{RK} > H_0$ не выполняется, то полет продолжается до достижения высоты $H_{\min}^{np}$, где производится передача управления программе AVARPOS, после чего выполняется мягкая посадка.

Возвращаясь к блок-схеме алгоритма, представленной на рис.1, в заключение нужно отметить, что она может быть эффективно использована для статистического моделирования (статистических испытаний) процесса наведения системы груз-УППС с целью выявления возможных специфических особенностей процесса управления.

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

1. Разработана блок-схема алгоритма для предельно упрощенного формата программы управления полетом планирующей парашютной системы при дальнем наведении. Разработана программа на языке Pascal управления полетом планирующей парашютной системы при дальнем наведении.

2. В настоящее время проводятся статистические испытания модели процесса дальнего наведения системы груз-УППС с целью оценки и выявления различных специфических особенностей процесса управления.

3. Предельно упрощенный формат программы управления полетом УППС может быть эффективно использован для программирования недорогих микроконтроллеров, например, типа MSP-430, что существенно удешевляет стоимость навигационного комплекса системы одноразового применения в целом.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Иванов П.И. Две стратегии дальнего наведения УППС на цель./ П.И. Иванов // Сб. Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков: ХАИ, 2005.– №3(19). – С. 53-59.
2. Airdrop Enhanced Logistics Visibility Information System (AELVIS). Project Proposal. Institute For Information Technology, US Air Force Academy, February 2010.
3. Иванов П.И. Выбор концепции и состава аппаратуры для навигационного комплекса автоматического наведения системы груз–управляемый планирующий парашют на цель. / П.И. Иванов // Материалы XIII международной научной конференции МЗММ-2005.– Севастополь: Сев. НТУ, 2005.– С. 88-92.

ИВАНОВ Петр Иванович – д.т.н., профессор, ведущий специалист по летным испытаниям парашютных и парапланерных систем, НИИ аэроупругих систем.

Научные интересы:

– проектирование и испытания систем спасения и посадки летательных и космических аппаратов.

КУПАВСКИЙ Илья Сергеевич – инженер-конструктор, НИИ аэроупругих систем.

Научные интересы:

– проектирование и испытание бортовых систем навигации.

УДК 629.734.7

П.И. Иванов, А.Ю. Куянов

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО КАЧЕСТВА ПЛАНИРУЮЩЕЙ ПАРАШЮТНОЙ СИСТЕМЫ НА ТОЧНОСТЬ ЕЕ ПРИЗЕМЛЕНИЯ

Постановка проблемы. Сущность проблемы состоит в необходимости постоянного совершенствования методов точной посадки управляемых планирующих парашютных систем (УППС), что связано с важными задачами спасения людей и точной доставки грузов.

Анализ публикаций по теме исследования. Последние достижения и публикации, в которых начато решение данной проблемы и на которые опираются авторы, представлены в работах [1-2]. Не решенной ранее частью общей проблемы, которой посвящается настоящая работа, являются вопросы исследования факторов, влияющих на точность посадки и способов её повышения .

Цель статьи. Целью настоящей работы является исследование влияния изменения аэродинамического качества планирующих парашютных систем на точность посадки системы груз-УППС.

Основная часть.

Аэродинамическое качество K парашютных систем является одной из важнейших их летно-тактических характеристик. При десантировании с больших высот необходимо учитывать существенное изменение плотности, давления, вязкости и температуры воздуха в процессе снижения системы груз-УППС. Это может оказывать существенное влияние на перестройку картины течения вокруг крыла и системы в целом, по мере потери высоты и погружения в более плотные слои атмосферы. Может изменяться положение линий отрыва потока, а, значит, изменяться аэродинамические характеристики крыла, в том числе и его аэродинамическое качество.

В расчетах же, при определении траектории снижения системы груз-УППС и оценке положения расчетной точки десантирования (РТД), аэродинамическое качество системы принимается неизменным. Тем не менее, даже незначительное изменение аэродинамического качества при сбросах с большой высоты в процессе снижения за длительный промежуток времени может привести к значительному отклонению траектории от расчетной, а, значит, к значительному отклонению точки посадки от точки цели. Следовательно, для совмещения точки посадки с точкой цели необходимо корректировать положение РТД с учетом возможного непрерывного изменения аэродинамического качества системы по высоте.

Рассмотрим возможные причины изменения аэродинамического качества.

Кинематическая вязкость с высотой увеличивается, и от 0 до 10км она изменяется фактически в 2,4 раза. Аппроксимация изменения кинематической вязкости с высотой с помощью полинома третьей степени с достаточной для практики степенью точности (для диапазона 0-10км) дает следующее выражение:

$$\nu \cdot 10^5 = 1{,}459 + 0{,}119 \cdot H + 3{,}649 \cdot 10^{-3} \cdot H^2 + 5{,}076 \cdot 10^{-4} \cdot H^3, \qquad (1)$$

где $\nu\left[м^2/с\right]$ – кинематическая вязкость; $H[км]$ – высота.

На рис.1 представлена зависимость (1).

Число Рейнольдса, характеризующее режим течения воздуха вокруг крыла и системы в целом и зависящее от вязкости, с увеличением высоты также будет изменяться. Таким образом, можно предположить, что и критическое число

Рейнольдса, определяющее положение точек отрыва потока от крыла и системы в целом, будет изменяться (уменьшаться, и отрыв становиться более ранним).

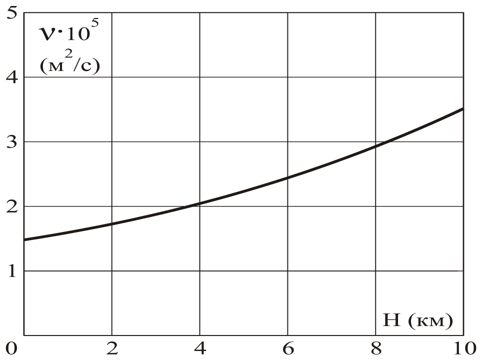


Рис.1. Изменение кинематической вязкости воздуха с высотой

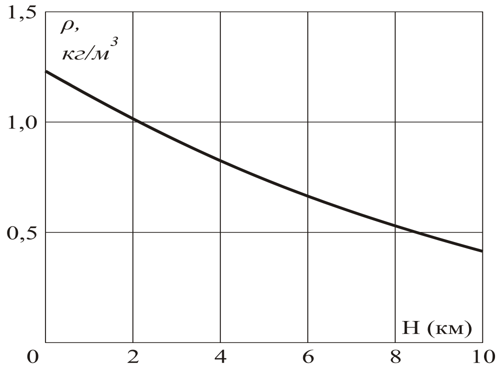


Рис.2. Изменение плотности воздуха с высотой

Т.е. на большой высоте положение точек отрыва на верхней поверхности крыла планирующего парашюта может быть смещено против потока, что приведет к увеличению зоны отрыва и, как следствие, к увеличению коэффициента сопротивления системы c_x и к уменьшению коэффициента подъемной силы c_y, а, значит, к уменьшению горизонтальной составляющей скорости полета V_x и увеличению вертикальной V_y. Это приведет к увеличению (по модулю) траекторного угла θ (угла планирования системы) и, как следствие, к уменьшению аэродинамического качества системы $K = ctg\theta$. Изменяются силы и моменты, действующие на систему относительно ее центра масс, что в соответствии с принципом минимума энергетических затрат заставит перебалансироваться крыло вперед, на меньший угол атаки [1]. А это на большой высоте может еще изменить угол планирования, а, значит, несколько изменить аэродинамическое качество системы в ту или иную сторону.

Далее необходимо учесть следующее: с увеличением высоты существенно уменьшается плотность воздуха ρ, и от 0 до 10км она изменяется фактически в 2,9 раза. Аппроксимация изменения плотности с высотой с помощью полинома третьей степени с достаточной для практики степенью точности (для диапазона 0-10км) дает следующее выражение:

$$\rho = 1{,}225 - 0{,}117 \cdot H + 4{,}269 \cdot 10^{-3} \cdot H^2 - 6{,}397 \cdot 10^{-5} \cdot H^3, \qquad (2)$$

где $\rho\left[кг/м^3\right]$– плотность воздуха; $H[км]$ – высота.

На рис.2 представлена зависимость (2). Можно записать два равенства для установившегося снижения на высоте H и на уровне моря $H = 0$, рассматривая систему груз-УППС как материальную точку:

$$G = c_R S \frac{\rho V^2}{2}; \; G = c_{R0} S \frac{\rho_0 V_0^2}{2},$$

где c_R и c_{R0} – коэффициенты полной аэродинамической силы системы; V и V_0– полная (истинная воздушная) скорость системы; G – вес системы; S – площадь крыла. Индексы 0 относятся к уровню моря. Из условия равенства весов получим:

$$c_R S \frac{\rho V^2}{2} = c_{R0} S \frac{\rho_0 V_0^2}{2}, \text{ откуда: } c_R \rho V^2 = c_{R0} \rho_0 V_0^2.$$

Если система старается перебалансироваться в воздухе так, чтобы выполнялось условие $c_R = c_{R0}$, то $\rho V^2 = \rho_0 V_0^2$. Отсюда, изменение скорости движения системы с высотой будет происходить по закону:

$$V = V_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} . \tag{3}$$

Подставляя в последнюю формулу выражение (2) и значение $\rho_0 = 1{,}225 \left[кг / м^3 \right]$, получим расчетную формулу:

$$V = V_0 \sqrt{\frac{1{,}225}{1{,}225 - 0{,}117 \cdot H + 4{,}269 \cdot 10^{-3} \cdot H^2 - 6{,}397 \cdot 10^{-5} \cdot H^3}} . \tag{3а}$$

Здесь высота H задана в километрах.

На рис.3 представлена зависимость изменения скорости системы с высотой для двух начальных значений V_0=10 и 13м/с соответственно.

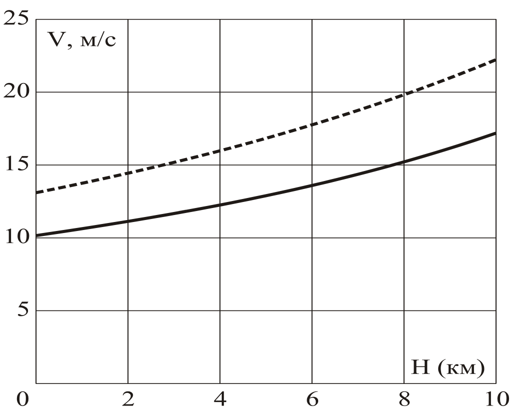


Рис.3. Изменение результирующей скорости системы по высоте

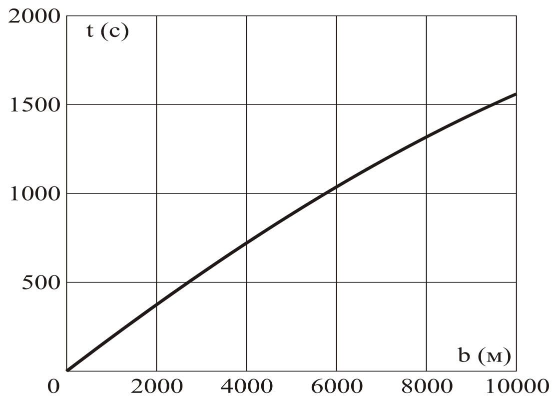


Рис.4. Изменение времени снижения системы по высоте

Как видно из рисунка 3, на высоте 10 км истинная скорость системы груз-УППС в 1,7 раза выше ее значения на уровне моря.

Для нейтральной парашютной системы (предельный случай планирующего парашюта при $K \to 0$) и ее вертикальной скорости снижения $V_{сн}$, также будут справедливыми равенства (3) и (3б):

$$V_{сн} = V_{сн0} \sqrt{\frac{1{,}225}{1{,}225 - 0{,}117 \cdot H + 4{,}269 \cdot 10^{-3} \cdot H^2 - 6{,}397 \cdot 10^{-5} \cdot H^3}} , \tag{3б}$$

где $V_{сн0}$– вертикальная скорость на уровне моря. Здесь высота H задана в километрах.

Изменение аэродинамического качества системы на больших высотах приведет к изменению горизонтальной составляющей скорости на величину $\pm \Delta V_x$, что, по мере снижения системы, приведет к накоплению ошибки ее горизонтального относа относительно точки цели.

Рассмотрим следующую модель, которую используем для оценки степени рассеивания точки приземления относительно точки цели.

Примем в первом приближении закон изменения величины $\left| \pm \Delta V_x \right|$ с высотой – линейным: $\left| \pm \Delta V_x \right| = \Delta V_{x\max} \cdot \dfrac{H}{b}$. Здесь H– переменная интегрирования – высота, выраженная в метрах; b – высота выхода системы на установившийся режим после десантирования (приближенно равна высоте десантирования); $\pm\Delta V_{x\max}$ – максимальное значение изменения горизонтальной составляющей скорости на высоте выхода системы на установившийся режим (после десантирования) за счет изменения аэродинамического качества от перебалансировки.

Тогда, для изменения высоты в процессе вертикального снижения можно записать выражение: $dH = V_{сн}dt = V_{сн0}\,f(H)dt$, откуда:

$$dt = \frac{dH}{V_{сн0}\,f(H)}. \tag{4}$$

Здесь $f(H)$ – радикал в правой части формулы (3б), однако с уже измененным масштабом, и высота задается в метрах.

Интегрируя выражение (4), получим формулу для определения времени снижения системы в секундах с высоты b, заданной в метрах:

$$t(b) = \frac{1}{V_{сн0}}\int_0^b \frac{dH}{\sqrt{\dfrac{1{,}225}{1{,}225 - 0{,}117\cdot 10^{-3}\cdot H + 4{,}269\cdot 10^{-9}\cdot H^2 - 6{,}397\cdot 10^{-14}\cdot H^3}}}. \tag{5}$$

На рис.4 представлен характер изменения кривой для времени снижения системы груз-УППС как функции от высоты десантирования.

Очевидно, что горизонтальный относ – степень рассеивания точки приземления относительно точки цели – можно оценить по формуле:

$$S(b) = \int_0^b \left|\pm\Delta V_x\right| dt = \int_0^b \frac{\left|\pm\Delta V_x\right| dH}{V_{сн0}\,f(H)} = \int_0^b \frac{HdH}{bV_{сн0}\,f(H)} = \frac{1}{b}\frac{\Delta V_{x\max}}{V_{сн0}}\int_0^b \frac{HdH}{f(H)}.$$

Горизонтальный относ является функцией переменного верхнего предела интеграла (высоты выхода системы на установившийся режим после десантирования). Он может быть выражен в метрах и оценен по формуле:

$$S(b) = \frac{1}{b}\left|\frac{\pm\Delta V_{x\max}}{V_{y0}}\right| \cdot \int_0^b \frac{HdH}{\sqrt{\dfrac{1{,}225}{1{,}225 - 0{,}117\cdot 10^{-3}\cdot H + 4{,}269\cdot 10^{-9}\cdot H^2 - 6{,}397\cdot 10^{-14}\cdot H^3}}},$$

где $V_{y0} \approx V_{сн0}$ –вертикальная составляющая скорости системы на высоте $H = 0$.

На рис.5 представлен характер изменения кривых горизонтального относа как функций от высоты десантирования. Здесь V_{x0}=10м/с, V_{y0}=5м/с. Для верхней кривой $\left|\pm\Delta V_{x\max}\right|$=0,5м/с, для нижней – $\left|\pm\Delta V_{x\max}\right|$=0,3м/с. При сбрасывании с высоты 10000м горизонтальный относ (отклонение от цели) для $\left|\pm\Delta V_{x\max}\right|$=0,5м/с составит ~356м, а для $\left|\pm\Delta V_{x\max}\right|$=0,3м/с составит ~213м.

Таким образом, из приведенного выше примера следует, что если не учитывать даже малых возможных отклонений в аэродинамическом качестве системы с изменением высоты (т.е. с изменением режимов и условий обтекания крыла и системы в целом), то это может привести к существенному интегральному горизонтальному относу от цели при снижении с большой высоты.

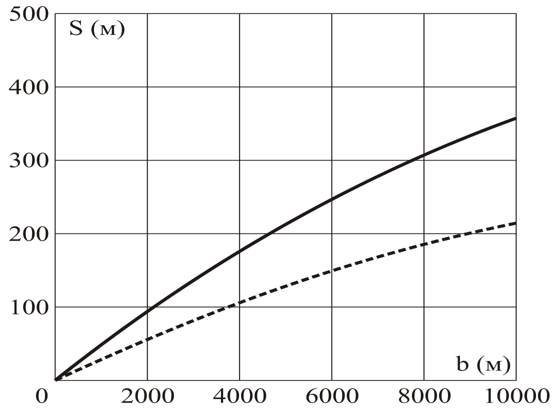


Рис.5. Изменение горизонтального относа в зависимости от высоты десантирования

Этот факт нужно учитывать при определении расчетной точки десантирования самолета-носителя на большой высоте.

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

1. Выдвинута гипотеза об изменении аэродинамического качества системы груз-УППС на больших высотах как следствие изменения режима обтекания крыла.

2. Предложена математическая модель для оценки возможного относа точки посадки системы относительно цели. Получены расчетные оценки возможного относа точки посадки системы относительно цели.

3. При определении РТД самолета-носителя на большой высоте и оценке точности приземления необходимо учитывать возможное изменение аэродинамического качества системы.

4. Необходимо проведение специальных исследований по выявлению закономерностей изменения режимов обтекания и балансировки крыла на больших высотах с целью обеспечения возможности прогнозирования характера изменения аэродинамического качества системы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Иванов П.И. Влияние параметров аэродинамических характеристик профиля на аэродинамическое качество двухоболочковых парашютных и парапланерных крыльев./П.И. Иванов // Труды международной конференции по математическому моделированию.– Херсон: МКММ-2010. – 2010. Вестник ХНТУ №3(39). – С.202 - 208.
2. Airdrop Enhanced Logistics Visibility Information System (AELVIS). Project Proposal. Institute For Information Technology, US Air Force Academy, February 2010.

ИВАНОВ Петр Иванович – д.т.н., профессор, ведущий специалист по летным испытаниям парашютных и парапланерных систем, НИИ аэроупругих систем.

Научные интересы:

– проектирование и испытания систем спасения и посадки летательных и космических аппаратов.

КУЯНОВ Алексей Юрьевич – ведущий инженер по испытаниям, старший парашютист-испытатель, Государственный Научно-Испытательный центр.

Научные интересы:

– испытания парашютных систем.

УДК 537.6

М.Ю. Ковалевский, Л.В. Логвинова

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МАГНЕТИКОВ СО СПИНОМ S=1

Постановка проблемы. Уравнение Ландау – Лифшица [1] устанавливает эволюцию магнитной среды с помощью вектора спина. Оно хорошо обосновано и используется при изучении динамических и статических свойств ряда магнитных диэлектриков со спином $s=1/2$. Исследования квадрупольных состояний и синтез высокоспиновых молекул ($s>1/2$) привели к необходимости уточнения идеологии макроскопического описания магнетиков [2-5]. Дополнительным стимулом послужило открытие бозе-эйнштейновских конденсатов нейтральных атомов с ненулевым спином и их изучение, использующее технику оптических решеток [6]. Интерес к этому вызван возможностью открытия новых магнитных состояний с симметрией SU(N) [7] и создания квантового компьютера [8].

Основная часть. Развитие представлений сокращенного описания неравновесных магнитных состояний следует искать в расширении магнитных степеней свободы в системах со спином $s>1/2$. Цель настоящей работы - нахождение нелинейных уравнений динамики магнитных сред и получение спектров коллективных возбуждений. В исследовании мы основываемся на работах [4,9], где развит гамильтонов подход описания динамики широкого класса магнетиков. В рамках этого подхода получены скобки Пуассона для канонически сопряженных эрмитовых 3×3 матриц $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, определяющих кинематическую часть лагранжиана $L_k(\mathbf{x})=b_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\dot{a}_{\beta\alpha}(\mathbf{x})\equiv Sp\hat{b}(\mathbf{x})\dot{\hat{a}}(\mathbf{x})$:

$$\left\{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),b_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\}=0,\qquad \left\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),b_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\}=\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\tag{1}$$
$$\left\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\}=0.$$

Свяжем эти матрицы с физическими величинами. Введем в рассмотрение матрицу:

$$\hat{g}(\mathbf{x})\equiv i\left[\hat{b}(\mathbf{x}),\hat{a}(\mathbf{x})\right].\tag{2}$$

Квадратные скобки здесь и далее обозначают коммутатор двух матриц. Эрмитова матрица $\hat{g}(\mathbf{x})$ содержит восемь независимых величин в силу равенства $Sp\hat{g}(\mathbf{x})=0$. В терминах симметричной и антисимметричной частей этой матрицы вводятся в рассмотрение физические величины - плотности квадрупольной матрицы $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ и спина $s_\alpha(\mathbf{x})$:

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\equiv q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})-i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x})/2.$$

Квадрупольная матрица $q_{\alpha\beta}$ симметрична и бесследна $q_{\alpha\beta}=q_{\beta\alpha}$, $q_{\alpha\alpha}=0$. Пять ее независимых компонент параметризованы соотношением:

$$q_{\alpha\beta}=q\left(e_\alpha e_\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)+q'\left(f_\alpha f_\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right).$$

Здесь q и q' модули матрицы. Векторы $d_\alpha, e_\alpha, f_\alpha = (\mathbf{d}\times\mathbf{e})_\alpha$ образуют ортонормированный репер. Соотношения (1),(2) позволяют найти скобки Пуассона матриц $\hat{g}(\mathbf{x})$:

$$i\left\{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\right\} = \left(-g_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta} + g_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{3}$$

Из матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ можно построить два инварианта Казимира:

$$g_2(\mathbf{x}) \equiv Sp\hat{g}^2(\mathbf{x}), \qquad g_3(\mathbf{x}) \equiv Sp\hat{g}^3(\mathbf{x}),$$

$$\left\{g_2(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\right\} = 0, \qquad \left\{g_3(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\right\} = 0.$$

Динамика неравновесных магнитных состояний со спином 1 описывается гамильтонианом, который является функционалом матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$: $H = H(\hat{g}(\mathbf{x}))$. Отсюда, используя (3) получим уравнение динамики этой величины:

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g})}{\delta g(\mathbf{x})}\right],$$

которое обобщает уравнение Ландау-Лифшица на рассматриваемую магнитную среду. В терминах матриц $q_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma$ последнее уравнение перепишется в виде:

$$\dot{\hat{q}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta q(\mathbf{x})}\right] - 2\left[\hat{q}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta\varepsilon(\mathbf{x})}\right], \tag{4}$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = 2\left[\frac{\delta\hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta q(\mathbf{x})}, \hat{q}(\mathbf{x})\right] + 2\left[\frac{\delta\hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta\varepsilon(\mathbf{x})}, \hat{\varepsilon}(\mathbf{x})\right].$$

Правые части уравнений (4) показывают взаимное влияние спина и квадрупольной матрицы на их динамические поведение. Их структура такова, что инварианты Казимира не изменяются: $g_2 = const$, $g_3 = const$. Наличие этих инвариантов уменьшает число независимых магнитных параметров соответственно до шести в двухосном случае и до четырех в одноосном случае квадрупольной матрицы.

В случае SU(3) симметрии гамильтониана набор интегралов движения состоит из обменного гамильтониана и матрицы $G_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_a \equiv \left(H, G_{\alpha\beta}\right) = \int d^3x\zeta_a(\mathbf{x}), \qquad \left\{\mathrm{H}, \gamma_a\right\} = 0.$$

Здесь $\zeta_a(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ - плотности аддитивных интегралов движения, ($a = 0, \alpha\beta$). Используя представление плотности потоков аддитивных интегралов движения работы [4], приходим к уравнениям динамики, отражающим законы сохранения в дифференциальной форме:

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\nabla_k q_k(\mathbf{x}), \qquad q_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int d^3x'x'_k\int_0^1 d\lambda\left\{\varepsilon(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\right\}, \tag{5}$$

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = -\nabla_k\hat{j}_k(\mathbf{x}), \qquad \hat{j}_k(\mathbf{x}) = \int d^3x'x'_k\int_0^1 d\lambda\left\{\hat{g}(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\right\},$$

где $q_k(\mathbf{x})$ - плотность потока энергии и $\hat{j}_k(\mathbf{x})$ - плотность потока, соответствующая сохраняющейся величине $\hat{G}$. При получении последнего равенства учтена SU(3) симметрия плотности обменной энергии связанная с инвариантностью относительно однородных линейных преобразований: $\left\{\hat{G}, \varepsilon(\mathbf{x})\right\} = 0$. Учитывая это свойство симметрии обменных взаимодействий для плотности энергии, получим соотношение:

$$\left[\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial g}, \hat{g}\right] + \left[\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\nabla_k g}, \nabla_k \hat{g}\right] = 0 .$$

Принимая во внимание это равенство из (3),(5) следуют выражения для плотностей потоков аддитивных интегралов движения:

$$\hat{j}_k = i\left[\hat{g}, \frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\nabla_k g}\right], \qquad q_k = Sp\frac{\delta\hat{H}}{\delta g}\hat{j}_k . \tag{6}$$

Аналитический явный вид SU(3) симметричного обменного гамильтониана строим по аналогии с гамильтонианом Гейзенберга. Запишем магнитный гамильтониан в таком виде, чтобы однородная часть плотности энергии была выражена в терминах инвариантов g_2 и g_3:

$$H(g_2, g_3) = H(g_2) + H(g_3),$$
$$H(g_2) = -2\int d^3x d^3x' J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) Sp\hat{g}(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x}'),$$
$$H(g_3) = -\int d^3x d^3x' d^3x'' I(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, |\mathbf{x}-\mathbf{x}''|, |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|) Sp\hat{g}(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x}')\hat{g}(\mathbf{x}'').$$

Здесь $J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$ и $I(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, |\mathbf{x}-\mathbf{x}''|, |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|)$ - обменные интегралы двух- и трехчастичного магнитных взаимодействий. Плотность энергии, соответствующая гамильтониану $H\ (g_2)$, имеет вид:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, g_2(\mathbf{x})) = -2Jg_2(\mathbf{x}) + \bar{J}Sp\nabla_k\hat{g}(\mathbf{x})\nabla_k\hat{g}(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Дальнейший анализ уравнений (4)-(6) проведем, используя модельное выражение плотности энергии (7). В результате получим систему матричных нелинейных уравнений:

$$\dot{\hat{q}} = \bar{J}[\Delta\hat{\varepsilon}, \hat{q}] + \bar{J}[\Delta\hat{q}, \hat{\varepsilon}], \qquad \dot{\hat{\varepsilon}} = 4\bar{J}[\hat{q}, \Delta\hat{q}] + \bar{J}[\Delta\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}]. \tag{8}$$

Линеаризуя эти уравнения около состояния равновесия $(\hat{\varepsilon}_0)_{\alpha\beta} \equiv 0, (\hat{q}_0)_{\alpha\beta} \neq 0$, (Т-четные состояния (спиновый нематик)), и переходя к Фурье-представлению, приходим к дисперсионному уравнению :

$$\det\hat{D}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \qquad D_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\beta\alpha}\left(\omega^2 - 2\bar{J}^2k^4Sp\left(\hat{q}_0^2\right)\right) + 3\bar{J}^2k^4\left(\hat{q}_0^2\right)_{\beta\alpha}.$$

В состоянии равновесия, если квадрупольная матрица одноосна, получим решения $\omega = 0$ и $\omega = \pm\bar{J}k^2q_0$, где величина q_0 - равновесное значение модуля одноосной квадрупольной матрицы. Для двухосной квадрупольной матрицы в состоянии равновесия решение дисперсионного уравнения приводит к трем спектрам квадрупольных волн:

$$\omega_{\pm}^{(1)} = \pm 2\bar{J}k^2q_0, \qquad \omega_{\pm}^{(2)} = \pm 2\bar{J}k^2q_0', \qquad \omega_{\pm}^{(3)} = \pm 2\bar{J}k^2\left|q_0 - q_0'\right|.$$

Здесь q_0 и q_0' - модули этой квадрупольной матрицы в состоянии равновесия.

Линеаризуя уравнения (8) около состояния равновесия $(\hat{\varepsilon}_0)_{\alpha\beta} \neq 0, (\hat{q}_0)_{\alpha\beta} \equiv 0$, (Т-нечетные состояния (ферромагнетик)), приходим к спектрам спиновых волн $\omega_{\pm}^{(1)} = 0$, $\omega_{\pm}^{(2)} = \pm\bar{J}k^2s_0$, $\omega_{\pm}^{(3)} = \pm\bar{J}k^2s_0/2$, где величина s_0 - равновесное значение спина. Параболическая зависимость частоты от волнового вектора в этих спектрах согласуется с результатами работы [10].

Рассмотрим однородную динамику изучаемой магнитной среды во внешнем постоянном магнитном поле. Гамильтониан $V(\mathbf{h})$, описывающий такое взаимодействие, можно представить в виде:

$$V(\mathbf{h}) \equiv Sp\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{h}} = V_1(\mathbf{h}) + V_2(\mathbf{h}), \qquad h_{\alpha\beta} \equiv h_\alpha h_\beta - \delta_{\alpha\beta} h^2 / 3 + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma ,$$

где линейное по магнитному полю слагаемое $V_1(\mathbf{h}) = -ih_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} G_{\beta\gamma} = -h_\alpha S_\alpha$ есть зеемановское взаимодействие. Слагаемое $V_2(\mathbf{h}) = Q_{\alpha\beta} h_{\beta\alpha}$ квадратично по магнитному полю. В отсутствие пространственных неоднородностей и слагаемого $V_2(\mathbf{h})$ для матрицы $g_{\alpha\beta}$ получим уравнение динамики $\dot{g}_{\alpha\beta} = h_\sigma \left(g_{\alpha\rho}\varepsilon_{\sigma\beta\rho} - \varepsilon_{\sigma\rho\alpha} g_{\rho\beta}\right)$. Отсюда, выделяя симметричную и антисимметричную части, приходим к уравнениям:

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\beta h_\gamma , \qquad \dot{q}_{\alpha\beta} = h_\sigma \left(q_{\alpha\rho}\varepsilon_{\sigma\beta\rho} - \varepsilon_{\sigma\rho\alpha} q_{\rho\beta}\right). \tag{9}$$

Первое из них – уравнение Блоха, которое описывает обычную спиновую динамику. Второе уравнение представляет собой уравнение движения для квадрупольной матрицы и возникает для магнитных сред обладающих спином 1. Очевидно, что в состоянии равновесия спин направлен по магнитному полю $s_\alpha \parallel h_\alpha$, квадрупольная матрица одноосна и имеет вид $q_{\alpha\beta} = q\left(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)$, где единичный вектор $n_\alpha = h_\alpha / h$. Решение первого уравнения в (9) приводит к двум спектрам спиновых волн $\omega = 0$ и $\omega = \pm h$. Решение второго уравнения в (9) приводит к трем спектрам квадрупольных волн: $\omega = 0$, $\omega = \pm h$, $\omega = \pm 2h$. Рассмотрим теперь влияние взаимодействия $V_2(\mathbf{h})$ на динамику системы. Соответствующее уравнение для матрицы $g_{\alpha\beta}$ имеет вид $\dot{g}_{\alpha\beta} = i\left[\hat{g}, \hat{h}\right]_{\alpha\beta}$. Отсюда следуют уравнения динамики для плотности спина и квадрупольной матрицы:

$$\dot{s}_\alpha = 2\varepsilon_{\alpha\beta\rho} q_{\gamma\rho} h_{\beta\gamma} , \qquad \dot{q}_{\alpha\beta} = s_\sigma h_\rho \left(h_\beta \varepsilon_{\alpha\rho\sigma} + h_\alpha \varepsilon_{\beta\rho\sigma}\right). \tag{10}$$

Стационарные решения этих уравнений приводят к условию коллинеарности векторов $s_\alpha \parallel h_\alpha$. Квадрупольная матрица по-прежнему имеет вид $q_{\alpha\beta} = q\left(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)$, где возможны два решения для единичного вектора $n_\alpha = h_\alpha / h$ и $n_\alpha \perp h_\alpha$. В отличие от системы уравнений (9), где динамика спина и квадрупольной матрицы описывается независимыми уравнениями, в последнем случае динамика этих величин взаимозависима. Решение системы уравнений (10) приводит к двум спектрам коллективных возбуждений: $\omega = 0$ и $\omega = \pm h^2$.

Учет релаксационных процессов приводит к возникновению в уравнениях динамики для плотностей аддитивных интегралов $\zeta_a(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ движения диссипативных слагаемых:

$$\dot{\varsigma}_a(\mathbf{x}) = -\nabla_k \left(\zeta_{ak}(\mathbf{x}) + \zeta_{ak}^{(1)}(\mathbf{x}) \right) \equiv L_a^R(\mathbf{x}) + L_a^D(\mathbf{x}), \tag{11}$$

где слагаемое $L_a^R = -\nabla_k \zeta_{ak}$ - описывает адиабатические процессы в изучаемой магнитной среде и слагаемое $L_a^D = -\nabla_k \zeta_{ak}^{(1)}$ - учитывает релаксацию. Используя второе начало термодинамики, формулы (11) позволяют получить уравнение динамики для плотности энтропии:

$$\dot{\sigma}(\mathbf{x}) = -\nabla_k j_{\sigma k}^{(1)}(\mathbf{x}) + I(\mathbf{x}), \tag{12}$$

где

$$j_{\sigma k}^{(1)} = Y_a \zeta_{ak}^{(1)}, \qquad I = \zeta_{ak}^{(1)} \nabla_k Y_a \tag{13}$$

соответственно плотность диссипативного потока и производство энтропии. Явный вид диссипативных диссипативных потоков плотностей аддитивных интегралов движения

$\zeta_{ak}^{(1)}$ может быть выражен в терминах диссипативной функции, которая для рассматриваемой магнитной среды имеет вид:

$$R \equiv \frac{1}{2}\int d^3x \nabla_k Y_a(\mathbf{x}) I_{ak,bl}(\mathbf{x}) \nabla_l Y_b(\mathbf{x}) = \int d^3 x r(\mathbf{x}). \quad (14)$$

Здесь $Y_a(\mathbf{x}) = \delta\Sigma / \delta\zeta_a(\mathbf{x})$ - термодинамические силы, сопряженные аддитивным интегралам движения, $I_{ak;bl}$ - обобщенные кинетические коэффициенты, которые удовлетворяют принципу симметрии Онзагера $I_{ak,bl} = I_{bl,ak}$, $\Sigma = \int d^3 x \sigma(\mathbf{x})$ - энтропия. Поскольку матрицы $\hat{g}$ бесследные, то справедливы дополнительные соотношения $I_{\alpha\alpha k,bl} = 0$, $I_{ak,\gamma\gamma l} = 0$. Принимая во внимание формулы (11)-(14), видим, что диссипативная функция связана с плотностями диссипативных потоков аддитивных интегралов движения равенством:

$$L_a^D(\mathbf{x}) = -\nabla_k \zeta_{ak}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\delta R}{\delta Y_a(\mathbf{x})}.$$

В обменном приближении тензорная структура обобщенных кинетических коэффициентов такова, что пространственные и спиновые индексы не перепутываются и отсутствуют выделенные направления в конфигурационном пространстве. Поэтому, $I_{ak,bl} = \delta_{kl} I_{ab}$. В этом случае для диссипативных плотностей потоков аддитивных интегралов движения получим выражения:

$$j_{\alpha\beta}^{(1)k} = -D_{\alpha\beta}\nabla_k T - \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}\nabla_k h_{\rho\gamma}, \quad (15)$$

$$q_k^{(1)} = -(\kappa + h_{\beta\alpha}D_{\alpha\beta})\nabla_k T - TD_{\alpha\beta}\nabla_k h_{\beta\alpha} - \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} h_{\beta\alpha}\nabla_k h_{\rho\gamma}.$$

Кинетические коэффициенты теплопроводности κ, магнитной термодиффузии $D_{\alpha\beta}$ и магнитной диффузии $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}$ связаны с $I_{ak;bl}$ соотношениями $I_{\alpha\beta,0} = T^2 D_{\alpha\beta} + Th_{\gamma\rho}\sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}$, $I_{\alpha\beta,\gamma\rho} = T\sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}$, $I_{0,0} = T^2\kappa + 2T^2 h_{\gamma\rho} D_{\rho\gamma} + Th_{\beta\alpha} h_{\gamma\rho}\sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}$. Принимая во внимание формулы (13),(15), найдем диссипативный поток и производство энтропии

$$j_{\sigma k}^{(1)} = -\frac{\kappa}{T}\nabla_k T - D_{\alpha\beta}\nabla_k h_{\beta\alpha},$$

$$I = \left(\frac{\sqrt{\kappa}}{T}\nabla_k T + \frac{D_{\alpha\beta}}{\sqrt{\kappa}}\nabla_k h_{\beta\alpha}\right)^2 + \nabla_k h_{\beta\alpha}\left(\frac{1}{T}\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} - \frac{1}{\kappa}D_{\alpha\beta}D_{\gamma\rho}\right)\nabla_k h_{\rho\gamma} > 0.$$

Выводы. Найденная структура релаксационных слагаемых в уравнениях динамики позволяет в принципе получить декременты затухания спектров коллективных возбуждений в изучаемых магнитных средах.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ландау Л.Д. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел/ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // Л.Д. Ландау, Собр. Тр. – М.: Наука, 1969. – Т.1.– С. 128-143.
2. Nauciel-Bloch M. Spin –one ferromagnet in the presence of biquadratic exchange/ M. Nauciel-Bloch, G. Sarma, A. Castets // Phys. Rev. B. – 1972. – V. 5. – P. 4603 – 4609.
3. Островский В.С. О нелинейной динамике сильноанизотропных магнетиков соб спинами s=1/ В.С. Островский // ЖЭТФ. – 1986. – Т. 91. – № 5(11). - С. 1690 – 1701.

4. Исаев А. О динамике различных магнитных структур/ А. Исаев, М. Ковалевский, С. Пелетминский // Физика металлов и материалов –1994. – Т. 77. – № 4. – С. 20-28.
5. Bernatska J. A generalized Landau-Lifshitz equation for an isotropic SU(3) magnet/ J. Bernatska, P. Holod // J. Phys. A: Math. Theor. – 2009. – V. 42. – P. 075401/1–14.
6. Paredes B. Fermionic atoms in optical superlattices/ B. Paredes, C. Tejedor, J.I. Cirac // Phys. Rev. A. – 2005. – V. 71. – P. 063608.
7. Two-orbital SU(N) magnetism with ultracold alkaline-earth atoms/ A.V. Gorshkov, M. Hermele, V. Gurarie, C. Xu, P.S. Julienne, J. Ye, P. Zoller, E. Demler, M.D. Lukin, A.M. Rey // Nature physics. – 2010. – V. 6. – P. 289 – 295.
8. Quantum computing with alkaline-earth-metal atoms/ A.J. Daley, M.M. Boyd, J. Ye, P. Zoller // Phys. Rev. Lett. – 2008. – V. 101. – P. 170504.
9. Kovalevsky M.Y. Nonlinear dynamics and collective excitations of spin-1 magnets/ M.Y. Kovalevsky, Quang Vuong Tran // Phys. Lett. A. – 2010. – V. 374. – P. 3676–3680.
10. Иванов Б.А. Динамические солитоны в ферромагнетике со спином $s=1$/ Б.А. Иванов, Р.С. Химин // ФНТ. 2008. – Т. 34. – № 3. – С. 236–247.

КОВАЛЕВСКИЙ Михаил Юрьевич – д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Национального научного центра “Харьковский физико-технический институт”, профессор Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– изучение равновесных состояний и динамики конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией.

ЛОГВИНОВА Любовь Викторовна – к.ф.-м.н., доцент Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– исследование динамики конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией.

УДК 533.6.013.42

Коваленко А.П.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГОМ ТРУБОПРОВОДЕ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ОСЕВОМ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Постановка проблемы. При исследовании переходных процессов в трубопроводах с жидкостью учет влияния жидкости на переходные процессы в упругом трубопроводе при различного рода продольных импульсных нагрузках вызван потребностями современного развития трубопроводного транспорта, авиационной и космической техники для улучшения эксплутационных характеристик и предотвращения возможных нештатных и критических ситуаций. Такие системы по сути, являются гидроупругими системами, в которых необходимо учитывать взаимное влияние элементов такой системы. Необходимость таких исследований вызвана также проблемами снижения материалоемкости таких механических систем, как элементов различных технических конструкций авиа- и космической техники, трубопроводов, емкостей для перевозки жидкостей. Задачи изучения переходных процессов в упругих трубопроводах с жидкостью при продольных импульсных нагружениях вызывают необходимость создания адекватных методов исследования. При определенных условиях трубопровод с жидкостью можно рассматривать как полубесконечную цилиндрическую оболочку с жидкостью.

Анализ публикаций по теме исследования. Активные исследования в этой области проводятся на протяжении последних десятилетий. В работах рассматриваются разнообразные модели трубопроводов с жидкостью, которые моделируются оболочечными гидроупругими системами под действием волновых и всевозможных динамических нагрузок [1-5]. Вместе с тем следует отметить, что не полностью исследовано влияние жидкости в таких гидроупругих системах при продольных импульсных нагрузках и не полностью раскрыт механизм влияния жидкости на переходные процессы в трубопроводе.

Цель статьи. В работе ставится цель построить адекватную математическую модель исследования переходных процессов в трубопроводе с жидкостью и разработать подход к изучению таких процессов при продольном импульсном нагружении.

Основная часть.

Обоснование выбранной механической модели. Трубопроводы включают в себя протяженные прямолинейные участки. Поскольку рассматриваются переходные процессы, то такие трубопроводы можно рассматривать как полубесконечные цилиндрические оболочки. Во многих случаях трубопроводы можно рассматривать как тонкостенные оболочки в классическом понимании ($h/R \le 0{,}1$, h – толщина стенки оболочки; R – срединный радиус оболочки). Для слабовязких жидкостей (в том числе и газа) жидкость можно рассматривать в акустическом приближении

Математическая модель. При исследовании переходных процессов важно, чтобы уравнения движения системы смогли отображать волновые процессы при указанных режимах движения. Поэтому для описания движения оболочки выбираем уравнения движения по модели Тимошенко, а жикость рассматриваем в акустическом приближении, что также позволяет рассматривать волновые процессы в жидкости.

На торце оболочки $x = 0$ прикладывается импульсная нагрузка по заданному закону $f(t)\cdot\eta(t)$, где $f(t)$ – закон задания импульсной нагрузки, $\eta(t)$ – функция

Хэвисайда. Задача исследуется в безразмерных величинах. За характерную длину L выбрано радиус оболочки, т.е. $L = R$, а за характерное время T выбрана величина $T = R\sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_1}{E}}$, где ν, E, ρ_1 – коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность материала оболочки соответственно. При таком выборе характерных величин безразмерная продольная скорость возмущений в оболочке $C_p = 1$.

В результате математическую модель исследуемой задачи можно сформулировать следующим образом. Уравнения движения имеют вид

$$L_1(U,W,\psi) - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0; \quad L_2(U,W,\Psi) - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = K_s \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

$$L_3(U,W,\Psi) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Начальные условия при этом будут

$$t = 0: \ U = W = \Psi = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Граничные условия будут следующего вида

$$x = 0: \ \frac{\partial W}{\partial x} = \Psi = 0, \ \frac{\partial U}{\partial t} = f(t)\cdot\eta(t), \ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t}; \tag{3}$$

$$x = \infty: \ \mathrm{U} = \mathrm{W} = \Psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \tag{4}$$

$$r = 1: \ \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial t}. \tag{5}$$

Здесь x, r – безразмерные продольная и радиальная координаты соответственно, t – время, U, W, Ψ – продольное, поперечное перемещение и тангенс угла поворота сечения по теории оболочек типа Тимошенко соответственно, φ – потенциал скоростей жидкости, $L_1(U,W,\Psi), L_2(U,W,\Psi), L_3(U,W,\Psi)$ – дифференциальные операторы по теории оболочек типа Тимошенко, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ – оператор Лапласа, $b = C_\nu = \sqrt{k^2(1-\nu)/2}$ – скорость распространения поперечных возмущений по стенке оболочки, k – коэффициент сдвига по теории оболочек типа Тимошенко, a – безразмерная скорость звука в жидкости. Коэффициент $K_s = \frac{2R\rho_0}{h\rho_1 k^2(1-\nu)}$ (ρ_0, h – плотность жидкости в состоянии покоя и толщина стенки оболочки соответственно) – коэффициент взаимосвязи элементов гидроупругой системы оболочка – жидкость.

Решение задачи в пространстве изображений. Решение поставленной задачи (1)–(5) находится по разработанному автором аналитико-численному подходу, который заключается в применении интегрального преобразования Лапласа-Карсона , метода простых итераций, метода Бубнова-Галеркина и численного обращения преобразования Лапласа-Карсона с использованием смещенных полиномов Лежандра [6–10], модифицированного автором [10]. В результате в пространстве изображений по Лапласу-Карсону получено начальное, первое и второе приближение для U, W, Ψ, φ – продольного, поперечного перемещения оболочки, тангенса угла поворота сечения по теории оболочек типа Тимошенко и потенциала скоростей жидкости, соответственно, Структура второго приближения для искомых функций U, W, Ψ в пространстве изображений имеет вид

$$W_2^* = f_1(p,x)\cdot e^{-px} + f_2(p,x)\cdot e^{-\beta x} + f_3(p,x)\cdot e^{-d_1 x} + f_4(p)\cdot e^{-d_2 x} + \sum_{j=1}^{N} K_j e^{-\lambda_j x} \quad (6)$$

$$U_2^* = f_5(p,x)\cdot e^{-px} + f_6(p,x)\cdot e^{-\beta x} + f_7(p,x)\cdot e^{-d_1 x} + f_8(p)\cdot e^{-d_2 x} + \sum_{j=1}^{N} L_j e^{-\lambda_j x} \quad (7)$$

$$\Psi_2^* = f_9(p,x)\cdot e^{-px} + f_{10}(p,x)\cdot e^{-\beta x} + f_{11}(p,x)\cdot e^{-d_1 x} + f_{12}(p,x)\cdot e^{-d_2 x} + \sum_{j=1}^{N} M_j e^{-\lambda_j x} \quad (8)$$

Здесь звездочкой помечены функции в пространстве изображений, p – параметр преобразования Лапласа-Карсона, N - количество удерживаемых членов по методу Бубнова-Галеркина, $d_1^2 = \dfrac{2(p^2+1)}{k^2(1-\nu)} + K_s a p$, $d_2^2 = p^2 + \beta_{23}$, $\beta_{23} = \dfrac{6k^2R^2(1-\nu)}{h^2}$, $\beta = \dfrac{p}{a}$, $\lambda_j^2 = \alpha_j^2 + \beta^2$, α_j – корни уравнения $J_1(z) = 0$ ($J_1(z)$ – функция Бесселя первого порядка). Функции $f_i(p,x)$ $(i = \overline{1,12})$ – функции в пространстве изображений, которые находятся по методу итераций.

Анализ решения (6)–(8) в пространстве изображений позволяет сделать следующие выводы: слагаемые с множителями e^{-px} и $e^{-d_2 x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимися с самой высокой скоростью, равной единице (в безразмерном виде); слагаемые с множителями $e^{-d_1 x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимися со скоростью распространения поперечных возмущений (в безразмерном виде это равно примерно 0,54); слагаемые с множителями $e^{-\beta x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимися со скоростью распространения волновых возмущений в жидкости (в безразмерном виде это равно примерно 0,25); слагаемые с множителями $e^{-\lambda_j x}$ соответствуют слагаемым, которые возникают вследствие применения метода Галеркина (здесь присуствуют возмущения, распространяющиеся со всеми вышеперечисленными скоростями системы).

Таким образом, построено решение поставленной начально–краевой задачи в пространстве изображений по времени. Проведен качественный анализ решения

Выводы и перспективы дальнейших исследований. На основании вышеизложенного следует, что применение предложенного подхода дает возможность построить решение в пространстве изображений. Исследования в данной области целесообразно продолжать для нахождения конкретных решений при разного типа осевых продольных нагружениях.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой./В.Д.Кубенко. – Киев:Наук.думка, 1979. – 184 с.
2. Ковальчук П.С., Взаимодействие колеблющихся цилиндрических оболочек с содержащейся в них жидкостью /П.С. Ковальчук, В.Д.Кубенко//Динамика тел взаимодействующих со средой. Под ред . А.Н.Гузя. – К.: Наук. Думка,1991. – С.168-214
3. Селезов И.Т., Сорокина В.В., Динамика незамкнутой сферической оболочки при импульсном возбуждении./И.Т.Селезов, В.В.Сорокина, И.К.Цыганов, В.В. Яковлев // Изв. АН СССР. – Механика твердого тела. – 1978. – №2. – С.145–149.

4. Сагомонян Е.А. О распространении продольных волн в цилиндрической оболочке./Е.А.Сагомонян. // Вестн. Моск.ун-та. Математика, механика. – 1977. – №1. – С.111-112.
5. Коваленко А.П. Математическое моделирование динамических возмущений в жидкости в системе полубесконечная цилиндрическая оболочка с жидкостью при осевом импульсном нагружении./А.П.Коваленко// КОНСОНАНС-2009, Акустичний симпозіум (29.09-01.10 2010 р.), Збірник праць. – Київ, 2009 – С. 207 – 212.
6. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа/ К.Ланцош. – М.:Физматгиз, 1961.– 524 с.
7. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа./В.И.Крылов, Н.С.Скобля – М.: Наука, 1974. – 224 с.
8. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке /А.П.Коваленко//Вестник ХНТУ. – Херсон, 2008. – №2(31). – С. 240 – 244.
9. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости численного обращения преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке. /А.П. Коваленко// Вестник ХНТУ. – Херсон, 2009. – №2 (35).– С. 236 – 240.
10. Коваленко А.П . О применимости интегрального преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках. /А.П.Коваленко// Вестник ХНТУ. – Херсон, 2010. – № 3(39). – С. 213 – 217.

КОВАЛЕНКО Анатолий Петрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины (г.Киев).

Научные интересы:

– Динамические волновые процессы в гидроупругих системах; динамика космических систем с упругими элементами.

УДК 517.927

А.И. Колосов

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧИ ПУАССОНА-БОЛЬЦМАНА

Постановка проблемы. В работе [1] сформулирована нелинейная краевая задача на полуоси, возникающая при изучении электростатического потенциала,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = shu \quad (0 < r_0 < r < \infty),$$
$$u(r_0) = a > 0, \ \lim_{r\to\infty} u(r) = 0. \tag{1}$$

Задача (1) известна как задача Пуассона-Больцмана.

Анализ публикаций по теме исследования. Н. Андерсоном и А.М. Артурсом [1] установлено существование единственного при каждом (r_0, a) решения задачи (1) и получены двусторонние оценки этого решения.

Цель статьи. Целью данной работы является построение единственного монотонного решения задачи (1), которое может быть получено с двусторонними приближениями, сходящимися к нему.

Указанные результаты в работах других авторов отсутствуют.

Основная часть. Краевая задача (1) является задачей на бесконечном интервале (на полуоси).

Бесконечность интервала, на котором рассматривается задача, составляет существенную сложность как при качественном ее исследовании, так и при численном решении подобных задач.

Дополним задачу (1) условием

$$\frac{du}{dr} < 0 \quad (r_0 < r < \infty). \tag{2}$$

Сопоставим задаче (1), (2) следующую задачу со свободной границей

$$\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = shu, \ 0 < r_0 < r < r_*,$$
$$u(r_0) = a, \ u(r_*) = 0, \ \frac{du}{dr}(r_*) = 0, \tag{3}$$
$$\frac{du}{dr} < 0 \quad (r_0 < r < r_*).$$

Под решением задачи (3) понимаем пару (u, r_*), где

$$u(r) \in C_2[0, r_*] \bigcap C_2^{(1)}]0, r_*[, \quad r_* \in]r_0, \infty].$$

В [2] нами разработан метод исследования краевых задач со свободной границей, названный методом двойного отображения, которым может быть исследована и задача (3).

Положим

$$\left(\frac{du}{dr}\right)^2 = \varphi(u).$$

Тогда задача (3) указанным методом сводится к следующему нелинейному интегральному уравнению

$$\varphi(u) = (\Gamma\varphi)(u) \equiv 2\int_0^u sh\, s\, ds + 2\int_0^u \varphi^{\frac{1}{2}}(s)\left[r_0 + \int_s^a \frac{d\omega}{\varphi^{\frac{1}{2}}(\omega)}\right]^{-1} ds\,, \qquad (4)$$

рассматриваемому на конусе K неотрицательных функций из $C[0,a]$.

Оператор Γ, определенный правой частью уравнения (4), обладает следующими свойствами:

1. $\varphi_1 \le \varphi_2 \to \Gamma\varphi_1 \le \Gamma\varphi_2 \;\; (\forall \varphi_1, \varphi_2 \in K)$.

2. $\Gamma K(u_0) \subset K(u_0)$, где $u_0(u) = u^2$.

3. Существует конусный отрезок $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle \subset K(u_0)$ такой, что

$$\Gamma : \langle \varphi_0, \psi_0 \rangle \to \langle \varphi_0, \psi_0 \rangle,$$

где $\varphi_0(u) = 2\int_0^u sh\, s\, ds,\;\; \psi_0(u) = B^2 u^2$.

Постоянная $B > 0$ находится из условия

$$B = \frac{1}{2r_0} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r_0^2} + 4b}\,,$$

где $b = \sup\limits_{0<u<a} \dfrac{\varphi_0(u)}{u^2}$.

4. Γ – вполне непрерывный на $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle$ оператор.

5. $\Gamma - u_0$ – вогнутый на $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle$ оператор.

Вся указанная здесь терминология взята из монографии [3].

Согласно результатам М.А. Красносельского [3] свойства 1. – 5. оператора Γ обеспечивают для уравнения (4) существование на $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle$ единственного решения φ_*, которое может быть получено по схеме

$$\varphi_0 \le \varphi_1 \le \ldots \le \varphi_* \le \ldots \le \psi_n \le \ldots \le \psi_0\,,$$

где

$$\varphi_n = \Gamma\varphi_{n-1},\;\; \psi_n = \Gamma\psi_{n-1},\;\; (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \varphi_*\,.$$

Но тогда для краевой задачи (1) справедливо следующее утверждение.

Теорема. Краевая задача (1) при каждом (r_0, a) имеет единственное монотонное решение, которое может быть получено с двусторонними приближениями, сходящимися к нему.

Так как

$$\lim_{u\to 0} \int_u^a \varphi_*^{-1/2}(\omega)\, \mathrm{d}\omega = \infty\,,$$

то $r_* = \infty$.

Двусторонние приближения, сходящиеся к решению задачи (1), получаем по схеме

$$r_0 + \int_u^a \frac{d\omega}{\psi_n^{1/2}(\omega)} \le r(u) \le r_0 + \int_u^a \frac{d\omega}{\varphi_n^{1/2}(\omega)},$$

$$\varphi_n^{1/2}(u) \le \left|\frac{du}{dr}\right| \le \psi_n^{1/2}(u),$$

$$(n = 0,1,2,...) .$$

Выводы. Подобным путем могут быть конструктивно исследованы математические модели и ряда других прикладных задач [4].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Anderson N. Bounds for the solution of the Poisson-Boltzmann equation about a sylindrical particie / N. Anderson, A.M. Arzthurs // Y. Math. Anal. And Appl. – 1984. – 103.– №1.– P. 148 – 161.
2. Колосов А.И. Нелинейные краевые задачи со свободной границей для обыкновенных дифференциальных уравнений математической физики: автореф. дисс… д-ра физ.-мат. наук: 01.01.03 / А.И. Колосов; ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. – М., 1991. – 33 с.
3. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 257 с.
4. Колосов А. И. Методы математического моделирования в исследовании задач, возникающих при рассмотрении эффектов образования структур в газовой динамике / А.И. Колосов // Вестник ХНТУ. – 2008. – Т. 31. – С. 245–247.

КОЛОСОВ Анатолий Иванович – д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики Харьковской национальной академии городского хозяйства.

Научные интересы:

– конструктивное решение математических моделей прикладных задач;

– нелинейные операторные уравнения в полуупорядоченных пространствах и их применение в математической физике.

УДК 519.81

В.В. Крючковский

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ АЛЬТЕРНАТИВ ПО КАЧЕСТВЕННОМУ КРИТЕРИЮ

Постановка проблемы. При синтезе любой математической модели возникает задача получения первичной информации о взаимосвязи входа и выхода модели. На основе этой информации в дальнейшем решается задача идентификации модели.

В отличие от натурных систем процесс многофакторного оценивания является интеллектуальной процедурой реализуемой модели. К сожалению, в большинстве случаев при идентификации моделей интеллектуальной деятельности не удается количественно измерить реакцию индивидуума, можно зарегистрировать лишь тип поведения и его качественные характеристики, являющиеся отражением его ощущений в некоторой ситуации. В этом случае требуются принципиально другие методы получения информации, необходимой для идентификации модели. Одним из возможных подходов получения такой информации является подход, известный как интроспективный анализ.

Целью интроспективного подхода является замещение необходимой для решения проблемы объективной, но недоступной по каким-либо причинам информации, субъективными, основанными на опыте, интуиции ощущениями лиц, принимающих решения (ЛПР). На этом подходе базируется теория экспертного оценивания.

Принципиальной особенностью методологии экспертного оценивания по количественному критерию является его субъективизм и интервальный характер. При этом величина интервала (степень неопределенности) зависит от степени квалификации экспертов, понимания ими конечной цели экспертизы, обработки её результатов и т.п.

Метод компараторной идентификации [1] ориентирован на преодоление этого недостатка путем замены процедуры измерения силы ощущений процедурой их сравнения. Этот метод хорошо себя зарекомендовал для оценки альтернатив по качественному критерию. Особо необходимо отметить, что измерения по качественному критерию позволяют получить необходимую для принятия решения информацию не только в ходе активных, специально спланированных экспертиз, но и в ходе пассивных экспериментов путем наблюдения и регистрацией результатов актов оценивания ситуаций и выбора решений.

Анализ исследований и публикаций. Если оправданы лишь качественные оценки объектов по тем или иным качественным признакам, то используются методы ранжирования, парного и множественного сравнения.

<u>При ранжировании</u> эксперту предъявляется весь набор альтернатив, подлежащих оцениванию, и предлагается упорядочить их по степени предпочтительности. Ранжирование альтернатив может осуществляться различными способами [2]. На основе знаний и опыта эксперт располагает объекты в порядке предпочтения, руководствуясь одним или несколькими выбранными показателями (критериями) сравнения. Применение строгих численных отношений «больше» (>), «меньше» (<) или «равно» (=) не всегда позволяет установить порядок между объектами. Поэтому наряду с ними используются отношения для определения большей или меньшей степени какого-то качественного признака (отношения частичного порядка, например, полезности) используются отношения типа «более

предпочтительно» ($\succ$), «менее предпочтительно» ($\prec$), «равноценно» ($\approx$) или «безразлично» (~).

Метод парных сравнений [3] является одним из наиболее распространенных методов получения экспертной информации. Исходя из целей экспертизы, для каждой пары эксперту предлагается указать, какая из альтернатив более предпочтительна или указать, могут ли данные альтернативы принадлежать одному классу. Метод парных сравнений введен в практику системного анализа иерархий Т. Саати, и поэтому иногда особо выделяют метод парных сравнений в модификации Саати [4].

Метод множественных сравнений [5] отличается от парных тем, что экспертам последовательно предъявляют не пары, а тройки, четверки, …, n-ки ($n < N$) альтернатив. Множественные сравнения занимают промежуточное положение между методом парных сравнений и ранжированием.

Конечным результатом описанных методов является установление относительной важности рассматриваемых альтернатив и установление на множестве альтернатив отношения порядка (строгого или частичного).

Рассмотренные методы экспертных оценок обладают различными качествами, но приводят в общем случае к близким результатам. Практика применения этих методов показала, что наиболее эффективно комплексное применение различных методов для решения одной и той же задачи. Сравнительный анализ результатов повышает обоснованность получаемых выводов. При этом следует учитывать, что методом, требующим минимальных затрат, является ранжирование. Метод парного сравнения без дополнительной обработки не дает полного упорядочения альтернатив.

Целью данной статьи является разработка методов экспертного оценивания альтернатив по качественному критерию.

Изложение основного материала. В основе проблемы принятия решений при оценивании альтернатив по качественному критерию используем методы парных сравнений: метод «линия» и метод Саати.

Рассмотрим некоторое множество $A = \{A_h\}$, $h = \overline{1,k}$ альтернатив, которые эксперт подвергает сравнению по некоторому качественному критерию C с целью определения относительных весов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_h$ значимости. Из сущности этих коэффициентов следует, что они должны быть положительными и удовлетворять уравнению нормирования

$$\sum_{h=1}^{k} \omega_h = 1. \qquad (1)$$

Если эксперт выполнит попарные сравнения некоторой альтернативы A_q с каждой из $(k-1)$ оставшихся альтернатив относительно критерия C, то в результате будет получено $D_q = \{d_{qh}\}$, $h \neq q$ степеней преимущества альтернативы A_q над остальными альтернативами. В общем случае альтернатива A_q может превосходить некоторые альтернативы и уступать другим.

Введем понятие абсолютного веса ν_h альтернативы A_h, под которым будем понимать количественную меру степени выраженности у альтернативы A_h свойства, описываемого критерием C.

Присваивая A_q вес ν_q и задавая функцию

$$\nu_h = f(\nu_q, d_{qh}), \qquad (2)$$

вычисляем веса всех остальных альтернатив. На завершающем этапе, используя (1), нормируя значения v_h согласно (1), получаем коэффициенты значимости ω_h альтернатив относительно критерия *C*.

Трудоемкость такого алгоритма, называемого «линия», равна $(k-1)$, где k – количество альтернатив. Очевидным требованием к функции (2) является монотонность. Вид этой функции зависит от типа вопросов, которые ставятся перед экспертом в ходе парного сравнения. Если возникают мультипликативные сравнения, тогда $v_h = v_q \o\left(d_{qh}\right)$, где $\o\left(d_{qh}\right)$ – произвольная монотонная функция, удовлетворяющая условию $\o(1)=1$.

Метод парных сравнений является базовым для предложенных Саати методов аналитических иерархических процессов [4] и аналитических сетевых процессов [6] поддержки принятия решений. Сущность метода Саати состоит в следующем: эксперту последовательно предъявляются пары альтернатив $\left(A_i, A_j\right)$ и предлагается определить степень d_{ij} преимущества A_i над альтернативой A_j относительно некоторого качественного критерия *C*.

При предъявлении пары $\left(A_i, A_j\right)$ эксперт определяет степень превосходства d_{ij}. Степень преимущества d_{ji} определяется уже без рассмотрения пары $\left(A_j, A_i\right)$, а только исходя из метризированного мультипликативного отношения:

$$P_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & \text{если } \left(A_i, A_j\right) \in P; \quad \left(A_j, A_i\right) \notin P; \\ 1, & \text{если } \left(A_i, A_j\right) \in P; \quad \left(A_j, A_i\right) \in P; \\ 1/d_{ij}, & \text{если } \left(A_i, A_j\right) \in P; \quad \left(A_j, A_i\right) \in P. \end{cases}$$

При наличии k альтернатив эксперт выполняет $k(k-1)/2$ сравнений, а соотношение

$$d_{ji} = 1/d_{ij}$$

является базовым при использовании метода Саати при определении относительных весов альтернатив. Элементы d_{ij}, $i, j = \overline{1,k}$ образуют сверхтранзитивную квадратную матрицу парных сравнений:

$$D = \begin{Vmatrix} \omega_1/\omega_1 & \omega_1/\omega_2 & \dots & \omega_1/\omega_k \\ \omega_2/\omega_1 & \omega_2/\omega_2 & \dots & \omega_2/\omega_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k/\omega_1 & \omega_k/\omega_2 & \dots & \omega_k/\omega_k \end{Vmatrix} \tag{3}$$

Величину d_{ij} можно трактовать как отношение весов альтернатив A_i и A_j, т.е. ω_i/ω_j.

Для вычисления относительных весов альтернатив исходя из матрицы, используем наиболее математически обоснованный, на наш взгляд, метод собственного вектора, предложенный Саати [7,8]. В качестве множества относительных весов альтернатив используем компоненты собственного вектора, соответствующего максимальному характеристическому числу λ_{max}. Если матрица (3) удовлетворяет требованию:

$$d_{ij} = \left(\omega_i/\omega_j\right) = \left(\omega_i\omega_h/\omega_j\omega_h\right) = \left(\omega_i/\omega_h\right)\left(\omega_h/\omega_j\right) = d_{ih}d_{hj},$$

для $\forall ij,h$, тогда $\lambda_{max} = k$, где k – количество альтернатив. При этом для несогласованной матрицы всегда $\lambda_{max} \geq k$.

По Саати в качестве показателя согласованности элементов матрицы (3) используется величина индекса согласованности $CI = (\lambda_{max} - k)/k - 1$.

В случае необходимости непосредственного оценивания альтернатив каждому эксперту предлагается оценивать альтернативные решения на множестве показателей качества и ситуаций неопределенности. Показатели качества в общем виде представим так:

$$X_t = \left\{\widetilde{X}_{it} \mid i = \overline{1,n};\ t = \overline{1,\nu}\right\}, \tag{4}$$
$$\widetilde{X}_{it} = \left\{x_{ijt} \mid i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,z};\ t = 1,\nu\right\},$$

где X_t – множество оценок альтернатив по разным показателям качества, определенных t-м экспертом; $\widetilde{X}_{it}$ – множество оценок i-ой альтернативы по разным показателям качества, данных t-им экспертом; x_{ijt} – оценка, определяемая t-им экспертом для i-ой альтернативы по j-му показателю качества.

Ситуации неопределенности представим так:

$$Y_t = \left\{\widetilde{Y}_{it} \mid i = \overline{1.n};\ \ t = \overline{1,\nu}\right\}, \tag{5}$$
$$\widetilde{Y}_{it} = \left\{y_{ikt} \mid i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,n};\ k = \overline{1,l};\ t = \overline{1,\nu}\right\},$$

где Y_t – множество оценок альтернатив, определенной t-им экспертом при проявлении разных ситуаций неопределенности; $\widetilde{Y}_{it}$ – множество оценок i-ой альтернативы, определенной t-им экспертом при проявлении разных ситуаций неопределенности;
y_{ikt} – оценка, данная t-им экспертом i-ой альтернативе при возникновении k-ой ситуации неопределенности.

Таким образом, при необходимости ранжирования альтернатив, каждому эксперту предлагается построить их ранжированный ряд по каждому показателю качества и каждой ситуации неопределенности, то есть каждой альтернативе поставить в соответствие определенный ранг.

Для рангов показателей качества имеем соотношения:

$$G_t = \left\{\widetilde{G}_{it} \mid \overline{i = 1,n;\ t = 1,\nu}\right\}, \tag{6}$$
$$\widetilde{G}_{it} = \left\{g_{ijt} \mid i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,z};\ t = \overline{1,\nu}\right\},$$

где G_t – множество рангов альтернатив по разным показателям качества, полученными t-им экспертом; $\widetilde{G}_{it}$ – множество рангов i-ой альтернативы по разным показателям качества, предлагаемым t-им экспертом; g_{ijt} – ранг, данный t-им экспертом i-ой альтернативе по j-му показателю качества.

Ситуации неопределенности соответствуют соотношения

$$Q_t = \left\{\tilde{Q}_{it} \mid i = \overline{1,n};\ t = \overline{1,\nu}\right\}, \tag{7}$$
$$\tilde{Q}_{it} = \left\{q_{ikt} \mid i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,l};\ t = \overline{1,\nu}\right\},$$

где Q_t – множество рангов альтернатив при проявлении разных ситуаций неопределенности, определенное t-им экспертом; $\tilde{Q}_{it}$ – множество рангов i-ой альтернативы при проявлении различных ситуаций неопределенности, определенное
t-им экспертом; q_{ikt} – ранг, определенный t-им экспертом i-ой альтернативе при возникновении k-ой ситуации неопределенности.

Парное сравнение альтернатив (4) при ситуациях неопределенности (5) проводится с использованием алгоритма, известного как задача Штейнгауза [9,10,11]. В результате получаем ранжированный список из n альтернатив по k_i-му показателю качества и n_j-ой ситуации неопределенности.

Аналогичным образом проводим парное сравнение альтернатив по другим показателям качества и ситуациям неопределенности и, в частности, описываемых выражениями (6) и (7).

Следует заметить, что если обработка оценок альтернатив не дает однозначного ответа наиболее приоритетному решению, то проводим построение групповой оценки методов решений.

При необходимости ранжирования методов решений каждый эксперт строит свой ранжированный ряд по каждому показателю качества и ситуации неопределенности. При этом ранжирование методов проводится аналогичным образом, как и ранжирование альтернатив; парное сравнение методов решений проводится аналогичным образом. В результате могут быть получены ранги методов, которые определяются множеством показателей качества и ситуаций неопределенности.

Для обеспечения достоверности результатов возникает необходимость решения также таких задач: количественной оценки степени согласованности множества экспертных оценок; определения достаточности степени согласования этого множества; вычисления агрегированной согласованной экспертной оценки. Решение таких задач, в свою очередь, вызывает необходимость учета относительной компетентности экспертов. В частности, для определения агрегированной оценки вероятности P_j появления v-ой ситуации неопределенности используем выражение

$$P_j = \sum_{t=1}^{v} \alpha_t P_{jt} ,$$

где P_{jt}– вероятность появления j-ой ситуации неопределенности по мнению t-го эксперта; α_t– нормированный коэффициент относительной компетентности t-го эксперта.

Коэффициенты компетентности должны удовлетворять условию $\sum_{t=1}^{v} \alpha_t = 1$.

Выводы. В работе рассматривается метод принятия решений на основе экспертного оценивания альтернатив по качественному критерию с учетом ситуаций неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Петров К.Э. Компараторная структурно-параметрическая идентификация моделей скалярного многофакторного оценивания: Монография / К.Э.Петров, В.В.Крючковский. – Херсон : Олди-плюс, 2009. – 294 с.
2. Фишберн П.К. Измерение относительных ценностей / П.К.Фишберн // Статистическое измерение качественных характеристик. – М.: Статистика, 1972. – С. 76-104.
3. Девид Г. Методы парных сравнений / Г.Девид. – М.: Статистика, 1978. – 144 с.
4. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т.Саати. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.
5. Pendergrass R.N. Ranking in triple comparisons. Contributions to probability and statistics / R.N.Pendergrass, R.A.Bredley. – Stenford : Stenford Univ. Press. 1960. – 270 p.

6. Shank R. Dynamic Memory: A Theory of Learning in Computers and People / R.Shank. – New York : Cambridge University Press. 1982.
7. Гнатієнко Г.М.Експертні технології прийняття рішень: Монографія / Г.М.Гнатієнко, В.Є.Снитюк. – Київ : ТОВ «Маклаут», 2008. – 444с.
8. Снитюк В.Є. Прогнозування. Моделі. Методи. Алгоритми : Навчальний посібник / В.Є.Снитюк. – Київ : ТОВ «Маклаут», 2008. – 364 с.
9. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений : Алгоритмический аспект / В.Г.Тоценко. – Київ : Наукова думка, 2002. – 382 с.
10. Экенроде Р.Т. Взвешенные многомерные критерии / Р.Т.Экенроде // Статистические измерения качественных характеристик. – М. : Статистика, 1972. – С. 139-154.
11. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т.Саати, К.Кернс. – М. : Радио и связь, 1991. – 223 с.

КРЮЧКОВСКИЙ Виктор Владимирович – к.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

– теория принятия решений.

УДК 681.5.001.63: 519.711

В.В. Лаврик

ВЫВОД РАЗНОСТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ИЗ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ КУБИЧЕСКОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА СИСТЕМЫ FORTU

Постановка проблемы. Анализ публикаций по теме исследования. На практике, используя традиционные схемы методов конечных элементов (МКЭ), построенных на основе вариационного метода Лагранжа для решения задач с особенностями (учёт слабой сжимаемости материалов), возникают определённые трудности, для преодоления которых используют вариационные методы разного вида. Это методы Ху-Вашицу(смешанный метод), Кастильяно (метод сил) и др.[4,7]. Но «метод сил» не нашёл широкого применения в расчётах конструкций в силу сложности аппроксимации напряжённо-деформированного состояния объекта.

«Смешанные методы», в отличие от «метода сил», повсеместно используются при создании машино-строительных конструкций. В частности, для исследования напряжённого состояния эластомеров используют вариационные принципы Л.П. Германа, С. Кея, Й. Нагтегала [2].

Помимо положительных моментов, смешанные модели МКЭ обладают рядом недостатков: большой порядок разрешающей системы уравнений по сравнению с МКЭ в форме метода перемещений. Поэтому для задач с указанной особенностью предпочтительнее МКЭ в форме метода перемещений на базе вариационного метода Лагранжа [1].

Формулирование целей статьи. В последние годы встаёт вопрос о разработке инструментальных систем автоматизированного проектирования (САПР), в которых использовались бы приведённые выше вариационные принципы. Современные расчётно-вычислительные комплексы, предназначенные для изучения свойств материалов, находящиеся в напряжённо-деформированном состоянии, содержат целый ряд методов приближённых вычислений: решение больших систем алгебраических и трансцендентных уравнений, численное интегрирование и дифференцирование и т.д., а также большое количество вспомогательных нестандартных расчётов [3]. В данной статье будет рассмотрен вывод формулы потенциальной энергии системы кубического конечного элемента методом моментных схем.

Основная часть. Выведем формулу потенциальной энергии для шестигранного конечного элемента с линейной аппроксимацией перемещения и единичными соотношениями сторон.

Энергия упругой деформации такого КЭ определяется из формулы:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint\limits_V (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23})dV\,, \tag{1}$$

при этом её вариация, исходя из принципа Лагранжа, равна нулю $\delta\Pi = 0$. В формуле (1) σ_{ij} - напряжения, ε_{ij} -деформации, возникающие при внешних нагрузках на тело. Между собой они связаны соотношениями закона Гука[1, 2, 4, 5]:

$$\sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{12} = \mu\varepsilon_{12}, \sigma_{13} = \mu\varepsilon_{13}, \sigma_{23} = \mu\varepsilon_{23}\,. \tag{2}$$

Здесь μ , λ - параметры Ляме, которые находятся по формулам:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \tag{3}$$

где E- модуль Юнга и ν - коэффициент Пуассона являются физическими постоянными.

Элементарный объём можно найти из соотношения :

$$dV = \sqrt{g}dxdydz \quad . \tag{4}$$

Основной принцип метода моментных схем лежит в представлении аппроксимирующей функции в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием *n*- ых членов ряда. Для постранственного шестигранного конечного элемента эта функция, представленная в виде ряда, будет иметь следующий вид:

$$u_{k^{\cdot}} = w_{k^{\cdot}}^{\ 000} + w_{k^{\cdot}}^{\ 100}\psi^{100} + w_{k^{\cdot}}^{\ 010}\psi^{010} + w_{k^{\cdot}}^{\ 001}\psi^{001} + w_{k^{\cdot}}^{\ 110}\psi^{110} + w_{k^{\cdot}}^{\ 101}\psi^{101} + w_{k^{\cdot}}^{\ 011}\psi^{011} + w_{k^{\cdot}}^{\ 111}\psi^{111}, \tag{5}$$

где $w_{k^{\cdot}}^{\ pqr}$-коэффициенты разложения, ψ^{pqr}- набор степенных координатных функций, определяемых по формуле:

$$\psi^{pqr} = \frac{x^p}{p!}\frac{y^q}{q!}\frac{z^r}{r!} \quad (p=0,\ 1;\ q=0,\ 1; r=0,1). \tag{6}$$

На основании формул (5) и (6) получим выражения для производных от функции перемещения внутри КЭ:

$$\begin{aligned} u_{k^{\cdot},1} &= w_{k^{\cdot}}^{\ 100} + w_{k^{\cdot}}^{\ 110}\psi^{010} + w_{k^{\cdot}}^{\ 101}\psi^{001} + w_{k^{\cdot}}^{\ 111}\psi^{011}, \\ u_{k^{\cdot},2} &= w_{k^{\cdot}}^{\ 010} + w_{k^{\cdot}}^{\ 110}\psi^{100} + w_{k^{\cdot}}^{\ 011}\psi^{001} + w_{k^{\cdot}}^{\ 111}\psi^{101}, \\ u_{k^{\cdot},3} &= w_{k^{\cdot}}^{\ 001} + w_{k^{\cdot}}^{\ 101}\psi^{100} + w_{k^{\cdot}}^{\ 011}\psi^{010} + w_{k^{\cdot}}^{\ 111}\psi^{110}. \end{aligned} \tag{7}$$

Деформации ε внутри КЭ определяются через перемещения внутренних точек по следующим формулам:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y};\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z};\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\varepsilon_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};\varepsilon_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{8}$$

Компоненты тензора деформации разложим в ряд Макларена в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{ij} e^{(stg)}\psi^{(stg)} \quad , \tag{9}$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11}^{00} + e_{11}^{001}\psi^{001} + e_{11}^{010}\psi^{010} + e_{11}^{011}\psi^{011}; \\ \varepsilon_{22} &= e_{22}^{000} + e_{22}^{001}\psi^{001} + e_{22}^{100}\psi^{100} + e_{22}^{101}\psi^{101}; \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{000} + e_{33}^{010}\psi^{010} + e_{33}^{100}\psi^{100} + e_{33}^{110}\psi^{110}; \\ \varepsilon_{12} &= e_{12}^{000} + e_{12}^{001}\psi^{001}; \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{000} + e_{13}^{010}\psi^{010}; \\ \varepsilon_{23} &= e_{23}^{000} + e_{23}^{100}\psi^{100}. \end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициенты разложения $\varepsilon^{(st)}{}_{ij}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} e_{11}^{\ (pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} w_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p+1-\mu\, q-\nu r-\eta)}^{k'}\ ; \\ e_{22}^{\ (pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} w_{k'}^{(\mu\, \nu+1\eta)} b_{(p-\mu\ \, q+1-\nu\, r-\eta)}^{k'}\ ; \\ e_{33}^{\ (pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} w_{k'}^{(\mu\, \nu\, \eta+1)} b_{(p-\mu\ \, q-\nu\, r+1-\eta)}^{k'}\ ; \\ e_{12}^{\ (pqr)} &= \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\eta}^{pqr}\left(w_{k'}^{(\mu\, \nu+1\eta)} b_{(p+1-\mu\, q-\nu\, r-\eta)}^{k'} + w_{k'}^{(\mu+1\nu\, \eta)} b_{(p-\mu\, q+1-\nu\, r-\eta)}^{k'}\right); \end{aligned} \tag{11}$$

$$e_{13}{}^{(pqr)} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\eta}^{pqr}\left(w_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p+1-\mu\, q-\nu\, r-\eta)}^{k'} + w_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu\, q-\nu\, r+1-\eta)}^{k'}\right);$$

$$e_{23}{}^{(pqr)} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\eta}^{pqr}\left(w_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu\, q-+1\nu\, r-\eta)}^{k'} + w_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu\, q-\nu\, r+1-\eta)}^{k'}\right);$$

где $$b_{(\mu\nu\eta)}^{k'} = \left.\frac{\partial^{(\mu+\nu+\eta)} z^{k'}}{(\partial x)^{\mu}(\partial y)^{\nu}(\partial z)^{\eta}}\right|_{x=0,y=0,z=0}. \qquad (12)$$

В разложении компонент деформаций наряду с коэффициентами разложения деформаций присутствуют коэффициенты разложения жёстких поворотов. Это обстоятельство обуславливает причину замедленной сходимости МКЭ. Чтобы её устранить отбросим эти члены ряда. После преобразования для данного конечного элемента, учитывая формулы (9)-(12), тензоры деформации будут иметь следующий вид:

$$\varepsilon_{11} = e_{11}^{000} + e_{11}^{001}\psi^{001} + e_{11}^{010}\psi^{010} + e_{11}^{011}\psi^{011} = w_{k'}^{100} b_{100}^{k'} + (w_{k'}^{100} b_{101}^{k'} + w_{k'}^{101} b_{100}^{k'})z + (w_{k'}^{100} b_{110}^{k'} + w_{k'}^{110} b_{100}^{k'})y +$$
$$+ (w_{k'}^{100} b_{111}^{k'} + w_{k'}^{110} b_{101}^{k'} + w_{k'}^{101} b_{110}^{k'} + w_{k'}^{111} b_{100}^{k'})yz;$$

$$\varepsilon_{22} = e_{22}^{000} + e_{22}^{001}\psi^{001} + e_{22}^{100}\psi^{100} + e_{22}^{101}\psi^{101} = w_{k'}^{010} b_{010}^{k'} + (w_{k'}^{010} b_{011}^{k'} + w_{k'}^{011} b_{010}^{k'})z + (w_{k'}^{010} b_{110}^{k'} + w_{k'}^{110} b_{010}^{k'})x +$$
$$+ (w_{k'}^{010} b_{111}^{k'} + w_{k'}^{110} b_{011}^{k'} + w_{k'}^{011} b_{110}^{k'} + w_{k'}^{111} b_{010}^{k'})xz;$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33}^{000} + e_{33}^{010}\psi^{010} + e_{33}^{100}\psi^{100} + e_{22}^{110}\psi^{110} = w_{k'}^{001} b_{001}^{k'} + (w_{k'}^{001} b_{011}^{k'} + w_{k'}^{011} b_{001}^{k'})y + (w_{k'}^{001} b_{101}^{k'} + w_{k'}^{101} b_{001}^{k'})x +$$
$$+ (w_{k'}^{001} b_{111}^{k'} + w_{k'}^{101} b_{011}^{k'} + w_{k'}^{011} b_{101}^{k'} + w_{k'}^{111} b_{001}^{k'})xy;$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12}^{000} + e_{12}^{001}\psi^{001} = \frac{1}{2}\left(\left(w_{k'}^{010} b_{100}^{k'} + w_{k'}^{100} b_{010}^{k'}\right) + \left(w_{k'}^{010} b_{101}^{k'} + w_{k'}^{100} b_{011}^{k'} + w_{k'}^{011} b_{100}^{k'} + w_{k'}^{101} b_{010}^{k'}\right)z\right);$$

$$\varepsilon_{13} = e_{13}^{000} + e_{13}^{010}\psi^{010} = \frac{1}{2}\left(\left(w_{k'}^{001} b_{100}^{k'} + w_{k'}^{100} b_{001}^{k'}\right) + \left(w_{k'}^{001} b_{110}^{k'} + w_{k'}^{100} b_{011}^{k'} + w_{k'}^{011} b_{100}^{k'} + w_{k'}^{110} b_{001}^{k'}\right)y\right);$$

$$\varepsilon_{23} = e_{23}^{000} + e_{23}^{100}\psi^{100} = \frac{1}{2}\left(\left(w_{k'}^{001} b_{010}^{k'} + w_{k'}^{100} b_{001}^{k'}\right) + \left(w_{k'}^{001} b_{110}^{k'} + w_{k'}^{010} b_{101}^{k'} + w_{k'}^{101} b_{010}^{k'} + w_{k'}^{110} b_{001}^{k'}\right)x\right). \qquad (13)$$

Для нахождения потенциальной энергии системы воспользуемся формулой (1). Первоначально преобразуем её к виду:

$$\Pi = \frac{1}{2}\mu\iiint_V (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \frac{\varepsilon_{12}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{13}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{23}^2}{2})dV + \frac{1}{4}\lambda\iiint_V (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 dV. \qquad (14)$$

Для кубического КЭ, который имеет единичные метрики измерения, представленного в естественной системе координат, можно определить коэффициенты $b_{\mu\nu\eta}^{k'}$. Так,

$$b_{100}^{k'} = b_{010}^{k'} = b_{001}^{k'} = \frac{1}{2}, \text{ а } b_{110}^{k'} = b_{101}^{k'} = b_{011}^{k'} = b_{111}^{k'} = 0. \qquad (15)$$

После подстановки и соответствующих преобразований получим формулу для нахождения потенциальной энергии системы, выраженную только через узловые перемещения и переменные x,y,z:

$$\Pi = \frac{1}{8}\mu\iiint_V (a + a_x + a_y + a_z + a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} + a_{x^2y} + a_{x^2z} + a_{y^2x} + a_{y^2z} + a_{z^2x} + a_{z^2y} +$$
$$+ a_{x^2y^2} + a_{x^2z^2} + a_{y^2z^2})dV + \frac{1}{4}\lambda\iiint_V (b + b_x + b_y + b_z + b_{xy} + b_{xz} + b_{yz})^2 dV,$$

где $a = 4(w_{k'}^{100})^2 + 4(w_{k'}^{010})^2 + 4(w_{k'}^{001})^2 + 2w_{k'}^{100}w_{k'}^{010} + 2w_{k'}^{100}w_{k'}^{001} + 2w_{k'}^{010}w_{k'}^{001}$;

$$a_x = (6w_{k'}^{001}w_{k'}^{101} + 2w_{k'}^{001}w_{k'}^{110} + 2w_{k'}^{010}w_{k'}^{101} + 6w_{k'}^{010}w_{k'}^{110})x;$$

$$a_y = (6w_{k'}^{001}w_{k'}^{011} + 2w_{k'}^{001}w_{k'}^{110} + 2w_{k'}^{100}w_{k'}^{011} + 6w_{k'}^{100}w_{k'}^{110})y;$$
$$a_z = (6w_{k'}^{010}w_{k'}^{011} + 2w_{k'}^{010}w_{k'}^{101} + 2w_{k'}^{100}w_{k'}^{011} + 6w_{k'}^{100}w_{k'}^{101})z;$$
$$a_{xy} = (4w_{k'}^{001}w_{k'}^{111} + 4w_{k'}^{011}w_{k'}^{101})xy\,, a_{xz} = (4w_{k'}^{010}w_{k'}^{111} + 4w_{k'}^{011}w_{k'}^{110})xz\,,$$
$$a_{yz} = (4w_{k'}^{100}w_{k'}^{111} + 4w_{k'}^{101}w_{k'}^{110})yz\,, a_{x^2} = (2w_{k'}^{101}w_{k'}^{110} + 3(w_{k'}^{110})^2 + 3(w_{k'}^{101})^2)x^2\,,$$
$$a_{y^2} = (2w_{k'}^{011}w_{k'}^{110} + 3(w_{k'}^{011})^2 + 3(w_{k'}^{110})^2)y^2\,, a_{z^2} = (2w_{k'}^{011}w_{k'}^{101} + 3(w_{k'}^{011})^2 + 3(w_{k'}^{101})^2)z^2\,,$$
$$a_{x^2y} = 4w_{k'}^{101}w_{k'}^{111}x^2y\,, a_{x^2z} = 4w_{k'}^{110}w_{k'}^{111}x^2z\,, a_{y^2x} = 4w_{k'}^{011}w_{k'}^{111}y^2x\,, a_{y^2z} = 4w_{k'}^{110}w_{k'}^{111}y^2z\,,$$
$$a_{z^2x} = 4w_{k'}^{011}w_{k'}^{111}z^2x\,, a_{z^2y} = 4w_{k'}^{101}w_{k'}^{111}z^2y\,, a_{x^2y^2} = (2w_{k'}^{111})^2x^2y^2\,,$$
$$a_{x^2z^2} = (2w_{k'}^{111})^2x^2z^2\,, a_{y^2z^2} = (2w_{k'}^{111})^2y^2z^2;$$
$$b = w_{k'}^{100} + w_{k'}^{010} + w_{k'}^{001}, b_x = (w_{k'}^{100} + w_{k'}^{101})x\,, b_y = (w_{k'}^{110} + w_{k'}^{011})y\,, b_z = (w_{k'}^{101} + w_{k'}^{011})z\,,$$
$$b_{xy} = w_{k'}^{111}xy\,, b_{xz} = w_{k'}^{111}xz\,, b_{yz} = w_{k'}^{111}yz\,. \qquad (16)$$

Вывод. Классические методы конечных элементов требуют, чтобы поле перемещения точек внутри КЭ апроксимировалось полиномиальными функциями [1,2,4,6]. Такие варианты МКЭ обладает медленной сходимостью в силу того, что эти функции, аппроксимирующие поля перемещений, включают слагаемые, описывающие жёсткие смещения КЭ и не учитывались «эффекты ложного сдвига». Эти недостатки можно устранить используя метод моментных схем.

Таким образом, непосредственно из вариационных принципов можно с учётом моментной схемы выводить необходимые разрешающие соотношения для разных конструкций с использованием различных теорий.

ЛИТЕРАТУРА**:**

1. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров/ В.В. Киричевский. – К: Наукова думка, 2002. – С. 55 – 92.
2. Киричевский В.В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров/В.В. Киричевский, А.С. Сахаров.–К: Будівельник, 1992. – С. 12–57.
3. Лаврик В.В. Автоматизация анализа напряжённо-деформированного состояния конструкций из эластомеров/В.В. Лаврик// Весник ХНТУ.–2007.–№2(28).– С.168–172.
4. Розин Л.А. Вариационные формулировки задач для упругих систем/Л.А. Розин.– Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 223 с.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов/Л.Сегерлинд .–М:Мир, 1979. – С. 253 – 257.
6. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация/[Толок В. А. и другие]. – К.: Наук. думка, 2003. – 316 с.
7. Тимошенко С.П. Курс теории упругости/ С.П.Тимошенко. – К.: Наукова думка, 1972. – С. 79 – 83.

Лаврик Владимир Владимирович, старший преподаватель Бердянского педагогического университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование и вычислительные методы.

УДК 519.7: 621.314.2

Ю.О. Лебеденко, Г.В. Рудакова

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ РЕЖИМІВ РОБОТИ АВТОНОМНИХ ЕНЕРГОСИСТЕМ ІЗ МАТРИЧНИМИ ПЕРЕТВОРЮВАЧАМИ

Постановка проблеми. В останні роки для забезпечення гарантованого живлення споживачів в умовах енергетичної нестабільності набувають значного поширення автономні енергетичні системи (АЕС). Експлуатація АЕС характеризується неусталеними режимами роботи, які можуть складати 80-95% всього часу напрацювання автономної електростанції [1], тому до сучасних електроустановок такого типу висуваються підвищені вимоги щодо забезпечення стабільної номінальної частоти обертання, мінімальної величини “провалів” обертів при накиді навантаження і мінімальної тривалості перехідного процесу. Одним з шляхів вирішення проблеми стабілізації параметрів АЕС в динамічних режимах роботи є використання систем перетворення електричної енергії, побудованих на новітній елементній базі із використанням сучасних топологій [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одним з найбільш перспективних топологій силових перетворювачів є матричні структури [3], які характеризуються високим коефіцієнтом корисної дії (ККД) через одноступеневе перетворення енергії, простотою силової частини, а також високим коефіцієнтом потужності та надійністю через відсутність реактивних елементів.

Ефективність роботи матричних перетворювачів визначається, в першу чергу, ефективністю процесів керування силовими ключами. До вимог, що висуваються до таких систем перетворення, є висока якість вихідних напруг та низький рівень спотворень вхідних струмів. Процеси у вхідних та вихідних колах матричного перетворювача зручно аналізувати за допомогою системи веторно-матричних рівнянь у просторі станів [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}(t)\cdot\mathbf{U}_{BX}(t), \\ \mathbf{I}_{BX}(t) = \mathbf{H}(t)^T\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{X}(t) \end{cases} \quad (1)$$

де $\mathbf{H}(t)$ - комутаційна матриця, елементи якої визначають стан силових ключів матричного комутатора (МК) [5]; $\mathbf{U}_{BX}(t)$, $\mathbf{I}_{BX}(t)$- вектори вхідних напруг та струмів відповідно, $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ - матриці рівнянь стану навантаження; $\mathbf{X}(t)$ - вектор стану навантаження.

Висока якість перетворених напруг $\mathbf{U}_{BИX}(t) = \mathbf{H}(t)\cdot\mathbf{U}_{BX}(t)$ та вхідних струмів $\mathbf{I}_{BX}(t)$ може бути забезпечена завдяки використанню векторних методів керування, що засновані на аналізі та керуванні положенням фазових векторів у просторі. Такий підхід забезпечує високу ефективність перетворення лише за умов симетрії навантаження та напруг живлення, що ускладнює його використання в системах перетворення АЕС. Залежність параметрів силових кіл перетворювача від характеру навантаження ускладнює розв’язання задачі їх стабілізації та потребує розробки нових методів керування. Якщо алгоритм роботи та зовнішні впливи на навантаження є недетермінованими у часі та в просторі, через що виникає дефіцит інформації про елементи вектору стану системи, найбільш перспективною є техніка нечіткої логіки. В роботі [6] було запропоновано модель нечіткого виводу для формування комутаційних функцій керування силовими ключами матричного перетворювача, структуру матричного перетворювача як об’єкта керування було представлено в [4].

Метою роботи є аналіз процесів у силових колах матричного перетворювача, що входить до складу АЕС, в динамічних режимах роботи з використанням засобів комп’ютерного моделювання та дослідження ефективності систем керування МК з нечітким регулятором.

Основний матеріал. Під динамічним режимом роботи АЕС розуміють режим, що виникає при зміні її параметрів або перехід від одного сталого режиму до іншого. У таких режимах системи розглядають перехідні процеси, які пов'язані зі зміною параметрів її елементів. Наприклад, режим короткого замикання в АЕС виникає при різкому зменшенні опору кола, на яке працюють генератори, що приводить до різкої зміни струму й напруги в АЕС. Несиметрія навантаження викликає спотворення форми напруг і струмів та є одною з проблем, що найчастіше виникають при функціонуванні складних ЕС [6]. При наявності однофазних споживачів припускається нерівномірність розподілу навантаження по фазах у межах 15% [7]. Однак, подібна асиметрія здатна привести до відхилень напруг, що може викликати порушення в роботі устаткування, ушкодження апаратури та інші небажані ефекти. До ефектів миттєвого впливу у трифазних мережах відносяться: спотворення форми живлячої напруги; спадання напруги в розподільній мережі; ефект гармонік, кратних трьом; резонансні явища на частотах вищих гармонік; наведення в устаткуванні інших систем і керуючих мережах; підвищений акустичний шум в електромагнітному устаткуванні; вібрацію в електромашинних системах. Проблеми тривалого впливу - це нагрівання й додаткові втрати в трансформаторах й електричних машинах; нагрівання конденсаторів і кабелів розподільної мережі.

Основою для побудови схеми моделювання процесу перетворення електричної енергії в АЕС складають структури систем перетворення, представлені в [4]. Загальну схему моделювання процесу перетворення електричної енергії в редакторі структурних схем програмного комплексу МВТУ 3.5 наведено на рис. 1.

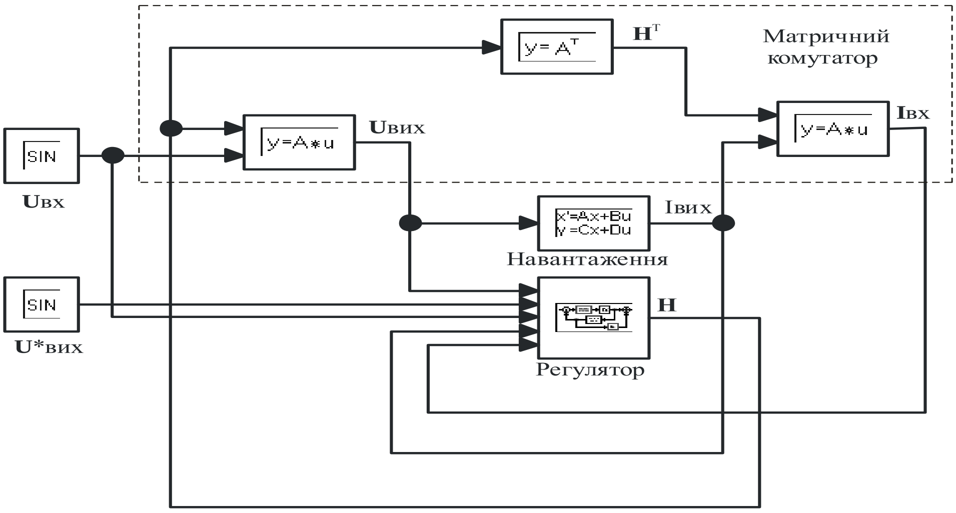


Рис. 1. Схема моделювання процесу перетворення електричної енергії

До складу загальної моделі системи перетворення електричної енергії в АЕС входять:

– Модель трифазного джерела електричної енергії ($\mathbf{U}_{BX}$), підключеного до входу перетворювача. Напруги джерела формуються у вигляді вектора, компоненти якого представляють собою синусоїди, зсунуті відносно одна одної на фазовий кут $2\pi/3$, з амплітудами $U_{ВХ\,М}$ та частотами $f_{ВХ}$.

– Модель трифазного джерела зразкової напруги ($\mathbf{U}^*_{ВИХ}$) з параметрами $U^*_{ВИХ\,М}$ та $f_{ВИХ}$.

– Модель МК, що представлена блоками матричного множення та транспонування, яка дозволяє формувати вектори вихідних напруг $\mathbf{U}_{ВИХ}$ та вхідних струмів $\mathbf{I}_{ВХ}$ згідно (1).

– Модель навантаження представлена рівняннями у просторі станів, реакція якого на перетворену вихідну напругу визначає вектор вихідних струмів $\mathbf{I}_{ВИХ}$.

– Модель нечіткого регулятора, наведена на рис. 1 у вигляді субмоделі, який на основі аналізу зразкової напруги завдання ($\mathbf{U}^*_{ВХ}$), вхідних і вихідних напруг ($\mathbf{U}_{ВХ}$, $\mathbf{U}_{ВИХ}$) та струмів ($\mathbf{I}_{ВХ}$, $\mathbf{I}_{ВИХ}$) формує перемикальну матрицю **Н**, що надходить на МК перетворювача. Метод керування передбачає виконання обмеження за інтегральною помилкою перетвореної напруги, від граничного значення якої ε залежить якість перетворення.

Наведена комп'ютерна модель завдяки можливості зміни параметрів навантаження дозволяє проводити аналіз симетричних, несиметричних і аварійних режимів роботи АЕС.

Для дослідження впливу несиметричного динамічного навантаження на роботу АЕС з матричним перетворювачем було здійснено моделювання накиду 100% навантаження за однією з фаз в момент часу $t = 0.5$ с. Отримані в результаті моделювання осцилограми нормованих вихідних та вхідних струмів системи перетворення електричної енергії наведено на рис. 2.

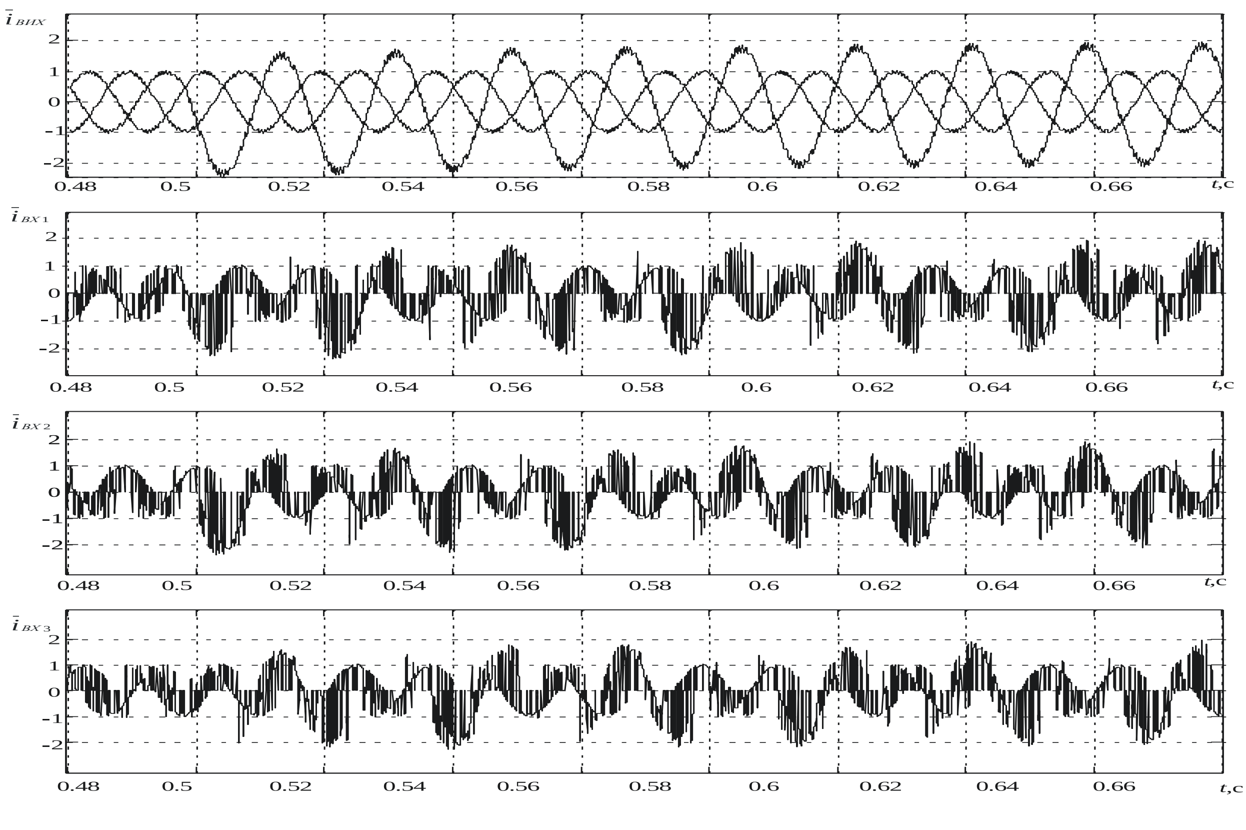
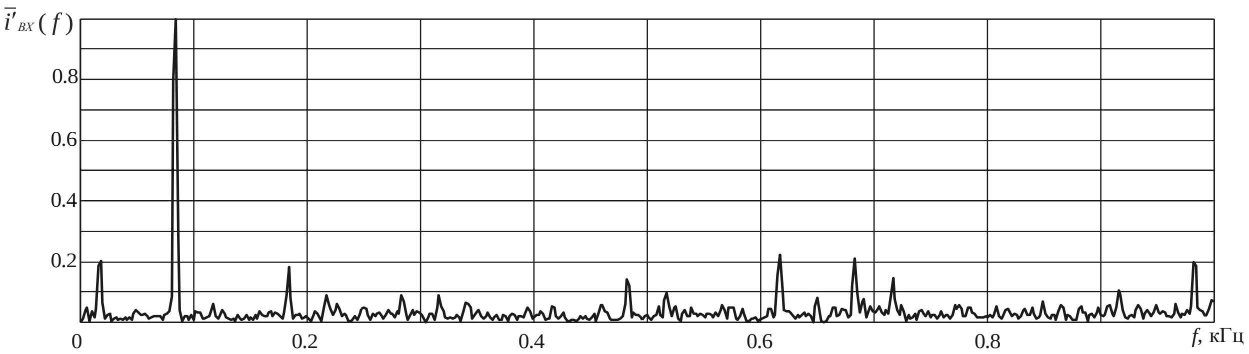
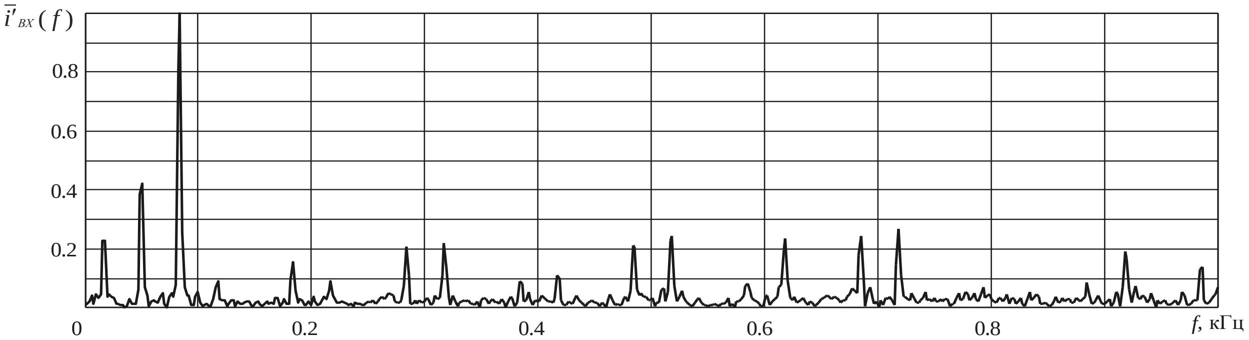


Рис. 2. Результати моделювання накиду навантаження за однією фазою

В момент зміни характеристик споживачів за однією з фаз виникає перехідний процес, проте зберігається симетрія вхідних струмів. Для аналізу впливу накиду навантаження за однією з фаз на рис. 3 представлено спектри вхідного струму в усталених режимах при симетричному (до $t = 0.5$ с) та асиметричному (після $t = 0.5$ с) режимах функціонування системи перетворення. Погіршення якості вхідного струму відбувається за рахунок збільшення амплітуд високочастотних складових та другої гармоніки комутаційної функції з частотою $2 f_s^-$.



а)



б)

Рис. 3. Спектри вхідного струму до (а) та після (б) накиду навантаження за однією фазою

При накиді симетричного навантаження так саме, як і у випадку накиду навантаження за однією з фаз, виникають перехідні процеси, що супроводжуються додатковими спотвореннями форми кривої вхідного струму, які можуть привести до виникнення іонізаційних процесів у ізоляції обмоток джерела (синхрогенератора), і, як наслідок, до зменшення його строку служби. Проте, на відміну від випадку несиметричного навантаження (рис. 2), ці спотворення не зберігаються в усталеному режимі.

Результати моделювання системи перетворення електричної енергії при зміні параметрів джерела живлення довели, що зміна частоти та амплітуди напруги живильної мережі майже не впливає на параметри і форму струму навантаження. Амплітуда вхідного струму залишається незмінною (через те, що вона залежить від струму навантаження), частота його огинаючої на всьому інтервалі часу відповідає частоті напруги живлення f_{BX}.

При моделюванні аварійних режимів роботи системи перетворення електричної енергії (обрив однієї з живильних фаз, коротке замикання в колі навантаження) було підтверджено працездатність адаптивної системи керування МК з нечітким регулятором.

Виводи. При моделюванні динамічних режимів роботи матричного перетворювача, що працює в складі АЕС, було доведено високу ефективність нечітких методів керування: при зміні частоти та амплітуди напруги живильної мережі параметри і форма струму навантаження майже не змінюються, частота огинаючої вхідного струму на всьому інтервалі часу відповідає частоті напруги живлення f_{BX}; при накиді навантаження виникають додаткові спотворення, характерні при симетричному навантаженні на протязі перехідних процесів, а у випадку асиметрії – і в усталеному режимі, проте, симетрія вхідних струмів зберігається.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бертинов А. И. Перспективы развития автономных систем генерирования переменного тока стабильной частоты /А. И. Бертинов, С. Р. Мизюрин, В. В. Бочаров и др.//Электричество. – 1988.– № 10. – С 17 – 23.
2. Лебеденко Ю.О. Перспективи використання безпосередніх перетворювачів частоти для стабілізації параметрів автономних енергетичних установок / Ю.О. Лебеденко // Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту: міжнародна наукова конференція, Євпаторія, 19-23 травня 2008 р. : матеріали конф. – Херсон, 2008. – Т. 3 (Ч. 1). – С. 171–174.
3. Roy G. Asynchronous Operation of Cycloconverter with Improved Voltage Gain by Employing a Scalar Control Algorithm/ G. Roy, L. Duguay, S. Manias, G.E. April // Conf. Rec. IEEE IAS. – 1987. – P. 889 – 898.
4. Лебеденко Ю.О. Моделювання матричного пертворювача частоти як об'єкта керування / Ю.О. Лебеденко, Г.В. Рудакова, Р.К. Тимофеєв // Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту: Міжнародна наукова конференція, Євпаторія, 16-20 травня 2011 р. : матеріали конф. – Херсон: ХНТУ, 2011. – Т. 2. – С. 53–56.
5. Грабовецкий Г.В. Применение переключающих функций для анализа электромагнитных процессов в силовых цепях вентильных преобразователях частоты // Электричество. – 1973. – №6. – С. 42 – 46.
6. Лебеденко Ю.О. Модель нечіткого виводу для оптимального управління перетворювачем частоти в системах автономного живлення / Ю.О. Лебеденко, Г.В. Рудакова // Автоматика. Автоматизація. Електротехнічні комплекси та системи. – 2009. – № 2(24). – С. 162 – 167.
7. Чукреев Ю.Я.Основы электроснабжения: Учебное пособие по дисциплине «Электроснабжение» / Ю.Я. Чукреев. – Ухта: УГТУ, 2001. − 96 с.
8. Иванов Г.Н. Несимметричные режимы работы тиристорных преобразователей в электроприводах переменного тока / Г.Н. Иванов, В.Ф. Егоркин– М.: Энергоатомиздат, 1990. – 199 с.

ЛЕБЕДЕНКО Юрій Олександрович – старший викладач кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету

Наукові інтереси:

– системи перетворення параметрів електричної енергії в автономних енергетичних системах.

РУДАКОВА Ганна Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету

Наукові інтереси:

– оптимальне керування великими системами.

УДК 517.91: 532.2

М.П. Ленюк, О.М. Нікітіна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ПОРОДЖЕНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ОПЕРАТОРОМ ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ $[0, R_3]$ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Постановка проблеми та аналіз публікацій за темою дослідження. Одним із ефективних методів знаходження інтегрального зображення аналітичного розв'язку лінійних задач математичної фізики однорідних середовищ є метод відокремлених змінних та породжених ним метод інтегральних перетворень. Це дало змогу алгебраїзувати рівняння з частинними похідними. У випадку кусково-однорідних середовищ метод відокремлення змінних стає не ефективним. На зміну приходить метод гібридних інтегральних перетворень, започаткованих в роботі Я.С. Уфлянда [1] й розвинутий та математично обґрунтований в роботі [2].

Ціль статті. При моделюванні технологічних процесів за різними степеневими законами з'являється диференціальний оператор Ейлера. Ця стаття присвячена запровадженню інтегрального перетворення, породженого диференціальним оператором Ейлера на сегменті з двома точками спряження.

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) інтегральне перетворення, породжене на множині

$I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_1 < R_2 < R_3 < \infty\}$

диференціальним оператором Ейлера 2-го порядку

$$B^*_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{3} \theta(r - R_{i-1})\theta(R_i - r)B^*_{\alpha_i}, R_0 = 0, (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad . \tag{1}$$

Тут $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда; $B^*_{\alpha_i} = r^2 \, d^2\!\big/\!dr^2 + (2\alpha_i + 1)r^2 \, d\!\big/\!dr + \alpha_i^2$ - диференціальний оператор Ейлера 2-го порядку [3]; $2\alpha_i + 1 > 0$.

Означення. Областю визначення диференціального оператора $B^*_{(\alpha)}$ назвемо множину G функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями : 1) вектор-функція $f(r) = \{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)]; B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]; B^*_{\alpha_3}[g_3(r)]\}$ неперервна на множені I_2; 2) функції $g_j(r)$ задовільняють крайові умови

$$\lim_{r \to 0}[r^\gamma g_1(r)] = 0, (\alpha^3_{22} \, d\!\big/\!dr + \beta^3_{22}) g_3(r)\big|_{r=R_3} = 0\,; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовільняють умови спряження

$$\left[(\alpha^k_{j1} \, d\!\big/\!dr + \beta^k_{j1}) g_k(r) - (\alpha^k_{j2} \, d\!\big/\!dr + \beta^k_{j2}) g_{k+1}(r)\right]_{r=R_k} = 0, \, j, k = 1{,}2\,. \tag{3}$$

Диференціальний оператор $B^*_{(\alpha)}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r = 0$. Отже, його спектр дійсний та неперервний [2]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна функція

$$V_{(\alpha)}(r, \beta) = \sum_{i=1}^{3} \theta(r - R_{i-1})\theta(R_i - r)V_{(\alpha),i}(r, \beta), R_0 = 0\,. \tag{4}$$

При цьому функції $V_{(\alpha),j}(r, \beta)$ задовільняють відповідно диференціальні рівняння Ейлера

$$(B^*_{\alpha_j} + b_j^2)V_{(\alpha),j}(r, \beta) = 0, \, j = \overline{1,3}, b_j = (\beta^2 + k_j^2)^{1\!/\!2}, k_j^2 \ge 0\,, \tag{5}$$

крайові умови (2) та умови спряження (3).

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Ейлера $(B_{\alpha}^{*}+b^{2})v=0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha}\cos(b\ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha}\sin(b\ln r)$ [3].

Якщо покласти

$$V_{(\alpha),j}(r,\beta) = A_j r^{-\alpha_j}\cos(b_j \ln r) + B_j r^{-\alpha_j}\sin(b_j \ln r), \tag{6}$$

то умови спряження (3) й крайова умова в точці $r = R_3$ для визначення шести величин $A_j, B_j (j=\overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$\begin{aligned}
&Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)A_1 + Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)B_1 - Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)A_2 - Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)B_2 = 0,\ j=1,2,\\
&Y^{21}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2)A_2 + Y^{22}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2)B_2 - Y^{21}_{\alpha_3;j2}(b_3,R_2)A_3 - Y^{22}_{\alpha_3;j2}(b_3,R_2)B_3 = 0,\\
&Y^{31}_{\alpha_3;2}(b_3,R_3)A_3 + Y^{32}_{\alpha_3;22}(b_3,R_3)B_3 = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Система (7) сумісна. У результаті стандартного розв'язання системи (7), підстановки отриманих значень величин A_j, B_j у рівності (6) маємо функції:

$$\begin{aligned}
&V_{(\alpha);1}(r,\beta) = \omega_{(\alpha);2}(\beta) r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r) - \omega_{(\alpha);1}(\beta) r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r),\\
&V_{(\alpha);2}(r,\beta) = q_{\alpha_1}(\beta)\left[\delta_{\alpha_3;12}(b_3,R_2,R_3)\psi^2_{\alpha_2;21}(b_2,r) - \delta_{\alpha_3;22}(b_3,R_2,R_3)\psi^2_{\alpha_2;11}(b_2,r)\right],\\
&V_{(\alpha);3}(r,\beta) = q_{\alpha_1}(\beta)q_{\alpha_2}(\beta)\left[Y^{32}_{\alpha_3;22}(b_3,R_3)r^{-\alpha_3}\cos(b_3\ln r) - Y^{31}_{\alpha_3;22}(b_3,R_3)r^{-\alpha_3}\sin(b_3\ln r)\right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Спектральна функція $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ стає відомою.

У рівностях (8) беруть участь функції:

$$\Psi^2_{\alpha_2;j1}(b_2,r) = Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_2)r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r) - Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_2)r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r),\ j=1,2;$$

$$\omega_{(\alpha);j}(\beta) = b_{\alpha_2,\alpha_3;1}(\beta)Y^{1j}_{\alpha_1;21}(b_1,R_1) - b_{\alpha_2,\alpha_3;2}(\beta)Y^{1j}_{\alpha_1;11}(b_1,R_1),\ j=1,2;$$

$$b_{\alpha_2,\alpha_3;j}(\beta) = \delta_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1,R_2)\delta_{\alpha_3;12}(b_3,R_2,R_3) - \delta_{\alpha_2;j1}(b_2,R_1,R_2)\delta_{\alpha_3;22}(b_3,R_2,R_3);$$

$$\delta_{\alpha_2;jk} = Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha_2;k1}(b_2,R_2) - Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha_2;k1}(b_2,R_2);\ k=1,2;$$

$$\delta_{\alpha_3;j2} = Y^{21}_{\alpha_3;j2}(b_3,R_2)Y^{32}_{\alpha_3;22}(b_3,R_3) - Y^{22}_{\alpha_3;j2}(b_3,R_2)Y^{31}_{\alpha_3;22}(b_3,R_3).$$

Визначимо величини

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}, \sigma_3 = \frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_3+1}},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}$$

та спектральну щільність

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_1(\beta)]^{-1}\left(\left[\omega_{(\alpha);1}(\beta)\right]^2 + \left[\omega_{(\alpha);2}(\beta)\right]^2\right)^{-1}.$$

Наявність спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega_{(\alpha)}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H^{-1}_{(\alpha)}$ інтегральне перетворення, породжене на множені I_2 диференціальним оператором $B^{*}_{(\alpha)}$ [4]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{9}$$

$$H^{-1}_{(\alpha)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{g}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \tag{10}$$

Математичним обґрунтуванням правил (9),(10) є твердження:

Теорема (про інтегральне зображення). Якщо вектор-функція $f(r)=\left(\sum_{i=1}^{3}\theta(r-R_{i-1})\theta(R_i-r)r^{\alpha_i-1/2}\right)g(r)$ неперервна, абсолютно сумовна, й має обмежену варіацію на множині $(0,R_3)$, то для будь-якого $r\in I_2$ справджується інтегральне зображення

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha)}(r,\beta)\left(\int_0^{R_3}g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta. \quad (11)$$

Доведення здійснюються методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле). В основі доведення є невласний подвійний інтеграл

$J=\frac{2}{\pi}\int_0^{R_3}\int_0^\infty \psi(\lambda)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\psi(\beta)$, якщо $\lambda=\beta\in(0,\infty)$, і дорівнює нулю, якщо $\lambda=\beta\,\overline{\in}\,(0,\infty)$.

Визначимо величини та функції:

$d_1=\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}:c_{11}, d_2=\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}:c_{12}, \tilde{g}_1(\beta)=\int_0^{R_1}g_1(r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)r^{2\alpha_1-1}dr$,

$\tilde{g}_2(\beta)=\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr, \tilde{g}_3(\beta)=\int_{R_2}^{R_3}g_3(r)V_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}dr$,

$Z^k_{(\alpha);i2}(\beta)=\left(\alpha^k_{i2}\,d/dr+\beta^k_{i2}\right)V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}, i,k=1,2$.

Теорема (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)];B^*_{\alpha_2}[g_2(r)];B^*_{\alpha_3}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовільняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}[r^{2\alpha_1+1}\left(g_1'(r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)V'_{(\alpha);1}(r,\beta)\right)]=0,(\alpha^3_{22}\,d/dr+\beta^3_{22})g_3(r)\Big|_{r=R_3}=g_R, \quad (13)$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора $B^*_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}[B^*_{(\alpha)}[g(r)]]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i(\beta)+(\alpha^3_{22})^{-1}V_{(\alpha);3}(R_3,\beta)\sigma_3 R_3^{2\alpha_3+1}g_R+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z^k_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^k_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]. \quad (14)$$

Доведення проводиться за відомою логічною схемою [4].

Висновок. Формули (9),(10),(14) складають математичний апарат для розв'язування відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Уфлянд Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я.С. Уфлянд // Вопросы математической физики. – Л., 1976. – С. 93-106.
2. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Ч.1/ М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений/В.В. Степанов// – М.: Физматгиз, 1959. – 368 с.
4. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера-(Фур'є, Бесселя)/ М.П. Ленюк. – Львів, 2009. – 76 с. (Препринт/НАН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім.. Я.С.Підстричача;02.09). – Чернівці: Прут, 2009.–76 с.

ЛЕНЮК Михайло Павлович – д.ф.-м.н., професор кафедри “Інформаційні системи” Чернівецького факультету НТУ «ХПІ».

Наукові інтереси:

- математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.

НІКІНІНА Ольга Михайлівна – старший викладач Чернівецького факультету НТУ «ХПІ».

Наукові інтереси:

- математична фізика, математичний аналіз.

УДК 517.52/524

М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ-(КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)

Постановка проблеми. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу знаходяться, як правило, в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростішому випадку величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображуються поліпараметричними функціональними рядами, які можуть бути умовно збіжними навіть тоді, коли зображають аналітичні функції. Звідси виникає природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках.

Ціль статті. В даній роботі знайдено формули підсумовування поліпараметричної сім'ї функціональних рядів.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині $I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, Бесселя та (Конторовича - Лєбєдєва) для модифікованих функцій

$$(B_{\alpha_1}^* - q_1^2)u_1(r) = -g_1(r), r \in (R_0, R_1),$$
$$(B_{\nu,\alpha_2} - q_2^2)u_2(r) = -g_2(r), r \in (R_1, R_2), \tag{1}$$
$$(B_{\alpha_3} - q_3^2)u_3(r) = -g_3(r), r \in (R_2, \infty)$$

з крайовими умовами

$$\left.(\alpha_{11}^0 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^0)u_1(r)\right|_{r=R_0} = g_0, \ \lim_{r\to\infty}\left[r^\gamma u_3(r)\right] = 0 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[(\alpha_{j1}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j1}^k)u_k(r) - (\alpha_{j2}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j2}^k)u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k} = \omega_{jk}; j,k = 1,2. \tag{3}$$

В системі (1) беруть участь диференціальний оператор Ейлера $B_{\alpha_1}^*$ [1], диференціальний оператор Бесселя B_{ν,α_2} [2], диференціальний оператор (Конторовича - Лєбєдєва) B_{α_3} [3] :

$$B_{\alpha_1}^* = r^2 \tfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1)r \tfrac{d}{dr} + \alpha_1^2, B_{\nu,\alpha_2} = \tfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1)r^{-1} \tfrac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha_2^2)r^{-2},$$
$$B_{\alpha_3} = r^2 \tfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_3 + 1)r \tfrac{d}{dr} + \alpha_3^2 - \lambda^2 r^2; 2\alpha_j + 1 > 0, \nu \ge \alpha_2; \lambda \in (0, \infty).$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j > 0, \alpha_{11}^0 \le 0, \ \beta_{11}^0 \ge 0,$

$$\left|\alpha_{11}^0\right| + \beta_{11}^0 \ne 0; \alpha_{jm}^k \ge 0, \beta_{jm}^k \ge 0, c_{1k} \cdot c_{2k} > 0, c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha_1}^* - q_1^2\right)v = 0$ утворюють функції $r^{-\alpha_1 - q_1}$ та $r^{-\alpha + q_1}$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha_2} - q_2^2\right)v = 0$ утворюють функції

Бесселя $I_{\nu,\alpha_2}(q_2 r)$ та $K_{\nu,\alpha_2}(q_2 r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича – Лєбєдєва $(B_{\alpha_3} - q_3^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q_3,\alpha_3}(\lambda r)$ та $K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r)$ [3].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [1,4]:

$$u_1(r) = A_1 r^{-\alpha\ -q_1} + B_1 r^{-\alpha\ +q_1} + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho) \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho,$$

$$u_2(r) = A_2 I_{\nu,\alpha_2}(q_2 r) + B_2 K_{\nu,\alpha_2}(q_2 r) + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_2 + 1} d\rho, \tag{4}$$

$$u_3(r) = B_3 K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r) + \int_{R_2}^{\infty} E_3(r,\rho) g_3(\rho) \rho^{2\alpha_3 - 1} d\rho .$$

У рівностях (4) $E_j(r,\rho)$ - функції Коші [1,4]:

$$E_1(r,\rho) = -\frac{1}{2q_1 \Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_o, R_1)} \begin{cases} \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1, r)\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho), R_0 < r < \rho < R_1 \\ \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1, \rho)\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1, r), R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \tag{5}$$

$$E_2(r,\rho) = \frac{q_2^{2\alpha_2}}{\Delta_{\nu,\alpha_2;11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} \begin{cases} \Psi^{1*}_{\nu,\alpha_2;12}(q_2 R_1, q_2 r)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;11}(q_2 R_2, q_2\rho), R_1 < r < \rho < R_2 \\ \Psi^{1*}_{\nu,\alpha_2;12}(q_2 R_1, q_2 \rho)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;11}(q_2 R_2, q_2 r), R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \tag{6}$$

$$E_3(r,\rho) = -\frac{\lambda^{2\alpha_3}}{U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2)} \begin{cases} K_{q_3,\alpha_3}(\lambda\rho)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2, \lambda r), R_2 < r < \rho < \infty \\ K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2, \lambda \rho), R_2 < \rho < r < \infty \end{cases} . \tag{7}$$

Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (3) для визначення величин $A_j\,(j=1{,}2)$, $B_k\,(\overline{k=1{,}3})$ дають неоднорідну алгебраїчну систему із п'яти рівнянь:

$$Z^{01}_{\alpha_1;11}(q_1, R_0)A_1 + Z^{02}_{\alpha_1;11}(q_1, R_0)B_1 = g_0$$

$$Z^{11}_{\alpha;j1}(q_1, R_1)A_1 + Z^{12}_{\alpha;j1}(q_1, R_1)B_1 - U^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}(q_2 R_1)A_2 - U^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}(q_2 R_1)B_2 = \omega_{j1} + \delta_{j2}G_{12},$$

$$U^{21}_{\nu,\alpha_2;j1}(q_2 R_2)A_2 + U^{22}_{\nu,\alpha_2;j1}(q_2 R_2)B_2 - U^{22}_{q_3,\alpha_3;j2}(\lambda R_2)B_3 = \omega_{j2} + \delta_{j2}G_{23},\ j = 1{,}2 \tag{8}$$

В алгебраїчній системі (8) беруть участь функції

$$G_{12} = -\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \int_{R_2}^{R_1} \frac{\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_o, R_1)} g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho - \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;11}(q_2 R_2, q_2\rho)}{\Delta_{\nu,\alpha_2;11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho,$$

$$G_{23} = \frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_2;12}(q_2 R_1, q_2\rho)}{\Delta_{\nu,\alpha_2;11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho + \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}} \int_{R_2}^{\infty} \frac{K_{q_3,\alpha_3}(\lambda\rho)}{U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2)} g_3(\rho)\rho^{2\alpha_3-1}d\rho,$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12} = 0, \delta_{22} = 1)$.

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\nu,(\alpha)^*,j}(q) = \Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_o, R_1)\Delta_{\nu,\alpha_2;2j}(q_2 R_1, q_2 R_2) - \Delta_{\alpha_1;21}(q_1, R_o, R_1)\Delta_{\nu,\alpha_2;1j}(q_2 R_1, q_2 R_2),$$

$$B_{(\overline{\alpha});j}(q) = U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda R_2)\Delta_{\nu,\alpha_2;j1}(q_2 R_1, q_2 R_2) - U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2)\Delta_{\nu,\alpha_2;j2}(q_2 R_1, q_2 R_2),\ j = 1{,}2;$$

$$(\alpha)^* = (\alpha_1, \alpha_2), (\overline{\alpha}) = (\alpha_2, \alpha_3); (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$\theta_{\nu,(\alpha),1}(r,q) = \Delta_{\alpha_1;21}(q_1, R_o, R_1)\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_2;12}(q_2 R_1, q_2 r) - \Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_o, R_1)\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_2;22}(q_2 R_1, q_2 r)\ ,$$

$$\theta_{\nu,(\bar{\alpha}),2}(r,q)=U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;21}(q_2R_2,q_2r)-U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda R_2)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;11}(q_2R_2,q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі: для будьякого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (8)

$$\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)=A_{\nu,(\alpha)^*;1}(q)U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda R_2)-A_{\nu,(\alpha)^*;2}(q)U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2)=$$

$$=\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_o,R_1)B_{(\bar{\alpha}),2}(q)-\Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_o,R_1)B_{(\bar{\alpha}),1}(q)\neq 0\ . \qquad (9)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(9):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\left[B_{(\bar{\alpha}),2}(q)\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)-B_{(\bar{\alpha});1}(q)\Psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,r)\right], \quad (10)$$

$$W_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=-\frac{2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\bar{\alpha});2}(r,q), W_{\nu,(\alpha);13}(r,q)=-\frac{2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{12}}{q_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=-\frac{B_{(\bar{\alpha});2}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r), \mathcal{R}^1_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=\frac{B_{(\bar{\alpha}),1}(q)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),$$

$$\mathcal{R}^1_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=-\frac{c_{21}U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda R_2)}{q_2^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r), \mathcal{R}^1_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=\frac{c_{21}U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2)}{q_2^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r);$$

$$\mathcal{R}^2_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=\frac{\Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_o,R_1)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\bar{\alpha});2}(r,q); \mathcal{R}^2_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=-\frac{\Delta_{\alpha_1;11}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\bar{\alpha});2}(r,q), \quad (11)$$

$$\mathcal{R}^2_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=-\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\alpha)^*;1}(r,q), \mathcal{R}^2_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\alpha)^*;1}(r,q);$$

$$\mathcal{R}^3_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=\frac{c_{12}\Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_o,R_1)}{q_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r), \mathcal{R}^3_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=-\frac{c_{12}\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_o,R_1)}{q_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^3_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=\frac{A_{\nu,(\alpha)^*;2}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r), \mathcal{R}^3_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=-\frac{A_{\nu,(\alpha)^*;1}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r);$$

3) породжені неоднорідністю системи функції впливу:

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);11}(r,\rho,q)=-\frac{1}{2q_1\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)W_{\nu,(\alpha);11}(\rho,q), R_0<r<\rho<R_1\\ \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)W_{\nu,(\alpha);11}(r,q)R_0<\rho<r<R_1\end{cases},$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)\theta_{\nu,(\bar{\alpha});2}(\rho,q),,$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);13}=\frac{c_{21}}{q_2^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)K_{q_3,\alpha_3}(\lambda\rho),$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)\theta_{\nu,(\bar{\alpha});2}(r,q),$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{q_2^{2\alpha_2}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases}\theta_{\nu,(\alpha)^*;1}(r,q)\theta_{\nu,(\bar{\alpha});2}(\rho,q), R_1<r<\rho<R_2\\ \theta_{\nu,(\alpha)^*;1}(\rho,q)\theta_{\nu,(\bar{\alpha});2}(r,q), R_1<\rho<r<R_2\end{cases},$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\alpha)^*;1}(r,q)K_{q_3,\alpha_3}(\lambda\rho); \qquad (12)$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{12}}{q_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r),$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\alpha)^*;1}(\rho,q)K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r),$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{\lambda^{2\alpha_3}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases}K_{q_3,\alpha_3}(\lambda\rho)\Big[A_{\nu,(\alpha)^*;2}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2,\lambda r)-\\ K_{q_3,\alpha_3}(\lambda r)\Big[A_{\nu,(\alpha)^*;2}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda R_2,\lambda\rho)-\end{cases}$$

$$\begin{matrix}-A_{\nu,(\alpha)^*;1}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_3;22}(q_2R_2,q_2r)\Big],R_2<r<\rho<\infty\\ -A_{\nu,(\alpha)^*;1}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_3;22}(q_2R_2,q_2\rho)\Big],R_2<\rho<r<\infty\end{matrix}.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (8) й підстановки отриманих значень A_1,A_2,B_1,B_2,B_3 у формули (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r)=W_{\nu,(\alpha);1j}(r,q)g_0+\sum_{i,k=1}^{2}\mathcal{R}^{j}_{\nu,(\alpha);ik}(r,q)\omega_{ik}+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_3-1}d\rho,\ j=\overline{1,3}\quad .\ (13)$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,(\alpha)}=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B^*_{\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_{\nu,\alpha_2}+\theta(r-R_2)B_{\alpha_3}\quad .\ (14)$$

Оскільки ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений і на множині I_2^+ немає особливих точок, то його спектр дійсний та дискретний [5]. Йому відповідає дискретна спектральна (власна) функція

$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)+\theta(r-R_2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta),$

де β - спектральний параметр.

При цьому функції $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні задовільняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{gathered}(B^*_{\alpha_1}+b_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=0,r\in(R_0,R_1),\\ (B_{\nu,\alpha_2}+b_2^2)V_{\nu,(\alpha);2}=0,r\in(R_1,R_2),\\ (B_{\alpha_3}+b_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}=0,r\in(R_2,\infty),\end{gathered}\qquad(15)$$

з однорідними крайовими умовами (2) $(g_0=0)$ та однорідними умовами спряження (3) $(\omega_{jk}=0)$; $b_j^2=\beta^2+k_j^2,k_j^2\geq 0,\ j=\overline{1,3}$.

Якщо тепер покласти

$$\begin{gathered}V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=A_1r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)+B_1r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r),\\ V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=A_2J_{\nu,\alpha_2}(b_2r)+B_2N_{\nu,\alpha_2}(b_2r),\\ V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=B_3D_{\alpha_3}(\lambda r,b_3),\end{gathered}\qquad(16)$$

то для визначення A_j та B_k ($j=1,2;k=\overline{1,3}$) маємо однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)A_1+Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)B_1=0,$$

$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)A_1+Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)B_1-u^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)A_2-u^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)B_2=0,\ j=1,2;$$

$$u^{21}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_2)A_2+u^{22}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_2)B_2-X^{22}_{\alpha_3;j2}(\lambda R_2,b_3)=0. \qquad (17)$$

Система (17) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник рівний нулю [6]:

$$\delta_{\nu,(\alpha)}(\beta)\equiv -a_{\nu,(\alpha)^*;1}(\beta)X^{22}_{\alpha_3;22}(\lambda R_2,b_3)+a_{\nu,(\alpha)^*;2}(\beta)X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda R_2,b_3)=0\,. \qquad (18)$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$.

При $\beta=\beta_n$ $\left(b_j(\beta_n)\equiv b_{jn}\right)$ систему (17) розв'язуємо стандартним способом. У результаті підстановки обчислених A_j, B_k у формули (16) отримуємо функції:

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{b_2^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda R_2,b_{3n})\Big[Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_{1n},R_0)r^{-\alpha_1}\cos(b_{1n}\ln r)-$$
$$-Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_{1n},R_0)r^{-\alpha_1}\sin(b_{1n}\ln r)\Big],$$
$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)=X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda R_2,b_{3n})\Big[\delta_{\alpha_1;11}(b_{1n},R_0,R_1)\Psi^1_{\nu,\alpha_2;22}(b_{1n}R_1,b_{1n}r)-$$
$$-\delta_{\alpha_1;21}(b_{1n},R_0,R_1)\Psi^1_{\nu,\alpha_2;12}(b_{1n}R_1,b_{1n}r)\Big], \qquad (19)$$
$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)=a_{\nu,(\alpha)^*,1}(\beta_n)D_{\alpha_3}(\lambda r,b_{3n}).$$

Цим власна функція $V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)$ стає відомою.

Якщо $\sigma(r)$ - вагова функція, а $\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2$ - квадрат норми власної функції, то згідно з роботою [6] визначено пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ та обернене $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)]=\int_{R_0}^{\infty}g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\equiv\tilde g_n \qquad (20)$$

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\tilde g_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde g_n V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)(\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2)^{-1}\equiv g(r)\ . \qquad (21)$$

Єдиний розв'язок крайової задачі (1) – (3), побудований за відомою логічною схемою методом, запровадженого формулами (20), (21) інтегрального перетворення , визначають функції

$$u_j(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(-\alpha^0_{11})(\beta_n^2+q^2)\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}g_0+\sum_{k=1}^{2}d_k[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)}{\beta_n^2+q^2}\times$$
$$\times\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\|V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\|^2}\omega_{2k}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)}{\beta_n^2+q^2}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}\omega_{1k}]+$$
$$+\int_{R_0}^{R_1}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);1}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2})g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)}\times$$
$$\times\frac{V_{\nu,(\alpha);2}(\rho,\beta_n)}{\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2})g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}\sigma_2d\rho+\int_{R_2}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);3}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2})g_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_3-1}d\rho,$$
$$q^2=\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\},\ j=\overline{1,3}\ . \qquad (22)$$

Порівнюючи розв'язки (13) та (22), в силу єдиності, маємо формули підсумовування функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\,\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}=\sigma_k^{-1}H_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,q);\ j,k=\overline{1,3} \qquad , \qquad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+q^2)\,\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}=(\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1})^{-1}W_{\nu,(\alpha);1j}(r,q),\ j=\overline{1,3} \qquad , \qquad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{\nu,(\alpha);12}^{k}(\beta_n)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\,\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}=d_k^{-1}R_{\nu,(\alpha);2k}^{j}(r,q);k=1,2,\ \ j=\overline{1,3} \qquad , \qquad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{\nu,(\alpha);22}^{k}(\beta_n)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\,\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|^2}=-d_k^{-1}R_{\nu,(\alpha);1k}^{j}(r,q);k=1,2,\ \ j=\overline{1,3} \qquad . \qquad (26)$$

Висновок. Якщо вектор-функція $f(r)=\{B_{\alpha_1}^{*}[g_1(r)];B_{\nu,\alpha_2}[g_2(r)];B_{\alpha_3}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+, функції $g_j(r)$ задовільняють крайові умови (2) та умови спряження (3) і виконується умова (9) однозначної розв'язності крайової задачі (1) – (3), то мають місце формули (23) – (26) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (14).

Одержані формули (23)-(26) поповнюють довідкову математичну літературу в розділі підсумовування функціональних рядів від суперпозиції спеціальних функцій різного характеру математичної фізики.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Степанов В.В. Курс дифференциальних уравнений / В.В. Степанов.–М.: Физматгиз, 1959.-468 с.
2. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М.П. Ленюк. – К., 1983. – 62 с. – (Препринт / АНСССР. Ин-т математики ; 83.3).
3. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва / М.П. Ленюк, Г.І. Міхалевська. – Чернівці : Прут, 2002. – 280 с.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов.– М.: Наука, 1965. – 328 с.
5. Ленюк М.П. Гібридні нтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1./ М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик.– Тернопіль: Економ.думка, 2004.–368с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош.– М.: Наука, 1971.–432с.
7. Ленюк М.П. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики. Том 1. / М.П. Ленюк.– Чернівці: Прут, 2010.–352с.

ЛЕНЮК Михайло Павлович – д.ф-м.н., професор кафедри «Інформаційні системи» Чернівецікого факультету НТУ «ХПІ».

Наукові інтереси:

– математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.

ШИНКАРИК Микола Іванович – к.ф-м.н., доцент кафедри вищої математики Тернопільського національного економічного університету.

Наукові інтереси:

– математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.

УДК 519.6

О.І. Литвиненко

БАГАТОПАРАМЕТРИЧНІ БАЗИСИ ТРИКВАДРАТИЧНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА

Постановка проблеми. У теорії наближення функцій багатьох змінних дуже важливу роль відіграють скінченні елементи серендипової сім’ї [1]. Ці елементи можна побудувати на основі лагранжевих елементів, якщо вилучити внутрішні вузли інтерполяції. Таке вилучення не впливає на поведінку функції на границі між елементами і при цьому істотно скорочує обсяг обчислень та необхідну для збереження інформації пам’ять ЕОМ. Ці функції добре працюють при ізопараметричних перетвореннях квадрата в довільний чотирикутник [2]. Але усі стандартні базиси серендипових скінченних елементів (ССЕ), крім білінійного, мають недоліки: наявність від’ємних навантажень у повузловому розподілі рівномірної масової сили; кратні нулі у вузлах. Інтерполяційні властивості функцій форми в методі скінченних елементів (МСЕ) мають надзвичайно важливу роль, тому спроби їх удосконалення почалися ще в 70-х роках минулого століття.

Аналіз попередніх публікацій. У методі скінченних елементів добре відома *матрична процедура* побудови базису скінченного елемента [1,3,4,5]. Але у рамках традиційного матричного аналізу звільнитися від названих недоліків не вдається. *Процедура систематичного генерування базису*, що була запропонована Тейлором у 1972 році, привела до вже відомих стандартних моделей [4,5]. У 70-х роках минулого століття завдяки роботам Уачспресса з’явився метод *“product of planes”* для конструювання базисних функцій СЕ [6]. Але цей метод не застосовувався на серендипових скінченних елементах. Зауважимо, що процедура Уачспресса майже завжди приводить до дробово-раціональних базисів (ДРБ). На початку 80-х років був запропонований *ймовірнісно-геометричний метод* конструювання базисів скінченних елементів різноманітної конфігурації [7]. Переваги цього метода найбільш виразно проявилися саме на серендипових моделях. Для конструювання серендипових елементів використовувався *геометричний метод*[8]**.** Це модифікація методу *“product of planes”*, яка використовує техніку перемноження рівнянь площин і поверхонь другого порядку. Нові методи значно спрощують процедуру побудови базису (не виникає потреби розв’язувати СЛАР відповідного порядку на елементі) і дозволили отримати альтернативні моделі ССЕ. Наявність “позавузлових” параметрів у моделях, що отримані за допомогою нових методів, дає можливість позбавитись від недоліків, які притаманні стандартним моделям (наприклад, від від’ємних значень навантажень у вузлах).

Але побудова систем базисних функцій цими методами не дає змогу будувати базиси на ССЕ з наперед заданими характеристиками. Для розв’язання на ССЕ задачі інтерполювання з умовами [9], був запропонований *комбінований алгебро-геометричний метод* [10-14]**.** Реалізація цього методу відбувається в два етапи: із геометричних міркувань базисна функція *a priori* задається як добуток лінійних і нелінійних множників з невідомими коефіцієнтами, а потім у відповідності з гіпотезою типу Лагранжа і додатковою умовою (наприклад, інтегральним критерієм гармонічності для дискретного елемента) будується система рівнянь, яка розв’язується за допомогою матричних методів. У результаті реалізації цього методу отримані базиси ССЕ, які не тільки задовольняють звичайним властивостям, які притаманні базисним функціям СЕ, але і мають додаткову властивість (якість).

Мета роботи – побудувати всі можливі варіанти систем базисних функцій на ССЕ-20, кількість мономів у яких більша, ніж у стандартного інтерполяційного полінома (більше 20), для розв'язання задачі оптимізації інтерполяційних якостей базисів триквадратичного елемента.

Основа частина. Побудовані модифіковані базиси за допомогою нових методів (*ймовірнісного і геометричного*) на просторових скінченних елементах дають можливість висунути гіпотезу стосовно можливої кількості ступенів волі у інтерполяційних поліномах просторових СЕ (табл. 1).

Таблиця 1

Характеристики просторових скінченних елементів n-го порядку

	Лагранжеві СЕ	Серендипові СЕ
Кількість вузлів інтерполяції	$(n+1)^3$	$12n-4$
Порядок інтерполяційного полінома	$3n$	Від $(n+2)$ до $3n$
Кількість ступенів волі (мономів) інтерполяційного полінома	$(n+1)^3$	Від $12n-4$ до $(n+1)^3$

Існування подібної залежності для двовимірних елементів (ССЕ-8, ССЕ-12, ССЕ-16) доведено у [15]. Як видно із таблиці, для модифікованих базисів просторових ССЕ *n*-го порядку за рахунок появи "позавузлових" ступенів вільності кількість мономів у інтерполяційному поліномі може змінюватись від $12n-4$ (стандартний елемент серендипової сім'ї) до $(n+1)^3$ (елемент лагранжевої сім'ї). На просторових елементах вже вдалося в окремих випадках сконструювати базиси з більшою кількістю ступенів вільності, порівняно з стандартним базисом, на кожному з елементів: на триквадратичному [10,11], на трикубічному [12,13,14], на ССЕ з 44 вузлами [10,16].

Розглянемо триквадратичний скінченний елемент серендипової сім'ї (ССЕ-20) (рис. 1). У англомовній літературі цей елемент позначають $H20$ (hexahedron). За допомогою прямого геометричного моделювання і ймовірнісно-геометричного методу на ССЕ-20 побудовані модифіковані системи базисних функцій, які мають 26 мономів у інтерполяційному поліномі [10,11].

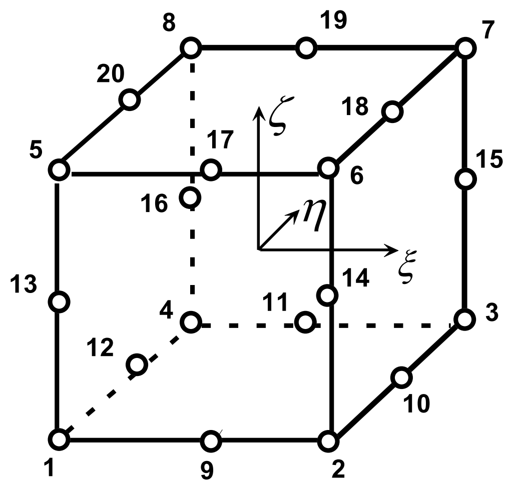


Рис. 1. ССЕ-20 $(|\xi| \le 1, |\eta| \le 1, |\zeta| \le 1)$

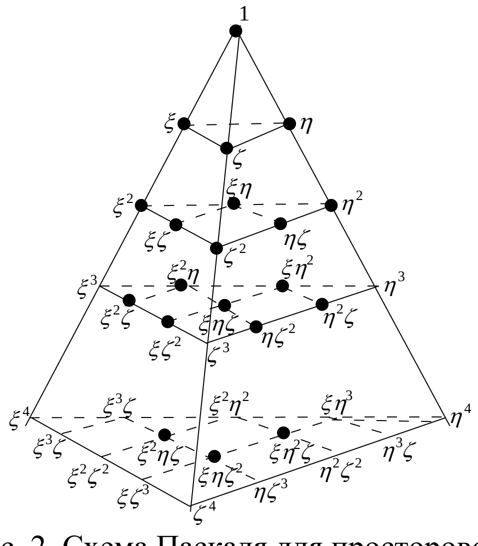


Рис. 2. Схема Паскаля для просторового ССЕ-20 (20 мономів)

Аналіз схеми Паскаля дозволив визначити, що без порушення геометричної ізотропії можна утворити комбінації з кількістю мономів від 21 до 27. До того ж, ці комбінації можуть бути різними. Їх можлива кількість вказана в табл. 2.

Таблиця 2

27 мономів	1 варіант
26 мономів	2 варіанти
25 мономів	1 варіант
24 мономи	5 варіантів
23 мономи	6 варіантів
22 мономи	3 варіанти
21 моном	5 варіантів

Зауважимо, що не всі варіанти інтерполяційних поліномів (табл. 2) є цікавими для методу скінченних елементів. З одного боку, зростання порядку інтерполяційного поліному покращує збіжність методу скінченних елементів. З іншого боку, варіанти поліномів, в яких доданки більш високого степеня з'являються за рахунок виключення обов'язкових мономів більш низького степеня, приводять до суттєвого зростання порядку похибки і погіршення збіжності МСЕ [17]. У даній роботі такі варіанти інтерполяційних поліномів не розглядаються.

Найбільш ефективним, при розв'язанні задачі побудови модифікованих базисів, виявився новий *комбінований алгебро-геометричний метод*. Цей метод побудови базису серендипового скінченного елемента ефективно об'єднує традиційний алгебраїчний метод та геометричне моделювання базису СЕ [10-15].

Побудова базису ССЕ-20 з 27-ма мономами у інтерполяційному поліномі

У *комбінованому алгебро-геометричному методі* з геометричних міркувань базисна функція для вузла 1 *a priori* записується з лівих частин рівнянь трьох граней куба ($1-\xi=0$, $1-\eta=0$, $1-\zeta=0$) та поверхні третього порядку з невідомими коефіцієнтами, яка повинна проходити через вузли 9,12,13:

$$N_1 = k_1(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\big(A\xi\eta\zeta + B\xi\eta + B\xi\zeta + B\eta\zeta + C(\xi+\eta+\zeta)+1\big). \quad (1)$$

Базисна функція для вузла 9 будується з лівих частин рівнянь чотирьох граней куба ($1\pm\xi=0$, $1-\eta=0$, $1-\zeta=0$) та поверхні другого порядку з невідомими коефіцієнтами:

$$N_9 = k_9\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(1-\zeta)(Q\eta\zeta + R\eta + R\zeta + 1). \quad (2)$$

Для пошуку коефіцієнтів k_1, k_9, A, B, C, Q, R побудуємо систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} N_1(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=0, \quad k=9,12,13; \\ N_9(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=1, \quad k=9; \\ \dfrac{1}{8}\iiint\limits_{\Omega} N_1 d\xi\, d\eta\, d\zeta = p; \\ \dfrac{1}{8}\iiint\limits_{\Omega} N_9 d\xi\, d\eta\, d\zeta = \dfrac{1-8p}{12}. \end{array}\right\} \quad (3)$$

де p − параметр, що дозволяє керувати серендиповою поверхнею на СЕ.

Розв'язавши систему (3), отримуємо базисні функції з параметром p :

$$N_1 = \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\times$$
$$\times\left(-9\xi\eta\zeta\,(1-24p)+(1-216p)(\xi\eta+\xi\zeta+\eta\zeta+\xi+\eta+\zeta)+216p-1\right), \qquad (4)$$

$$N_9 = -\frac{1}{32}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(1-\zeta)\left(-3\eta\zeta(1-24p)+(1+72p)(\eta+\zeta)+72p-3\right). \qquad (5)$$

Решта функцій утворюються із (4), (5) шляхом циклічного переставлення ξ,η,ζ. Інтерполяційний поліном цієї моделі має 27 мономів (рис. 3).

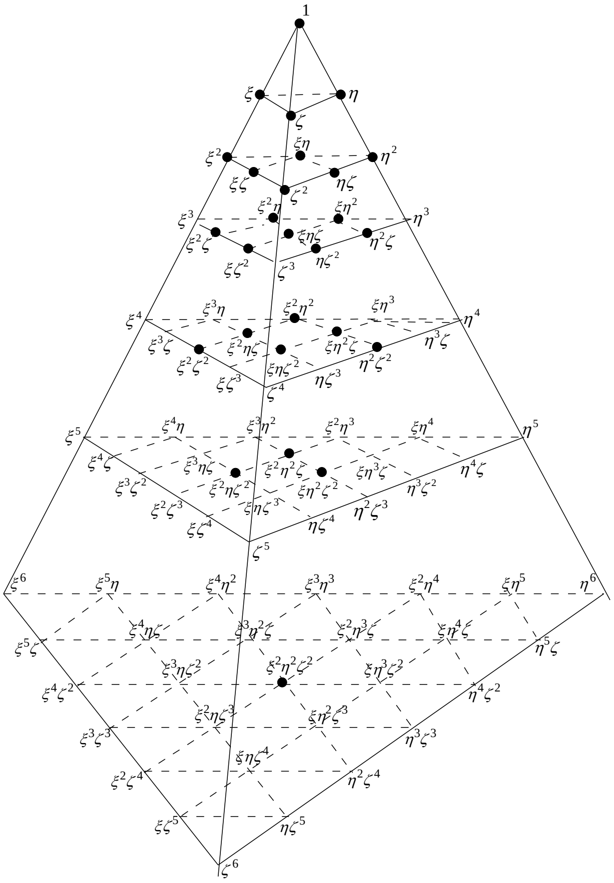


Рис. 3. Піраміда Паскаля для ССЕ-20 (27 мономів)

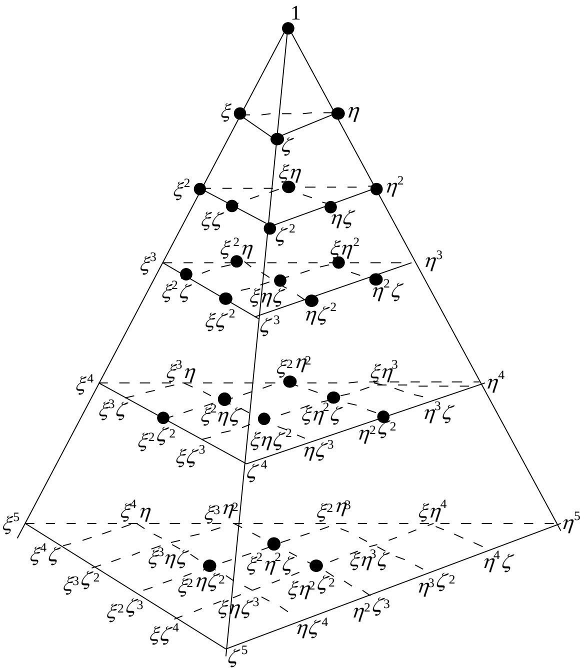


Рис. 4. Піраміда Паскаля для ССЕ-20 (26 мономів)

Побудова базису ССЕ-20 з 26-ма мономами у інтерполяційному поліномі

Базисна функція для вузла 1 будується з лівих частин рівнянь трьох граней куба ($1-\xi=0$, $1-\eta=0$, $1-\zeta=0$) та поверхні другого порядку з невідомими коефіцієнтами, яка проходить через вузли 9,12,13:

$$N_1 = k_1(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(A\xi\eta+B\xi\zeta+C\eta\zeta+D\xi+D\eta+D\zeta+1). \qquad (6)$$

Базисна функція для вузла 9 будується з лівих частин рівнянь чотирьох граней куба ($1\pm\xi=0$, $1-\eta=0$, $1-\zeta=0$) та площини, яка паралельна вісі $O\xi$:

$$N_9 = k_9\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(1-\zeta)(Q\eta+G\zeta+1). \qquad (7)$$

Для пошуку коефіцієнтів $k_1, k_9, A, B, C, D, Q, G$ побудуємо систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} N_1(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=0, \quad k=9,12,13; \\ N_9(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=1, \quad k=9; \\ \frac{1}{8}\iiint\limits_{\Omega} N_1 d\xi\, d\eta\, d\zeta = p; \\ \frac{1}{8}\iiint\limits_{\Omega} N_9 d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{1-8p}{12}. \end{array}\right\} \tag{8}$$

де p − параметр, що дозволяє керувати серендиповою поверхнею на СЕ.

Розв'язавши систему (8), отримуємо базисні функції з параметром p:

$$\begin{aligned} N_1 = {} & \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\times \\ & \times\left[(3+24p)(\xi\eta+\xi\zeta+\eta\zeta)+(2+48p)(\xi+\eta+\zeta)+(1+72p)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

$$N_9 = -\frac{1}{16}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(1-\zeta)\left[(3+G+24p(1-G))\eta+(24p-1)G\zeta+(24p-1)\right]. \tag{10}$$

Модифіковані базисні функції (9), (10) триквадратичного СЕ мають 26 ступенів вільності у інтерполяційному поліномі (рис. 4).

Побудова базису ССЕ-20 з 24-ма мономами у інтерполяційному поліномі

Базисна функція для вузла 1 будується з лівих частин рівнянь трьох граней куба, що є протилежними вузлу 1 та поверхні третього порядку, яка проходить через вузли 9,12,13:

$$N_1 = k_1(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\left(A(\xi\eta\zeta+\xi\eta+\xi\zeta+\eta\zeta)+B(\xi+\eta+\zeta)+1\right). \tag{11}$$

Базисна функція для вузла 9 будується з лівих частин рівнянь чотирьох граней куба, що є протилежними вузлу 9 та поверхні другого порядку з невідомими коефіцієнтами:

$$N_9 = k_9\left(1-x^2\right)(1-y)(1-z)(Q\eta\zeta+Q\eta+Q\zeta+1). \tag{12}$$

Для пошуку невідомих коефіцієнтів k_1, k_9, A, B, Q побудуємо систему рівнянь з урахуванням симетрії "кутової" базисної функції N_1, відносно діагональної площини 1-3-7-5 (рис. 1):

$$\left.\begin{array}{l} N_1(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=0, \quad k=9; \\ N_9(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=1, \quad k=9; \\ \frac{1}{8}\iiint\limits_{\Omega} N_1 d\xi\, d\eta\, d\zeta = p; \\ \frac{1}{8}\iiint\limits_{\Omega} N_9 d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{1-8p}{12}. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Розв'язавши систему (13), отримуємо базисні функції з параметром p:

$$\begin{aligned} N_1 = {} & \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\times \\ & \times\left(27(1+8p)(\xi\eta\zeta+\xi\eta+\xi\zeta+\eta\zeta)+(19+216p)(\xi+\eta+\zeta)+11+216p\right). \end{aligned} \tag{14}$$

$$N_9 = -\frac{1}{32}\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta\right)\left(1-\zeta\right)\left(9\left(1+8p\right)\left(\eta\zeta+\eta+\zeta\right)+1\right). \qquad (15)$$

Отримані функції відповідають всім властивостям базису просторового ССЕ [1,3] і мають 24 ступені вільності (рис. 5). Решта функцій утворюються із (14), (15) шляхом циклічного переставлення ξ,η,ζ .

Побудова базису ССЕ-20 з 22, 23, 25-ма мономами у інтерполяційному поліномі

Розв'язати задачу побудови базисів з 22,23,25 мономами у інтерполяційному поліномі на ССЕ-20 *комбінованим алгебро-геометричним методом* не вдалося. За допомогою *матричного методу* побудови базисних функцій були перевірені всі можливі комбінації мономів у цих інтерполяційних поліномах (табл. 2). Наприклад, у випадку 25 мономів на ССЕ-20 було обрано інтерполяційний поліном з 25 доданками, які зображені на рис. 6. Для пошуку невідомих коефіцієнтів будувалась система лінійних алгебраїчних рівнянь (25×25) з використанням, інтерполяційної гіпотези типу Лагранжа:

$$N_i\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)=\delta_{ik}, \qquad (16)$$

де i – номер полінома; k – номер вузла; δ_{ik} – символ Кронекера; $i,k=\overline{1,25}$.

Матриця системи виявилась сингулярною. Це має місце і для випадків з 22-ма та 23-ма мономами.

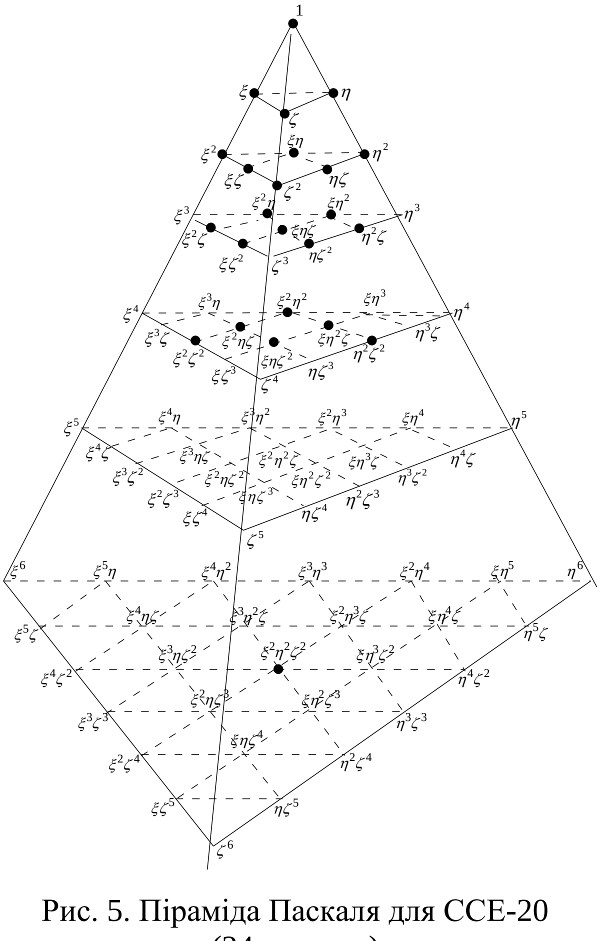


Рис. 5. Піраміда Паскаля для ССЕ-20 (24 мономи)

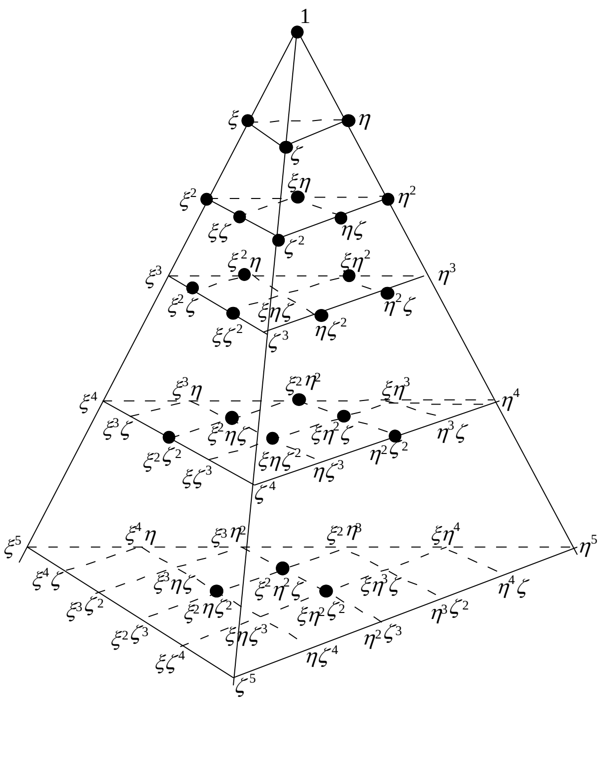


Рис. 6. Піраміда Паскаля для ССЕ-20 (25 мономів)

Побудова базису ССЕ-20 з 21 мономом у інтерполяційному поліномі

Цікавим виявився випадок з 21 мономом у інтерполяційному поліномі. Для побудови такого базису було використано дискретний елемент: куб ($2\times2\times2$) з 21 вузлом інтерполяції (8 вузлів у вершинах, 12 на ребрах і 1 вузол у центрі куба) (рис. 6). В англомовній літературі цей елемент позначають PR-21 [18].

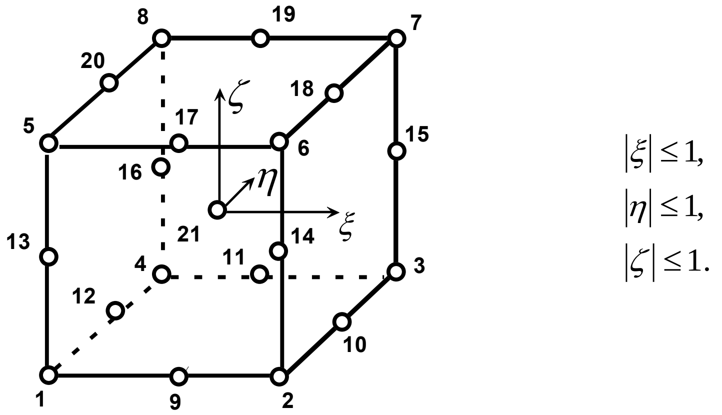


Рис. 7. PR-21

Цей дискретний елемент використовувався в розрахунках динаміки конструкцій [17]. Треба зауважити, що в попередніх публікаціях не наведено інтерполяційного базису PR-21. Для побудови базису PR-21 було використано *матричний підхід*, який починається з вибору 21-параметричного полінома з трьома аргументами [19]:

$$\begin{aligned}\varphi = {} & \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\zeta + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\xi\zeta + \alpha_7\eta\zeta + \alpha_8\xi^2 + \alpha_9\eta^2 + \alpha_{10}\zeta^2 + \\ & + \alpha_{11}\xi^2\eta + \alpha_{12}\xi\eta^2 + \alpha_{13}\eta^2\zeta + \alpha_{14}\eta\zeta^2 + \alpha_{15}\xi^2\zeta + \alpha_{16}\xi\zeta^2 + \alpha_{17}\xi\eta\zeta + \\ & + \alpha_{18}\xi^2\eta\zeta + \alpha_{19}\xi\eta^2\zeta + \alpha_{20}\xi\eta\zeta^2 + \alpha_{21}\xi^2\eta^2\zeta^2.\end{aligned} \tag{17}$$

Базис елемента складається із 21 полінома, які підпорядковані гіпотезі типу Лагранжа (16). Розв'язавши СЛАР (21×21), знайдемо невідомі параметри α_i і запишемо інтерполяційний поліном (4) у вигляді:

$$\varphi = [N_i]\{\Phi_i\}, \tag{18}$$

де $[N_i]$ - матриця-рядок базисних функцій СЕ ($i = \overline{1{,}21}$); $\{\Phi_i\}$ - вектор значень функції, що інтерполюється. Отримуємо базисні функції для PR-21:

$$\begin{aligned}N_1 = \frac{1}{8}(& \xi + \eta + \zeta - \xi^2\eta - \xi\eta^2 - \eta^2\zeta - \eta\zeta^2 - \xi^2\xi - \xi\zeta^2 - \xi\eta\zeta + \\ & + \xi^2\eta\zeta + \xi\eta^2\zeta + \xi\eta\zeta^2 + \xi^2\eta^2\zeta^2);\end{aligned} \tag{19}$$

$$N_9 = \frac{1}{4}(-\eta - \zeta + \eta\zeta - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2 + \xi^2\eta + \xi^2\zeta - \xi^2\eta\zeta - \frac{1}{2}\xi^2\eta^2\zeta^2); \tag{20}$$

$$N_{21} = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2\zeta^2. \tag{21}$$

При цьому має зберігатися ваговий баланс:

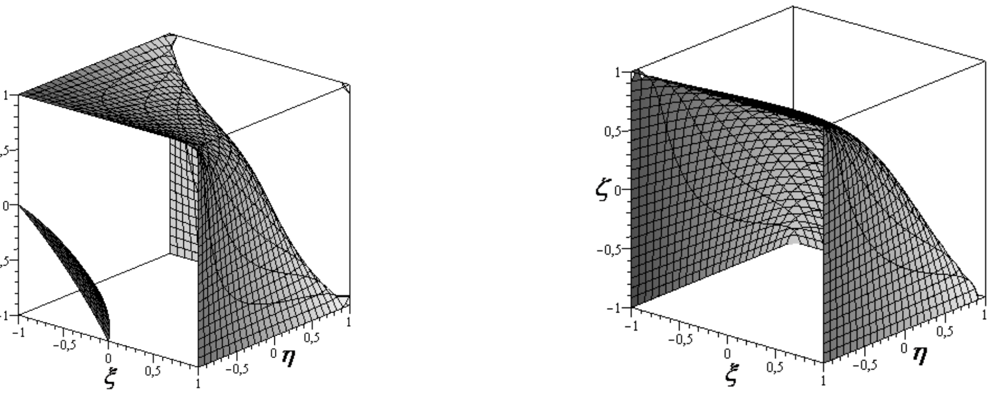
$$\sum_{i=1}^{21} N_i(\xi,\eta,\zeta) = 1. \tag{22}$$

Щоб отримати базисні функції ССЕ-20 скористаємось відомою у МСЕ *процедурою виключення внутрішнього вузла*, наприклад, за формулами [5]:

$$N_1^{(CCE\text{-}20)} = N_1^{(PR-21)} + w_1 \cdot N_{21}^{(PR-21)}; \tag{23}$$

$$N_9^{(CCE\text{-}20)} = N_9^{(PR-21)} + w_2 \cdot N_{21}^{(PR-21)}. \tag{24}$$

Використовуючи значення коефіцієнтів $w_1 = -\frac{1}{8}$, $w_2 = \frac{1}{6}$ отримаємо базисні функції для ССЕ-20, поверхні нульового рівня яких показано на рис. 8.



а) функції N_1 б) функції N_9

Рис. 8. Поверхні нульового рівня базисних функцій моделі ССЕ-20 з 21 мономом

Зауваження. Аналіз поверхонь нульового рівня (рис. 8) дозволяє знайти відповідь на питання: чому неможливо знайти розв'язок системи (типу (3)) з 21 мономом у інтерполяційному поліномі *комбінованим алгебро-геометричним методом*? Це відбувається тому, що серед поверхонь нульового рівня немає поверхонь, що асоціюються з гранями куба, що є протилежними вузлам 1 (рис. 8а) і 9 (рис. 8б), які *a priori* задаються у комбінованому алгебро-геометричному методі.

Висновки. За допомогою нових методів моделювання базисів серендипових скінченних елементів на ССЕ-20 отримано всі можливі модифіковані базиси, що мають кількість ступенів вільності більшу, ніж у стандартного полінома. Цікавим є тестування отриманих базисних функцій при розв'язанні практичних задач методом скінченних елементів.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
2. Ergatoudis I. Curved isoparametric "quadrilateral" elements for finite element analysis /I.Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct., 4, 1968. — P.31-42.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов /Л.Сегерлинд. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
4. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация /О. Зенкевич, К. Морган. — М.:Мир, 1986. — 318 с.
5. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р.Галлагер. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
6. Wachspress E.I. A rational finite element basis / E.I. Wachspress. — Academic Press. — New York, 1975. — 344 p.
7. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ /А.Н.Хомченко // Ивано-Франковс. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 5 с. — Деп. в ВИНИТИ 21.10.1982, №5264.

8. Литвиненко Е.И. Геометрическое моделирование трехмерных серендиповых КЭ /Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Прикл. геом. и инж. графика. — Мелитополь: ТГАТА. — 1997. — Вып. 4. — Т.1. — С. 40-42.
9. Попов Б.А. Приближение функций для технических приложений / Б.А. Попов, Г.С.Теслер. — Киев: Наукова думка, 1980. — 352 с.
10. Астионенко И.А. Базисы серендиповых конечных элементов с естественным спектром / И.А. Астионенко, П.И. Гучек, Е.И.Литвиненко, А.Н. Хомченко //Вестник Херс. нац. техн. ун-та. — Вып. 2 (31). — Херсон: ХНТУ, 2008. — С. 24-30.
11. Хомченко А.Н. Комбінований алгебро-геометричний метод моделювання базису просторового серендипового скінченного елемента з 20 вузлами / А.Н. Хомченко, О.І.Литвиненко, І.О.Астіоненко // Прикл. геометрія та інж. графіка. — Вип.85. — К.: КНУБА, 2010. — С.232-236.
12. Хомченко А.Н. Задачі корекції інтегральних середніх на серендипових скінченних елементах / А.Н. Хомченко, О.І. Литвиненко, І.О. Астіоненко //Прикладна геометрія та інженерна графіка / Праці Тавр. держ.агротехнол. ун-ту. — Вип. 4. — Т. 39. — Мелітополь: ТДАТУ, 2008. — С.24-29.
13. Хомченко А.Н. Обернена задача побудови базисів тривимірних серендипових скінченних елементів / А.Н. Хомченко, О.І. Литвиненко, І.О. Астіоненко // Прикл. геометрія та інж. графіка. /Праці Тавр. держ. агротехн. ун-ту — Вип. 4. —Т. 41. — Мелітополь: ТДАТУ, 2008. — С. 9 – 17.
14. Хомченко А.Н. Конструювання базисів серендипових просторових елементів /А.Н.Хомченко, О.І.Литвиненко, І.О.Астіоненко // Прикл. геом. та інженерна графіка / Праці Тавр. держ. агротехнол. ун-у. — Вип. 4. — Т. 43. — Мелітополь: ТДАТУ, 2009. — С.24-30.
15. Астионенко И.А. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И.А. Астионенко, Е.И.Литвиненко, А.Н. Хомченко // Научные ведом. Белгородского гос. ун-та. Математика. Физика. - №5 (60) . Выпуск 16. – Белгород: БелГУ,2009. – С. 15-31.
16. Хомченко А.Н. Просторові схеми випадкових блукань у мультиплексах /Н.В.Колеснікова О.С. Манойленко, А.Н. Хомченко // Вісник Запорізького держ. університету. — Вып.1. — Запоріжжя: ЗДУ, 2001. — С.61-64.
17. Образцов И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов — М.:Высшая школа, 1985. — 392 с.
18. Overmeire M.V. A Diagonal Mass Matrix with Full Convergence Rate for Finite Element Dynamical Problems / M.V. Overmeire //Trans. Can. Soc. Mech. Eng. — V.7, № 2. —1983. — С. 100-102.
19. Астіоненко І.О. Побудова поліноміального базису дискретного елемента PR-21 /І.О.Астіоненко, Н.О. Козуб, О.І.Литвиненко, А.Н. Хомченко // Системні технології. Регіон. міжвуз. зб. — Вип. 2(73). — Дніпропетровськ: НМА України, 2011. — С.3-8.

ЛИТВИНЕНКО Олена Іванівна – к.т.н., докторант кафедри прикладної математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

– методи відновлення функцій, формоутворення поверхонь у 3D.

УДК 535.41+654.91

А.С. Мазманишвили, О.А.Шовкопляс

СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ГАУССОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, ОБРАЗОВАННАЯ МОДАМИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ НИМИ

Постановка задачи. Излучение оптических лазеров часто моделируется узкополосным гауссовским процессом [1, 2]. При возбуждении таким излучением одномодового световода (СВ) с круговым поперечным сечением и осесимметричным распределением показателя преломления в нем распространяются в направлении оси две фундаментальные моды HE_{11}, электрические поля которых ортогонально поляризованы вдоль главных осей x и y ($HE_{11}^x - HE_{11}^y$ моды). Если при введении в одномодовый СВ начальное состояние излучения обладало свойствами линейно-поляризованного излучения, то это свойство не сохраняется уже на достаточно коротких расстояниях и, таким образом, излучение оптического лазера становится эллиптически поляризованным. Появление двух мод с ортогональными поляризациями обусловлено наличием нерегулярностей в волокне (тепловых, акустических и механических возмущений вдоль волокна, изгибов, технологических дефектов и прочее) [3]. При этом даже весьма малые возмущения значимо "связывают" моды, способствуя перекачке энергии из одной компоненты поляризации в другую. Очевидно, что статистическая связь между поляризационными модами определяется погонной плотностью перечисленных возмущений (нерегулярностей). При наблюдении оптического излучения на выходе одномодового СВ с помощью фотодетектора регистрируются отсчеты, т.е. электрические импульсы на временном интервале наблюдения [1, 4].

Представляет интерес нахождение статистики фотоотсчетов выходного излучения с учетом статистической связи поляризационными компонентами, обусловленными нерегулярностями вдоль СВ. Если располагать функцией корреляции между поляризационными компонентами излучения, связанной с плотностью нерегулярностей в волокне, то по статистике фотоотсчетов можно найти количественные характеристики таких нерегулярностей вдоль СВ и, следовательно, выработать требования к качеству выпускаемых оптических кабелей и установить допуски на их параметры при прокладке.

Математическая модель. Известное решение [4, 5] задачи о статистике фотоотсчетов неполяризованного гауссового излучения получено для случая, когда обе компоненты поляризации статистически независимы. Рассмотрим случай произвольной статистической связи между поляризационными компонентами в предположении, что статистическая связь между ними определяется воздействием неоднородностей СВ.

Пусть $\alpha_n(t)$ – комплексная амплитуда [6] компонентов поляризации $(n=1,2)$ некогерентного излучения. В рамках модели гауссовского излучения с лоренцевским контуром линии с шириной ν примем, что каждый из компонентов является нормальным марковским процессом [2, 7], при этом корреляционная матрица интенсивностей $S = \langle \alpha(t) \otimes \alpha^*(t) \rangle$ равна

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho^* \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \\ \rho \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} & \sigma_2 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где σ_1 и σ_2 – интенсивности поляризационных компонент, ρ – коэффициент корреляции между компонентами поляризации $(0 \le |\rho| \le 1)$.

Для одномодового (однокомпонентного) гауссовского излучения с интенсивностью σ_1 известно выражение [2, 5], описывающее производящую функцию (ПФ) числа m фотоотсчетов

$$Q_1(\lambda,\sigma_1) = \left\langle \exp(-\lambda\,\Omega_1) \right\rangle, \tag{2}$$

где Ω_1 – энергия, запасенная в компоненте с ортом $\vec{e}_1$, $\Omega_1 = \int_0^T dt \left|\vec{e}_1 \alpha_1(t)\right|^2$, которое имеет вид

$$Q_1(\lambda,\sigma_1) = \frac{4r\nu \exp(\nu T)}{(r_1+\nu)^2 \exp(r_1 T) - (r_1-\nu)^2 \exp(-r_1 T)}, \tag{3}$$

где $r_1 = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_1}$, λ – производящий параметр и T – длительность интервала наблюдения. Выражение для другой компоненты имеет аналогичный вид

$$Q_2(\lambda,\sigma_2) = \left\langle \exp(-\lambda\,\Omega_2) \right\rangle = \frac{4r\nu \exp(\nu T)}{(r_2+\nu)^2 \exp(r_2 T) - (r_2-\nu)^2 \exp(-r_2 T)}, \tag{4}$$

где $\Omega_2 = \int_0^T dt \left|\vec{e}_2 \alpha_2(t)\right|^2$, $\vec{e}_2$ – орт, $r_2 = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_2}$.

С помощью ПФ $Q_1(\lambda,\sigma_1)$ и $Q_2(\lambda,\sigma_2)$, можно извлечь информацию о распределении вероятностей $\{P_1(m)\}$ регистрации m фотоотсчетов одной (первой) из компонент

$$P_1(m) = \left\langle \frac{\Omega_1^m}{m!} \exp(-\Omega_1) \right\rangle, \tag{5}$$

где $\langle . \rangle$ – знак нахождения математического ожидания.

Распределение (5) является взвешенным распределением Пуассона, оно может быть получено из ПФ $Q_1(\lambda,\sigma_1)$ с помощью многократного дифференцирования

$$P_1(m) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} Q_1(\lambda,\sigma_1) \bigg|_{\lambda=1}. \tag{6}$$

С целью избежать нахождения производных высоких порядков можно воспользоваться интегральным представлением Коши для аналитических функций $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint d\xi \frac{1}{\xi - z} f(\xi)$ с контуром интегрирования, охватывающим точку z, при этом явная зависимость от аргумента z из функции $f(z)$ переносится в ядро. Таким образом, дифференцирование по аргументу функции сводится к простому дифференцированию по тому же аргументу, но содержащемуся в ядре $(\xi - z)^{-1}$. Из (6) вытекает удобная для численных расчетов формула, описывающая статистику фотоотсчетов поляризационной компоненты одномодового излучения

$$P_1(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_1\left(1 + e^{i\varphi}, \sigma_1\right) e^{im(\pi-\varphi)} d\varphi, \tag{7}$$

которая следует из (6) с помощью замены $\xi = \exp(i\varphi)$. Аналогичную формулу можно получить и для $P_2(m)$.

Произвольная статистическая связь между модами поляризации. Для описания двухкомпонентного оптического излучения воспользуемся матричным аналогом интегральной формулы Коши. Тогда производящая функция $Q_{12}(\lambda)$ отсчетов неполяризованного излучения может быть записана в виде

$$Q_{12}(\lambda)=\det\oint\frac{ds}{2\pi i}(s-S)^{-1}Q(\lambda,s)\,. \tag{8}$$

В этом выражении контур интегрирования в s-плоскости должен охватывать полюса резольвенты $(s-S)^{-1}$. Пользуясь известными методами [8], найдем, что

$$(s-S)^{-1}=\frac{1}{(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)-|\rho|^2\,\sigma_1\sigma_2}\begin{pmatrix} s-\sigma_2 & \rho^*\sqrt{\sigma_1\sigma_2} \\ \rho\sqrt{\sigma_1\sigma_2} & s-\sigma_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Корни s_1 и s_2 уравнения $(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)-|\rho|^2\,\sigma_1\sigma_2=0$ следующие:

$$s_1=\frac{(\sigma_1+\sigma_2)+\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+4|\rho|^2\,\sigma_1\sigma_2}}{2}\,,\; s_2=\frac{(\sigma_1+\sigma_2)-\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+4|\rho|^2\,\sigma_1\sigma_2}}{2}\,, \tag{10}$$

при наличии статистической связи между компонентами поляризации ($\rho\neq 0$) они определяют формирование статистики фотоотсчетов. Подставляя их значения в (8) и вычисляя интегралы Коши в матричных элементах, запишем

$$Q_{12}(\lambda)=\det\left\{\frac{1}{R}\begin{pmatrix} s_1-\sigma_2 & \rho^*\sqrt{\sigma_1\sigma_2} \\ \rho\sqrt{\sigma_1\sigma_2} & s_1-\sigma_1 \end{pmatrix}Q(\lambda,s_1)-\frac{1}{R}\begin{pmatrix} s_2-\sigma_2 & \rho^*\sqrt{\sigma_1\sigma_2} \\ \rho\sqrt{\sigma_1\sigma_2} & s_2-\sigma_1 \end{pmatrix}Q(\lambda,s_2)\right\}, \tag{11}$$

где $R=\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+4|\rho|^2\,\sigma_1\sigma_2}$.

Тогда получим окончательно для искомой производящей функции

$$Q_{12}(\lambda)=Q(\lambda,s_1)\,Q(\lambda,s_2)\,. \tag{12}$$

Выражение (12) описывает статистику фотоотсчетов неполяризованного излучения в случае наличия статистической связи между компонентами поляризации. Из (12) вытекает, что в случае отсутствия статистической связи, когда $\rho\equiv 0$ и $s_1=\sigma_1$, $s_2=\sigma_2$, ПФ $Q_{12}(\lambda)$ есть простое произведение ПФ $Q_{12}(\lambda)=Q(\lambda,\sigma_1)\,Q(\lambda,\sigma_2)$, отвечающих каждому из компонентов поляризации. При этом распределение $P_{12}(m)$ представляет собой свертку парциальных распределений $P_1(m)$ и $P_2(m)$ со средними $\sigma_1 T$ и $\sigma_2 T$ соответственно, вычисляемых согласно (5). В другом предельном случае полной статистической связи, когда $|\rho|=1$, статистика фотоотсчетов эффективно отвечает одной регистрируемой поляризационной моде с суммарной интенсивностью $s_1=\sigma_1+\sigma_2$. При этом $s_2=0$, что дает $Q(\lambda,s_2)=1$ и $P_2(m=0)=1$, т.е. во второй поляризационной моде с вероятностью, равной единице, имеет место только «отсчет» $m=0$.

Численные примеры. В общем случае частичной статистической связи между модами поляризации, когда $0\leq|\rho|\leq 1$, ПФ $Q_{12}(\lambda)$ есть произведение ПФ $Q(\lambda,s_1)$ и $Q(\lambda,s_2)$, отвечающих каждому из компонентов поляризации, но с эффективными интенсивностями s_1 и s_2, определяемыми согласно (9). При этом распределение фотоотсчетов $P_{12}(m)$ представляет собой свертку парциальных распределений $P_1(m)$ и $P_2(m)$ со средними $s_1 T$ и $s_2 T$ соответственно:

$$P_{12}(m)=\sum_{n=0}^{\infty}P_1(n)P_2(m-n)\,, \tag{13}$$

которые отличаются от распределений $P_1(m)$ и $P_2(m)$ со средними $\sigma_1 T$ и $\sigma_2 T$.

На рисунке 1 приведены результаты вычислений вероятностей $P_{12}(m)$ согласно (8) при $T = 2\cdot10^{-8}$ c^{-1}, $\nu = 2\cdot10^{8}$ $Гц^{-1}$, $\sigma_1 = 2\cdot10^{8}$ c^{-1}, $\sigma_1 = 2\cdot10^{8}$ c^{-1} и $\rho = 0{,}5$ (зависимости Р3 – случай одномодового излучения с суммарной интенсивностью $\sigma_1+\sigma_2$; зависимости Р4 – случай обеих мод поляризации с интенсивностями σ_1 и σ_2 соответственно и коэффициентом корреляции между поляризационными модами $\rho = 0{,}5$). Видно, что при неизменном первом моменте $<m>=(\sigma_1+\sigma_2)T$ влияние статистической связи между поляризационными модами приводит к уширению распределения амплитуд вероятностей $P_{12}(m)$. Таким образом, наличие нерегулярностей в волокне является причиной изменения статистической обстановки.

Заключение. Таким образом, аналитически описано формирование статистики фотоотсчетов неполяризованного излучения для случая, когда между модами поляризации существует статистическая связь. На основе решения прямой задачи о статистике зарегистрированных фотоотсчетов возможна постановка обратной задачи – задачи об идентификации нерегулярностей в оптическом световоде.

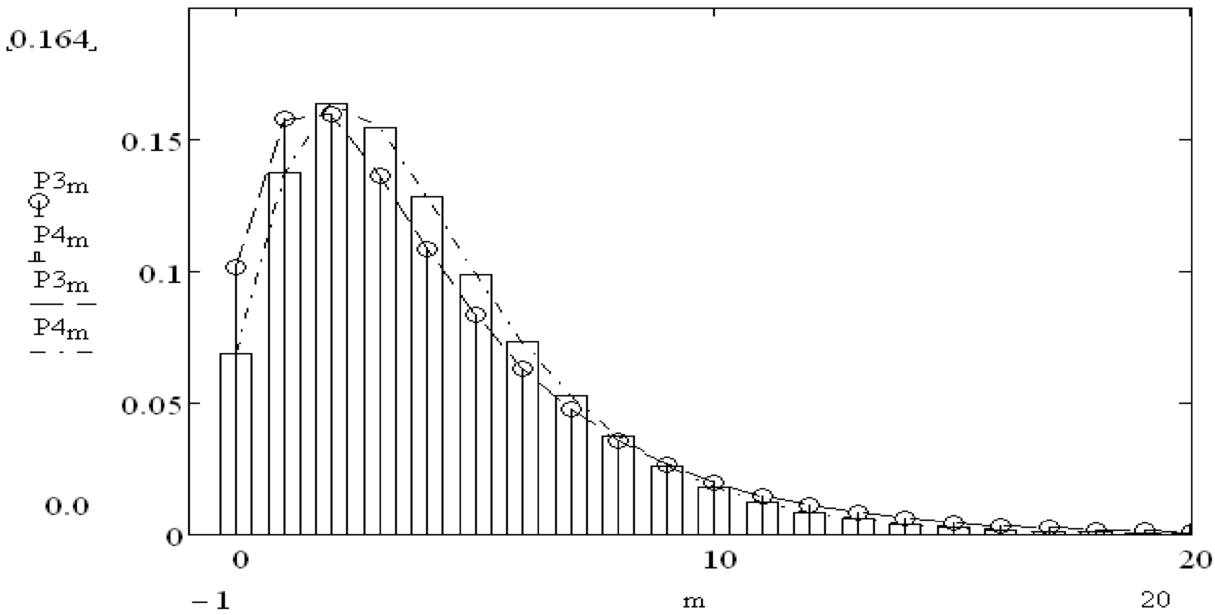


Рисунок 1. Распределения амплитуд вероятностей

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шереметьев А.Г. Статистическая теория лазерной связи/А.Г. Шереметьев. – М.: Связь, 1974.
2. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач/ А.С.Мазманишвили.– К.: Наукова думка, 1987.
3. Шереметьев А.Г. Волоконный оптический гироскоп/ А.Г. Шереметьев. – М.: Радио и связь, 1987.
4. Перина Я. Когерентность света/Я. Перина. – М.: Мир, 1974.
5. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления /М. Лэкс. – М.: Мир, 1974.
6. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика отсчетов/Р. Глаубер// Квантовая оптика и квантовая радиофизика. – М.: Мир, 1974.

7. Тихонов В.И. Марковские процессы/ В.И.Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977.
8. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В.Воеводин, Ю.А.Кузнецов. – М.: Наука, 1984.

МАЗМАНИШВИЛИ Александр Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры моделирования сложных систем Сумского государственного университета.

Научные интересы:

– применение математических методов при решении прикладных задач.

ШОВКОПЛЯС Оксана Анатольевна – старший преподаватель кафедры моделирования сложных систем Сумского государственного университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование вероятностных процессов, информационные технологии и системы.

УДК 551.466.3

І.М.Мартиновський, А.М. Сердюченко

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕРЕГУЛЯРНИХ ВІТРОВИХ ХВИЛЬ В ЗАДАЧАХ ХВИЛЬОВОЇ ЕНЕРГЕТИКИ

Постановка проблеми та аналіз публікацій з теми дослідження. Вичерпання мінеральних джерел енергії, забруднення викидами шкідливих речовин атмосфери та довколишнього середовища, проблеми безпеки у атомній енергетиці примушують людство докладати зусиль із розробки способів та технологій використання альтернативних та екологічно чистих і безпечних джерел енергії як на побутовому рівні, так і для великої промисловості [1]. Це, в першу чергу, використання енергії вітру, морських припливів та хвиль у прибережних районах, термальних джерел, там де вони є, тощо. Поки що швидке просування у даному напрямку гальмується як протидією потужних міжнародних видобувних корпорацій, так і відносно більш високим рівнем витрат на отримання енергії із альтернативних джерел.

Зрозуміло, що пошук ефективних технологій та здешевлення альтернативних джерел енергії неможливий без ґрунтовних наукових досліджень і така робота набирає обертів. Якщо далі обмежитися виключно морською хвильовою енергетикою, то, починаючи з перших зусиль ентузіастів 80-х років минулого століття [2], на даний час вже чітко напрацьовано низку технологій отримання механічної та електричної енергії від руху морських вітрових хвиль [3]. Це осцилюючі стовпи чи поплавці, рухомі ланцюжки плотів, переливні басейни, занурені чи поверхневі коливальні важелі тощо [2, 3]. Проблеми на майбутнє полягають у підвищенні їх ККД, здешевленні витрат при виготовленні, безпека та надійність експлуатації і т. ін.

Однією з вихідних задач, які потребують розв’язання у даному напрямку, є розробка гідродинамічних моделей нерегулярних вітрових хвиль, як основного джерела збудження, на часових інтервалах порядку 35 – 40 хв. (інтервалах квазістаціонарності хвильових режимів), які є достатніми для отримання інформації як про самі хвилі, так і про роботу хвильових генераторів для її подальшого статистичного і енергетичного опрацювання та аналізу [4]. На даний час розроблена низка гідродинамічних моделей для поверхневих хвиль на воді, в основному спектральних лінійних моделей [4]. Розробка нелінійних нерегулярних моделей, придатних і для адекватного моделювання гідродинаміки крутих вітрових хвиль, зустрічає суттєві математичні труднощі. Фактично, крім класичних результатів для стаціонарних періодичних хвиль на воді [5], вдалося розробити тільки асимптотичні моделі для слабко нелінійних хвиль [6] та чисельні моделі для крутих регулярних хвиль [7]. Але ці моделі потребують ще подальшого доведення їх до зручних у практичному використанні варіантів. Авторами даної роботи останніми роками було напрацьовано низку методів у гідродинаміці хвиль, які можна використати для розв’язання задач хвильової енергетики [6, 8].

Метою роботи є розробка алгоритмів лінійного та нелінійного наближення для чисельних розрахунків у часі характеристик нерегулярних вітрових хвиль – хвильової поверхні, поля швидкостей руху часток рідини та поля хвильового тиску з глибиною. Такі алгоритми є вихідним кроком у подальших розрахунках гідродинамічних навантажень на робочі елементи хвильових генераторів, а потім і динаміки їх руху та механічної енергії, яку генератори отримали. При цьому, у межах даної роботи обмежимося для простоти та стислості плоскими вітровими хвилями на глибокій воді, а ефекти тривимірності та впливу глибини акваторії у шельфовій зоні будуть предметом подальших досліджень у рамках вже розробленої техніки.

Основна частина.

Лінійне наближення. У лінійному наближенні працює принцип суперпозиції і тому гідродинамічні характеристики нерегулярних лінійних вітрових хвиль легко можна отримати у рамках спектральних моделей [4]. Згідно спектральному підходу маємо послідовно для хвильового профілю, полів швидкості та тиску залежності:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_w(x,t)=\sum_{j=1}^{N}a_j\cos(\theta_j(x,t)+\alpha_j),\\ &v_{wx,z}(x,z,t)=-\sum_{j=1}^{N}c_j\delta_j\exp\varsigma_j(z)\cdot\{\cos,\sin\}(\theta_j(x,t)+\alpha_j),\\ &p_w(x,z,t)=\rho g[-z+\sum_{j=1}^{N}a_j\exp\varsigma_j(z)\cdot\cos(\theta_j(x,t)+\alpha_j)]\end{aligned}\right\},\qquad(1)$$

де x – поздовжня координата та z – вертикальна координата заглиблення; N – число елементарних спектральних гармонік з амплітудами та фазами a_j,α_j; $\theta_j(x,t)=k_jx+\sigma_jt$ – фазова координата; $\varsigma_j(z)=k_jz$ та $k_j=\sigma_j^{\,2}/g$, $\delta_j=a_jk_j$, $c_j=g/\sigma_j$ – характеристики елементарної гармоніки з коловою частотою σ_j.

Для адекватного моделювання нерегулярних хвиль потрібно в сумах у (1) брати декілька тисяч гармонік (порядку $(2\div4)\cdot10^3$), що при розрахунках потребує значних ресурсів та швидкості роботи обчислювальної техніки. Кількість гармонік можна зменшити на порядок, якщо застосувати прийом, запропонований у роботі [9], згідно якому замість рівномірної дискретизації застосовують нерівномірну з більш густою сіткою частот в околі максимуму спектру та додатковою рандомізацією інтервалів між частотами $\Delta\sigma_j$. Тоді вже при $N\sim(2\div3)\cdot10^2$ хвильові реалізації не містять повторень на інтервалі квазістаціонарності. При цьому амплітуди елементарних гармонік визначаються як $a_j=\sqrt{2}\cdot\sqrt{S_w(\sigma_j)\cdot\Delta\sigma_j}$, $j=1;2;...;N$, а фази α_j вибираються як випадкові числа з рівномірним розподілом на інтервалі $[0;2\pi]$ (див. приклад на рис. 1).

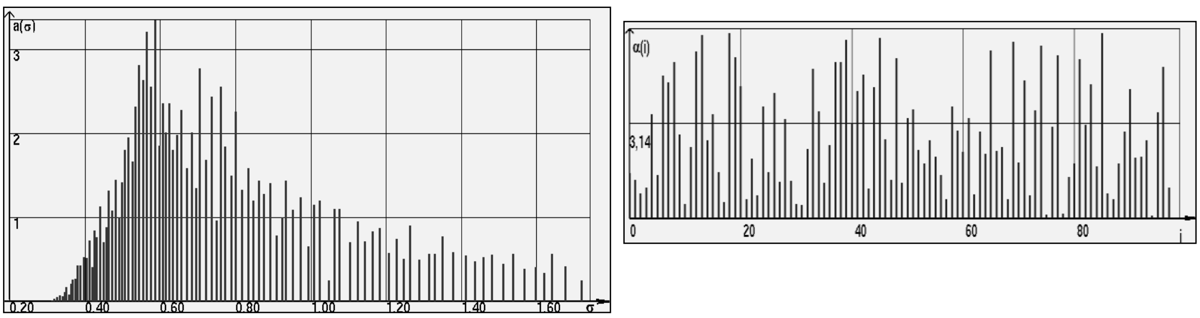


Рис. 1. Амплітуди та фази елементарних гармонік

Для спектральної функції (частотного спектру) $S_w(\sigma)$ було прийнято досить загальну апроксимацію у вигляді двохпікового шестипараметричного спектру, який було отримано накладанням двох спектрів Пірсона-Московіца з урахуванням множників Хассельмана, як це було запропоновано у роботі [10]:

$$S_w(\sigma)=S_1(\sigma)+S_2(\sigma),\quad S_j(\sigma)=S_j^{PM}(\sigma)\cdot\gamma_{Hj}^{\nu_j(\sigma)},\ j=1,2,\qquad(2)$$

де $S_j^{PM}(\sigma)=0{,}11(\tilde{h}_{s_j})^2\tilde{T}_{c_j}(\tilde{\sigma}_j)^{-5}\exp[-0{,}44(\tilde{\sigma}_j)^{-4}]$ – спектри Пірсона-Московіца, а $\nu_j(\sigma)$ – показники степені у множниках Хассельмана γ_{Hj} [4]; $\tilde{h}_{s_j}$, $\tilde{T}_{c_j}$ – нормовані значення значної висоти та середнього періоду нерегулярних вітрових хвиль для кожного парціального спектру у сумі (2), які зв'язані зі значною висотою та середнім періодом сумарного поля вітрових хвиль h_s, T_c формулами $h_{s1} = h_s R_h \Big/ \sqrt{1+R_h^2}$, $h_{s2} = h_s \Big/ \sqrt{1+R_h^2}$; $R_h = \sqrt{R_s / R_T}$ та $T_{c_1} = T_c T_{c0}$, $T_{c0} = (R_T + R_h^2) \big/ (1+R_h^2)$, $T_{c_2} = T_{c_1} \big/ R_T$.

Взаємні інтенсивність та розташування парціальних спектрів на частотній осі визначаються параметрами $R_S = S_1^{\max}(\sigma) \big/ S_2^{\max}(\sigma)$ та $R_T = T_{c2} \big/ T_{c1}$. Таким чином шість параметрів $h_s, T_c, \gamma_{H1}, \gamma_{H2}, R_S, R_T$ визначають структуру частотного спектру. Оціночно для Атлантичного океану маємо $\gamma_H \approx 2\ldots5$, $R_S \approx 1,2\ldots2,0$, $R_T \sim 1,2\ldots1,5$. На рис. 2 наведено приклад експериментального спектру, отриманого в Атлантичному океані [10], та його апроксимація згідно (2).

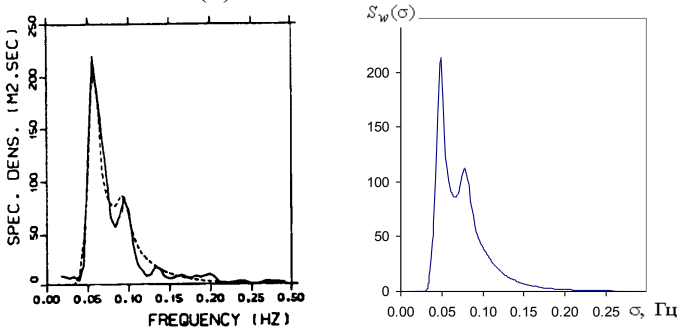


Рис. 2. Експериментальний спектр та його апроксимація

На рис. 3 представлено хвильову реалізацію тривалістю 400 с, яку розраховано за наведеними вище формулами (хвильові ординати визначено у м). Також на рис. 4 наведено приклад розрахунку з полями швидкості та тиску з глибиною.

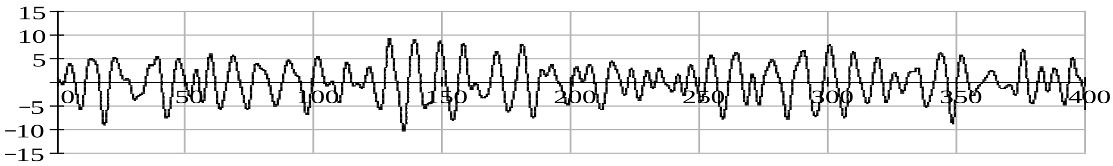


Рис. 3. Частина хвильової реалізації при $h_s = 15$ м, $T_c = 7{,}3$ с та спектру на рис. 2

Звернемо увагу на те, що найбільш цікаві енергомісткі інтенсивні хвилі формують так звані хвильові пакети, які є більш регулярними, ніж хвильове поле в цілому. Це дає підстави моделювати їх як повільно модульовані за амплітудами та фазами регулярні хвилі при подальшому нелінійному аналізі задачі.

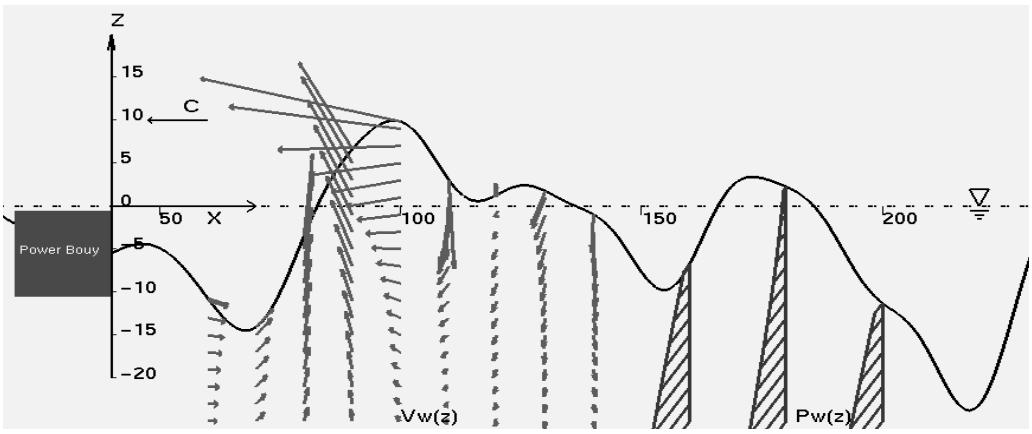


Рис. 4. Хвильовий профіль, векторне поле швидкостей та поле тиску з глибиною у заданий момент часу перед хвильовим генератором

Нелінійне наближення. Лінійне наближення не враховує нелінійні ефекти, які властиві крутим вітровим хвилям і які, принаймні візуально, призводять до асиметрії хвильового профілю, перевертання та руйнації гребенів крутих хвиль (див. рис. 5).

Рис. 5. Приклади профілів вітрових хвиль

Для розробки алгоритму нелінійного наближення потрібно врахувати наступні результати. По-перше, у роботі [6] було показано, що якщо знехтувати локальними ефектами перевертання гребенів хвиль, то профілі вітрових хвиль можна описати рядами Фур'є за кратними зв'язаними гармоніками виду

$$\zeta_w(x,t) = \langle a \rangle \sum_{n=1}^{M} a_n \cos(n\theta_0 + \alpha_n),\ M \sim 20-25, \qquad (3)$$

де $\theta_0 = \langle k \rangle x + \langle \sigma \rangle t$ – середня фаза, визначена за середньою частотою $\langle \sigma \rangle = 2\pi / T_c$ та хвильовим числом $\langle k \rangle = \langle \sigma \rangle^2 / g$; $\langle a \rangle = 0{,}31 h_s$ – середня амплітуда хвиль; $a_n(x,t)$, $\alpha_n(x,t)$ – повільно змінні за часом t координатою амплітуди та збурення фаз кратних гармонік, що залежать від локальних характеристик хвиль у пакетах $a, \sigma,\ k,\ \delta_w = ka$.

По-друге, профілі крутих вітрових хвиль показали [6], що амплітуди та фази кратних гармонік $a_n,\ \alpha_n$ не можуть бути довільними, а є жорстко корельованими за номером гармоніки *n*, зокрема, фази α_n лінійно змінюються за *n*, а логарифми амплітуд $l_n = \ln a_n, n > 4$ мають слабку квадратичну залежність (див рис. 6). Це дає змогу визначити множини даних величин з використанням тільки декількох параметрів.

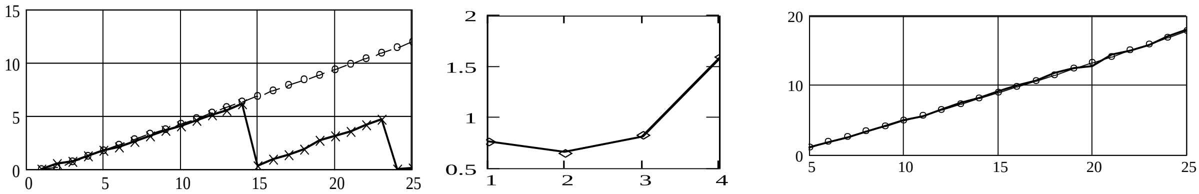


Рис. 6 Типові приклади залежності від номера кратної гармоніки фаз $\alpha_n(n)$, амплітуд $a_n(n)$ при $n \le 4$ і логарифмів амплітуд $l_n(n) = \ln a_n$ при $n \ge 5$

По-третє, для розрахунку характеристик хвиль у пакетах a, σ, k, δ_w існує технологія перетворення Гільберта [5], яка дає змогу отримати чисельно обвідну амплітуд хвиль $a(t)$ та модуляцію фази $\theta(t)$ за часом при фіксованому значенні координати (або зворотно). Похідні від фази $\theta(t)$ визначають локальні значення частоти та хвильового числа $\sigma = \partial\theta / \partial t,\ k = \partial\theta / \partial x$. На рис. 7 наведено приклад розрахунку крутості хвиль $\delta_w(t)$ протягом 300 с.

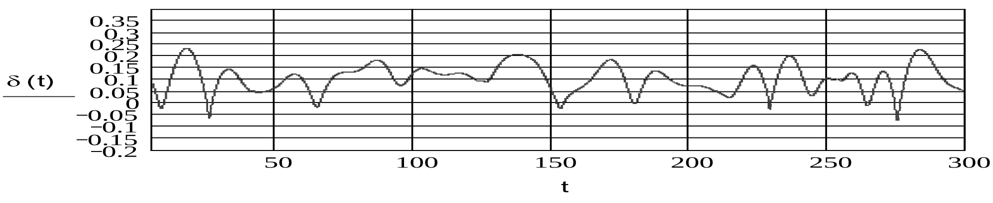


Рис. 7. Крутість нерегулярних хвиль за 300 с

По-четверте, у роботі [8] було розроблено метод напівзворотньої задачі для нелінійних хвиль на воді, згідно якому з модифікованих граничних умов на хвильовому профілі $z = \zeta_w$ при відомих ординатах хвильового профілю можна розрахувати проекції швидкості на хвильовій поверхні v_{wx}^s, v_{wz}^s. Відповідні залежності мають вигляд:

$$v_{wx}^s = -\tilde{c}\left(1 - R_- / R_+\right),\ v_{wz}^s = -\tilde{c}\zeta_{wx} \cdot R_- / R_+ , \tag{4}$$

де позначено $R_- = \sqrt{1 - 2\tilde{c}^{-2}\delta_w\zeta_w}$, $R_+ = \sqrt{1+\zeta_{wx}^2}$ та $\tilde{c} = c / c_0 = 1 + \frac{1}{2}\delta_w^2 + \frac{1}{8}\delta_w^4 + O(\delta_w^6)$.

Нарешті, по-п'яте, для пласких хвиль поля швидкості з глибиною можна отримати, ввівши до розгляду комплексні змінні $\tilde{z} = x + iz$ і $\tilde{v} = v_x - iv_z$, та скориставшись інтегральною формулою Коші [5]

$$v_x - iv_z = \frac{-i}{2\pi} v.p.\oint\limits_{(S)} \frac{v_x^s - iv_z^s}{\tilde{\zeta} - \tilde{z}} d\tilde{\zeta} \ . \tag{5}$$

Відповідно, поле хвильового тиску визначається інтегралом Коші-Лагранжа $p_w(x,z,t) = \rho[-gz + 0,5(v_{wx}^2 + v_{wz}^2) + \Phi_{wt}]$ з наближеним визначенням похідної Φ_{wt} через компоненти поля швидкості [8].

Наведені методи та результати реалізуються у наступному алгоритмі. У початковий момент часу t_0 приймається лінійна спектральна модель, з якої визначаються локальні значення крутості хвиль і розраховується за рядом (3) нелінійний профіль хвиль. Потім за формулами (4) та (5) розраховують поверхневе поле швидкості та його зміну за глибиною. Для наступного часу $t_0 + \Delta t$ хвильовий профіль визначається чисельним інтегруванням рівняння $\zeta_{wt} = -\partial/\partial x \int_{-\infty}^{\zeta_w} v_{wx} dz$, яке випливає з рівняння нерозривності та кінематичних граничних умов на хвильовій поверхні. Далі обчислення повторюються у наведеному вище порядку для першого кроку за часом.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Розроблено лінійну та нелінійну моделі для нерегулярних вітрових хвиль для їх використання у розрахунках роботи хвильових перетворювачів під дією хвиль та визначення їх ККД, оптимальних схем та конфігурацій тощо. Подальша робота полягає у практичній чисельній реалізації нелінійного наближення.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Гор А. Неудобная правда. Глобальное потепление: Как остановить глобальную катастрофу / Ал Гор; [пер. с англ. А.Калюжного]. – СПб.: Амфора, 2007. – 328 с.
2. Росс Д. Энергия волн / Д. Росс. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 112 с.
3. Khan J Potential Opportunities and Differences Associated with Integration of Ocean Wave and Marine Current Energy Plants in Comparison to Wind Energy [Електронний ресурс]/J. Khan, G. Bhuyan and A. Moshref. – Режим доступу: http://www.iea-oceans.org/_fich/6/ T0311_document.pdf.
4. Давидан И.Н. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс / И.Н. Давидан, Л.И.Лопатухин, В.А.Рожков – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 286 с.
5. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский – М.: Наука, 1977. – 815 с.
6. Сердюченко А.Н. Динамика морских волн и судна в шторме с учетом нелинейных эффектов / А.Н. Сердюченко // Гидромеханика. – К., 1998. – Т. 72. – С. 112-134.

7. Su M. Nonlinear Wave Groups / M. Su // Proc. ISOPE Conference. – 1996. – P. 158-167.
8. Сердюченко А.М. Гідродинаміка гранично крутих вітрових хвиль / А.М. Сердюченко // Доповіді НАН України. – 2001. – № 8. – С. 35-41.
9. Goda Y. Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation / Y. Goda // Report of Port and Harbor Research Institute. – 1970. –Vol. 9, № 3. – P. 28-35.
10. Soares C.G. Representation of double-peaked sea wave spectra / C.G. Soares // Ocean Engineering. – 1984. – Vol. 11. – № 2. – P. 185–207.

СЕРДЮЧЕНКО Анатолій Миколайович – д.ф.-м.н., професор кафедри будівельної механіки корабля Національного університету кораблебудування (м. Миколаїв).

Наукові інтереси:

– нелінійна гідродинаміка та статистика морських хвиль та суден на воді.

МАРТИНОВСЬКИЙ Іван Михайлович – викладач Миколаївського будівельного коледжу КНУБА (м. Миколаїв).

Наукові інтереси:

– хвильові перетворювачі енергії.

УДК 537.525

И.В. Мельник, С.Б. Тугай

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ХОЛОДНОГО КАТОДА В ИСТОЧНИКАХ ЭЛЕКТРОНОВ ВЫСОКОВОЛЬТНОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА

Постановка проблемы и анализ публикаций по теме исследования. При проектировании источников электронов высоковольтного тлеющего разряда (ВТР) важно учитывать комплексность и многообразие всех электронно-оптических, энергетических, термодинамических и других процессов, протекающих в разрядном промежутке при ускоряющих напряжениях порядка единиц-десятков кВ и давлениях порядка единиц Па. До последнего времени изучение физики ВТР сводилось, в основном, к исследованию самосогласованной электронно-ионной оптики разряда, при этом тщательно исследовались элементарные процессы взаимодействия потоков частиц в разрядном промежутке [1, 2]. Также исследовались процессы в анодной плазме и на поверхностях электродов, поскольку именно они оказывают наиболее существенное влияние на геометрические и энергетические параметры формируемого электронного пучка [1]. Однако при этом малое внимание уделялось анализу энергетики ВТР, который крайне важен для оценок влияния баланса энергии на электродах на стабильность работы проектируемых электронных пушек. Общие теоретические оценки баланса энергии в ВТР были приведены в работе [3], а в работе [4] на основе решения уравнения теплового баланса исследовались тепловые режимы работы охлаждаемого катода. Однако оценки, сделанные в работе [4], проводились на основе решения уравнения теплового баланса без учета неоднородности нагрева эмиссионной поверхности катода и носили сугубо качественный характер, при этом точность расчетных данных не превышала 50%.

В связи с этим целью данной работы является расчет температурных режимов работы охлаждаемого катода ВТР с учетом краевых эффектов, поскольку, как отмечалось в работе [4], рабочая температура катода оказывает существенное влияния на вторичную ионно-электронную эмиссию и на параметры генерируемого электронного пучка. Более того, максимальная температура катода существенно влияет на стабильность работы источников электронов ВТР, поэтому разработка более точных методов её расчета имеет важное практическое значение [4, 5].

Постановка задачи повышения эффективности работы охлаждаемого катода за счет неравномерности распределения температуры его поверхности. Для учета пространственного распределения температуры в осесимметричных электродных системах ВТР, формирующих электронные пучки с точечным фокусом, в общем случае необходимо решать уравнение теплопроводности, которое для осесимметричных систем записывается в цилиндрических координатах в следующем виде [6, 7]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_V T\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+F(r,z), \tag{1}$$

где r, z – пространственные координаты, T – температура поверхности катода, λ - теплопроводность материала катода, ρ - его плотность, c_v – его объемная теплоемкость, $F(r, z)$ – плотность тепловых источников. Уравнение (1) необходимо решать с учетом граничных условий, определяемых геометрией катодного узла и распределением неоднородных тепловых потоков. Существует аналитическое решение двумерной тепловой задачи, которое можно применить для расчета температуры поверхности плоского катода, охлаждаемого через массивное основание [6]. Однако это решение необходимо адаптировать с учётом реальной геометрии системы охлаждения, что позволит оптимизировать температурный режим катода ВТР с целью повышения его энергетической эффективности и обеспечения стабильности горения разряда.

В условиях горения ВТР практически вся поверхность катода подвергается бомбардировке ионами, однако при этом плотность тока ионов на катоде распределена неравномерно и на периферийной части катода ионный ток значительно меньше [1]. Поскольку в качестве материала катода используется алюминий, а в качестве рабочего газа – воздух, на поверхности катода происходит сорбция ионов рабочего газа с образованием диэлектрической пленки Al_20_3, обладающей высоким коэффициентом вторичной ионно-электронной эмиссии [1]. При низкой температуре периферийной области катода в диэлектрической плёнке происходит накопление положительного заряда ионов, что приводит к изменению условий ионизации и зажиганию микродуг, следствием которых является резкое возрастание тока разряда и снижение стабильности его горения. С другой стороны, при повышении температуры центральной части катода уменьшается коэффициент вторичной ионно-электронной эмиссии. В связи с этим, в электронных пушках ВТР, для обеспечения нормального режима работы холодного катода и повышения стабильности горения разряда, целесообразно эффективно охлаждать центральную часть катода, а на его периферийной части поддерживать более высокую температуру. Схема системы охлаждения, позволяющей обеспечить неравномерное охлаждение центральной части катода, приведена на рис. 1. Это наиболее простой вариант охлаждения катодного узла через медное основание, который используется в технологических электронных пушках малой мощности, порядка единиц кВт [4]. Отличительной конструктивной особенностью системы, приведенной на рис. 1, является то, что охлаждается только центральная часть катода.

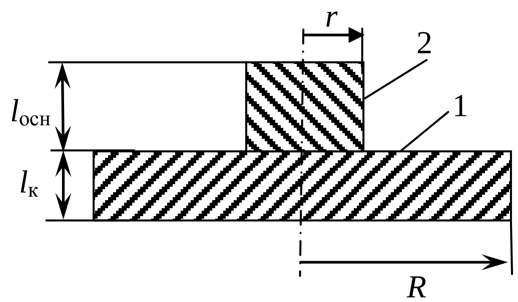


Рис. 1. Система охлаждения катода через основание, позволяющая обеспечивать неравномерное распределение температуры на его поверхности с целью повышения эффективности работы.
1 – катод, 2 – массивное медное основание.

Геометрия системы охлаждения катода, приведенная на рис. 1, описывает граничные условия, для которых необходимо искать решение уравнения теплопроводности (1).

Аналитическое решение уравнения теплопроводности для заданных граничных условий. Для граничных условий, определяемых геометрией системы охлаждения, приведенной на рис. 1, при выполнении ограничений $l_к \ll r$ и $l_к \ll R$, уравнение теплопроводности (1) имеет аналитическое решение, которое записывается в виде [6]:

$$T_{\max} = \frac{W_к\left(\mathrm{Ei}\left(-kr^2\right) - \mathrm{Ei}\left(-kR^2\right) - 2\exp\left(-kR^2\right)\ln(R)\right)}{4\pi k\lambda_к R^2} +$$

$$+\frac{W_к l_к\left(\exp\left(-kr^2\right)-1\right)}{\alpha\pi R^2} + \frac{W_к \exp\left(-kR^2\right)\ln(R)}{2k\lambda_к\pi R^2} + A\left(\mathrm{I}_0\left(r\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_к l_к}}\right)-1\right) + T_{\min},$$

$$T_{\min} = A + \frac{W_к l_к}{\pi R^2} + T_0,\;\; A = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_к l_к}{\alpha}}\left(\frac{W_к\left(\exp\left(-kr^2\right)-\exp\left(-kR^2\right)\right)}{2k\lambda_к \pi R^2 r} + \frac{2W_к k r l_к \exp\left(-kr^2\right)}{\alpha\pi R^2}\right)}{\mathrm{I}_1\left(r\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_к l_к}}\right)}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Ei}(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{\exp(t)}{t}dt,\;\; \mathrm{I}_\nu(\mathrm{z}) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)},\;\; \Gamma(a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{a-1} dt,$$

где $T_{\max}$ – максимальная температура на периферии катода, $T_{\min}$ – минимальная температура в центральной области катода, $W_к$ – мощность ионного потока на катоде, которая обычно составляет около 5% от общей мощности разряда [4], $\lambda_к$ – теплопроводность материала катода, Ei(-*x*) – интегральная показательная функция, $\mathrm{I}_0(x)$, $\mathrm{I}_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, $\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера, *k*=0,2 см$^{-2}$ – коэффициент сосредоточенности теплового потока. Геометрические параметры катодного узла приведены на рис. 1.

Решение уравнений (2) для различных мощностей, рассеиваемых на катоде, приведены на рис. 2 и рис. 3. Расчеты проводились для таких значений геометрических параметров: R=0,35 м, $l_к$ = 0,01 м, r = 0,1, материал катода – алюминий.

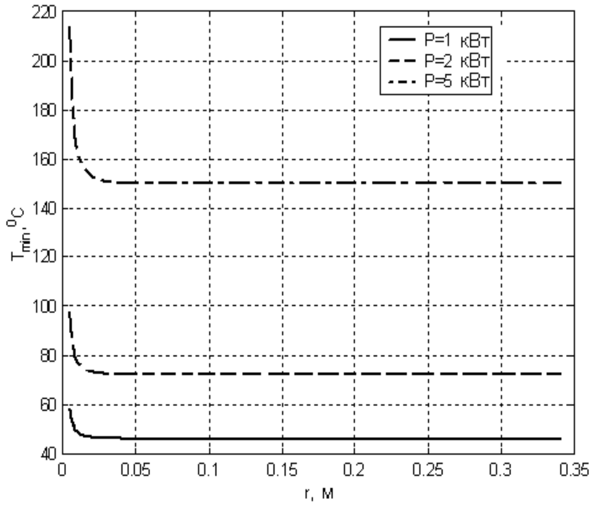


Рис. 2. Зависимость минимальной температуры катода от радиуса основания системы охлаждения

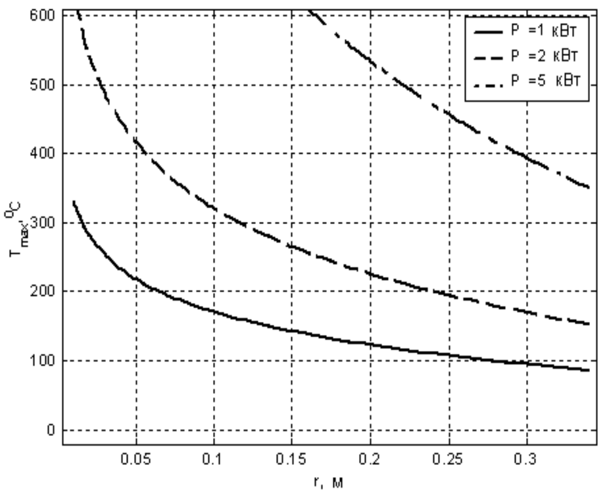


Рис. 3. Зависимость максимальной температуры катода от радиуса основания системы охлаждения

Приведенные на рис. 2 и рис. 3 графические зависимости имеют большое теоретическое и практическое значение. По приведенным графикам, с учетом того, что температура периферийной части катода $T_{\max}$ не должна превышать 150 ^{0}C, можно определить радиус катододержателя *r*. Кроме того, можно оценить эмиссионные свойства катода в его центральной и периферийной области, поскольку коэффициент вторичной ионно-электронной эмиссии γ зависит от температуры [1].

Несмотря на это, оценки температуры поверхности катода, проводимые с использованием соотношения (2), справедливы только для плоской геометрии катода при выполнении условий $l_к << r$ и $l_к << R$, при этом точность расчетов составляет порядка 10-15%. Для катодов с более сложной сферической геометрией, используемых в источниках электронов ВТР для формирования сходящихся пучков [1, 4, 5], такие оценки максимальной температуры могут быть заниженными на 30-35%, в зависимости от радиуса сферы катода $R_к$. Кроме того, в уравнении (2) не учитывается наличие вакуумного зазора между катодом и основанием [4], что также приводит к значительно более заниженным оценкам температуры как центральной, так и периферийной области катода. Аналитических решений уравнения теплопроводности для многослойных систем со сложной геометрией не существует.

Моделирование распределения температуры в катодном узле путём численного решения уравнения теплопроводности. Для более точных оценок температурных режимов работы холодного катода в источниках электронов ВТР необходимо использовать численные методы решения уравнения теплопроводности (1). Для решения уравнения теплопроводности разработаны численные методы с конечно-разностной сеткой по координатам и по времени, например, метод правой разности или неявный метод Кранка-Николсона [7]. Однако, с учетом того, что в данном случае решается стационарная термодинамическая задача и $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, а также пологая $\lambda_к(T) = \text{const}$, уравнение теплопроводности (1) сводится к эллиптическому уравнению Пуассона. При решении задачи охлаждения катода был использован метод конечных элементов с разбиением на треугольные области.

Численное решение уравнения теплопроводности для различных систем охлаждения катода, приведенных в работе [4], осуществлялось с использованием программы pdetool, входящей в состав программного комплекса MatLab 5.3 [8]. Графические результаты расчетов для системы без вакуумного зазора приведены на рис. 4, а для системы с вакуумным зазором – на рис. 5. Аналогичные результаты были получены для катодных узлов с водяным охлаждением.

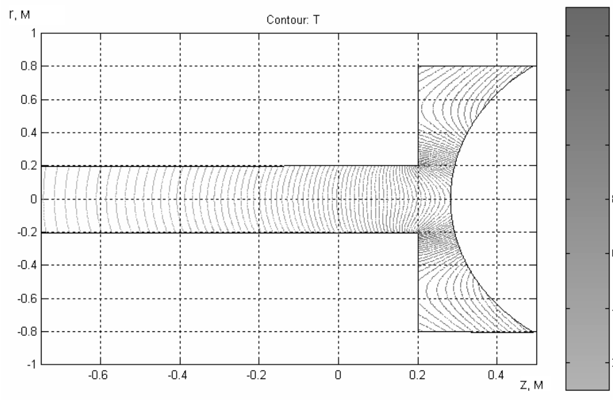


Рис. 4. Распределение температуры в системе с прямым охлаждением катода через медное основание. $R_К$ = 0,8 м, R = 0,35 м, $l_К$ = 0,05 м, T_0 = 10 ^{0}C, $W_к$ = 1 кВт

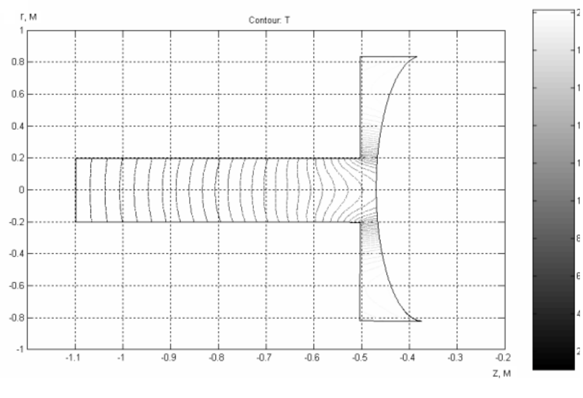


Рис. 5. Распределение температуры в системе с охлаждением катода через медное основание с зазором. $R_К$ =0,8 м, R =0,35 м, $l_К$ =0,01 м, $l_{заз}$ =10^{-5} м, T_0=10 ^{0}C, $W_к$=1 кВт

Анализ результатов моделирования. Полученные результаты моделирования температуры поверхности катода в источниках электронов на основе ВТР имеют большое теоретическое и практическое значение. Эффективное охлаждение центральной части катода позволяет повысить коэффициент вторичной ионно-электронной эмиссии за счет образования оксидной пленки на его поверхности. С другой стороны, поддержание температуры периферийной части катода на уровне 100 – 150^{0} С способствует эффективному отводу заряда накапливаемых ионов, что позволяет избежать благоприятных условий для возникновения дуговых пробоев в разрядном промежутке, в результате чего значительно повышается стабильность работы источников электронов ВТР.

Результаты, полученные с использованием соотношения (2), интересны тем, что при достаточно высокой точности моделирования они представлены в аналитическом виде, что позволяет провести важные качественные оценки, характеризующие зависимость температуры поверхности катода от геометрических параметров системы охлаждения, приведенной на рис. 1. С другой стороны, аналитические соотношения, аналогичные (2), можно получить только для упрощённых граничных условий, поэтому такие соотношения не всегда адекватно описывают физику работы реальных систем охлаждения. Например, невозможно аналитически описать системы охлаждения с большим количеством промежуточных слоёв, а также системы водяного охлаждения [6]. В этом случае, для получения более точных и адекватных оценок, необходимо использовать численные методы решения уравнения теплопроводности (1), которые реализованы в современных пакетах математического моделирования, в частности, в системе автоматизации научно-технических расчетов MatLab [7, 8].

Полученные результаты моделирования представляют большой практический интерес для проектировщиков электронно-лучевого технологического оборудования.

Выводы. В работе, с использованием современных средств компьютерного моделирования, исследованы температурные режимы работы охлаждаемого катода источников электронов высоковольтного тлеющего разряда. Существенной особенностью проведенных исследований является то, что температура рассчитывалась с учетом её пространственного распределения, при этом различалась температура в центральной и периферийной области катода.

В работе предложены два различных метода расчета температурных режимов работы катода. Первый метод основан на использовании аналитических соотношений для максимального и минимального значения температуры охлаждаемой поверхности. Такой подход позволяет делать как количественные, так и качественные оценки, характеризующие зависимость температурных режимов работы катода от геометрии системы охлаждения. Однако аналитические решения задачи теплопроводности можно получить только для упрощённой геометрии системы охлаждения, поэтому точность таких оценок определяется в первую очередь вносимыми физическими ограничениями и может превышать 50%. Поэтому для получения более точных количественных оценок пространственного распределения температуры используются численные методы решения уравнения теплопроводности.

Полученные результаты моделирования позволяют оценить энергетическую эффективность катода в источниках электронах высоковольтного тлеющего разряда и повысить коэффициент вторичной ионно-электронной эмиссии. С другой стороны, соблюдение соответствующих температурных режимов работы катода позволяет уменьшить вероятность образования микродуг, и тем самым повысить стабильность работы электронных пушек ВТР. Результаты проведенных теоретических исследований представляют большой практический интерес для специалистов, проектирующих электронно-лучевое технологическое оборудование.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Плазменные процессы в технологических электронных пушках / М.А. Завьялов, Ю.Е. Крейндель, А.А. Новиков, Л.П. Шантурин – М.: Атомиздат, 1989. – 256 с.
2. Мельник И.В. Методика моделирования технологических источников электронов высоковольтного тлеющего разряда/ И.В. Мельник, С.Б. Тугай // Электронное моделирование. – 2010. – Т. 32. – №6. – С. 31 – 43.

3. Мельник И.В. Теоретические оценки влияния нагрева электродов и рабочего газа на энергетические параметры источников электронов высоковольтного тлеющего разряда/ И.В. Мельник // Электроника и связь. – 2004. – Т. 9. – № 21. – С. 14 – 16.
4. Мельник В. И. Моделирование температурных режимов работы катода источников электронов высоковольтного тлеющего разряда на основе решения уравнения теплового баланса/ В. И. Мельник, И.В. Мельник //Вестник ХНТУ.– 2010. – № 3 (39). – С. 311 – 315.
5. Газоразрядные электронные пушки и их применение в промышленности/ С.В. Денбновецкий, В.И. Мельник, И.В. Мельник, Б.А. Тугай // Электроника и связь, тематический выпуск «Проблемы электроники».–Ч. 2.– 2005. – С. 84 – 87.
6. Исаченко В.П. Теплопередача/ В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел . – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 417 с.
7. Мэтьюз Д. Численные методы. Использование MatLab/ Д. Мэтьюз, Д. Куртис. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
8. Мельник І.В. Система науково-технічних розрахунків MatLab та її використання для розв'язання задач із електроніки: навчальний посібник/ І.В. Мельник. – К.: Університет «Україна», 2009. – Т.1: Основи роботи та функції системи. – 507 с.

МЕЛЬНИК Игорь Витальевич – д. т. н., доцент кафедры электронных приборов и устройств факультета электроники Национального технического университета Украины "Киевский политехнический институт".
Научные интересы:
– компьютерное моделирование электронно-лучевых устройств и технологических процессов на их основе, современные методы и средства математического моделирования.

ТУГАЙ Сергей Борисович – аспирант кафедры электронных приборов и устройств факультета электроники Национального технического университета Украины "Киевский политехнический институт".
Научные интересы:
– физика высоковольтного тлеющего разряда, источники электронов высоковольтного тлеющего разряда, электронно-лучевые технологии, системы управления параметрами электронных пучков.

УДК 62-50

Ю.Л. Меньшиков

АЛГОРИТМЫ СИНТЕЗА АДЕКВАТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПИСАНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Постановка проблемы. Одной из основных задач математического моделирования динамических систем является построение такого математического описания реального процесса, которое позволяет получать результаты моделирования, совпадающие с экспериментальными данными (измерениями). Такого совпадения добиваются путем построения «правильной» математической модели динамической системы или процесса (ММ) и выбором «хорошей» модели внешнего воздействия (МВВ). Под «правильной» ММ интуитивно понимается такая ММ, поведение которой совпадает с экспериментальными измерениями с приемлемой точностью под действием МВВ, которая соответствует реальному внешнему воздействию («хорошая» МВВ). Таким образом, степень «правильности» ММ зависит непосредственно от выбранной МВВ и от требуемой точности совпадения с экспериментом.

Анализ достижений и публикаций по теме исследований. В настоящее время существует два основных подхода к проблеме синтеза пары: математическая модель поведения физического процесса и модель внешнего воздействия [1-3]:

1) по математической модели физического процесса выбранной априори структурой и неточными параметрами, определяется такая модель внешнего воздействия, в совокупности с которой результаты математического моделирования совпадают с экспериментом с заданной точностью;
2) по априори выбранной модели внешнего воздействия синтезируется математическая модель поведения физической системы известной структуры, для которой результаты математического моделирования совпадают с экспериментом с заданной точностью.

Цель статьи. Целью данной работы является построение возможных алгоритмов синтеза математических описаний реальных физических процессов в рамках первого подхода, которые позволяют получать в дальнейшем адекватные экспериментам результаты математического моделирования.

Основная часть. Сформулируем определение адекватности математического описания.

Определение. Математическое описание реального процесса будем считать адекватным относительно выбранных переменных состояния математической модели, если, при некотором ограничении на внешние воздействия и на величину переменных состояния реальной динамической системы и при одних и тех же дополнительных условиях (начальных и граничных), переменные состояния совпадают с экспериментальными измерениями физических характеристик реальной динамической системы в выбранной метрике с точностью экспериментальных измерений и точностью задания параметров математической модели динамической системы.

Ограничимся рассмотрением только динамическими системами (процессами), которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Будем под математическим описанием динамических систем в данном случае понимать дифференциальные уравнения движения процесса $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots \tilde{x}_{n_1}(t))^T$ (выходы) и внешнее воздействие $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2(t), \ldots \tilde{z}_{m_1}(t))^T$ (входы), $(\cdot)^T$ – знак транспонирования. Например, в случае линейной динамической системы математическое описание может иметь следующий вид [1]:

$$\dot{\tilde{x}} = C_1 \tilde{x} + D_1 \tilde{z}\,, \qquad (1)$$

где C_1, D_1 есть матрицы с постоянными коэффициентами.

Предположим, что уравнение наблюдения имеет вид:

$$\tilde{y} = F_1 \tilde{x}\,,$$

где $\tilde{y}(t) = (\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \ldots \tilde{y}_{n_1}(t))^T$, F_1 – квадратная невырожденная матрица с постоянными коэффициентами. Внешнее воздействие $\tilde{z}$ предполагается неизвестным, согласно первому подходу.

В случае, если часть внешних воздействий известна, то этот случай можно свести к рассматриваемому, используя линейность динамической системы.

Будем рассматривать известную переменную состояния $x_j(t)$ как два известных внутренних воздействия $d_j \tilde{x}_j(t)$ и $[-d_j \tilde{x}_j(t)], 1 \le j \le n_1, d_j$ – постоянные. Такая интерпретация переменной состояния позволяет упростить исходную систему. Будем называть такое преобразование « j сечением» исходной системы [1,2]. Во многих случаях после ряда «сечений» исходная система (1) преобразуется в некоторую подсистему, у которой известна по крайней мере одна переменная состояния, например, $\tilde{x}_1(t) = \tilde{x}(t)$ и известны все скалярные внешние воздействия $\tilde{z}_k(t), k = 2,\ldots,m_1$, кроме одного, например, $\tilde{z}_1(t)$. Далее, с использованием импульсной переходной функции можно записать уравнение относительно неизвестной скалярной функции $\tilde{z}_1(t)$:

$$A_p\, z_1 = \int_0^t K_1(t-\tau)\,\tilde{z}_1(\tau)\,d\tau = \tilde{u}_1(t) = B_1 \tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1 \in X\,, \qquad (2)$$

где $K_1(t-\tau)$ – известное ядро, A_p – оператор определенной структуры, $A_p : Z \to U$; $B_1 : X \to U$; X, U, Z – нормированные функциональные пространства. Используя иной набор «сечений» исходной системы (1), можно получить аналогичные уравнения для всех остальных неизвестных скалярных функций $\tilde{z}_k(t),\ k = 2,\ldots,m_1$. В общем случае, эти уравнения можно представить в виде:

$$A_p z = B_p \tilde{x}_\delta\,. \qquad (3)$$

Если с помощью ряда «сечений» не удается выделить подсистему с одним неизвестным скалярным внешним воздействием, тогда приведенные рассуждения теряют силу.

Таким образом, синтез адекватного математического описания сводится к решению нескольких интегральных уравнений типа (3) с целью формирования вектор-функции внешних $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2(t), \ldots \tilde{z}_{m_1}(t))^T$, которая совместно с математической моделью (1) будет давать результаты математического, совпадающие с экспериментальными данными (измерениями) с точностью определения правой части уравнения (3) [1,2,4,5].

Характерной чертой для рассматриваемых задач является то, что оператор A_p в уравнении (3) является вполне непрерывным [1,6].

Будем предполагать, что исходные данные $\tilde{x}_\delta(t) = (\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_{n_1}(t))^T$ получены экспериментальным путем с некоторой известной априори погрешностью:

$$\| x_T - \tilde{x}_\delta \|_X \le \delta\,, \qquad (4)$$

где x_T – точные исходные данные.

При выполнении конкретных расчетов следует учитывать, что операторы A_p, B_p зависят от вектора параметров p математической модели движения динамической системы, который определяется приближенно с некоторой погрешностью. Таким образом, будем полагать, что выполняются неравенства:

$$\left\| A_p - A_T \right\|_{Z \to U} \le h, \quad \left\| B_p - B_T \right\|_{X \to U} \le d, \tag{6}$$

где A_T, B_T – точные операторы в уравнении (4), h, d – известные величины.

Проверка адекватности математического описания (математической модели физического процесса в совокупности с моделью внешнего воздействия) сводится к проверке выполнения неравенства

$$\left\| A_p z - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U \le \varepsilon, \tag{5}$$

где ε – const, $\varepsilon > 0$, ε – требуемая точность совпадения с экспериментом.

Такая степень адекватности математического описания будет обеспечена, если решение уравнения (3) выполнить с точностью исходных данных (правой части) равной ε.

Если величину ε в неравенстве (5) выбирать волевым способом, то результаты проверки адекватности будут зависить от субъективных факторов. Поэтому представляет смысл конструировать критерии проверки адекватности, в которых величина ε определяется объективными факторами.

Очевидно, что если операторы A_p, B_p не будут изменяться в будущем при математическом моделировании, то в качестве ε можно взять величину $\left\| B_p \right\| \cdot \delta$. Этот вывод следует из оценки

$$\left\| A_p z_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\| = \left\| B_p x_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\| \le \left\| B_p \right\| \cdot \left\| x_T - \tilde{x}_\delta \right\| \le \left\| B_p \right\| \cdot \delta, \tag{7}$$

где $A_p z_T = B_p x_T$.

Естественно, что ε не может быть меньше величины $B_0 \delta$, $B_0 = \sup_p \left\| B_p \right\|$.

Очевидно, что при выполнении неравенства (5) операторы A_p, B_p и функция z связаны между собой. Нетрудно показать, что при фиксированных операторах A_p, B_p в (5) и любом ε существует бесконечно много различных функций z, которые будут удовлетворять неравенству (5) [1,6]. И наоборот, при некоторой фиксированной функции z существует бесконечно много различных операторов A_p, B_p, для которых выполняется (5) [1,6].

Если учитывать погрешность операторов A_p, B_p, тогда в неравенстве (5) величину ε следует выбирать по иному алгоритму. Будем предполагать, что существуют точные операторы A_T, B_T, удовлетворяющие неравенствам (8), для которых выполняется равенство

$$B_T x_T = u_T = A_T z_T,$$

где z_T – точное решение уравнения (3).

Тогда справедлива оценка

$$\left\| A_p z_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U = \left\| A_T z_T - A_T x_T + A_p x_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U \le \left\| A_T - A_p \right\|_U \left\| z_T \right\|_U +$$
$$+ \left\| A_T z_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U \le h \left\| z_T \right\|_Z + \left\| B_T x_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U \le$$

$$\le h\| z_T\|_Z + \| B_T x_T - B_p x_T\|_U + \| B_p x_T - B_p x_\delta\|_U \le h\| z_T\|_Z + d\cdot\| x_T\|_X + \| B_p\|\cdot\delta .$$

Таким образом, можно принять

$$\varepsilon = h\| z_T \|_Z + d\cdot\| x_T \|_X + \| B_p\|\cdot\delta . \tag{8}$$

Оценка (8) является объективной, но слишком грубой, если учесть , что величины h, d могут быть вычислены только, если известны точные операторы A_T, B_T. Кроме того, величина $\| z_T\|_Z$ не является априори известной. Таким образом, оценка (8) не является конструктивной. Хотя величина $\| z_T\|_Z$ легко оценивается через известные величины $\| \tilde{x}_\delta\|_Z$ и δ:

$$\| x_T \|_X \le \| x_T - \tilde{x}_\delta + \tilde{x}_\delta\|_X \le \| x_T - \tilde{x}_\delta\|_X + \| \tilde{x}_\delta\| \le \delta + \| \tilde{x}_\delta\| .$$

Пусть z_p есть решение экстремальной задачи:

$$\Omega[z_p] = \inf_{z\in Q_{\delta,p}} \Omega[z], \tag{9}$$

где $\Omega[z]$ – стабилизирующий квазимонотонный функционал [3,4],

$$Q_{\delta,p} = \{z : \| A_p z - B_p \tilde{x}_\delta\| \le \| B_p\|\cdot\delta\} .$$

Очевидно, что любая функция из множества $Q_{\delta,p}$, включая z_p, будет удовлетворять условию адекватности (5) при $\varepsilon = \| B_p\|\cdot\delta$.

В работах [7,8] предложено несколько нестандартных задач построения адекватного математического описания. Например, возможно рассмотреть следующую задачу определения модели внешнего воздействия в рамках первого подхода:

$$\inf_{A_p, B_p} \inf_{z\in Q_{\delta,p}} \Omega[z] = \inf_{A_p, B_p} \Omega[z_p] = \Omega[z_p^0] . \tag{10}$$

В этом случае оценка адекватности может иметь вид:

$$\left\| A_p z - B_p \tilde{x}_\delta\right\| \le h \left\| z_p^o\right\| + d \left\| \tilde{x}_\delta\right\| + \left\| B_p\right\|\cdot\delta .$$

При этом использовалось свойство $\left\| A_p z_p - B_p \tilde{x}_\delta\right\| = \left\| B_p\right\|\cdot\delta$ регуляризованного решения для квазимонотонных функционалов $\Omega[z]$ [8,9].

Для экстремальной задачи

$$\sup_{A_p, B_p} \inf_{z\in Q_{\delta,p}} \Omega[z] = \sup_{A_p, B_p} \Omega[z_p] = \Omega[z_p^1] \tag{11}$$

оценка адекватности (5) имеет вид с величиной ε равной

$$\varepsilon = h \left\| z_p^o\right\| + d \left\| \tilde{x}_\delta\right\| + \left\| B_p\right\|\cdot\delta . \tag{12}$$

Для экстремальной задачи

$$\inf_{A_p, B_p} \left\| A_p z_p\right\| = \left\| A_{p^0} z_{p^0}\right\| \tag{13}$$

оценка адекватности (5) имеет вид с величиной ε равной

$$\varepsilon = \left\| A_p - A_{p^0}\right\| \left\| z_{p^0}\right\| + \left\| B_p - B_{p^0}\right\| \left\| \tilde{x}_\delta\right\| . \tag{14}$$

Для экстремальной задачи

$$\sup_{A_p, B_p} \left\| A_p z_p\right\| = \left\| A_{p^1} z_{p^1}\right\| \tag{15}$$

оценка адекватности (5) имеет вид с величиной ε равной

$$\varepsilon = \left\| A_p - A_{p^1} \right\| \left\| z_{p^1} \right\| + \left\| B_p - B_{p^1} \right\| \left\| \tilde{x}_\delta \right\| . \tag{16}$$

Таким образом, для различных алгоритмов построения моделей внешних воздействий, которые дают адекватные результаты математического моделирования в рамках первого подхода существуют различные объективные оценки адекватности.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. В работе рассматривается проблема синтеза адекватного математического описания для физических процессов, поведение которых хорошо описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрен один из возможных подходов решения указанной проблемы. Предложены объективные критерии оценки адекватности математического описания изучаемого процесса.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Menshikov Yu.L. Identification of Models of External Loads/ Yu.L. Menshikov // Proc. of ICINCO 2007, May 9-12, 2007, Angers, France. – P. 376–379.
2. Меньшиков Ю.Л. О адекватности результатов математического моделирования/ Ю.Л. Меньшиков// Сб.трудов конф. Моделирование–2008, 16-18 мая, 2008.– Киев, 2008. – С.119 – 124.
3. Спепашко В.С. Метод критических дисперсий как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования/ В.С. Спепашко // Проблемы управления и информатики. – 2008. – №2.– С.8–26.
4. Menshikov Yu. Algorithms of construction of adequate mathematical description of dynamic system/ Yu. Menshikov // 6-th Vienna Conference on mathematical Modelling. –Vienna, Full Papers CD Volume, Vienna Univ. of Technology. – 2009. – P.2482-2485. ISBM 978-3-901608-35-3.
5. Menshikov Yu. Synthesis of Adequate Mathematical Description as Inverse Problem/ Yu. Menshikov//Proc. 5th Int. Conference “Inverse Problems: Modeling & Simulation”, Antalya, Turkey, May 24-29, 2010. – 2010. – P.185 – 186.
6. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
7. Меньшиков Ю.Л. Идентификация моделей внешнего воздействия/ Ю.Л. Меньшиков // Вестник ХГТУ.– Херсон,2002.– №2 (15).– С.326 – 329.
8. Меньшиков Ю.Л. Идентификация моделей внешних воздействий/ Ю.Л.Меньшиков , Н.В. Поляков. – Дніпропетровськ: Наука та Освіта, 2009. – 188 с.

МЕНЬШИКОВ Юрий Леонидович – к.т.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений Днепропетровского национального университета.

Научные интересы:

– методы решения обратных задач, общие вопросы математического моделирования.

УДК 551. 508

В.Ф. Миргород, И.М.Гвоздева

МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ НАПРАВЛЕНИЯ ВЕТРА

Постановка проблемы. Использование возобновляемых источников энергии стало насущной необходимостью на современном этапе развития энергетики. Промышленные ветроэнергетические установки (ВЭУ) имеют экологические преимущества по сравнению с традиционными источниками энергии, так как ветряные электростанции не дают вредных выбросов, не нуждаются в дорогостоящем топливе и т.д.

В настоящее время в мировом парке эксплуатации ВЭУ более 90% составляют осевые горизонтальные установки. Максимальная эффективность таких установок может быть достигнута лишь с условием обеспечения стабильной коллинеарности оси ветрового колеса и направления ветра. С этой целью в составе ВЭУ предусматриваются системы измерения направления ветрового потока и механизмы ориентирования на ветер для беспрерывного отслеживания ветровой обстановки, а также для поиска линии направленности с как можно большим ветровым ресурсом и поворота ветрового колеса в таком направлении. Поэтому разработка измерителей направления ветра аэродинамического типа, обладающих минимальными динамическими и статическими ошибками, на основе построения математических моделей их движения в обтекающем ветровом потоке является актуальной теоретической и практической задачей.

Анализ публикаций по теме исследования. Методы измерения параметров ветрового потока, в том числе направления ветра, детально рассмотрены в [1,2]. Анализ технических характеристик измерителей направления ветра и методика их экспериментального установления приведены в [3,4]. Альтернативные способы измерения параметров ветрового потока на основе акустических анемометров предложены в [5]. Известны и применяются датчики измерения направления ветра Wind direction sensor 2750 фирмы AANDERAA INSTRUMENTS (Норвегия), WAV 151 фирмы VAISALA (Финляндия), KW-010 (Япония) и другие. Однако описанные в литературе методики расчета измерителей направления ветрового потока носят преимущественно эмпирический характер, не описывают динамические режимы и не позволяют установить характеристики проектируемых устройств. Поэтому при проектировании измерителей направления ветра необходимо проведение предварительных расчетов их параметров на основе построения соответствующих математических моделей, в том числе аэродинамики.

Целью работы является создание математических моделей проектируемых измерителей направления ветра для предварительной оценки их характеристик и выбора оптимального сочетания параметров.

1. Основные допущения. В настоящей работе рассматриваются измерители направления ветра аэродинамического типа, которые используют энергию ветрового потока для разворота указателя направления относительно неподвижной опоры. Моделирование аэродинамики осуществляется для указателей направления, выполненных в виде плоского тела, толщина которого d много меньше характерного размера ($d<<в$) в виде тонкой пластинки либо крылового профиля. Под характерным размером понимается размер тела, измеренный по потоку. Полагается, что указатель направления уравновешен и сбалансирован относительно вертикальной оси вращения с помощью тела вращения аэродинамической формы малых размеров.

2. Моделирование статического режима. В статическом режиме угол α между вектором скорости потока $\vec{v}$ и плоскостью ветроуказателя (или угол атаки $\varphi = 90° - \alpha$)

является постоянной величиной, $d\varphi / dt = 0$. Момент аэродинамических сил M_a уравновешен моментом сопротивления в узле подвески, т.е. моментом трения покоя $M_{ТП}$ (рис. 1). Наибольшее значение момента M_a достигается при α=0 (φ = 90°). Для малых отклонений от этого положения справедливо соотношение [3]:

$$c_0 \cdot \frac{\rho v_0^2}{2} \cdot S \cdot l \cdot c_1 \cdot \cos^2 \alpha = M_{ТП}, \qquad (1)$$

где: ρ – плотность атмосферного воздуха, в нормальных условиях ρ =1,29 [кг/м^3], v_0 – скорость ветра [м/с], s – площадь поверхности ветроуказателя [м^2], l – плечо аэродинамических сил [м], c_0 – коэффициент, характеризующий поток (равномерность, турбулизацию), c_1 – коэффициент лобового сопротивления ветроуказателя.

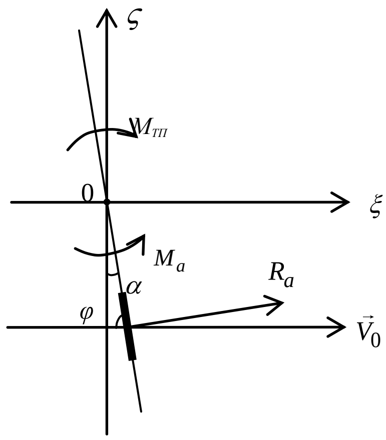


Рис. 1. Статический режим

Плечо аэродинамических сил равно расстоянию между осью вращения и точкой приложения аэродинамических сил, которая в первом приближении соответствует геометрическому центру поверхности. В условиях испытаний в аэродинамической трубе рекомендуемое значение коэффициента c_0=(0,7…0,9) [4]. Рекомендуемый диапазон для коэффициента лобового сопротивления для пластинки, установленной перпендикулярно потоку составляет c_1 = (1,28…1,56) [3, 6]. Согласно (1) получаем ориентировочную формулу: $M_{ТП} = (0,6...0,9) v_0^2 S \cdot l$.

Допустимое значение момента трения (момент трогания) для ответственных узлов вращения составляет 0,5…5 гс·см [4, 7], следовательно, для обеспечения момента трогания должно выполняться условие:

$$Sl > 5,2 \cdot 10^{-4} \left[м^3 \right]. \qquad (2)$$

Пороговая скорость измерителя направления ветра соответствует углам атаки ±15° [4]. При неподвижном состоянии измерителя уравнение моментов имеет вид:

$$c_0 \cdot \frac{\rho v_0^2}{2} \cdot S \cdot l \cdot c_2(\varphi) = M_{ТП}, \qquad (3)$$

где согласно [8] $c_2(\varphi) = c_x(\varphi) \sin\varphi + c_y(\varphi) \cos\varphi$. Коэффициенты аэродинамического сопротивления являются сложными функциями угла атаки. Для диапазона малых отклонений выполняются соотношения [6, 7]:

$$c_y(\varphi) >> c_x(\varphi), \qquad (4)$$

$$c_y(\varphi) \approx \left(dc_y(\varphi)/d\varphi\right)\cdot\varphi = k_{nc}\cdot\varphi, \qquad (5)$$

где k_{nc} – коэффициент "подъемной" силы в диапазоне (0,9…1,2).
Из (4) следует:

$$v_{ОП}^{(15)} = \sqrt{2M_{ТП}\big/\rho\cdot S\cdot l\cdot c_0\cdot c_2\left(15°\right)}\,.$$

С учетом (5) получаем рабочее соотношение для ориентировочной оценки пороговой скорости

$$v_{ОП}^{(15)} = \left(2{,}3...2{,}6\right)\sqrt{M_{ТП}/S\cdot l}. \qquad (6)$$

Для значений $M_{ТП} < 0.5$ гс·см, $v_{ОП} < 0.5$ м/с согласно (6) должно выполняться условие $S\cdot l > 10\cdot 10^{-4}\left[\text{м}^3\right]$.

Под статической ошибкой $\Delta\varphi_{CT}$ измерителя направления ветра аэродинамического типа понимается максимальное отклонение пластинки ветроуказателя от направления ветрового потока в неподвижном состоянии при $v_0 < v_П$, которая может быть оценена по формуле: $\Delta\varphi_{CT} = 2M_T\big/\rho v_0^2\cdot S\cdot l\cdot k_{nc}\cdot c_0$. Для ориентировочных расчетов используется соотношение: $\Delta\varphi_{CT} = \left(1{,}4...1{,}9\right)M_T\big/v^2\cdot S\cdot l$.

3. Моделирование динамического режима. При движении ветроуказателя в потоке воздуха (рис. 2) на него действуют аэродинамические и механические моменты, рассмотренные ниже.

Аэродинамические моментыопределяются выражением:

$$M_a = \frac{\rho v^2}{2}S\cdot l\left[c_x\left(\varphi+\beta\right)Sin\left(\varphi+\beta\right)+c_y\left(\varphi+\beta\right)\cdot\cos\left(\varphi+\beta\right)\right],$$

где M_a – аэродинамический момент вращения, v – относительная скорость движения центра масс, определяемая по формуле:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}, \qquad (7)$$

$u = l\,d\varphi/dt$ – радиальная скорость центра масс,

$$v^2 = \left(v_0 + u\sin\varphi\right)^2 + \left(u\cdot\cos\varphi\right)^2 = \left(v_0 + l\left(d\varphi/dt\right)\sin\varphi\right)^2 + \left(l\left(d\varphi/dt\right)\cos\varphi\right)^2,$$

β – угол сноса потока, определяемый по формуле:

$$\beta = arctg\left(\left(u\cdot\cos\varphi\right)/\left(v_0 + u\cdot\sin\varphi\right)\right) = arctg\left(\left(l\left(d\varphi/dt\right)\cos\varphi\right)/\left(v_0 + l\left(d\varphi/dt\right)\sin\varphi\right)\right),$$

$\left(\beta+\alpha\right)$ – эффективный угол атаки.

$$M_{AT} = \mu\cdot S\cdot l\cdot u = \mu\cdot S\cdot l^2\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (8)$$

где M_{AT} – аэродинамический момент вязкого трения,

$\mu = 0{,}18 \cdot 10^{-4} \left[\text{нс}/\text{м}^2 \right]$ – коэффициент вязкости воздуха.

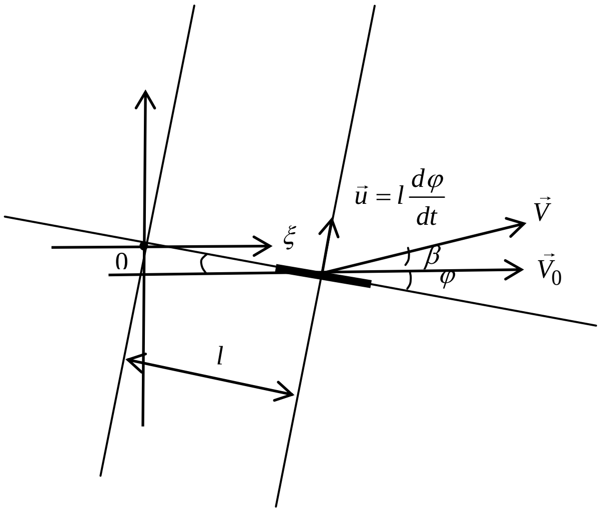


Рис. 2. Динамический режим

Механические моменты рассчитываются следующим образом:

$$M_u = J\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{9}$$

$$M_T = \left(M_{ТП} + M_{ТД}\right), \tag{10}$$

M_u, M_T – соответственно момент инерции и момент трения, $M_{ТП}$ – момент трения покоя, $M_{ТД} = \left(M_{ТДК} sign\left(d\varphi/dt\right) + k_{тв} \cdot \left(d\varphi/dt\right)\right)$ – момент трения движения, состоящий из Кулоновского $M_{ТДК}$ и вязкого трения в опоре с коэффициентом $k_{тв}$.

Уравнение равновесия моментов является уравнением динамики:

$$\sum M_j = 0. \tag{11}$$

Сумма компонент, описываемых формулами (11…14), составляет уравнение динамики (15), представляющее собой нелинейное дифференциальное уравнение, решение которого возможно только методами численного интегрированя.

Возможные упрощения уравнения (11) с минимальным снижением точности обусловлены следующими обстоятельствами:

1) Моменты вязкого трения пренебрежимо малы по сравнению с другими слагаемыми в (11). Действительно, как это установлено согласно (2):

$$M_{AT} = 0{,}18 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1 \cdot d\varphi/dt = 0.18 \cdot 10^{-8}\, d\varphi/dt,$$

т.к. $d\varphi/dt = \omega$ не превосходит единиц *рад/с*, то $M_{AT} \sim 10^{-8} \left[\text{н} \cdot \text{м}\right] << M_a, M_{ТП}$.

Введя обозначение $k_{тв}\, d\varphi/dt = \mu' S' R \cdot d\varphi/dt = M'_{ТД}$, где μ' – коэффициент трения контактной пары, S' – площадь сопротивления вращающих частей в узле подвески, R – внутренний радиус узла вращения, получаем: $M'_{ТД} << M_a, M_{ТП}$.

2) Для малых отклонений, для которых справедливы приближения $\sin x \approx x$; $\cos x \approx 1$ допустимы соотношения (4), (5). В этом случае:

$$\beta \approx \frac{l}{v_0}\frac{d\varphi}{dt},\ v^2 \approx v_0^2 + 2v_0 l\frac{d\varphi}{dt}\varphi,\ c_y\left(\varphi + \beta\right) = k_{nc}\left(\varphi + \beta\right),$$

$$M_a \approx \frac{1}{2}\rho S\cdot l\left(v_0^2+2v_0 l\frac{d\varphi}{dt}\varphi\right)\left[k_{nc}\left(\varphi+\frac{l}{v_0}\frac{d\varphi}{dt}\right)\right]\approx\frac{\rho v_0^2}{2}S\cdot l\cdot k_{nc}\cdot\varphi+\frac{\rho v_0}{2}Sl^2\frac{d\varphi}{dt},$$

отсюда уравнение динамики имеет вид:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\rho v_0}{2}S\cdot l^2\cdot k_{nc}\frac{d\varphi}{dt}+M_{ТД}sign\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\rho v_0^2}{2}S\cdot l\cdot k_{nc}\cdot\varphi=M_{ТП}. \qquad (12)$$

Собственная частота колебаний определяется соотношением:

$$\omega_0=\sqrt{\rho v_0^2\cdot S\cdot l\cdot k_{nc}/2J} \qquad (13)$$

и имеет расчетную оценку $\omega_0=(0,76...0,88)v_0\sqrt{S\cdot l/J}$. Период собственных колебаний равен: $\tau_0=2\pi/\omega_0=\left[(8,26...7,14)/v_0\right]\sqrt{J/S\cdot l}$.

Аэродинамический коэффициент демпфирования определяется выражением:

$$\varsigma_a=\left(\frac{\rho v_0}{2}S\cdot l^2 k_{nc}\right)\Bigg/\sqrt{2J\rho v_0^2 S\cdot l\cdot k_{nc}}=\left(2\sqrt{2}\right)^{-1}\sqrt{\rho\cdot S\cdot l\cdot k_{nc}/J\cdot l} \qquad (14)$$

и допускает расчетную оценку:

$$\zeta_a=(0,38...0,48)\sqrt{Sl/J}\cdot l. \qquad (15)$$

Следует отметить, что значение ζ_a, определяемое по формуле (15), меньше фактически наблюдаемых и приведенных в [8]. Для колебательных режимов с малым затуханием допустимо приближение:

$$M_{ТД}sign\frac{d\varphi}{dt}\approx k_м\left(A_\omega\right)\cdot\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (16)$$

где $k_м=2M_{ТД}/\left(\pi A_\omega\right)$ [8]; A_ω – амплитуда колебаний скорости. Так как $A_\omega=\omega_0 A_\varphi$, где A_φ – амплитуда колебаний скорости угла, ω_0 – собственная частота (13), то

$$k_м=2M_{ТД}/\pi\omega_0 A_\varphi \text{ или } k_м=\left(2M_{ТД}/\pi A_\varphi\right)\cdot\sqrt{2J\Big/\left(\rho v_0^2 S\cdot l\cdot k_{nc}\right)},$$

Механический коэффициент демпфирования равен:

$$\xi_м=\frac{2M_{ТД}}{\pi A_\varphi}\sqrt{2J\Big/\left(\rho v_0^2 S\cdot l\cdot k_{nc}\right)}\cdot\left(\sqrt{2J\rho v_0^2 S\cdot l\cdot k_{nc}}\right)^{-1}=2M_{ТД}\Big/\left(\pi A_\varphi\rho v_0^2 S\cdot l\cdot k_{nc}\right). \qquad (17)$$

Соотношение (17) позволяет установить механический коэффициент демпфирования по заданным параметрам: моменту трения движения в опоре и начальной амплитуде колебаний. Поскольку величина $M_{ам}=\frac{\rho v_0^2}{2}S\cdot l\cdot k_{nc}\cdot A_\varphi$ является амплитудным значением аэродинамического момента, то (17) имеет простую интерпретацию: $\varsigma_м=M_{ТД}/\left(M_{ам}\cdot\pi\right)$. Поскольку $M_{ам}>M_{ТП}$, $M_{ТД}<M_{ТП}$, то верхняя достижимая граница для $\zeta_м$ равна $\zeta_м<1/\pi=0,318$. В реальных узлах вращения $M_{ТД}=\left(0,3...0,9M_{ТП}\right)$, поэтому $\varsigma_м\cong\left(0,1...0,3\right)$, что полностью соответствует [8]. Коэффициент полного демпфирования равен сумме (14) и (17).

4. Сравнение результатов расчета с данными. Расчетные соотношения для оценки пороговой скорости, рассмотренные в п. 2, были проверены на примере измерителей, перечисленных выше, а также датчика направления ветра П453-Е производства ОАО "Элемент". Данные, приведенные в таблице 1 позволяют сравнить результаты расчета момента трогания с данными, полученными экспериментально (или заявленными в документах изготовителя).

Таблица 1 – Результаты расчетной оценки пороговой скорости и данные изготовителя

Тип датчика	$S \cdot l \cdot 10^{-4}$, м^3	$M_{ТП} \cdot 10^{-5}$, н·м	Порог трогания, м/с	
			Расчет $v_{ОП}^{(15)}$	Данные изготовителя
П453-Е 1	2,0	5,5… 2,2	1,2… 1,7	1,5
П453-Е 1М	4,4	6,6… 9,9	0,9… 1,2	0,6… 0,7
WDS 2750	16,6	5,0	0,4… 0,5	0,3
WAV 151	~18	~5	~0,4	0,4
KW-010	~13	~5	~0,5	менее 2
Навигатор	~25	~5	~0,4	менее 1

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Выполненное сравнение свидетельствует о достаточно хорошем приближении расчетной оценки к результатам эксперимента и позволяет сделать вывод о целесообразности использования приведенных соотношений для предварительных расчетов при проектировании измерителей направления ветра. Перспективы дальнейших исследований заключаются в установлении на основе полученных математических моделей динамики частотно-избирательных свойств измерителей направления ветрового потока.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Качурин Л.Г. Электрические измерения аэрофизических величин / Л.Г. Качурин. – М.: Высш. шк., 1967. – 488 с
2. Афиногенов Л.П. Аппаратура для исследования приземного слоя атмосферы / Л.П. Афиногенов, С.И. Грушин, Е.В. Романов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1977. – 320 с.
3. Стернзат М.С. Метеорологические приборы и измерения / М.С. Стернзат. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 392 с.
4. Фатеев Н.П. Поверка метеорологических приборов / Н.П. Фатеев. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 310 с.
5. Ранченко Г.С. Метрологические характеристики трёхкомпонентного фазового акустического анемометра / Г.С. Ранченко, В.Ф. Миргород, Н.П. Волошина, И.М. Гвоздева // Метеорология та гидрология. – 2004. – Вып. 48. – С. 140-146.
6. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды / Д.И. Блохинцев. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
7. Парфенов Е.М. Электромеханические устройства РЭА / Е.М. Парфенов, В.В. Чанцев. – М.: Советское радио, 1972. – 112 с.
8. Петров Н.А. Метеорологические измерения / Н.А. Петров. – Л.: ЛВИКА им. А.Ф. Можайского, 1971. – 337 с.

МИРГОРОД Владимир Федорович – к.т.н., зам. директора по научной работе ОАО “Элемент”.

Научные интересы:

– математическое и компьютерное моделирование динамических процессов

ГВОЗДЕВА Ирина Маратовна – д.т.н., ведущий научный сотрудник Одесского политехнического университета.

Научные интересы:

– математическое и компьютерное моделирование волновых процессов и полей.

УДК 517.929:378.02

О. І. Нечепуренко, Т.А. Григорова, В.П. Ляшенко

ЕКСПРЕС-АНАЛІЗ СТАНУ ІМУННОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Загальна постановка питання. Останнім часом зростає об'єм інформаційного забезпечення медичних технологій та послуг. Впровадження інформаційних систем у медицину стає одним із актуальних завдань сучасної науки [1].

Аналіз публікацій за темою дослідження. Одним із напрямів такого впровадження є діагностка та профілактика імунної недостатності [2]. З цією метою розроблено загальний алгоритм експрес-аналізу та створено інтерактивну інформаційну систему визначення імунного стану людини [3]. Для цього було проаналізовано існуючі методи та системи даного типу, що дозволило визначити оптимальний метод експрес-діагностики. Таким методом є метод тепловізійної діагностики. Теоретичною базою цього методу стало відкриття В.Р. Вограліка, М.У. Вограліка і М.В. Голованової [2, 4, 5]. Роботи [1, 6, 7] були використані для проектування, реалізації та аналізу інформаційної системи експрес-аналізу імунодефіциту. Їх основні принципи були закладені у модель інформаційної системи, що розробляється.

Мета дослідження. Метою роботи є розробка методики комп'ютерної експрес-діагностики стану імунної системи людини на базі математичної моделі температурного поля в активних точках грудної клітини.

Етапи дослідження. За основу для розробки проекту інтерактивної системи було взято стандарти автоматизованої інформаційної структурованої по типу задачі системи. Завдяки інструментарію проведення лікувально-профілактичних заходів за своїм характером обробки даних, розроблювана медична консультативно-діагностична приладо-комп'ютерна інформаційна система базового рівня є дорадчою [1, 6]. Система працює в умовах безпосереднього контакту з об'єктом дослідження (пацієнтом) у реальному режимі часу. Вона має три основні складові: прилад (пірометр або тепловізор), програмне забезпечення (алгоритм роботи та методики проектування) та медичну складову (метод тепловізійної діагностики та методики проведення вимірювань).

Для проектування системи розроблено діаграми варіантів застосування системи із використанням сучасної технології UML (рис.1). Система має два концептуально різних рівня реалізації: інтерфейсна версія для ПК та клієнт-серверний Web-додаток. Спільним ядром обох цих систем є блок базового аналізу, що ґрунтується на алгоритмі тепловізійної діагностики.

Для зменшення навантаження на мережний трафік та збільшення швидкості роботи системи було оптимізовано взаємозв'язки різних, по фізичним властивостям, її частин.

Система включає у себе аналітичні алгоритми розгалуження із ситуаційним їх вибором, базами даних, інтерфейс користувача та модуль налаштування системи, який дозволяє корегувати критерії базового алгоритму та спеціальні параметри аналізу (рис.2).

Під час практичної апробації системи у медичних установах м. Кременчука (2003-2010 рр.) було проведено більше чотирьох тисяч вимірювань і визначень розрахункових показників.

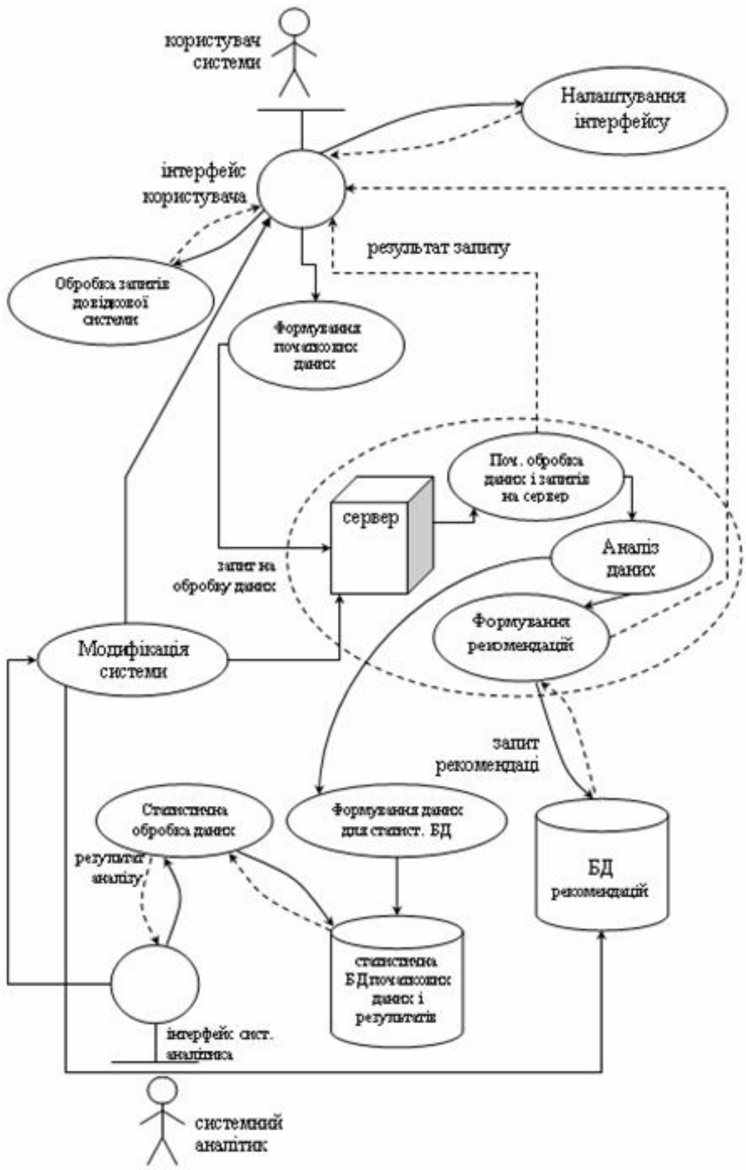


Рис.1 Діаграма варіантів використання системи

За результатами обробки даних було з’ясовано, що використання вимірювальних приладів у ході проведення аналізу і людський чинник у визначенні положення точок вимірювання приводить до виникнення похибок вхідних даних, які впливають на точність визначення вихідних параметрів інформаційної системи. Враховуючи розрахунок розширеної невизначеності проведених вимірювань [8], була розроблена система усунення похибки вимірювань (уточнення даних), яка уведена в основний алгоритм обробки вхідних даних.

Ефективність роботи системи, особливо її Інтернет версії залежить від формування рекомендацій, які є складовою частиною системи. Як з’ясувалось у ході клінічних випробувань для ефективної дії рекомендацій необхідно використовувати індивідуальний підхід. Усунення імунної недостатності відбувається шляхом локального опромінювання шкіри приладами різного типу випромінювання. Щоб отримати максимальну ефективність від використання приладів випромінювання необхідно установити час дії тепла у залежності від показника вимірювання. Щоб досягти цього експериментальним шляхом треба досліджувати десятки тисяч хворих, тому доцільним є створення математичної моделі, яка б дозволила з’ясувати, як змінюється система кровообігу під впливом дії теплового опромінювання приладами з різним типом випромінювання. Основою математичної моделі кровообігу є система крайових задач для диференціальних рівнянь фільтрації та теплопровідності у рухомому середовищі [10,11]. Вона дозволяє врахувати залежність швидкості руху крові по капіляру під дією температури.

Висновки і перспективи подальшого розвитку. Розроблена інформаційна система діагностики є економічною, високо інтегрованою, швидко адаптованою, а

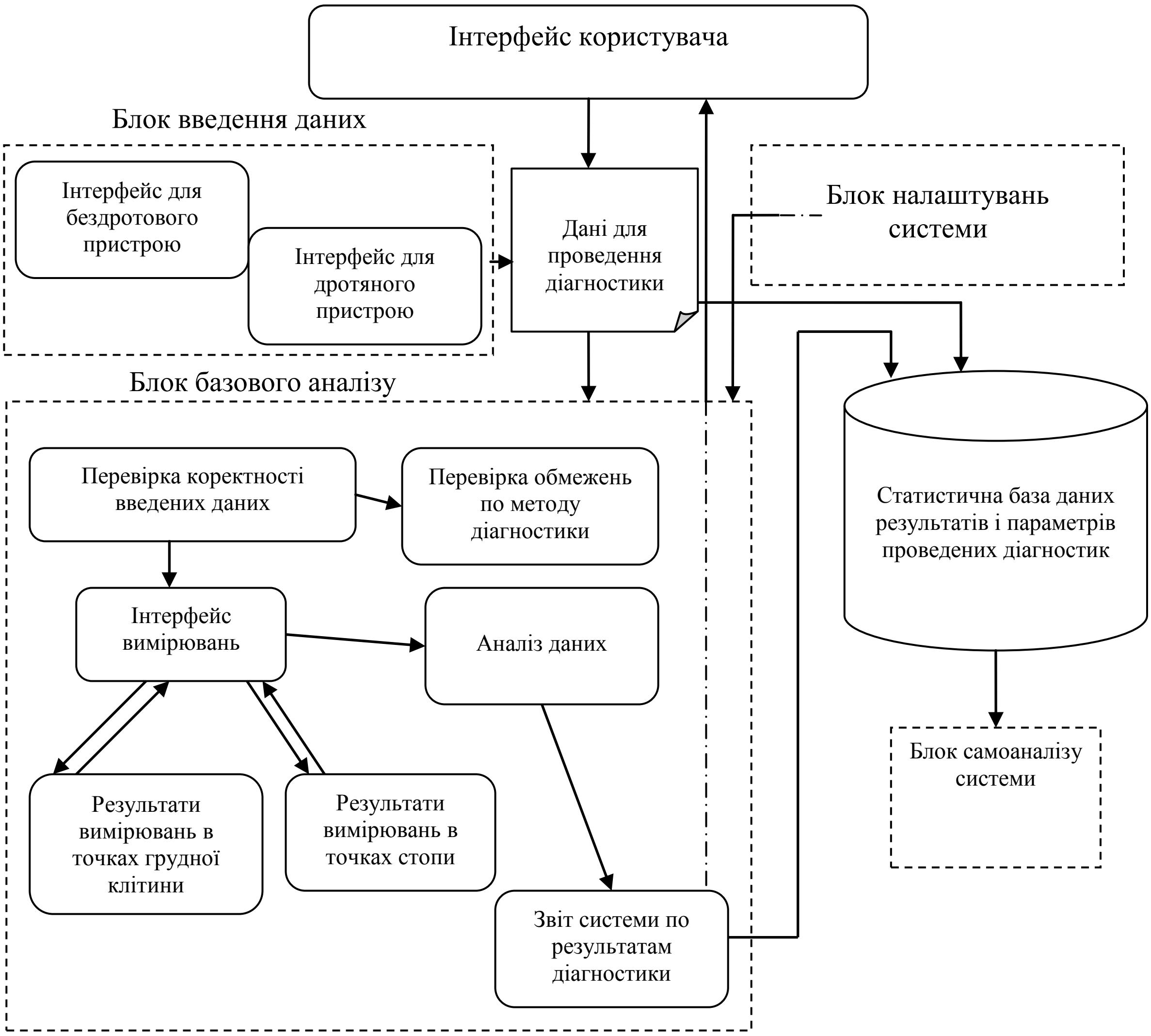


Рис. 2. Структура системи

також відповідає вимогам швидкого проведення і високої точності результатів із застосуванням доступних медичних приладів індивідуального користування. Вона може бути впроваджена у будь-яких медичних установах для попередньої оцінки загального стану здоров'я пацієнта.

Подальшим розвитком даної інформаційної системи є розв’язання проблеми індивідаульного часу впливу теплового випромінювання на ділянки тіла людини для досягнення максимального терапевтичного ефекту корекції імунного стану. З цією метою розробляється математична модель кровообігу, що враховує дію випромінювання на шкіру та його вплив на кількісний елементарний склад крові.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Дюк В.А., Информационные технологии в медико-биологических исследованиях. / В.А.Дюк, В.Л. Эмануэль . – СПб.: Питер, 2003.
2. Першин Б.Б. Антигеннеспецифическая иммунопрофилактика, иммунокоррекция и иммунореабилитация вторичных иммунодефицитных состояний/ Б.Б.Першин, С.Н.Кузьмин, В.В. Чиркин // International Journal on Immunorehabilitation – june 1997. — № 6.
3. Nechepurenko O. Computer technologies for diagnostics and preventuion of immunity system status/ O. Nechepurenko//X International PhD Workshop OWD, Gliwice:Silesian University of Technology. – 2008. – P.113-116.
4. Fruatt A. Spannungsanalis durch Warmestrahlung / A. Fruatt// PEM Process Eng. Mag. – 1983. – № 5-6. – P. 122–123.
5. Тарасов В.В. Оптическо-электронные системы визуализации и обработки оптических изображений / В.В.Тарасов, Ю.Г. Якушенко //РАСУ, ОАО Цент. Науч.-исслед. Ин-т «Циклон». – 2000. – Вып.1. – С. 3 – 18.
6. William S. Davis The Information System Consultant's Handbook. Systems Analysis and Design/ S. Davis William, C. Yen David . – CRC Press, 1998. – 800 p.
7. Громов Г.Р. Очерки информационной технологии / Г.Р. Громов.– М.: ИнфоАрт, 1992.
8. Захаров И.П. Оценивание неопределенности измерений: эволюция нормативной базы и основных подходов / И.П.Захаров, С.В.Водотыка // Журнал «Системи обробки інформації». – 2009. – № 5 (79).
9. Биофизика/ [Антонов В.Ф., Черныш А.М., Пасечник В.И. и др.]. – Владос: Москва, 2000. – 293 с.
10. Березовський А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики ч.1./ А. А. Березовський. – Киев, 1976.– 452с.
11. Ляшенко В.П. К расчету разогрева движущейся проволоки сосредоточенным источником тепла / В.П. Ляшенко // Український математичний конгрес – 2001. Математична фізика. – Київ, 2001. – С. 17 – 18.

НЕЧЕПУРЕНКО Ольга Іванівна – аспірант кафедри інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Україна.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та інформаційні технології.

ГРИГОРОВА Тетяна Альбертівна – асистент кафедри інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Україна.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та інформаційні технології.

ЛЯШЕНКО Віктор Павлович – к.ф.-м.н., доц., професор каф. інформатики і вищої математики, Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Україна.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та нелінійні задачі теплопровідності.

УДК 621.865

В.М. Нигора, І.М. Білецький

СИНТЕЗ СТРУКТУРИ НОВИХ ГІДРООЧИЩУВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ НА БАЗІ МОРФОЛОГІЧНОГО АНАЛІЗУ

Постановка проблеми, аналіз попередніх досліджень. Велика кількість факторів конструктивного, технологічного, експлуатаційного і економічного характеру, впливають на процес створення нової техніки, визначили необхідність використання системного аналізу і синтезу при проектуванні технічних об'єктів (ТО) в машинобудуванні. Однак до дійсного часу великі надії, що покладають на використання в процесі проектування обчислювальної техніки, виправдовують себе не повною мірою.

В загальній теорії прийняття рішень [1] розглядають три етапи оптимізації при створенні нових ТО. На першому етапі здійснюється вибір технічної ідеї чи принципу системи що проектується; другий етап оптимізації – це пошук раціональної структури і третій етап – визначення найкращих значень параметрів для вибраної структури.

Техніко – економічні показники систем що проектуються на третьому етапі оптимізації можуть бути покращені в середньому на 10…15%, а в деяких випадках до 30%. При використанні першого та другого етапів показники покращуються в середньому на 30…35%, а в окремих випадках в декілька раз. Більш ефективну конструкцію ТО можна отримати на перших етапах оптимізації.

В даний час системами автоматизованого проектування охоплено в більшій мірі третій рівень оптимізації, на якому можливо отримати відносно невеликий ефект.

Структурному синтезу приділяють увагу зовсім неспівставну з його змістовим наповненням і важливістю цієї задачі в загальному циклі проектування технічних об'єктів [2]. Тому актуальною є проблема розробки науково обґрунтованих методів структурного синтезу конструкцій нових ТО на ранніх етапах проектування, особливо це стосується багатогалузевого класу гідроочищувальних пристроїв (ГП).

Мета статті. Розробка методики структурного синтезу ГП і вибору раціонального варіанту конструкції за певними критеріями ефективності.

Основна частина. Задачі параметричної оптимізації на другому та третьому етапах піддаються формалізації та добре вивчені. В той час задачі першого етапу важко формалізувати і для їх вирішення існує лише незначна кількість методів.

Проблема полягає в тому, що помилка в виборі технічного рішення ГП не може бути виправлена в подальшому.

Для структурного синтезу може бути ефективним використання морфологічного підходу [3]. Він полягає в побудові морфологічної таблиці, заповнення її можливими альтернативними варіантами і виборі з усієї множини комбінацій найкращого рішення [4].

Морфологічні методи мають можливість комп'ютерної реалізації. Простір пошуку є морфологічною множиною, процес визначення цього простору – морфологічним аналізом, а пошук рішення – морфологічним синтезом. В результаті аналізу визначається множина варіантів – альтернатив, в яку входять всі технічні рішення ГП як реально існуючих конструкцій, так і потенційно можливих.

Для зниження розмірності морфологічної множини вибору варіантів встановлюють критерії, за якими оцінюється майбутнє технічне рішення (наприклад: маса, вартість, надійність, економічність), і проводиться оцінка кожного елемента морфологічної таблиці в залежності від ступеня відповідності елемента цим критеріям.

На наступному етапі здійснюється генерація варіантів, їх оцінка, першочерговий відбір і формується деяка множина раціональних варіантів для наступного аналізу. Кожен новий згенерований варіант порівнюється з попереднім і при більш високому рівні критеріїв він запам’ятовується, при нижчому відкидається.

В подальшому виконується кластеризація варіантів з використанням міри достовірності [5]. Процес кластеризації розглядається як пошук групувань однорідних об’єктів. Область дослідження звужується до декількох кластерів, які включають множину різних типів об’єктів даного класу (рис.1). Групування виконують за конструктивно - функціональними ознаками (критеріями).

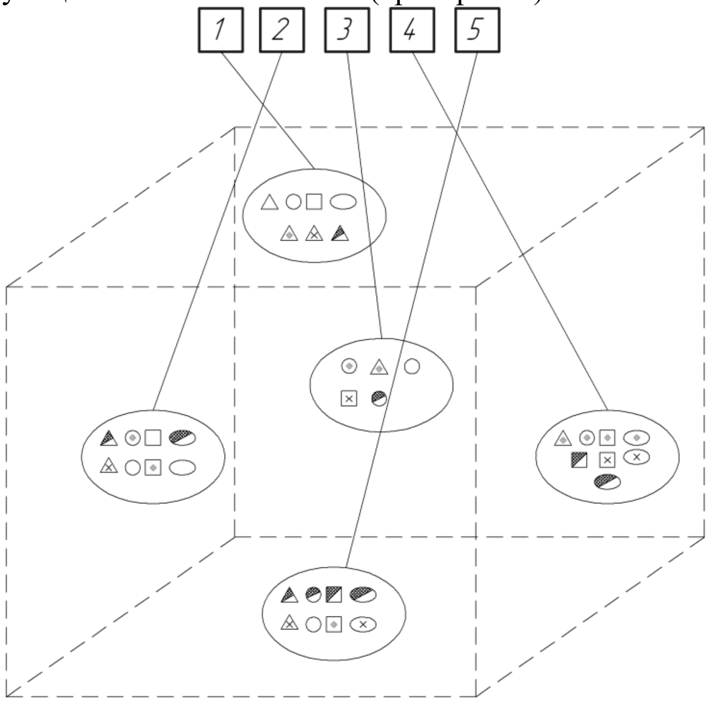


Рис.1. Групування технічних об’єктів в кластери
за конструктивно – функціональними ознаками

Вводиться степінь новизни і оцінка знайдених варіантів альтернатив. Для підвищення степені інформативності при виборі генеруються варіанти, що мають максимальну оцінку по кожному з критеріїв і "найкращі" або "ідеальні" рішення, які мають максимальну оцінку. Після вибору деякої кількості рішень виконують остаточний вибір. В процесі еволюції ГП функціонують, старіють і витісняються більш прогресивними, що відповідають зовнішнім умовам які постійно змінюються.

Розглянемо процедуру обґрунтування кількісної оцінки технологічної подібності ГП з використанням методів кластерного аналізу [3].

Нехай є n порівнюваних варіантів ГП, для кожного i-го ГП можна записати вектор, що складається і характеризує її параметри $Y = (Y_{1i}, Y_{2i}, ..., Y_{pi})$. Таким чином, усю інформацію про параметри об’єктів можна представити у вигляді матриці розміром $p \times n$:

$$У = \begin{bmatrix} У_{11} & У_{12} & ...У_{1n} \\ У_{21} & У_{22} & ...У_{2n} \\ У_{p1} & У_{p2} & ...У_{pn} \end{bmatrix} = (У_1 У_2 ... У_n). \qquad (1)$$

Щоб перейти до визначення кількісних мір подібності, необхідно передусім виконати нормування параметрів, а саме, перехід від абсолютних величин Y_k, до відносних величин $\overline{X}k$, що є відхиленням параметра від середнього значення, вираженого в долях середнього квадратичного відхилення:

$$\overline{X}\kappa = \frac{У_\kappa - \overline{У}_\kappa}{\sigma_\kappa}, \tag{2}$$

де $\overline{У}_\kappa$ - середнє значення *к* – го параметра; σ_κ - середнє квадратичне відхилення *к* – го параметра.

При переході від одного зразка машини до іншого кожен параметр приймає те або інше значення, причому міра варіювання різних параметрів різна. Можна допустити, що варіаційний ряд будь-якого параметра за своїм характером близький до рівномірного розподілу, тобто вірогідність появи певного значення параметрів в деякому інтервалі (a_k, b_κ) приблизно постійна.

Для рівномірного розподілу параметрів щільність вірогідності описується функцією:

$$\phi(X_\kappa) = \begin{cases} \dfrac{1}{b_\kappa - a_\kappa}, & при\ a_\kappa \le x_\kappa \le b_\kappa; \\ 0, & при\ X_\kappa < a_\kappa\ и\ X_\kappa > b_\kappa. \end{cases} \tag{3}$$

У даному випадку a_k - нижнє, а b_k- верхнє значення у варіаційному ряду параметра $X_к$. При рівномірному законі розподілу статистичної характеристики $\overline{У}_\kappa$ і σ_κ знаходяться таким чином [5]:

$$\overline{У}_\kappa = \frac{a_\kappa + b_\kappa}{2}; \tag{4}$$

$$\sigma_\kappa = \frac{b_\kappa - a_\kappa}{\sqrt{12}} \approx \frac{b_\kappa - a_\kappa}{3{,}46}. \tag{5}$$

Підставивши вираз (4) і (5) у формулу (2) і виконавши перетворення, отримаємо:

$$\overline{X}_\kappa = \frac{1{,}73(2У_\kappa - a_\kappa - b_\kappa)}{b_\kappa - a_\kappa}. \tag{6}$$

В результаті нормування параметрів матриця виду (1) трансформується в матрицю, що складається з нормованих параметрів :

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{pi} & X_{p2} & \dots & Xpn \end{bmatrix} = (X_1 X_2 \dots X_n). \tag{7}$$

Виділимо з цієї множини два об'єкти, наприклад, i - й і j - й об'єкти, яким відповідає вектори *Xi* і *Xj*, і кількісно оцінимо наскільки схожі ці об'єкти. У теорії кластерного аналізу мірою збіжності об'єктів і відповідно їх векторів є деяка позитивна функція $S(X_i, X_j) = S_{ij}$, яка має наступні властивості:

1) $O \le S(X_i, X_j) < 1\ для\ X_i \ne X_j$;
2) $S(X_i, X_j) = 1\ \ для\ X_i = X_j$;
3) $S(X_i, X_j) = S(X_j, X_i)$.

Величину *Sij* назвемо критерієм технологічної (параметричного) подібності ГП.

В протилежність функції збіжності мірою відмінності є функція відстані. Відомі декілька видів функцій відстаней і збіжності, скористаємося найбільш вживаною функцією схожості, що отримана в наслідок перетворенням з функцій евклідової відстані [3]:

$$K_n^T = S_{ij} = (1 + d_{ij})^{-1} = \left[1 + \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{p} (\overline{X}_{\kappa i} - \overline{X}_{\kappa j})^2} \right]^{-1}, \tag{8}$$

де d_{ij} - відстань, як міра відмінності двох об'єктів, що порівнюються. Функція парної відстані має вигляд:

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{p} (\overline{X}_{\kappa i} - \overline{X}_{\kappa j})^2}, \tag{9}$$

де $\overline{X}_{i\kappa}, \overline{X}_{ij}$ - нормовані значення κ - го параметра ГП і відповідно i - го і j - го типів; $\kappa = 1,2,., p$.

Розглянемо формування технологічно подібних груп ГП, що випускаються країнами СНД і провідними зарубіжними фірмами [6] для очищення різних деталей (табл. 1).

Нормовані значення $\overline{X}_\kappa$ параметрів, розраховані по залежності (6) наведені в таблиці 2.

Таблиця 1

Основні параметри ГП багатопозиційної схеми очистки

Технологічні параметри ГП	Тип ГП					
	СО1-2	ОЯМ-2	БЗ-ВЯМ	ММФЕ	Gobel–4Z	Uraca–4Z
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1. Продуктивність, м^2/ч	36	38	50	60	98	105
2. Встановлена потужність, кВт	22	25	27	32	19	23
3. Кількість технологічних операцій.	2	3	4	5	7	6
4. Тривалість циклу, хв.	1,8	2,6	2,8	3,0	1,9	1,6

Таблиця 2

Нормовані значення основних параметрів ГП

Параметр	a_κ	b_κ	$\overline{X}_\kappa$					
			Тип ГП					
			1	2	3	4	5	6
1	36	105	-1,73	-1,62	-1,02	-0,52	1,38	1,73
2	19	32	-0,93	-0,13	0,4	1,73	-1,73	-0,66
3	2	7	-1,73	-1,04	-0,34	1,73	0,34	1,03
4	1,5	3	-1,03	0,81	1,26	1,73	-0,81	-1,5

За нормованими значеннями параметрів визначаємо критерії технологічної подібності $K_П^T$ по (8) і функцію парної відстані *dij* по (9) для кожної пари порівнюваних ГП. Отримані дані дозволяють сформувати матрицю технологічної подібності і матрицю парних відстаней :

$$K^T_{\Pi_{ij}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0,322 & 0,246 & 0,158 & 0,191 & 0,183 \\ 0,322 & 1 & 0,289 & 0,215 & 0,21 & 0,178 \\ 0,246 & 0,289 & 1 & 0,281 & 0,205 & 0,19 \\ 0,158 & 0,215 & 0,281 & 1 & 0,169 & 0,177 \\ 0,191 & 0,21 & 0,205 & 0,169 & 1 & 0,401 \\ 0,183 & 0,178 & 0,19 & 0,177 & 0,401 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \end{array}$$

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 2,1 & 3,06 & 5,29 & 4,21 & 4,45 \\ 2,1 & 0 & 2,45 & 3,63 & 4 & 4,59 \\ 3,06 & 2,45 & 0 & 2,55 & 3,87 & 4,26 \\ 5,29 & 3,63 & 2,55 & 0 & 4,89 & 4,64 \\ 4,21 & 4 & 3,87 & 4,89 & 0 & 1,49 \\ 4,45 & 4,59 & 4,26 & 4,64 & 1,49 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отримані матриці дозволяють виконати розбиття представленої сукупності типів ГП на однорідні групи, що мають найбільшу технологічну подібність за основними параметрами. В якості оптимального вибирається такий варіант розбиття, при якому досягається мінімум або максимум деякої цільової функції. Умова оптимуму може бути реалізована шляхом мінімізації внутрішньо групової суми квадратів відхилень параметрів, величина яких визначається [7].

$$\Delta\Pi = \frac{1}{n}\sum\sum d_{ij}^2 \longrightarrow \min \qquad (10)$$

Нехай необхідно дану сукупність типів ГП розбити на дві групи. З розгляду матриці подібності K^T_{nij} можна зробити висновок, що можливі два варіанти групування. Перший варіант, коли ГП типу 1, 2, 3 об'єднуються в одну груп, а ГП типу 4, 5, 6 - в іншу. Другий варіант, коли в одну групу, об'єднуються ГП типу 1і 2, а в іншу - типу 3, 4, 5, 6.

Внутрішньогрупові суми квадратів відхилень параметрів при першому варіанті розрахуємо по формулі (10) і отримаємо:

$$\Delta\Pi_{1,2,3} = \frac{1}{3}(2,1^2 + 3,06^2 + 2,45^2) = 6,25;$$

$$\Delta\Pi_{4,5,6} = \frac{1}{3}(4,89^2 + 4,64^2 + 1,49^2) = 15,88.$$

Загальна сума квадратів відхилень параметрів

$$\Delta\Pi_i = \Delta\Pi_{1,2,3} + \Delta\Pi_{4,5,6} = 6,69 + 15,58 = 22,47.$$

При другому варіанті групування внутрішньогрупові суми квадратів відхилень складуть:

$$\Delta\Pi_{1,2} = \frac{1}{2}(2,1^2) = 2,2;$$

$$\Delta\Pi_{3,4,5,6} = \frac{1}{4}(2,55^2 + 3,87^2 + 4,26^2 + 4,89^2 + 4,64^2 + 1,49^2) = 21,85.$$

Загальна сума квадратів відхилень параметрів при другому варіанті групування

$$\Delta\Pi_{II} = \Delta\Pi_{1,2} + \Delta\Pi_{3,4,5,6} = 2,2 + 21,85 = 24,05.$$

Таким чином, першому варіанту групування даної сукупності ГП слід віддати перевагу, оскільки він характеризується меншою сумою квадратів відхилень основних параметрів, чим другий варіант.

Висновок. Запропонована універсальна методика синтезу структури нових гідроочищувальних пристроїв, забезпечує прогнозування раціональних конструктивних схем їхніх базових функціональних елементів в умовах обмеженої інформації щодо технічних показників аналогів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Половинкин А.И. Алгоритмы оптимизации проектных решений/ А.И.Половинкин. – М.: Энергия, 1976. – 274 с.
2. Хокс Б. Автоматизированное проектирование и производство/Б.Хокс. – М.: Мир, 1991. – 296 с.
3. Одрин В.М. Метод морфологического анализа технических систем/В.М.Одрин. – М.: ВНИИПИ, 1989. – 310 с.
4. Нигора В.М. Вибір способів очищення деталей складної форми під час ремонтно – відновлювальних операцій / В.М. Нигора, І.М. Білецький // Проблеми тертя та зношування: Наук.-техн. Збірник. – К.: НАУ, 2008. –Т.2.Вип. 49 – С. 95 – 103.
5. Методологічні основи наукового дослідження машинобудівних конструкцій: Навч. посіб/[П.Л. Носко, В.М. Нигора, П.В. Філь та ін.]. – Луганськ: Вид – во СНУ ім. В. Даля, 2009. – 208 с.
6. Нигора В.М. Метод вибору об'єктів модульного проектування машин на основі кластерного аналізу / В.М. Нигора// Харчова промисловість: Міжвід. наук. зб-к.: Урожай. – 1995. – Вип. 41. – С. 78 – 83.
7. Кіндрачук М.В. Концептуальні принципи проектування універсальних гідро очищувальних машин /М.В. Кіндрачук, В.М. Нигора //Вісті акад. інж. наук України. – 2003. – №1(18). – С. 19 – 23.

НИГОРА Володимир Миколайович – д.т.н., професор, в.о. зав. кафедри інженерної і комп'ютерної графіки Національного університету харчових технологій (м. Київ).

Наукові інтереси:

– системний аналіз і моделювання об'єктів машинобудування.

БІЛЕЦЬКИЙ Ігор Миколайович – викладач кафедри інженерної і комп'ютерної графіки Національного університету харчових технологій (м. Київ).

Наукові інтереси:

– моделювання та проектування технічних об'єктів.

УДК 519.21

Ю. И. Николаенко, С. В. Моисеенко, Е.Э. Зычкова

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ АППРОКСИМАЦИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТЯХ НЕВЫПУКЛОЙ ФОРМЫ

Постановка проблемы. Задачи восстановления функций имеют особое значение в прикладных исследованиях. Как известно, широкий класс актуальных прикладных задач сводится к граничным задачам, в частности к уравнению Лапласа с соответствующими граничными условиями. Несмотря на то, что уравнение Лапласа является одним из самых простых в математической физике, его решение сталкивается с трудностями. К сожалению, не всегда удается найти аналитическое решение в области простой геометрической формы. Особенно трудным бывает нахождение решение для систем, имеющих сложную геометрическую конфигурацию, когда поведение функции на границе неизвестно, а известны только ее значения в некоторых граничных узлах (дискретный аналог задачи Дирихле). Компьютеры позволяют выполнить такие расчеты, но в этих случаях приходится применять приближенные численные методы. Метод конечных элементов (МКЭ) является одним из них. Аппроксимация решения во внутренних точках таких областей по известным граничным узловым значениям обычно строится при помощи простых полиномиальных (базисных) функций на отдельных типовых элементах, на которые разбивается исследуемая область. Приближенное решение на отдельном конечном элементе (КЭ) простой геометрической формы определяется с помощью интерполирующего соотношения:

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{n}u_i N_i(x,y)\,, \tag{1}$$

где n – количество узлов на КЭ, u_i - значение функции в узловых точках КЭ, $N_i(x,y)$ - базисные функции (БФ). Базисные функции должны удовлетворять следующим требованиям:

$$N_i(x_k,y_k)=\delta_{ik} \qquad (i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,n}),$$

где δ_{ik} - символ Кронекера;

$$\sum_{i=1}^{n}N_i(x,y)=1\,.$$

Применение (1) для областей сложной геометрической формы, в частности для невыпуклых областей, весьма затруднительно.

Анализ публикаций по теме исследования.

В работах [3] предложено ряд моделей, аппроксимирующих решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в областях невыпуклой формы. В [4,5] моделировалось стационарное температурное поле в области в форме «звезды Давида» с помощью функций формы двух гексагонов $U_1U_2U_3U_4U_5U_6$ и $U_7U_8U_9U_{10}U_{11}U_{12}$ (рис.1). Для моделирования использовались уже известные базисы гексагона.

Благодаря геометрическому моделированию в 1984 г. удалось сконструировать дробно-рациональный базис (ДРБ) гексагона [1,2]. Базисная функция $N_{ДРБ}(x,y)$, ассоциированная с узлом 1 (рис.2), задается следующим аналитическим выражением:

$$N_{ДРБ}(x,y)=\frac{(1-\frac{4}{3}y^2)((1+x)^2-\frac{1}{3}y^2)}{6-2x^2-2y^2}\,. \tag{2}$$

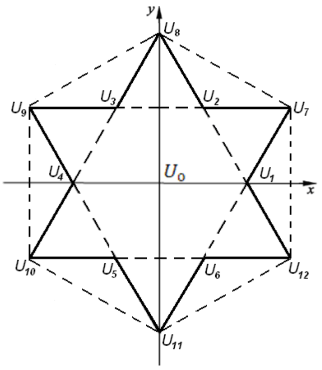


Рис.1. Область невыпуклой формы

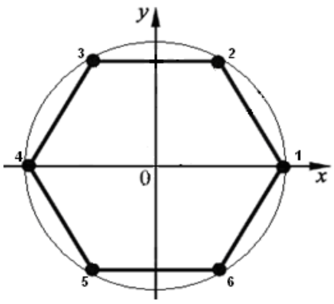


Рис.2. Гексагональный КЭ

Настойчивые поиски альтернативных моделей интерполяции на гексагоне привели к появлению полиномиального базиса (ПБ) [2]. Базисная функция $N_{ПБ}(x,y)$, ассоциированная с узлом 1 (рис.2), задается следующим аналитическим выражением:

$$N_{ПБ}(x,y)=\frac{1}{6}(x-2y^2+1)(2x+1)\,. \tag{3}$$

В 2006 году в работе [6] был предложен гармонический полиномиальный базис четвертого порядка (ГПБ4), базисные функции которого удовлетворяют уравнению Лапласа. Базисная функция $N_{ГПБ}(x,y)$, ассоциированная с узлом 1 (рис.2), имеет вид:

$$N_{ГПБ4}(x,y)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+\frac{17}{63}(x^2-y^2)+\frac{1}{6}(x^3-3xy^2)+\frac{4}{63}(x^4-6x^2y^2+y^4)\,. \tag{4}$$

Остальные функции могут быть получены путем поворота системы координат на угол, кратный $\pi/3$.

Используя технику МКЭ, авторы [5] строили аппроксимацию поля в виде $T_1(x,y)$ и $T_2(x,y)$ в $U_1U_2U_3U_4U_5U_6$ и $U_7U_8U_9U_{10}U_{11}U_{12}$ соотвественно. Окончательная аппроксимация температурного поля на пластине в форме «звезды Давида» была представлена в виде взвешенной суммы $T(x,y)=\frac{1}{2}T_1(x,y)+\frac{1}{2}T_2(x,y)$ с весовыми коэффициентами, выбранными исходя из геометрических соображений. Однако, с помощью предложенных моделей аппроксимация поля была построена только во внутренней части звезды, а именно внутри шестиугольника $U_1U_2U_3U_4U_5U_6$ (рис.1).

Цель статьи. В рамках дальнейшего развития способов построения математических моделей исследования физических полей в областях сложной конфигурации, построить аппроксимацию решения уравнения Лапласа с граничными условиями типа Дирихле во всех внутренних точках области в форме «звезды Давида» (рис.1).

Основная часть. Шестиузловая модель. Исследуемую пластину (рис.1) накроем правильным шестиугольником $U_{21}U_{22}U_{23}U_{24}U_{25}U_{26}$ (рис.3). Для начала, определим значения гармонической функции в дополнительных угловых узлах данного шестиугольника. Имея значения во всех двенадцати граничных узлах звезды, можно найти значение гармонической функции $u(x,y)$ во внутренней точке U_0 гексагональной области с помощью известной формулы усреднения [7]:

$$u_0 = \frac{1}{168}(27\sum_{i=1}^{6} u_i + \sum_{i=7}^{12} u_i) + O(a^8), \tag{5}$$

где $u_i = u(U_i)$, $i = \overline{1{,}12}$, a - длина стороны.

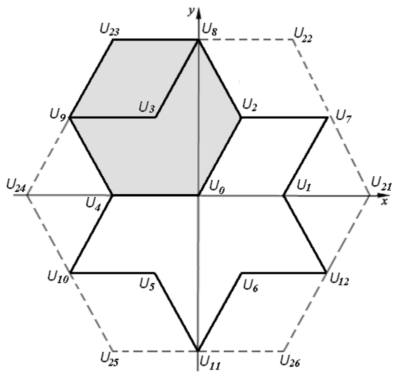


Рис.3. Шестиузловая модель

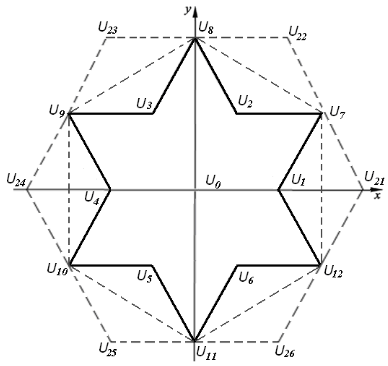


Рис.4. Двенадцатиузловая модель

Пренебрегая $O(a^8)$, находим значение функции u_0 в узле U_0. Определить значения гармонической функции в узлах гексагона $U_{21}U_{22}U_{23}U_{24}U_{25}U_{26}$ позволит более простая формула усреднения на шестиугольнике [7]: $u_0 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} u_i + O(a^6)$. Пренебрегая $O(a^6)$ и применяя полученную формулу для гексагона $U_0U_2U_8U_{23}U_9U_4$ (рис.3), определим значение функции в узле U_{23}: $u_{23} = 6u_3 - u_0 - u_2 - u_8 - u_9 - u_4$. Аналогично определяются значения в остальных вершинах $U_{21}, U_{22}, U_{24}, U_{25}, U_{26}$.

Используя (1), можно построить аппроксимацию гармонической функции $u(x, y)$ внутри шестиугольника $U_{21}U_{22}U_{23}U_{24}U_{25}U_{26}$, а тем самым и во всех внутренних точках «звезды Давида», согласно формуле:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{6}(u(U)_{2i}) \cdot N_i(x, y), \tag{6}$$

где через $N_i(x, y)$ обозначены БФ гексагона, в частности если радиус описанной вокруг шестиугольника (рис.3) окружности выберем равным 1, то $N_i(x, y)$ совпадают с указанными выражениями (2) - (4).

Модель 2. Двенадцатиузловая модель. Накроем исследуемую область двумя шестиугольниками $U_7U_8U_9U_{10}U_{11}U_{12}$ и $U_{21}U_{22}U_{23}U_{24}U_{25}U_{26}$. (рис.4) Аналогично формуле (5), используя узлы этих шестиугольников, можно получить следующую формулу усреднения:

$$u_0 = \frac{27}{91}\sum_{i=1}^{6} u_{2i} + \frac{64}{91}\sum_{i=7}^{12} u_i + O(a^8), \quad u_i = u(U_i),\ i = \overline{1{,}12}. \tag{7}$$

С помощью формулы (7) построим аппроксимацию гармонической функции в виде:

$$u_a(x,y) = \frac{27}{91} u_{a1}(x,y) + \frac{64}{91} u_{a2}(x,y), \tag{8}$$

где $u_{a_1}(x,y) = \sum_{i=7}^{12} u(U_i) F_i(x,y),$ $\quad u_{a_2}(x,y) = \sum_{i=21}^{26} u(U_i) N_i(x,y).$

Т.к радиус описанной вокруг шестиугольника (рис.4) окружности выберем равным 1, то БФ гексагона $U_{21}U_{22}U_{23}U_{24}U_{25}U_{26}$ $N_i(x,y)$, совпадут с (2) - (4). Тогда БФ шестиугольника $U_7U_8U_9U_{10}U_{11}U_{12}$ $F_i(x,y)$, будут получены из (2) – (4) путем поворота на угол $\pi/6$ и последующего сжатия в $\frac{\sqrt{3}}{2}$ раза.

Эффективность шестиузловой и двенадцатиузловой моделей была проверена на примере построения аппроксимации решения уравнения Лапласа в «звезде Давида» для гармонической функции вида $u(x,y) = \frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} + 2$, где в качестве узловых значений в вершинах звезды брались значения этой функции в соответствующих вершинах. В табл.1 представлены приближенные значения для функции в шести внутренних узлах, рассчитанные с помощью 6-узловой и 12-узловой моделей с использованием трех базисов гексагона.

Таблица1.

Координаты точек		(0;0)	$(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12})$	$(\frac{1}{4};0)$	$(0;\frac{\sqrt{3}}{8})$	$(0;\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{8})$
Точное решение		2.50000	2.44262	2.44444	2.49420	2.46154	2.65306
Шестиузловая модель	ПБ	2.50704	2.41634	2.41740	2.49969	2.45477	2.72352
	ε	0.28%	1.08%	1.11%	0.22%	0.28%	2.66%
	ДРБ	2.50704	2.44436	2.44601	2.50214	2.47219	2.66593
	ε	028%	0.07%	0.06%	0.32%	0.43%	0.49%
	ГПБ4	2.50704	2.44519	2.44707	2.50115	2.46804	2.67015
	ε	0.28%	0.11%	0.11%	0.28%	0.26%	0.64%
Двенадцатиузловая модель	ПБ	2.49979	2.41482	2.44025	2.45286	2.38843	2.55722
	ε	0.01%	1.14%	0.17%	1.66%	2.97%	3.61%
	ДРБ	2.49979	2.44110	2.44250	2.49607	2.47094	2.64160
	ε	0.01 %	0.06%	0.08%	0.08%	0.38%	0.43%
	ГПБ4	2.49979	2.44176	2.44338	2.49531	2.46707	2.64426
	ε	0.01%	0.04%	0.04%	0.04%	0.23%	0.33%

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Как показали результаты тестирования 6-узловую и 12-узловую модели с использованием любого базиса можно рекомендовать для решения дискретного аналога задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области в форме «звезды Давида» в инженерных расчетах. Наиболее точные расчеты были получены для 12-узловой модели при условии использования ГПБ4, относительная погрешность вычислений в контрольных точках не превышает 0.33%.

В перспективе планируется построение аппроксимации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа для других невыпуклых областей.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ishiguro M. Construction of hexagonal basis functions applied in the Galerkin-type finite element method. / M. Ishiguro //J. Inf. Process. – 1984. – V. 7. – №2. – P.89–95.
2. Хомченко А.Н. Об одном проекционно-сеточном алгоритме вычислительной механики / А.Н. Хомченко // VI Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докл. – Ташкент, 1986. – С.628–629.
3. Хомченко А. Н. Дискретні моделі температурних полів в областях складної форми /А.Н. Хомченко, С. О. Камаєва // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. / Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. – Чернівці, 2008. – Вип. 16. – С. 293–311.
4. Камаєва С. О. Дослідження температурного поля в областях неопуклої форми / С. О. Камаєва // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. – 2007. – Вип. 2(28). – С. 137–141.
5. Хомченко А. Н. Геометричне моделювання стаціонарних теплових полів в областях складної форми / А. Н. Хомченко, С. О. Камаєва // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2008. – Вип.4(38). – С. 34-43.
6. Николаенко Ю.И. Моделирование гармонического полиномиального базиса гексагона / Ю.И. Николаенко, С.В. Моисеенко // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы (ААЭКС). – 2007. – №1 (19). – С.31–34.
7. Люстерник А.А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа / А.А. Люстерник // Успехи математических наук . – 1954. – Т. IX. – Вып. 2 (60). – С. 3–50.

НИКОЛАЕНКО Юрий Иванович – преподаватель лицея при Херсонском национальном техническом университете и Днепропетровском национальном университете.

Научные интересы:

– методы восстановления гармонических функций, вероятностное моделирование.

МОИСЕЕНКО Светлана Викторовна – к.т.н., доцент кафедры прикладной математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

– методы восстановления гармонических функций, вероятностное моделирование.

ЗЫЧКОВА Елена Эдуардовна – аспирант кафедры прикладной математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

– теория приближения функций, вероятностное моделирование.

УДК 517.9:330.01

Ю.Т. Олейник

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И ДИНАМИКИ РЕСУРСНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ КОРПОРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Постановка проблемы. По своему предназначению ресурсный потенциал предприятия можно разделить на ресурсы производственного потребления и ресурсное обеспечение управляющей подсистемы. Стратегию и тактику управления (распоряжения) всеми видами ресурсов предприятия определяет управляющая подсистема. В этом смысле весь ресурсный потенциал предприятия можно отнести к ресурсному обеспечению корпоративного менеджмента, разделяя его на внешнее (ресурсы управляемой подсистемы) и внутреннее – собственно ресурсы корпоративного управления. Основу ресурсного потенциала управляющей подсистемы (менеджмента) предприятия составляют: знания, или интеллектуальные ресурсы – научные и научно-методические разработки по проблемам корпоративного управления, прикладные внутрифирменные методические рекомендации и должностные инструкции; кадровые ресурсы (персонал управления); информационные ресурсы. Несмотря на то, что проблема повышения эффективности управления ресурсным потенциалом и его составляющими была и остается актуальной на всех этапах экономического развития, ее постановки до настоящего времени носят достаточно обобщенный и неформализованный характер, приводя на уровне предприятий к разработке в такой же степени общих, неконкретных мероприятий [1, с.132; 2, с.11 – 12]. Результативность выбранного типа стратегии управления ресурсами и соответствующего набора тактических управляющих воздействий во многом определяется эффективностью предлагаемых подходов и адекватностью соответствующего математического инструментария. Отсюда настоящая работа, посвященная разработке и применению новых подходов к построению аппарата моделирования и прогнозирования динамики и структуры ресурсного обеспечения корпоративного управления, представляется достаточно актуальной.

Анализ публикаций по теме исследования. Современная литература по экономике предприятия и корпоративному менеджменту в основном посвящена теоретическим аспектам формирования стратегии и тактики управления ресурсным обеспечением предприятия в целом [3 – 5] и, в лучшем случае, разработке подходов к оценке соответствия качества ресурсов технологическим требованиям и моделированию эффективности использования ресурсов на предприятии [6]. При этом проблема выделения из общей системы ресурсообеспечения предприятия ресурсов и технологий, обеспечивающих управляющую подсистему, определения и обоснования основных подходов к построению системы моделирования механизмов управления ресурсным обеспечением корпоративного менеджмента, остается практически неисследованной и неструктурированной [7].

Цель работы состоит в построении стохастических моделей, позволяющих находить основные прогнозные характеристики ресурсного обеспечения корпоративного управления в динамике с учетом его особенностей.

Основная часть. Специфика ресурсного обеспечения корпоративного менеджмента состоит в следующем:

– основные ресурсы менеджмента характеризуются "внутрисистемной возобновляемостью", то есть их производственное потребление (использование в процессе корпоративного управления) не сопровождается, в отличие от ресурсов производственного назначения, расходом в натуральном выражении (уменьшением физического объема), потерей потребительной стоимости и утратой своих характерных признаков, хотя их стоимость (оплата научных разработок и труда персонала, расходы на информационное обеспечение) переносится в новую потребительную стоимость произведенной продукции;

– производственное потребление ресурсов менеджмента может приводить к изменению их качественных параметров (повышение квалификации, приобретение опыта и знаний персоналом, улучшение качества и дифференциация информации в результате ее обработки, устаревание знаний и информации и т.п.);

– обмен с внешней средой и внутрисистемные потоки носят (за пределами управляющих воздействий) стохастический характер, поэтому алгоритмическое обеспечение расчетов потребности в них и необходимых запасов в основном базируется на статистических методах.

Корпоративное управление, как и любой другой производственный процесс, осуществляется в результате взаимодействия (совместного использования) различных видов ресурсов. Тем не менее потоки и запасы отдельных видов ресурсов обладают определенной автономностью. Соответственно в модельном описании ресурсного обеспечения корпоративного менеджмента будем исходить из принципа автономности управления отдельными видами ресурсов. Каждый вид ресурсов характеризуется определенным набором качественных характеристик (квалификация, уровень образования и специальность специалиста, вид информации в соответствии с некоторой классификацией), что приводит к необходимости их группировок в отдельные классы.

Полагая, что определенный вид ресурсов допускает классификацию по $i=\overline{1,k}$ группам, введем следующие обозначения. Пусть $n_i(t), i=\overline{1,k}$ – объем запасов i-й группы ресурсов в момент t; $n_{ij}(t+1), i,j=\overline{1,k}$ – поток из группы i в группу j за время $(t,t+1)$; $n_{i0}(t+1), i=\overline{1,k}$ и $n_{0i}(t+1), i=\overline{1,k}$ – соответственно потоки из системы во внешнюю среду и наоборот за время $(t,t+1)$. В этих обозначениях соотношения между запасами и потоками для каждой из групп можно записать следующим образом:

$$n_j(t+1)=n_j(t)+n_{0j}(t+1)+\sum_{i\neq j}^{k}n_{ij}(t+1)-\sum_{i\neq j}^{k}n_{ji}(t+1)-n_{jo}(t+1),\ j=\overline{1,k}. \quad (1)$$

С выделением объема запаса j-й группы к моменту $(t+1)$

$$n_{jj}(t+1)=n_j(t)-\sum_{i\neq j}^{k}n_{ji}(t+1)-n_{jo}(t+1),\ j=\overline{1,k}, \quad (2)$$

уравнения (1) преобразуются к виду

$$n_j(t+1)=n_{jj}(t+1)+n_{0j}(t+1)+\sum_{i\neq j}^{k}n_{ij}(t+1)=n_{jo}(t+1)+\sum_{i=j}^{k}n_{ij}(t+1),\ j=\overline{1,k}. \quad (3)$$

При этом общий размер системы (суммарный объем запасов) в произвольный момент t определится как

$$N(t)=\sum_{j=1}^{k}n_j(t),$$

а структуру системы можно характеризовать отношениями

$$x_j(t)=n_j(t)/N(t),\ j=\overline{1,k}.$$

Поскольку реальные потоки ресурсов менеджмента имеют стохастическую природу, перейдем от детерминированных моделей (1) – (3) к их стохастическим аналогам. Будем полагать потоки между группами независимыми с вероятностями $p_{ij}, i,j=\overline{1,k}$:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} + p_{i0} = 1,\ i=\overline{1,k}, \tag{4}$$

где $p_{i0}, i=\overline{1,k}$ – вероятности потоков из системы.

При этом допущении внутрисистемные потоки подчиняются схеме Бернулли и имеют биномиальное распределение

$$\bar{n}_{ij}(t+1) = n_i(t)p_{ij},\ i,j=\overline{1,k}, \tag{5}$$

а потоки из системы во внешнюю среду являются пуассоновскими и их математические ожидания определяются как

$$\bar{n}_{i0}(t+1) = n_i(t)p_{i0},\ i=\overline{1,k}. \tag{6}$$

Заметим, что выражения (5) и (6) соответствуют эмпирическим данным о пропорциональности внутрисистемных потоков имеющимся запасам.

Для описания потоков из внешней среды допустим, что суммарный ожидаемый объем поступлений извне пропорционален математическому ожиданию потока из системы во внешнюю среду

$$\sum_{j=1}^{k}\bar{n}_{0j}(t+1) = \lambda\sum_{i=1}^{k}\bar{n}_{i0}(t+1) = \lambda\sum_{i=1}^{k}n_i(t)p_{i0},$$

и распределяется по группам следующим образом

$$\bar{n}_{0j}(t+1) = r_j\sum_{j=1}^{k}\bar{n}_{0j}(t+1) = r_j\lambda\sum_{i=1}^{k}n_i(t)p_{i0},\ j=\overline{1,k}, \tag{7}$$

где λ – коэффициент сжатия внешних потоков;

$r_j = \dfrac{\bar{n}_{0j}(t+1)}{\lambda\sum_{i=1}^{k}n_i(t)p_{i0}}, j=\overline{1,k}$ – доля класса j в общем потоке извне.

Очевидно, что коэффициенты r_j должны удовлетворять условию нормировки

$$\sum_{j=1}^{k} r_j = \frac{\sum_{j=1}^{k}\bar{n}_{0j}(t+1)}{\lambda\sum_{i=1}^{k}n_i(t)p_{i0}} = \frac{\lambda\sum_{j=1}^{k}n_i(t)p_{i0}}{\lambda\sum_{i=1}^{k}n_i(t)p_{i0}} = 1. \tag{8}$$

С учетом соотношений (5) и (7) приходим к стохастическим аналогам детерминированных уравнений (3):

$$\bar{n}_j(t+1) = r_j\lambda\sum_{i=1}^{k}n_i(t)p_{i0} + \sum_{i=1}^{k}n_i(t)p_{ij} = \sum_{i=1}^{k}n_i(t)(p_{ij}+\lambda r_j p_{i0}),\ j=\overline{1,k}. \tag{9}$$

В векторно-матричной форме уравнения (9) приобретают вид

$$\bar{n}'(t+1) = n'(t)(P+P_0r') = n'(t)Q, \tag{10}$$

где $r'=(r_j, j=\overline{1,k})$ – вектор-строка, определяющая распределение входящих потоков по группам;

$Q = P + P_0r' = \left\| p_{ij} + \lambda p_{i0}r_j,\ i,j=\overline{1,k}\right\| = \left\| q_{ij},\ i,j=\overline{1,k}\right\|$ – матрица изменений состояний системы.

Модель (10) будем называть основным прогнозным уравнением. Оно получено, исходя из следующих допущений: стохастический характер системы; независимость внутрисистемных потоков между собой и их пропорциональность имеющимся запасам; пропорциональность суммарных потоков в систему и из нее; управляемость процессом распределения входящих потоков по группам.

Параметры прогнозного уравнения (10) определяются следующими исходными данными:

– текущим состоянием системы $n(t)=(n_i(t), i=\overline{1,n})$;

– матрицей вероятностей переходов $P=\left\| p_{ij}, i,j=\overline{1,k}\right\|$, регулирующей внутрисистемные потоки;

– вектором вероятностей выбытия из системы $P_0=(p_{i0}, i=\overline{1,k})$;

– вектором $r=(r_i,\ j=\overline{1,k})$, управляющим распределением входящих потоков по группам;

– коэффициентом сжатия внешних потоков λ.

Если вышеуказанные параметры модели известны, то ожидаемое состояние системы на момент *(t+1)* может быть найдено перемножением вектора-строки текущего состояния системы $n'(t)$ и матрицы перехода Q:

$$n'(t+1)=n'(t)Q.$$

Тогда прогноз состояния системы на следующий плановый период определится как

$$\overline{n}'(t+2)=n'(t+1)Q=n'(t)Q^2,$$

и вообще

$$\overline{n}'(t+T)=n'(t)Q^T, \tag{11}$$

где T – протяженность планового периода.

Полагая начало планового периода $t=0$, получим выражение для математического ожидания состояния системы на конец планового периода

$$\overline{n}'(T)=n'(0)Q^T.$$

Ожидаемый размер системы (суммарный объем запасов) в соизмеримых величинах на начало следующего отрезка планового периода (t+1) и в произвольный момент T можно найти умножением соответственно уравнения (10) или (11) на вектор-столбец I, составленный из единиц:

$$\overline{N}(t+1)=\overline{n}'(t+1)I=n'(t)(P+\lambda P_0 r')I=n'(t)QI, \tag{12}$$

$$\overline{N}(T)=n'(0)Q^T I.$$

Для полноты характеристики системы введем в рассмотрение показатель относительного изменения ее размеров к моменту $(t+1)$, определяемый как

$$m=N(t+1)/N(t),$$

который будем называть коэффициентом ее сжатия (расширения). Тогда ожидаемая структура системы в момент $(t+1)$ определится соотношениями

$$\overline{x}_j(t+1)=n_j(t+1)/mN(t),\quad j=\overline{1,k}.$$

Установим связь между введенным ранее коэффициентом сжатия внешних потоков λ и коэффициентом сжатия системы m. Для этого, используя условия (4) и (8), перепишем уравнение (12) в виде:

$$\overline{N}(t+1)=n'(t)(P+\lambda P_0 r')I=n'(t)(PI+\lambda P_0 r'I)=$$
$$=n'(t)(I-P_0+\lambda P_0)=N(t)+(\lambda-1)n'(t)P_0.$$

Разделив обе части последнего уравнения на $N(t)$, получим

$$m = (\lambda - 1)x'(t)P_0 + 1.$$

Таким образом, коэффициент сжатия внешних потоков λ определяет величину коэффициента сжатия системы m и ее ожидаемый размер:

1) если $0 \le \lambda < 1$, то $1 - x'(t)P_0 < m < 1$ и ожидаемый размер системы (общий объем запасов) сокращается;

2) при $\lambda = 1$ коэффициент сжатия системы $m = 1$, система с сохраняемыми размерами, ее матрица Q становится стохастической, а процесс изменений состояний системы – марковским;

3) если $\lambda > 1$, то и $m > 1$ – объем запасов возрастает, система расширяется.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Использованные подходы обеспечивают релевантность разработанных моделей, то есть их соответствие поставленной в работе цели. Построенные модели при известных из статистики матрице вероятностей внутрисистемных переходов P и векторе вероятностей уходов из системы P_0 позволяют получать основные прогнозные характеристики ресурсного обеспечения корпоративного менеджмента. Экспериментальные расчеты на основе фактических данных показали достаточную точность получаемых результатов и продуктивность их использования в целях прогноза и управления. Предмет дальнейших исследований видится в постановке и решении задачи управления процессом изменения состояния системы с целью перехода к желаемым (оптимальным) характеристикам и их дальнейшего сохранения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тимохин В.Н. Методология моделирования экономической динамики: [Монография/Научн. ред. Ю.Г. Лысенко]/ В.Н. Тимохин. –Донецк: ООО "Юго-Восток, Лтд", 2007.– 269 с.
2. Стасюк В.П. Модели адаптивного управления предприятием/ В.П. Стасюк.– Донецк: ДонНУ, ООО "Юго-Восток, Лтд.", 2003.– 224 с.
3. Экономика предприятия: Учебник/Под ред. проф. О.И. Волкова. – М.: ИНФРА – М, 1998.– 416 с.
4. Экономика предприятия: Учебник для вузов/[В.Я. Горфинкель, Е.М. Купряков, В.П. Прасолова и др.; Под ред. проф. В.Я. Горфинкеля, проф. Е.М. Купрякова]. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1996.–367 с.
5. Фатхудинов Р.А. Стратегический менеджмент: Учебник для вузов/ Р.А. Фатхудинов .– 2-е изд., доп. – М.: ЗАО "Бизнес-школа "Интел-синтез", 1998. – 416 с.
6. Олейник Ю.Т. Моделирование эффективности использования ресурсов на предприятии/Ю.Т. Олейник// Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вып. 2(31).– С. 363–367.
7. Олейник Ю.Т. Модели корпоративного менеджмента: Новые инструменты управления ресурсами:[Монография/ Под ред. Ю. Г. Лысенко]/ Ю.Т. Олейник.– Донецк: ООО "Юго-Восток, Лтд", 2007.– 308 с.

ОЛЕЙНИК Юрий Тимофеевич – к.э.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики и информационных технологий Макеевского экономико-гуманитарного института, член-корреспондент МАН ВШ (Санкт-Петербургское отделение).

Научные интересы:

– математическое моделирование и информационная поддержка процессов и объектов в экономике, менеджменте и образовании.

УДК 517.2

В.А. Остапенко

УРАВНЕНИЯ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИИЙ В ПОДЪЕМНЫХ КАНАТАХ, НАМАТЫВАЕМЫХ НА БАРАБАН, С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

Постановка проблемы. Исследование динамического поля напряжений в канатах подъемных устройств, таких как лифты и шахтные подъемники, представляет важную для практического применения задачу. Поэтому изучению проблемы вычисления динамических напряжений, возникающих в канатах, посвящено большое количество работ. Оказалось, что без учета изменения длины каната по существу не удастся получить модель системы, состоящей из каната и барабана, достаточно адекватную натурной. Необходимо учитывать также, что канат на барабане и вне него нагружается по-разному. Это связано с тем, что вне барабана канат свободно провисает, в то время как на барабане возникают силы трения между канатом и барабаном.

Если коэффициент трения каната о барабан достаточно велик, происходит прилипание каната к барабану. Задача об отыскании упругих напряжений в канатах переменной длины для этого случая была решена в [1–5]. В предположении, что проскальзывание каната по барабану не происходит, задача была сведена к решению волнового уравнения в области с переменными границами. Благодаря разработанному методу построения волн, отражаемых от подвижной границы, было получено точное решение такой задачи, представляющее собой совокупность распространяющихся волн.

Если коэффициент трения канта о барабан не слишком велик, происходит проскальзывание каната по барабану. При этом условия нагружения каната на барабане оказываются различными в случае вязкого или сухого трения. В настоящей статье рассматриваются оба эти варианта. Целью статьи является получение уравнений состояния каната, как на барабане, так и вне барабана.

Канат рассматривается как гибкая нить, то есть напряжения изгиба в канате пренебрежимо малы по сравнению с растягивающими напряжениями. Канат наматывается на барабан радиуса r. Вследствие того, что напряжения изгиба не учитываются, канат можно выпрямить. Один конец каната закреплен на барабане. Начало оси x расположим в точке крепления каната на барабане и ось x направим вдоль продольной оси каната в сторону поднимаемого канатом груза. Положительное направление упругих перемещений в канате, обозначаемых через $u(x,t)$, будем полагать совпадающим с положительным направлением оси x.

Вязкое трение. Рассмотрим элемент каната, расположенного на барабане, размещенный между точками x и $x + dx$. На этот элемент действует сила вязкого трения

$$F(x,t) = \mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx , \qquad (1)$$

где μ – коэффициент вязкого трения для каната в целом. По второму закону Ньютона для сил, действующих на этом элементе каната, справедливо равенство

$$P(x+dx) - F(x,t) - P(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \ . \qquad (2)$$

Здесь ρ – объемная плотность каната, S – площадь поперечного сечения каната.

По теореме о среднем

$$P(x+dx,t) - P(x,t) = P_x(x+\theta dx)dx \ , \qquad (3)$$

где 0 < θ < 1. Относительное удлинение каната при упругих деформациях определяется равенством

$$\varepsilon = \lim_{dx\to 0}\frac{u(x+dx,t)-u(x,t)}{dx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \ . \tag{4}$$

По закону Гука усилие в канате

$$P(x,t) = ES\varepsilon = ES\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \ , \tag{5}$$

где E – модуль упругости каната. Подставляя (3) с учетом (5), а также (1) в формулу (2), получим

$$ESu_{xx}(x+\theta dx,t)dx - \mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx = \rho S\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dx \ .$$

Сокращая это равенство на *E S dx* и переходя к пределу при $dx \to 0$, получим

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\mu}{ES}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \ , \tag{6}$$

где обозначено

$$a^2 = \frac{E}{\rho} \ . \tag{7}$$

Таким образом, упругие перемещения в канате, расположенном на барабане, в случае вязкого трения описываются телеграфным уравнением (6).

Сухое трение. В этом случае необходимо учитывать давление каната на барабан, которое возникает вследствие наличия растягивающего канат усилия $P(x,t)$. Такое линейное давление, то есть давление на единицу длины каната, обозначается через $p(x,t)$. В свою очередь, наличие давления каната на барабан вызывает появление силы трения каната о барабан при попытке проскальзывания каната по барабану. Направление силы трения будет противоположным направлению проскальзывания каната по барабану. Это проскальзывание обусловлено упругими перемещениями в канате.

Тогда линейная, то есть отнесенная к единице длины каната, сила трения $f(x,t)$ будет определяться выражением [6]

$$f(x,t) = -\beta\, p(x,t) sign(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}) \ , \tag{8}$$

где β – коэффициент трения каната о барабан.

Рассмотрим элемент барабана с канатом, заключенный между углом *d*φ (см. рис.1). По второму закону Ньютона для сил, действующих на этом участке, справедливо равенство

$$P(x+dx) - f(x,t)dx - P(x,t) = \rho S\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dx \ . \tag{9}$$

Здесь ρ – объемная плотность каната, *S* – площадь поперечного сечения каната. Следует учесть, что $x = r\,\varphi$; $dx = r\,d\varphi$.

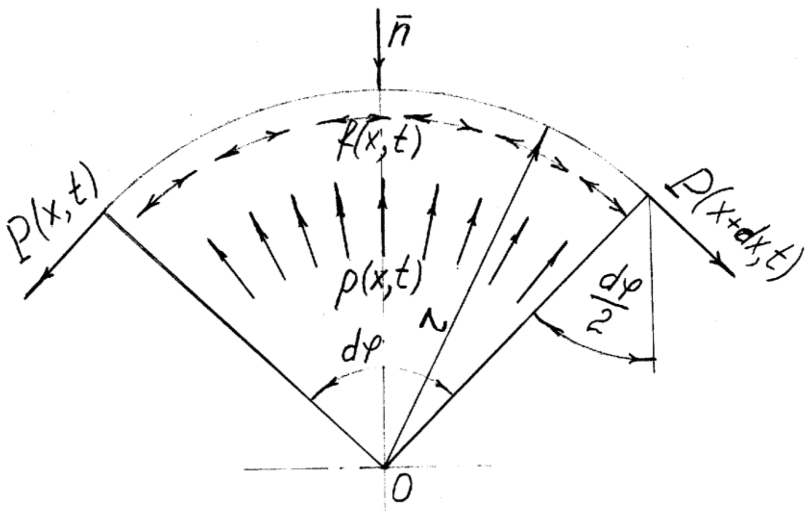


Рис. 1. Схема действия сил на барабане.

Используя теорему о среднем в форме (3) и равенство (5), подставим эти выражения в формулу (9). Получим

$$ESu_{xx}(x+\theta dx,t)dx - f(x,t)dx = \rho S\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dx \ .$$

Сокращая это равенство на *E S dx* и переходя к пределу при $dx \to 0$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{ES}f(x,t) = 0 \ , \qquad (10)$$

Выразим также линейную силу трения $f(x,t)$ через упругие перемещения. Заметим, прежде всего, что путем проектирования на направление $\bar{n}$ (см. рис. 1) удается выразить линейное давление $p(x,t)$ через усилие $P(x,t)$:

$$p(x,t)dx = P(x+dx,t)\sin\frac{d\varphi}{2} + P(x,t)\sin\frac{d\varphi}{2} \ .$$

Учтя формулу (3), а также тот факт, что $dx = r\,d\varphi$, получим отсюда

$$p(x,t) = \frac{1}{r}[P(x+dx,t)rd\varphi + 2P(x,t)]\frac{\sin\frac{d\varphi}{2}}{d\varphi} \ .$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $d\varphi \to 0$, а потому и при $dx \to 0$, получим

$$p(x,t) = \frac{P(x,t)}{r} \ . \qquad (11)$$

С учетом (5)

$$p(x,t) = \frac{ES}{r}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \ . \qquad (12)$$

Поэтому формула (8) примет вид

$$f(x,t) = -\frac{\beta ES}{r}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}sign(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}) \ . \qquad (13)$$

Подставив это значение $f(x,t)$ в уравнение (10), получим уравнение, описывающее упругие перемещения в канате, наматываемом на барабан в случае сухого трения:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\beta}{r}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} sign(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}) = 0 \ . \qquad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой нелинейное телеграфное уравнение.

Зависимость коэффициента вязкости от давления. Коэффициент вязкого трения каната о барабан, вообще говоря, зависит от величины давления каната на барабан, то есть $\mu = \mu(p(x,t))$. В этом случае уравнение (6) с учетом равенства (12) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\mu(\frac{ES}{r}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x})}{ES}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \ , \qquad (15)$$

Следует отметить, что для любой функции $\mu = \mu(p(x,t))$ телеграфное уравнение (15) будет оставаться нелинейным.

Отсутствие трения. Рассмотрим элемент каната, расположенного вне барабана, размещенный между точками x и $x + dx$. В этом случае уравнение типа (2) будет иметь следующий вид:

$$P(x+dx) - P(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \ . \qquad (16)$$

Используя в уравнении (16) соотношения (3) и (5), сокращая на ESdx и переходя к пределу при $dx \to 0$, получим уравнение для упругих перемещений каната вне барабана:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \ . \qquad (17)$$

Задача для каната в целом. Таким образом, задача для каната в целом выглядит следующим образом. Уравнение упругих перемещений в части каната, расположенной на барабане, будет представлено одним из телеграфных уравнений (6), (14) или (15). Уравнение упругих перемещений в части каната, свисающей с барабана, будет представлено волновым уравнением (17). То есть, упругие перемещения каната в двух различных его частях описываются различными дифференциальными уравнениями. В качестве разделителя этих двух частей каната выступает точка начального контакта каната с барабаном. Обозначим координату этой точки через x_k. Если ось x будет двигаться вместе с канатом, то точка x_k будет оставаться неподвижной. С целью удобства постановки краевых задач разделим движение каната на переносное и относительное движение. Под переносным движением каната будем понимать движение каната как абсолютно твердого тела со скоростью $v(t)$, где $v(t)$ – линейная скорость центральной оси каната на барабане. Тогда в относительном движении все точки каната будут совершать только упругие перемещения. То есть, в Эйлеровой системе координат все точки каната будут иметь постоянные координаты. И только точка x_k будет двигаться со скоростью $v(t)$. Иными словами, будет выполняться равенство $x_k = v(t)$.

Следовательно, в такой постановке области, в которых справедливо либо телеграфное, либо волновое уравнение, будут иметь переменные границы, и граница между двумя этими областями будет определяться равенством $x_k = v(t)$. На данной границе должны оставаться непрерывными либо упругие перемещения, либо напряжения. Условие непрерывности упругих перемещений на границе раздела будет иметь следующий вид:

$$u(x_k+0,t)=u(x_k-0,t)\ . \tag{18}$$

Условие непрерывности упругих напряжений на границе раздела будет выглядеть следующим образом:

$$u_x(x_k+0,t)=u_x(x_k-0,t)\ . \tag{19}$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, задача об упругих перемещениях в канате, наматываемом на барабан, сведена к краевой задаче с переменной структурой, причем граница между различными структурами является подвижной. Решение такой задачи может быть получено в квадратурах в виде распространяющихся волн. При этом на границе раздела будут возникать как отраженные, так и преломленные волны. Утверждение о том, что такая задача может быть решена в квадратурах основано на том, что в настоящее время уже решены краевые задачи для областей с подвижными границами, как для волнового уравнения [1–5], так и для телеграфного уравнения [7].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Остапенко В.А. Динамика волн в канатах переменной длины /В.А. Остапенко // Сборник научных работ Полтавского национального технического университета. – Полтава, 2005. – Вып. 6. – С. 216–220.
2. Ostapenko V.A. Dynamic field of displacements in rods of variable length / V.A. Ostapenko // Proceedings of 8th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. – Lodz, Poland, 2005.– P. 316–323.
3. Остапенко В.А. Краевая задача для стержня переменной длины, возмущаемого с подвижного верхнего конца/В.А. Остапенко // Вестник Днепропетровского университета, серия Механика. – 2006. – №2/1. – С.182–198.
4. Ostapenko V.A. Dynamic displacement in ropes of variable length at perturbation of nonzero initial conditions/ V.A. Ostapenko, N.V. Polyakov // Proceedings of 9th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. – Lodz, Poland, 2007. – P. 347–354.
5. Ostapenko V.A. Exact solution of the problem for dynamic field of displacements in rods of variable length / V.A. Ostapenko // Archives of Applied Mechanics, Hamburg, Springer-Verlag, 77. – 2007. – P. 313–324.
6. Горошко О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины/О.А. Горошко, Г.Н Савин. – К.: Наукова думка. – 1971. – С. 224.
7. Остапенко В.А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. /В.А. Остапенко// Вестник Днепропетровского университета. – 2009. – Т. 17, № 8. – Серия: Моделирование. – Вып.1.– С. 149 – 161.

ОСТАПЕНКО Виктор Александрович – д.ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений Днепропетровского национального университета.

Научные интересы:

– математические модели в механике и электродинамике; краевые задачи математической физики, включая динамические задачи теории упругости, колебания, волны, системы с переменной структурой.

УДК 539.3

А.В. Павленко, И.В. Щербина, А.В. Сясев

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖЕСТКОГО ШТАМПА С ОРТРОТРОПНЫМ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ

Постановка проблемы. Передача усилий и давлений от одних деталей к другим происходит при их взаимном соприкосновении. Поэтому проблемы контактного взаимодействия имеют особое значение для машиностроения и строительства, так как они определяют процессы износа, прочности, разрушения и долговечности конструкций и сооружений. Практические нужды решения этих вопросов обусловили важность разработки методов решения конкретных контактных задач.

Анализ публикаций по теме исследования. Многие контактные задачи о вдавливании жесткого штампа в упругую изотропную полуплоскость при различных видах нагружениия и условиях в области контакта были поставлены и приближенно решены Л.А.Галиным [1]. В дальнейшем подобные задачи изучались многими авторами и различными методами. Наибольшие трудности вызывает решение контактных задач для анизотропных тел конечных размеров.

Цель статьи. Целью статьи является исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной упругой пластины, которая находится под воздействием жесткого штампа с плоским основанием. В зоне контакта учитывается трение.

Постановка задачи, метод решения. Пусть упругий ортотропный прямоугольник $0 \le x \le h,\ |y| \le b$ закреплен по кромкам $y = \pm b$. В грань прямоугольника $(x = 0)$ вдавливается жесткий прямоугольный штамп с плоским основанием ширины $2l\ (l < b)$, который под действием центральной силы P_0 движется поступательно параллельно оси $0x$. На штамп действует сдвигающая сила Q_0. Между штампом и прямоугольником учитывается сила трения, подчиняющаяся закону Кулона. Рассматривается состояние предельного равновесия штампа. Противоположная грань прямоугольника $(x = h,\ y < b)$ остается свободной. Прямоугольник представляет собой пластину толщины h_*, работающую в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Требуется определить закон распределения напряжений под штампом и в прямоугольнике.

Задача сводится к интегрированию уравнений равновесия прямоугольника в перемещениях:

$$B_1 u_{xx} + G u_{yy} + mG\upsilon_{xy} = 0, \quad B_2\upsilon_{yy} + G\upsilon_{xx} + mGu_{xy} = 0, \qquad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \quad (x = 0,\ \ l < |y| < b), u = const, \quad \sigma_{12} = \rho\sigma_{11} \quad (x = 0,\ |y| < l)$$

$$u = \upsilon = 0 \quad (y = \pm b), \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \qquad (x = h,\ |y| < b) \qquad (2)$$

где $B_j = E_j h_* /(1 - \nu_{12}\nu_{21}),\ j = 1{,}2,\ G = G_{12}h_*,\ \ m = 1 + \nu_{21}B_1 / G.$

Здесь E_1, E_2 модули упругости вдоль главных направлений Ox; Oy, ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона, G_{12} модуль сдвига, σ_{11}, σ_{22} – нормальные напряжения, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ – касательные напряжения; u и υ – компоненты вектора перемещений; h_*- толщина пластинки; индексы x и y означают дифференцирование по соответствующим координатам. Кроме того, должны быть выполнены условия равновесия штампа:

$$\int_{-l}^{l} \sigma_{11}(0,y)\,dy + P_0 = 0, \quad \int_{-l}^{l} \sigma_{12}(0,y)dy + Q_0 = 0\,. \tag{3}$$

Задача решается асимптотическим методом, описанным в [2, 3], с помощью которого напряженно-деформированное состояние пластины расщепляется на две составляющие, определение которых сводится к последовательному решению краевых задач теории потенциала. Определение напряженно-деформированного состояния первого типа в нулевом приближении сводится к интегрированию уравнений

$$B_1 u_{xx}^{1,0} + G u_{yy}^{1,0} = 0\,, \qquad B_2 \upsilon_y^{1,0} + m\,G\,u_x^{1,0} = 0\,, \tag{4}$$

при соответствующих граничных условиях. После введения независимых безразмерных переменных $x_1 = (G/B_1)^{1/2}\ x/l$, $y_1 = y/l$ для определения функции $u^{1,0}$ приходим к краевой задаче:

$$u_{x_1 x_2}^{1,0} + u_{y_1 y_1}^{1,0} = 0\,; \tag{5}$$

$$u_{x_1}^{1,0} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 = 0, & 1 < |y| < \beta \\ x_1 = h_1, & |y_1| < \beta \end{pmatrix},\ u^{1,0} = const \qquad (x_1 = 0, \quad |y_1| \le 1),$$

$$u_{x_1}^{1,0} = 0 \qquad (y = \pm\beta), \tag{6}$$

где $\quad \beta = b/l; \qquad h_1 = (G/B_1)^{1/2}\ h/l.$

Таким образом, требуется найти аналитическую в прямоугольнике $0 \le x_1 \le h,\ \ |y_1| \le \beta$ функцию $u^{1,0}$ по заданным граничным условиям (6). Эта задача решается отображением прямоугольника из плоскости $z_1\ (z_1 = y_1 + i x_1)$ в полуплоскость изображений $\zeta_1 \quad (\eta_1 = \eta_1 + i\xi_1)$. Отображение верхней полуплоскости на прямоугольник реализуется функцией $Z_1 = c_1 \int\limits_0^{\zeta_1} \dfrac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k_1^2\xi_1^2)}}$, причем для определения параметров $k_1 \quad (0 < k_1 < 1)$ и c_1 имеются уравнения:

$$\beta = c_1 \int\limits_0^1 \frac{d\,t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = c_1 K(k_1) \quad h_1 = c_1 \int\limits_1^{1/k_1} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k_1^2 t^2)}} = c_1 K(k_1^1), \tag{7}$$

где $K(k_1)$ – полный эллиптический интеграл первого рода $k_1' = \sqrt{1-k_1^2}$. Тогда

$$K(k^1)/K(k) = h_1/\beta = \kappa_1\,. \tag{8}$$

По известному отношению (8) из табл. 17.3 [5] определим k_1, а затем $K(k_1)$. Тогда из первого уравнения (7) получим $c_1 = \beta / K(k_1)$. Функция, отображающая прямоугольник на полуплоскость, имеет вид

$$\zeta_1 = sn\,(K(k_1)\,z_1/\beta, k_1). \tag{9}$$

Пусть $\varphi^0 = u^{1,0} + i\,Q^{1,0}$ ($Q^{1,0}$ – гармоническая функция, сопряженная с $u^{1,0}$). Тогда $\varphi_1{}^0 = \varphi_{y_1}^0 = u_{y_1}^{1,0} + i\,Q_{y_1}^{1,0} = u_{y_1}^{1,0} - i\,u_{x_1}^{1,0}$. Функцию $\varphi_1^0(x_1; y_1)$ можно определить в полуплоскости ζ_1. Из условий (6) и соотношения (9) следует, что на действительной оси полуплоскости в интервале $|\eta_1| < l_1$ известна действительная часть функции φ_1^0, а ее мнимая часть известна на остальных интервалах границы полуплоскости. Определение аналитической функции, обладающей такими данными, можно осуществить при помощи формулы Келдыша-Седова [4]. Так как на границе полуплоскости ζ_1 в интервале $|\eta_1| < l_1$ действительная часть функции φ_1^0 равна нулю, а на остальной части мнимая ее часть равна нулю, то решение для функции φ_1^0 во всей полуплоскости имеет вид

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - l_1^2}}, \tag{10}$$

где A – действительная постоянная; выбирается та ветвь корня, которая положительная при положительных значениях аргумента. Действительная и мнимая часть $\varphi_1^0(\zeta_1)$ определяют функции $u_{y_1}^{1,0}$ и $u_{x_1}^{1,0}$.

При $\xi_1 = 0$ $\left(x_1 = 0;\ \text{ или } \mathrm{y}_1 = \pm\beta;\ \text{ или } \mathrm{x}_1 = \mathrm{h}_1,\ |\mathrm{y}_1| < \beta\right)$ $\varphi_1^0(\eta_1) = \dfrac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - l_1^2}}$,

$$u_{y_1}^{1,0} = 0,\quad u_{x_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}\quad \left(|\eta_1| < l_1\right),\ u_{y_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - l_1^2}},\quad u_{x_1}^{1,0} = 0\quad \left(|\eta_1| > l_1\right), \tag{11}$$

где $\eta_1 = sn\left(K(k_1)y_1/\beta, k_1\right)$.

$$A = -\frac{P_0}{2\sqrt{GB_1}\,c_1\,\mu},\quad \text{где}\ \mu = \int_0^{l_1} \frac{d\eta_1}{\sqrt{\left(l_1^2 - \eta_1^2\right)\left(1 - \eta_1^2\right)\left(1 - k_1^2\,\eta_1^2\right)}}. \tag{12}$$

В нулевом приближении нормальное напряжение под штампом и составляющая касательного напряжения вне штампа соответственно имеют вид:

$$\sigma_{11}^{1,0} = -\frac{P_0}{2l\,c_1\,\mu} / \sqrt{l_1^2 - \eta_1^2},\qquad \sigma_{12}^{1,0} = -\frac{G\,P_0}{2l\sqrt{GB_1}\ c_1\,\mu} / \sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}. \tag{13}$$

Таким образам граничные условия по нормальному напряжению под штампом удовлетворяются, но получается невязка по касательному напряжению вне штампа, которая снимается при определении напряженно-деформируемого состояния второго типа в нулевом приближении.

Компонента $\upsilon^{2,0}$ вектора перемещений, соответствующая состоянию второго типа определяется из уравнений

$$G\upsilon_{xx}^{2,0} + B_2\upsilon_{yy}^{2,0} = 0,\quad B_1 u_{xx}^{2,0} + mG\upsilon_{yy}^{2,0} = 0, \tag{14}$$

при следующих граничных условиях:

$$\upsilon_x^{2,0} = -u_y^{1,0}\quad \left(x = 0, l < |y| < b;\ x = h, \left(|y|\right) < b\right), \tag{15}$$

$$G\upsilon_x^{2,0} = \rho\,\sigma_{11}^{1,0}\quad \left(x = 0, |y| < l\right),\quad \upsilon_x^{2,0} = 0\quad \left(y = \pm b\right).$$

После введения переменных $x_2 = \left(B_2/G\right)^{1/2} x/l$, $y_2 = y/l$ краевая задача (14), (15) примет вид:

$$\upsilon_{x_2 x_2}^{2,0} + \upsilon_{y_2 y_2}^{2,0} = 0, \tag{16}$$

$$\upsilon_{x_2}^{2,0} = -\sqrt{\frac{G}{B_2}}\,u_{y_2}^{1,0}\qquad \begin{pmatrix} x_2 = 0, & 1 < |y_2| < \beta \\ x_2 = h_2, & |y_2| < \beta \end{pmatrix}, \upsilon_{x_2}^{2,0} = 0\quad \left(y_2 = \pm\beta\right),$$

$$\upsilon_{x_2}^{2,0} = \rho\,l\left(GB_2\right)^{-1/2}\sigma_{11}^{1,0}\qquad \left(x_2 = 0,\ |y_2| < 1\right), \tag{17}$$

где $\beta = b/l$; $h_2 = \sqrt{B_2/G}\,h/l$.

Задача (16), (17) является задачей Неймана для функции $\upsilon^{2,0}$ и может быть решена отображением прямоугольника из плоскости z_2 $\left(z_2 = y_2 + i\,x_2\right)$ в верхнюю полуплоскость изображений ζ_2 $\left(\zeta_2 = \eta_2 + i\,\xi_2\right)$. Функция отображения имеет вид (9) с заменой z_1 на z_2, k_1 на k_2, κ_2 определяется аналогично (8).

Так как $G < B_1$ $\left(B_2 \approx B_1 \quad \varepsilon = G/B_1\right.$ является малым параметром), то при $h < l \quad h_2 >> h_1 \quad \left(\kappa_2 >> \kappa_1\right)$, $q_2 = e^{-\pi\kappa} \approx 0$ и $k_2 \approx 0$. Но при малых $k_2 \quad K\left(k_2\right) \approx \pi/2$ и функция отображения (9) превращается в функцию $\zeta_2 = c_2 \sin\left(\pi z_2/2\beta\right)$. Постоянную c_2 определим так, чтобы точки $x_2 = 0, y_2 = \pm\beta$ отображались в точки $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm l_1$. Тогда $c_2 = l_1/\sin\left(\pi/2\beta\right)$, и точки $x_2 = 0, y_2 = \pm\beta$ отображается в точки $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm c_2$.

Таким образом, при $h < l$ для напряженно-деформированного состояния второго типа вместо прямоугольника фактически имеет место полуполоса и задача в этом случае будет такой: найти аналитическую в полуплоскости ζ_2 функцию $\upsilon^{2,0}$, при условии, что на действительной оси полуплоскости $\left(\xi_2 = 0\right)$ функция $\upsilon^{2,0}_{x_2}$ принимает значения

$$\upsilon^{2,0}_{x_2} = \frac{P_0}{2\sqrt{B_1 B_2}\, c_1\, \mu}\, \frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - l_1^2}} \quad \left(l_1 < \left|\eta_2\right| < c_2\right), \qquad \upsilon^{2,0}_{x} = 0 \quad \left(\left|\eta_2\right| > c_2\right),$$

$$\upsilon^{2,0}_{x_2} = -\frac{\rho P_0}{2\sqrt{G B_2}\, c_1 \mu}\, \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_2^2}} \quad \left(\left|\eta_2\right| < l_1\right), \tag{18}$$

Если $\psi^0 = \upsilon^{2,0} + i\,Q^{2,0}$, $\left(Q^{2,0} -\right.$ гармоническая функция, сопряженная с функцией $\left.\upsilon^{2,0}\right)$, то $\psi_1^0 = i\psi^0_{y_2} = \upsilon^{2,0}_{x_2} + i\,\upsilon^{2,0}_{y_2}$. Функцию ψ_1^0 в любой точке верхней полуплоскости ζ_2 можно определить при помощи интеграла типа Коши, и в данном случае будет выглядеть следующим образом:

$$\psi_1^0\left(\zeta_2\right) = -\frac{\rho\, P_0}{2\,\sqrt{G B_2}\; c_1\; \mu}\, \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \zeta_2^2}} + \frac{P_0}{2\pi i\; \sqrt{B_1 B_2}\; c_1\, \mu}\, \frac{1}{\sqrt{\zeta_2^2 - l_1^2}} \left[\ln\frac{\zeta_2 - c_2}{\zeta_2 + c_2} + \right.$$

$$\left. + \ln\left[\left(c_2\,\zeta_2 + l_1^2\right) + \sqrt{\left(\zeta_2^2 - l_1^2\right)\left(c_2^2 - l_1^2\right)} \Big/ \left(c_2\,\zeta_2 - l_1^2\right) + \sqrt{\left(\zeta_2^2 - l_1^2\right)/c_2^2 - l_1^2}\,\right]\right]. \tag{19}$$

Действительная и мнимая часть функции ψ_1^0 равны соответственно $\upsilon^{2,0}_{x_2}$ и $\upsilon^{2,0}_{y_2}$.

Производная компоненты $u^{2,0}$ по переменной x находится из второго уравнения (18). Определение первого приближения сводится к интегрированию первого уравнения в (1) при следующих граничных условиях:

$$u_x^{1,1} = -u_x^{2,0} \;(x = 0,\, l < |y| < b,\; y = \pm b),\; u^{1,1} = 0 \;(x = 0, |y| < l). \tag{20}$$

Решение этой задачи находится так, как и в нулевом приближении для состояния первого типа.

Анализ результатов, выводы и перспективы дальнейших исследований. После первых двух приближений нормальное напряжение под штампом принимает вид:

$$\sigma_{11} = -P_0/(2c_1\mu\, l_1\sqrt{1-t^2})\left\{1 + \varepsilon^{1/2}\,\frac{m}{\pi}\,\sqrt{G/B_2}\,\left(\rho\ln((1+t)/(1-t)) + 4\varepsilon^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,/(\pi c_2).\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[arctg\sqrt{(1-t^2)/(c_2^2-1)} + \sqrt{(1+t)/(1-t)}\;\ln\left(c_2 + \sqrt{c_2^2-1}\right)\right]\right]\right) + O(\varepsilon)\right\}, \quad где\ \gamma = \frac{\pi}{2c_1\mu\, l_1}.$$

Табл. 1. Зависимость множителя γ от геометрических размеров прямоугольника

	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 5$	$\beta = 10$
$h = 3$	0,809	0,813	0,826	_
$h = 4$	0,904	0,903	0,908	0,938
$h = 6$	0,931	0,952	0,954	0,958
$h = 8$	0,94	0,968	0,974	0,978
$h = 10$	0,9455	0,973	0,982	0,987

Особенность напряжений σ_{11} в (20) в угловых точках штампа $|y| = l$ $\left(|t| = 1\right)$ с учетом трения такая же, как и для полуплоскости и представляет собой разложение в ряд по дробным степеням параметра ε точной особенности [1]. Для гладкого штампа особенность совпадает с точной. Влияние продольных кромок прямоугольника на давление под штампом обусловлено безразмерным множителем γ и вторым слагаемым в круглых скобках формулы (20). Из таблицы 1 видно, что при $h \geq 10$ результаты вычислений приближаются к решению соответствующей задачи для полуполосы [6], полученному асимптотическим методом; при $h \to \infty$, $\beta \to \infty$ получаем решение соответствующей задачи для полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Галин Л.А Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости /Галин Л.А. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
2. Маневич Л.И. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела/ Л.И. Маневич, А.В. Павленко, С.Г. Коблик . – Киев-Донецк: Вища школа, 1982. – 152 с.
3. Маневич Л.И. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов /Л.И. Маневич, А.В. Павленко. – Киев: Вища школа, 1991.–131 с.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики/ И.Л. Седов – М., 1966. – 448 с.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами/ Под редакцией М. Абрамовица и И.Стиган. – М.; 1976. – 832 с.
6. Павленко А., Контактная задача для ортотропной полуполосы/А.Павленко, Т. Кагадий, И. Щербина// Theoretical Foundations of Civil Engineering – XII.– Warsaw, 2004. – P.789–794.

ПАВЛЕНКО Анатолий Васильевич – д.ф.-м.н., заведующий кафедры высшей математики Национальной металлургической академии Украины.

Научные интересы:

– математические проблемы механики твердого тела.

ЩЕРБИНА Ирина Владимировна – к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Национальной металлургической академии Украины.

Научные интересы:

– контактные задачи механики деформируемого твердого тела.

СЯСЕВ Андрей Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений Днепропетровского Национального университета им. Олеся Гончара.

Научные интересы:

– математическое моделирование технологических процессов, задачи механики деформируемого твердого тела, задачи термомеханики.

УДК 519.83

Д.Г. Павлов, М.В. Александрова, О.Р. Чертов

ТЕОРЕТИКО-ІГРОВІ МОДЕЛІ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МЕРЕЖЕВОГО ШАХРАЙСТВА В СИСТЕМІ КОНТЕКСТНОЇ РЕКЛАМИ

Постановка проблеми. Із розвитком Інтернету все частіше відбувається зіткнення декількох сторін, що мають різні або протилежні інтереси [1]: звичайні користувачі електронної пошти та такі, що навмисно розсилають рекламні повідомлення (спамери); легітимні користувачі та зломщики (хакери); пошукові мережі та власники сайтів, що використовуються в якості рекламних майданчиків. Оскільки математичною моделлю протистояння декількох сторін є гра, подібні ситуації прийнято розглядати в термінах теорії ігор.

Кількість учасників (гравців) та доходи окремих сторін в таких системах можуть бути дуже великими. Тому такі ігри виділяються в окремий клас – «Інтерактивні ігри з дуже великою кількістю гравців» (MMOG – massively multiplayer online games) [2]. Матеріальна зацікавленість сторін в інтерактивних іграх призводить до зростання рівня шахрайства в них.

Яскравим прикладом Інтерактивної гри з дуже великою кількістю гравців є система контекстної реклами. При обробці кожного пошукового запиту рекламна компанія в якості результатів пошуку надає посилання на найрелевантніші сайти та рекламні оголошення, які скоріше за все можуть зацікавити користувача. Обирання конкретних оголошень та їх ранжування по позиціях відбувається шляхом проведення узагальненого аукціону другої ціни (GSP – general second price auction) [3]. Учасниками такого аукціону є пошукова мережа, метою якої є максимізація власних прибутків, та рекламодавці, які прагнуть продемонструвати свій сайт найбільшій кількості цільової аудиторії. При розміщенні оголошень на сайтах з’являється ще один учасник гри – власник сайту. Оскільки він отримує деяку платню за кожен перехід по оголошенню, розміщеному на його сайті, природним прагненням для нього є збільшення кількості кліків (натискань по рекламних повідомленнях). Головною особливістю аукціонів Інтернет-реклами є висока динамічність. Кожен рекламодавець може в будь-який час змінити свою ставку за клік, внаслідок чого гра не може бути стійкою.

Розглянута система є вразливою до такого різновиду мережевого шахрайства як склікування, коли відбувається штучна генерація переходів по оголошенню з метою розтрати рекламного бюджету рекламодавця (конкуренція між рекламодавцями за вищі позиції при показі) або збільшення власних прибутків (властиво власникам сайтів). Відомо, що рівень недійсних кліків в мережі є достатньо високим, наприклад, по даним компанії Adometry в 4-му кварталі 2010 р. він склав 19,1 % від усіх переходів [4]. Тому розробка нових методів боротьби із склікуванням є актуальною задачею.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Багато дослідників працюють над задачею формалізації відносин учасників процесу контекстної реклами в термінах теорії ігор. Приміром, в роботі [3] була описана та досліджена модель узагальненого аукціону другої ціни, що наразі в чистому вигляді використовується в системі Yahoo! та із невеликими змінами в пошуковій мережі Google. В статті [5] розглянуто динаміку досягнення рівноважного стану декількома рекламодавцями.

Окреме місце займають дослідження, націлені на розробку таких моделей аукціону, що є найбільш вигідними для пошукових мереж. В роботі [6] був запропонований алгоритм визначення позицій оголошень для системи контекстної реклами AdWords пошукової мережі Google. В [7] було показано, що використання елементів випадкового вибору замість строгого розташування оголошень в порядку зменшення їх ставки за клік може позитивно відобразитись на доходах пошукових мереж.

Автори роботи [8] розглядають можливу поведінку нового учасника процесу Інтернет-реклами – постачальника Інтернет-послуг. Останні володіють специфічною інформацією щодо уподобань своїх користувачів та можуть або формувати коаліцію із пошуковими мережами задля досягнення найкращих результатів, або інтерактивно змінювати результати пошуку (зокрема, оголошення). Тому постачальники Інтернет-послуг стають активною частиною системи рекламування. Обирання конкретної стратегії поведінки залежить від того, яка з них принесе більші прибутки.

Статті [9, 10] присвячені моделюванню можливих стратегій поведінки власників сайтів. Автори визначають умови, за яких власникам сайтів вигідно проводити легітимні дії або генерувати штучні кліки. В роботі [10] також будується аналогічна модель для процесу спілкування оголошень конкурентів.

Головною особливістю всіх зазначених вище робіт є те, що розроблені теоретико-ігрові моделі використовуються для аналізу ситуації, що склалася в системі контекстної реклами, з метою визначення шляхів модифікації аукціону або стратегічних дій пошукових мереж таким чином, щоб знизити зацікавленість можливих шахраїв в процесі спілкування. Для цього необхідно зробити затрати на генерацію недійсних кліків вищими за можливий від них прибуток.

Проте, зрозуміло, що для ситуацій масштабного спілкування прибутки від шахрайських дій можуть бути достатньо великими. Цей факт забезпечує наявність стимулу до подальшого шахрайства в мережі.

На відміну від зазначених вище робіт автори статті вважають, що теоретико-ігрові моделі також можуть використовуватись для визначення наявності спілкування в мережі.

Метою статті є аналіз існуючих теоретико-ігрових моделей системи контекстної реклами на предмет можливості їх подальшого використання для боротьби із мережевим шахрайством.

Постановка задачі. Узагальнений аукціон другої ціни. Оскільки результати проведення аукціону визначають позиції рекламних оголошень, що є одним з найголовніших елементів в системі Інтернет-реклами, розуміння цього процесу є необхідним для побудови подальших моделей. Розглянемо головні аспекти базової моделі аукціону другої ціни, що наразі використовується системою Yahoo! [3].

Введемо наступні позначення. Нехай N – кількість позицій на екрані; K – кількість рекламодавців, що претендують на показ свого оголошення за деяким ключовим словом; α_i – математичне очікування кількості кліків по оголошенню, розташованому на позиції i; s_k – корисність одного переходу для рекламодавця k. Тоді вираз $\alpha_i s_k$ представлятиме собою дохід, який рекламодавець k отримає в результаті перебування його оголошення на позиції i. Якщо позначити через p_i плату рекламодавця за перебування на позиції i, тоді його чистий прибуток становитиме

$$u_i^k = \alpha_i s_k - p_i . \tag{1}$$

Позначимо через b_i максимальну суму, яку рекламодавець згоден платити за один перехід по його оголошенню. Величина b_i є ставкою в рамках даного аукціону і може бути змінена в будь-який момент. Пошукова мережа розміщує оголошення в порядку зменшення значення b_i. Якщо декілька рекламодавців приймають однакову величину ставки, їх оголошення можуть розміщується випадково. Однак, на практиці використовується таке правило: позиція оголошення буде меншою для того рекламодавця, який першим прийняв ставку. Цей підхід є аналогом правила проведення аукціонів: хто першим здається, той програє.

Якщо на оголошення було натиснуто, то з рекламодавця знімається плата, що дорівнює ставці наступного за ним гравця. Іншими словами, загальна плата пошуковій системі становить $p_i = \alpha_i b_{i+1} \quad \forall i \in \{1,\dots,\min(N,K)\}$, тобто, використовуючи рівняння (1), можна записати, що $u_i = \alpha_i \left(s_i - b_{i+1}\right)$.

Оскільки кількість гравців в подібній системі може бути дуже великою, встановлення рівноважного стану в грі є достатньо важкою задачею. Тому розглядається локально-стійка рівновага, тобто такий стан, коли рекламодавець не може збільшити свого виграшу за рахунок зміщення гравця, розташованого на 1 позицію вище. Тобто умовою рівноваги є нерівність $u_i^{g(i)} \ge u_{i-1}^{g(i)}$, де $g(i)$ – ідентифікатор гравця на позиції i.

У випадку врахування якості рекламного оголошення кількість кліків, яку отримає рекламодавець, перебуваючи на позиції i, становитиме $\alpha_i \beta_k$, де β_k – показник якості. Необхідною та достатньою умовою локально-стійкої рівноваги в цьому випадку буде нерівність

$$\alpha_i \beta_{g(i)} \left(s_{g(i)} - b_{i+1}\right) \ge \alpha_j \beta_{g(i)} \left(s_{g(i)} - b_{j+1}\right),$$

де $i > j$.

Тобто $\alpha_i \left(s_{g(i)} - b_{i+1}\right) \ge \alpha_j \left(s_{g(i)} - b_{j+1}\right)$, а, отже, рівновага не залежить від β_k.

Аукціон Google. В системі Google оголошення розміщуються в порядку зменшення значення рангу, що становить $b_i \gamma_{g(i)}$, де γ_k – показник якості рекламного оголошення. Плата за клік x_i становить мінімально необхідну суму для того, щоб виконувалась умова

$$\gamma_{g(i)} x_i \ge \gamma_{g(i+1)} b_{g(i+1)},$$

тобто $x_i \ge \dfrac{\gamma_{g(i+1)} b_{g(i+1)}}{\gamma_{g(i)}}$.

Необхідною та достатньою умовою рівноваги є нерівність

$$\forall i, j > i, \quad \alpha_i \beta_{g(i)} \left(s_{g(i)} - \frac{\gamma_{g(i+1)} b_{g(i+1)}}{\gamma_{g(i)}} \right) \ge \alpha_j \beta_{g(i)} \left(s_{g(i)} - \frac{\gamma_{g(j+1)} b_{g(j+1)}}{\gamma_{g(i)}} \right),$$

або $\alpha_i \left(\gamma_{g(i)} s_{g(i)} - \gamma_{g(i+1)} b_{g(i+1)}\right) \ge \alpha_j \left(\gamma_{g(i)} s_{g(i)} - \gamma_{g(j+1)} b_{g(j+1)}\right)$.

Тобто умова рівноваги для системи Google співпадає із умовою рівноваги узагальненого аукціону другої ціни, де встановлені ставки $\{\gamma_k b_k\}$, а вартості кліків для рекламодавців дорівнюють $\{\gamma_k s_k\}$.

Стратегії поведінки власників сайтів. Оскільки кожен клік по оголошенню, розміщеному на сайті, що є рекламним майданчиком, приносить його власникові певний прибуток, то загальне збільшення кількості переходів по оголошенню є природною стратегією такого гравця. Збільшити кількість переходів можна двома способами: легітимним та шахрайським. Перший спосіб передбачає покращення якості сайту, розроблення цікавого контенту, залучення нових відвідувачів та утримання «старої» аудиторії. Подібні дії передбачають відповідні витрати. Другий спосіб – генерування штучних переходів.

Оскільки пошукові мережі розроблюють спеціальні системи захисту від склікування, процес генерації недійсних кліків також потребує певних витрат. До того ж, із збільшенням кількості недійсних переходів, підвищується ймовірність того, що шахрайські дії будуть викриті, а, отже, знижується їх вартість для рекламодавця.

Умова легітимної поведінки власника сайту може бути записана в формі нерівності

$$Px - \beta x \geq Pr - \alpha r - V(r),$$

де P – дохід власника сайту від одного кліку, x – кількість дійсних кліків, які можуть бути здійснені на сайті, β – витрати власника сайту, що припадають на один дійсний перехід, r – кількість недійсних кліків, α – витрати на генерацію одного недійсного кліку, $V(r)$ – зростаюча функція, що визначає можливі втрати власника сайту у випадку викриття шахрайства.

Висновки та перспективи подальшого дослідження. В даній роботі розглянуті існуючі теоретико-ігрові моделі системи контекстної реклами. Під час рекламування в мережі Інтернет, зазвичай, взаємодіють наступні сторони: пошукова мережа, рекламодавці та власники сайтів. Кожна із сторін прагне максимізувати свої прибутки, що і визначає стратегію їх поведінки.

Перспективами подальшого дослідження є розробка теоретико-ігрових моделей поведінки кожного із гравців в умовах використання ними легітимної та шахрайської стратегій. Аналізуючи реальну поведінку кожного суб'єкта із використанням розроблених моделей можна буде в подальшому зробити висновки відносно наявності склікування в системі.

Особливий інтерес представляє введення в систему нового гравця олігополіста-альтруїста [11], метою якого є не власне збагачення, а задоволення деяких потреб соціально-незахищених груп суспільства. Такі організації на сучасному етапі займають вагому позицію в економіках деяких країн Європи, Канади та Японії.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Kanatarciogly M. A Game Theoretic Approach to Adversarial Learning / M. Kanatarciogly, B. Xi, C. Clifton. – Purdue University, Department of Statistics, Technical Report /05-06, 2005. – 12 p.
2. Virtual Worlds and Fraud: Approaching Cybersecurity in Massively Multiplayer Online Games / J. Bardzell, M. Jakobsson, S. Bardzell et al. // Proceedings of DiGRA 2007 Conference. – 2007. – P. 451–742.
3. Edelman B. Internet advertising and the generalized second price auction: Selling billions of dollars worth of dollars worth of keywords / B. Edelman, M. Ostrovsky, M. Schwarz // American Economic Review. – 2007. – Vol. 97. – P. 242–259.
4. Click Fraud Rate Drops to 19.1 Percent in Q4 2010 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.adometry.com/media/press/release.php?id=1.
5. Bu T. Dynamics of strategic manipulation in ad-words auction / T. Bu, X. Deng, Q. Qi // Proc. of the 3rd Workshop on Ad Auctions, Banff, Canada. – 2007.
6. AdWords and Generalized On-line Matching / A. Mehta, A. Saberi, U. Vazirani et al. // 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. – 2005. – P. 264–273.
7. Maille P. On the interest of introducing randomness in Ad-word auctions / P. Maille, B. Tuffin // Information and Communication Technology. – 2010. – Vol. 327. – P. 229–240.

8. Security Games in Online Advertising: Can Ads Help Secure the Web? / N. Vratonjic, M. Raya, J.-P. Hubaux et al. // Workshop on the Economics of Information Security (WEIS 2010). – 2010.
9. Asdemir K. An Economic Model of Click Fraud in Publisher Networks / K. Asdemir, O. Yurtseven, M. A. Yahya // International Journal of Electronic Commerce. – 2009. – Vol. 13. – No. 2. – P. 61–89.
10. Wilbur K. Click Fraud / K. Wilbur, Y. Zhu // Marketing Science. – 2009. – Vol. 28. – No. 2. – P. 293–308.
11. Mixed oligopoly with consistent conjectures / V. Kalashnikov, V. Bulavsky, I. Kalashnykova et al. // European Journal of Operational Research. – 2010. – Vol. 210. – No. 3. – P. 729–735.

ПАВЛОВ Дмитро Генадійович – аспірант кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Наукові інтереси:

– моделювання складних систем, інтелектуальний аналіз даних, Інтернет-реклама.

АЛЕКСАНДРОВА Маргарита Володимирівна – магістрантка кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Наукові інтереси:

– інтелектуальний аналіз даних, вейвлет-перетворення.

ЧЕРТОВ Олег Романович – к.т.н., доцент кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»

Наукові інтереси:

– інформаційні технології, інтелектуальний аналіз даних, метадані;

– вейвлет-перетворення, знеособленість та анонімність даних.

УДК 658.51.012

О.М. Пигнастый

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Постановка проблемы и анализ публикаций по теме исследований. Возможны два принципиально разных подхода к описанию технологического процесса – эмпирический [1,2,3,4] и статистический [5,6,7]. Задачей эмпирического подхода является установление связей и закономерностей между наблюдаемыми величинами технологического процесса, измеряемыми на макроскопическом уровне его описания [2]. При этом параметры технологического процесса, связанные с технологией производства, свойствами предмета труда и характеристиками технологического оборудования, не рассматриваются [1,3]. В противоположность этому, статистический подход с самого начала основан на модельных представлениях о свойствах предмета труда, закономерностях взаимодействия предметов труда между собой, параметрах оборудования и стохастическом характере воздействия оборудования на предмет труда при его движении по технологическому маршруту [6,7]. Выводы статистического подхода справедливы в той мере, в какой справедливы предположения, сделанные о законе воздействия оборудования на предмет труда в ходе выполнения технологической операции и свойствах предмета труда [5,7]. Несмотря на то, что эмпирический метод отличается простотой и ведет к решению целого ряда конкретных производственно-технологических задач, не требует при этом сведений о свойствах предмета труда, закономерностях взаимодействия предметов труда между собой и характере воздействия оборудования на предмет труда, обладает и существенным недостатком: остается не раскрытым внутренний, основанный на указанных закономерностях и законах, механизм технологических явлений. По этой причине при эмпирическом описании технологических процессов бессмысленно концентрировать внимание на вопросах, почему зависимости между характеристиками технологических процессов разных производственно-технических систем имеют отличительные черты. Статистический подход к описанию технологического процесса с самого начала прослеживает механизмы взаимодействия предметов труда между собой и воздействия оборудования на предмет труда, позволяет решить ряд задач, неразрешимых в рамках эмпирического метода. Примерами наиболее важных из них являются вывод уравнений состояния технологического процесса, задачи теория подобия технологических процессов [7]. Наконец, статистический подход позволит дать строгое обоснование известных эмпирических законов и установить границы их применимости. Существенным преимуществом статистического подхода к описанию технологических процессов является то, что он позволяет объяснить флуктуации параметров технологического процесса, оценить их масштаб и получить критерии устойчивого функционирования технологического процесса. В отличие от эмпирического подхода, статистический подход позволяет построить модельную теорию, в основу которой закладывается динамическая модель поведения предмета труда, учитывающая элементы взаимодействия между предметами труда и стохастический характер воздействия на предмет труда оборудования. Статистическая теория технологического процесса строится как динамическая теория поведения ансамбля предметов труда, объектом исследования которой являются не сами динамические переменные, описывающие состояние предметов труда, а их вероятности и статистические средние.

Актуальность исследования обусловлена возможностью построения статистической теории моделирования технологических процессов, позволяющей на базе единого подхода построить модели управления технологическими процессами для широкого класса производственно-технических систем, в основу которого положено описание технологического процесса с использованием самосогласованных между собой параметров микроуровня (предметно-технологическое описание) и макроуровня (потоковое описание) технологического процесса.

Цель работы: обоснование и демонстрация теоретических основ и концептуальных положений статистического моделирования технологических процессов производственно-технических систем.

Основная часть. Предметно-технологическое описание технологического процесса. (Микроуровень описания). Процесс изготовления предмета труда есть логически упорядоченный набор технологических операций. В ходе технологической операции на предмет труда переносится стоимость сырья, материалов, живого труда и других технологических ресурсов путем воздействия технологического оборудования [1]. На каждой операции появляются колебания геометрических характеристик, физико-механических свойств материалов, которые обусловлены комплексом случайных и систематических внешних и внутренних факторов, действующих в производстве. Они вызывают отклонения выходных параметров, описывающих состояние предмета труда. Степень соответствия параметров предметов труда после технологической операции установленным допускам, определяет как технологическую точность выполнения технологической операции, так и точность технологического процесса в целом. В результате возникновения случайных погрешностей при технологической обработке предмета труда, контролируемый параметр является случайной величиной и может принимать случайное значение. Таким образом, технологический процесс представляет собой случайный процесс перехода предметов труда из одного состояния в другое, в результате воздействия на предметы труда технологического оборудования.

Состояние системы определяется как состояние числа N предметов труда производственно-технической системы [1,6,7]. Состояние предмета труда в момент времени t может быть представлено координатами в фазовом технологическом пространстве (t, S, μ) [5,6,7]. Этими координатами являются сумма затрат $\mathrm{S_j}$ (грн), перенесенных на j-й предмет труда в ходе выполнения технологических операций и интенсивность переноса затрат μ_j (грн/час) от оборудования на j-й предмет труда в единицу времени, 0<j<N. Координаты $\mathrm{S_j}$ и μ_j определяют в фазовом технологическом пространстве технологические траектории предметов труда $\mathrm{S_j} = \mathrm{S_j}(t)$. В ходе технологического процесса предмет труда обязан быть изготовлен в соответствии с заданной технологией производства. Отклонение от технологии считается недопустимым, приводит к нежелательным результатам, влечет за собой брак продукции. Каждая технологическая операция характеризуется оборудованием (его рабочими параметрами), квалификацией персонала, нормами потребления технологических ресурсов (сырья, материалов, комплектующих, фонда оплаты труда, энергоресурсов), что и определяет закон переноса технологических ресурсов на предмет труда. Интенсивность μ передачи затрат $\Delta S = \Delta S(t)$ от средств труда на j-й предмет труда в ходе обработки за время выполнения технологической операции Δt является случайным процессом [1,3,5,6], значение которого в фиксированный момент времени определяется случайной величиной:

$$\mu = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \tag{1}$$

Состояние системы в некоторый момент времени будет определено, если определены микропараметры $\mathrm{S_j}$ и μ_j, а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния параметров предмета труда:

$$\frac{dS_j}{dt} = \mu_j, \qquad \frac{d\mu_j}{dt} = f_j(t,S), \tag{2}$$

где $f_j(t,S)$ – производственная функция технической системы. Если количество предметов труда много больше единицы, то решить систему (2) из 2N -уравнений практически невозможно, что требует переход от микроописания к макроописанию с элементами вероятностной природы. Основная трудность в таком описании состоит в том, чтобы выделить характеристики состояний предметов труда, которые можно было бы измерить на микроуровне описания предприятия. Вместо рассмотрения состояния предметов труда с параметрами $\mathrm{S_j}$ и μ_j, введем в фазовом технологическом пространстве $(\mathrm{t,S},\mu)$ нормированную дискретную функцию распределения предметов труда по состояниям. Каждая точка в данном пространстве будет задавать состояние предмета труда. Разумно ожидать, что при больших N эту функцию будет хорошо аппроксимировать непрерывная функция распределения предметов труда по состояниям $\chi(t,S,\mu)$. Если производственно-техническая система состоит из нескольких видов предметов труда, то для описания системы потребуется получить функцию распределения для каждого вида предметов труда.

Кинетическое уравнение производственно-технической системы (Связь уровней описания). Разобьем фазовое пространство на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки $\Delta\Omega = \Delta\mathrm{S}\cdot\Delta\mu$ были много меньше значений характерных параметров производственно-технической системы и в то же время содержали внутри себя большое число предметов труда. Вместо того, чтобы фиксировать точные значения параметров предметов труда, будем приближенно характеризовать состояние производственно-технической системы числом предметов труда в каждой ячейке $\Delta\Omega$. Если размеры ячейки достаточно малы, то приближенное описание будет нести в себе почти столь же подробную информацию, что и точное. Таким образом, мы приходим к необходимости наряду с основным пределом при $N \to \infty$ рассматривать и предельный случай стремящихся к нулю размеров ячейки. В силу того, что величина $\chi(t,S,\mu)\cdot d\Omega$ представляет собой число предметов труда в бесконечно малой ячейке $\Delta\Omega$ фазового технологического пространства (t,S,μ), мы можем по изменению фазовой координаты S и фазовой скорости μ, определяющих состояние каждого предмета труда в этой ячейке фазового пространства, судить и об изменении самой функции $\chi(t,S,\mu)$:

$$\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t} + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\cdot\mu + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}\cdot f(S) = \mathrm{J}(t,S,\mu), \tag{3}$$

$$\frac{dS}{dt} = \mu; \qquad \frac{d\mu}{dt} = f(S). \tag{4}$$

Уравнение (4) описывает изменение усредненных по бесконечно малой ячейке фазового технологического пространства $\Delta\Omega$ характеристик предметов труда S_j, μ_j. Функция $\mathrm{J}(t,S,\mu)$ определяется плотностью оборудования вдоль технологической цепочки и его техническими характеристиками [1,5,6,7], стремится свести при $t \to \infty$ начальное распределение предметов труда по состояниям к состоянию с равновесной функцией распределения в соответствии с технологическим процессом. Будем считать функцию $\chi(t,S,\mu)$ нормированной

$$\int_0^\infty d\mathrm{S} \cdot \int_0^\infty d\mu \cdot \chi(t, S, \mu) = N \,. \qquad (5)$$

Производственная функция $f(t, S)$ определяется из способа производства. По своему смыслу производственная функция представляет собой аналог силы, перемещающий предмет труда по технологическому маршруту. При таком перемещении на предмет труда оказывается воздействие со стороны орудий труда. Происходит перенос технологических ресурсов на предмет труда при его движении согласно технологического маршрута. Оборудование воздействует на предмет труда, изменяя его качественно и количественно. Мы можем говорить только о вероятности того, что после воздействия со стороны технологического оборудования предмет труда будет находиться в том или ином состоянии. Этот вероятностный характер воздействия технологического оборудования на предмет труда можно учесть, задав функцию $\psi(t, S, \mu)$, определяющую вероятность того, что после воздействия оборудования на предмет труда, предмет труда будет потреблять технологические ресурсы с интенсивностью μ. Функцию $\psi(t, S, \mu)$ можно задать, анализируя паспортные данные оборудования и конструкторско-технические параметры технологии обработки предмета труда. Определим моменты $[\psi]_k$ функции $\psi(t, S, \mu)$ выражениями:

$$\int_0^\infty \psi(t, S, \mu) \cdot d\mu = 1, \quad \int_0^\infty \mu^k \cdot \psi(t, S, \mu) \cdot d\mu = [\psi]_k, \quad k = 1,2.... \qquad (6)$$

Количество предметов труда, испытавших в единицу времени воздействие со стороны оборудования в ячейке $d\mathrm{S} \cdot d\mu$ с координатами (S, μ) и переместившихся в результате воздействия в ячейку $d\mathrm{S} \cdot d\tilde{\mu}$ с координатами $(S, \tilde{\mu})$, пропорционально произведению потока предметов труда $\chi(t, S, \mu) \cdot \mu$ на вероятность перехода $\psi(t, S, \tilde{\mu}) \cdot d\tilde{\mu}$. Что касается вероятности испытать непосредственно воздействие со стороны оборудования, в ходе которого осуществляется переход предмета труда из ячейки $d\mathrm{S} \cdot d\mu$ в ячейку $d\mathrm{S} \cdot d\tilde{\mu}$, то можно утверждать, что эта вероятность пропорциональна плотности расположения оборудования $\lambda(S)$ вдоль технологического маршрута. Число предметов труда, испытавших в единицу времени воздействие со стороны оборудования и принявшие значения в пределах $(\tilde{\mu}; \tilde{\mu} + d\tilde{\mu})$ есть величина $\psi(\tilde{\mu}) \cdot \lambda(S) \cdot \mu \cdot \chi(t, S, \mu) \cdot d\tilde{\mu} \cdot d\mathrm{S} \cdot d\mu$. Наряду с этим в элемент объема $d\mathrm{S} \cdot d\mu$ поступают предметы труда из объема $d\mathrm{S} \cdot d\tilde{\mu}$ путем обратного перехода в количестве $\psi(\mu) \cdot \lambda(S) \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu}) \cdot d\tilde{\mu} \cdot d\mathrm{S} \cdot d\mu$, а общее число предметов труда в элементе объема $d\mathrm{S} \cdot d\mu$ изменяется в единицу времени на величину $d\mathrm{S} \cdot d\mu \cdot J$:

$$J = \lambda(S) \cdot \int_0^\infty \{\psi(\mu) \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu}) - \psi(\tilde{\mu}) \cdot \mu \cdot \chi(t, S, \mu)\} d\tilde{\mu} \,. \qquad (7)$$

С учетом (7) кинетическое уравнение (3) можно представить в виде:

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} \cdot f = \lambda \cdot \left\{ \int_0^\infty \psi(\mu) \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu}) d\tilde{\mu} - \mu \cdot \chi(t, S, \mu) \right\} \qquad (8)$$

В большинстве практических случаях функция $\psi(t, S, \mu)$ не зависит от состояния предметов труда до испытания воздействия со стороны оборудования, откуда

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} \cdot f = \lambda(S) \cdot \{\psi(\mu) \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\}. \qquad (9)$$

Решение уравнений (8) и (9) предоставляет возможность вычислить значения макропараметров технологического процесса и связано со значительными трудностями

[7]. Однако, если вместо решения уравнений (8) и (9) провести процедуру агрегирования слагаемых кинетического уравнения, то возможно получить систему балансовых уравнений для макропараметров технологического процесса.

Потоковое описание технологического процесса. (Макроуровень описания)

Состояние технологического процесса на макроуровне будем описывать моментами функции распределения предметов труда по состояниям $\chi(t,S,\mu)$:

$$\int_0^{\infty} \mu^k \cdot \chi(t,S,\mu) d\mu = [\chi]_k, \qquad k = 0,1,2.... \tag{10}$$

Как правило, для описания состояния больших систем используют несколько первых моментов функции распределения. Известно [1,2,7], что для описания состояния технологического процесса на макроуровне используют два первых момента (10). Нулевой $\int_0^{\infty} \chi(t,S,\mu) d\mu = [\chi]_0$ и первый $\int_0^{\infty} \mu \cdot \chi(t,S,\mu) d\mu = [\chi]_1$ моменты функции распределения предметов труда по состояниям μ имеют производственную интерпретацию: заделы предметов труда и их темп движения вдоль технологической цепочки [1,2,7]. Умножив уравнение (8) на μ^k, $k = 0,1,2....$ и проинтегрировав по всему диапазону μ, получим незамкнутые уравнения балансов состояния макропараметров технологического процесса:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = \int_0^{\infty} d\mu \cdot J, \tag{11}$$

$$\frac{\partial [\chi]_k}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{k+1}}{\partial S} = k \cdot f(t,S) \cdot [\chi]_{k-1} + \int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu^k \cdot J, \qquad k = 1,2,3..... \tag{12}$$

Если усредненная стоимость ресурсов $\langle \Delta S \rangle$, перенесенных в ходе выполнения технологической операции на предмет труда значительно меньше себестоимости конечного продукта S_d, что характерно для технологического процесса, состоящего из большого количества технологических операций, балансовые уравнения (11), (12) в нулевом приближении по малому параметру $\frac{\langle \Delta S \rangle}{S_d} << 1$ примут вид:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \qquad \frac{[\chi]_k}{[\chi]_1} = [\psi]_{k-1}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial [\chi]_k}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{k+1}}{\partial S} = k \cdot f(t,S) \cdot [\chi]_{k-1}, \qquad k = 1,2,3..... \tag{14}$$

Система балансовых уравнений (13), (14) является замкнутой. Для производственно-технической системы, макросостояние которой описывается двумя параметрами – заделом предметов труда на технологической операции и их темпом движения, система балансовых уравнений (13), (14) может быть записана как

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \qquad \frac{[\chi]_2}{[\chi]_1} = [\psi]_1, \tag{15}$$

$$\frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_2}{\partial S} = f(t,S) \cdot [\chi]_1. \tag{16}$$

Уравнения балансов (15), (16) описывают макросостояние технологического процесса через параметры состояния - заделы предметов труда на технологической операции и их темп движения.

Выводы. Изменение параметров, характеризующих состояние предметов труда в результате взаимодействия между собой и с технологическим оборудованием, определяется статистическими закономерностями. Изменение средних величин никак не зависит от начальных условий для микропараметров, характеризующих движение отдельных предметов труда вдоль технологического маршрута, строго определено законами воздействия технологического оборудования на предмет труда и технологией производства продукции. Наличие большого количества предметов труда в технологическом процессе (а следовательно и большого числа уравнений, описывающих их состояние) позволяет дать предсказания, оправдывающие с большой степенью точностью для достаточно большого промежутка времени, чтобы сгладить влияние начального состояния параметров технологического процесса, что дополняет достоинства статистического подхода к изучению технологических процессов.

Показано, что использование статистического подхода дает возможность

– строить модели технологических процессов с заданной степенью точности;
– обосновать методы, используемые для моделирования и управления технологическими процессами (с использованием уравнений системной динамики [2], энтропийный метод Б.Н.Петрова [3]) и указать пределы их применимости;
– рассмотреть с единой точки зрения широкий класс релаксационных явлений, происходящих при функционировании технологических процессов, имеющих место при серийном и массовом выпуске продукции;
– обеспечить обоснованное введение для описания состояния технологического процесса минимального количества макропараметров.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шкурба В.В. Планирование дискретного производства в условиях АСУ/ В.В. Шкурба. – К.: Техника, 1975. – 296 с.
2. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия/Дж.Форрестер.–М.: Прогресс, 1961. – 341 с.
3. Петров Б.Н. Теории моделей в процессах управления / Б.Н.Петров, Г.М.Уланов, И.И.Гольденблат, С.В. Ульянов. – М.: Наука, 1978. – 224 с.
4. Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем/ А.Дж. Вильсон; [пер.с англ.]. – М.:Наука, 1978. – 248 с.
5. Редькин А.К. Способ моделирования и проектирования технологических процессов лесопромышленного комплекса/А.К. Редькин, С.Б. Якимович // Лесной вестник. – М: МГУЛ, 2000. – №4. – С.55–69.
6. Власов В.А. Моделирование технологических процессов изготовления промышленной продукции / В.А. Власов, И.А. Тихомиров, И.И. Локтев .– Изд. Томского политехнического университета, 2006. – 300 с.
7. Пигнастый О.М. Статистическая теория производственных систем/ О.М. Пигнастый. – Х.: Изд. ХНУ им.Каразина, 2007. – 388 с.

ПИГНАСТЫЙ Олег Михайлович – к.т.н, докторант, доцент кафедры компьютерного мониторингу и логистики НТУ ХПИ.

Научные интересы:

– статистическое моделирование технологических процессов.

УДК 629.439

В.А. Поляков, Н.М. Хачапуридзе

АДАПТАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ ДИНАМИКИ МАГНИТОЛЕВИТИРУЮЩЕГО ПОЕЗДА

Постановка проблемы и анализ публикаций по теме исследований. Движение магнитолевитирующего поезда (МЛП) происходит, как правило, в условиях непредсказуемости внутренних и внешних возмущений системы. При этом оно должно гарантированно сохранять требуемые свойства. Это возможно, если обеспечена приспособляемость движения к обстановке.

В настоящее время в литературе отсутствует рассмотрение проблемы адаптации динамики МЛП к эксплуатационным условиям. Этой проблеме посвящена настоящая работа.

Основная часть. Для моделирования адаптационной ситуации, классифицируем обстановку по принципу дихотомии в виде вложенных уровней классов. Кроме того, параметризируем её – каждому классу в однозначное соответствие поставим множество доступных наблюдению, однозначно его идентифицирующих параметров. Тогда, согласно классификационной гипотезе [1], обстановку можно классифицировать с помощью уравнений относительно фазовых координат расчётной схемы МЛП и результат такой классификации формализовать выражением

$$C = C_{\underbrace{\mu\nu\rho\ldots\omega}_{n}} \cdot \prod_{\substack{\xi\in[\overline{1,N}] \\ \chi\in[\overline{1,n}]}} p_{\xi}^{\chi} \quad \forall \mu,\nu,\rho,\ldots,\omega \in [\overline{1,N}], \tag{1}$$

где C – неклассифицированная обстановка; n – число уровней, на которых выполняется классификация; $C_{\underbrace{\mu\nu\rho\ldots\omega}_{k}}$ – классы обстановки k-го её уровня; p_{ξ}^{k} – признак классификационного параметра этого уровня; N – максимальное (из всех) число классов уровня $k+1$ в классе уровня k. При этом $p_{\xi}^{k}=1$, если в действительности реализовался класс $C_{\underbrace{\mu\nu\rho\ldots\omega}_{k}}$, и $p_{\xi}^{k}=0$, если этот класс обстановки не реализовался или если он пуст.

При изменении обстановки, должны приниматься решения относительно корректировки управления МЛП. Эти решения также должны быть параметризированы:

$$\alpha_d = \alpha_d(\tau_c, t), \tag{2}$$

где τ_c, α_d – параметры обстановки и решения, t – текущее время. То есть для адаптации движения решения об управлении должны отслеживать обстановку. Тогда регулятор системы может состоять из функциональных модулей, структура взаимодействия которых определяется блоком классификации обстановки в зависимости от реализовавшегося её класса. То есть, в каждой ситуации структура регулятора является отображением (как правило, – неоднозначным) структуры обстановки

$$\aleph : C \to S, \tag{3}$$

где S – управляющая часть системы, $\aleph$ – оператор отображения из C в S.

Итак, после опознания реализовавшегося класса обстановки, регулятор приобретает структуру, необходимую для сохранения движением МЛП нужных свойств. Однако в каждом таком классе цели движения могут быть различными. То есть, в общем случае, с одной стороны,

$$\Im : C \to A, \tag{4}$$

а, с другой стороны,

$$\Re : A \to S, \tag{5}$$

где A – интегративная цель синтезируемого движения; $\Im$ и $\Re$ – операторы отображения C в A и A в S.

Результаты анализа эксплуатационных режимов движения МЛП, а также условий, в которых оно происходит, свидетельствуют о том, что по критерию качества адаптации этого движения к обстановке, наиболее предпочтителен адаптивный идентификационный тип системы управления ими [2]. Регулятор такой системы имеет следящую структуру, спроектированную с применением игровых методов [3], обеспечивающую позиционное формирование управляющих воздействий.

Любая частная интегративная цель движения $A_{\underbrace{\mu\nu\rho...\omega}_{k}}$ $\forall k \in [\overline{1,n}]$; $\mu, \nu, \rho, ... \omega \in [\overline{1,N}]$ может быть формализована [3] приведением его в некоторый, априорно не фиксированный, определяемый движением системы момент $\tau \in [t_s, \theta]$, на целевое множество G, на котором достигается терминальная цель. При этом τ – момент, когда она достигнута впервые.

Вследствие нестационарности параметров МЛП, при адаптивном управлении его движением, наряду с решением задачи собственно такого управления, а точнее – для более корректного её решения, должна также (непосредственно в процессе движения), в общем случае, проводиться идентификация его параметров. Но лишь в объёме, необходимом для решения основной задачи управления. Пусть в некоторый момент t_j реализовался и опознан класс обстановки $C_{\underbrace{\mu\nu\rho...\omega}_{k}}$ $\forall k \in [\overline{1,n}]$; $\mu, \nu, \rho, ... \omega \in [\overline{1,N}]$, которому соответствует (как правило, – неоднозначно) цель движения $A_{\underbrace{\mu\nu\rho...\omega}_{k}}$ $\forall k \in [\overline{1,n}]$; $\mu, \nu, \rho, ..., \omega \in [\overline{1,N}]$ и структура регулятора $S_{\underbrace{\mu\nu\rho...\omega}_{k}}$ $\forall k \in [\overline{1,n}]$; $\mu, \nu, \rho, ..., \omega \in [\overline{1,N}]$. В предположении игрового подхода к решению задачи, эта структура призвана обеспечить максимально возможно высокое качество движения поезда.

При этом вид функционала Φ, определяющего качество адаптации движения, должен быть выбран так, чтобы одновременно учесть успешность решения как задачи собственно адаптивного управления, так и подчинённой ей задачи идентификации параметров МЛП. Пусть, исходя из $A_{\underbrace{\mu\nu\rho...\omega}_{k}}$ $\forall k \in [\overline{1,n}]$; $\mu, \nu, \rho, ..., \omega \in [\overline{1,N}]$, выбран функционал I, характеризующий эффективность решения задачи формирования оптимальной стратегии управления Ξ. Качество решения подчинённой задачи идентификации в момент t_j может быть оценено значением функционала

$$J(t_j) = \Psi[x(t_i), u(t_i)] \;\; \forall t_i < t_j\;, \tag{6}$$

зависящим от полученной ранее оценки $\Lambda(t_i)$ вектора параметров $\lambda(t_i)$, то есть, в конечном счёте,– от влияющих на неё значений $x(t_i)$ и $u(t_i)$ векторов её состояния и управления в момент t_i. Значения $J(t)$ уменьшаются при таком выборе $u(t)$, который позволяет улучшить оценки $\Lambda(t)$.

Тогда, в общем случае, качество функционирования адаптивной идентификационной оптимальной системы управления может быть объективно оценено с помощью векторного критерия качества

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} I \\ J \end{matrix} \right\|. \tag{7}$$

Введя обозначения

$$\tilde{u} = \arg \min_{u(\bullet)} \{I\} \tag{8}$$

и

$$\hat{u} = \arg \min_{u(\bullet)} \{J\}, \tag{9}$$

констатируем, что в общем случае,

$$\tilde{u} \neq \hat{u} \tag{10}$$

и, следовательно, задача минимизации векторного критерия качества не имеет однозначного решения. Поэтому, полагая, что I и J приведены к безразмерному виду, задачу векторной оптимизации

$$\min_{u(\bullet)} \{\Phi\} \tag{11}$$

сведём к задаче скалярной оптимизации [4]

$$\min_{u(\bullet)} \{\Gamma\} \tag{12}$$

со скалярным показателем качества

$$\Gamma = \psi \cdot I + (1-\psi) \cdot J \quad \forall \psi \in [0,1]. \tag{13}$$

При этом, в зависимости от значения коэффициента ψ, возможны три качественно различные режима управления движением МЛП:

– $\psi = 1$ – режим оптимального безыдентификационного управления, когда Ξ^C выбирается из условия минимизации только I ;

– $\psi = 0$ – режим активной оптимальной идентификации, когда Ξ^E выбирается из условия минимизации только J;

– $0 < \psi < 1$ – режим дуального управления, в котором, на основании принятого компромисса Ξ^∇, одновременно достигаются цели адаптации и идентификации.

Иной подход к выбору компромиссного решения состоит в отыскании Ξ^∇ из условий минимизации только I, но с последующим наложением на эту стратегию ограничений, вытекающих из анализа J. Такими ограничениями, например, может служить требование выполнения условия

$$I(t_j) < I(t_i) \quad \forall t_j > t_i. \tag{14}$$

Для обеспечения возможности решения подчинённой задачи идентификации параметров системы, работающий в дуальном режиме, её адаптивный идентификационный регулятор должен генерировать последовательности апостериорных улучшающихся оценок $\Lambda(t)$. Исходными данными для построения таких оценок могут служить имеющиеся в момент t_s начала наблюдения априорные оценки $\Lambda^s(t_s)$ и $\dot{\Lambda}$ вектора параметров и скорости его изменения. В начале движения, на основании реализовавшихся x_s, системой будут отработаны начальные значения u_s.

Под воздействием их, а также реализовавшихся возмущений $w(t_s)$ система будет переведена в новое состояние, характеризуемое вектором $x(t_i),\ t_i > t_s$. После его измерения, в пространстве параметров $\{\lambda(t)\}$ будет определено множество $\tilde{\Lambda}^s(t_i)$ такое, что

$$\tilde{\lambda}(t_s) \in \tilde{\Lambda}^s(t_i). \tag{15}$$

Тогда из оценок $\Lambda^s(t_s)$ и $\tilde{\Lambda}^s(t_i)$ может быть получена апостериорная оценка $\Lambda^s(t_i)$ такая, что

$$\lambda^{\nabla}(t_s) \in \Lambda^s(t_i) = \tilde{\Lambda}^s(t_i) \bigcap \Lambda^s(t_s). \tag{16}$$

В двух последних соотношениях $\tilde{\lambda}(t_s)$, $\lambda^{\nabla}(t_s)$ – последовательно получаемые улучшающиеся оценки начального состояния системы. В тот же момент t_i может быть построена и оценка её текущего состояния

$$\lambda(t_i) \in \Lambda(t_i) = \Lambda^s(t_i) + \dot{\Lambda}, \tag{17}$$

где сумма независимых множеств $\Lambda^s(t_i)$ и $\dot{\Lambda}$ понимается как сумма по Минковскому. Совершенно аналогично, в любой момент $t_j > t_i$ может быть получена оценка

$$\lambda^{\nabla}(t_j) \in \Lambda^i(t_j) = \tilde{\Lambda}^i(t_j) \bigcap \Lambda^i(t_i). \tag{18}$$

На её основании регулятором будут отработаны управляющие воздействия $u(t_j)$, переводящие МЛП в состояние $x(t_j)$. После его измерения в пространстве $\{\lambda(t)\}$ определяется множество $\Lambda^j(t_j)$. Далее, аналогично описанному, строится оценка прогнозируемого значения $\lambda(t_j)$ в виде

$$\lambda(t_j) \in \Lambda^j(t_j) = \tilde{\Lambda}^j(t_j) \bigcap \Lambda^i(t_j). \tag{19}$$

Затем построения вида (18) и (19) повторяются для всё новых значений t_i и t_j. Такая процедура построения $\Lambda^j(t_j)\ \forall\ t_j \to \infty$ не может быть расходящейся [5].

Выводы. Таким образом, задача приспособляемости движения МЛТ к обстановке может быть решена с применением методов структурной адаптации, а также теории игр, то есть подхода, базирующегося на концепции гарантированного результата.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Коренев Г. В. Очерки механики целенаправленного движения/ Г. В. Коренев. – М.: Наука, 1980. – 192 с.
2. Кунцевич В. М. Адаптивное управление статистическими объектами с неизвестными и переменными во времени параметрами / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак // Кибернетика и вычислительная техника. – 1981. – Вып. 53. – С 31 – 39.

3. Кейн В. М. Управление самолётом на посадке в условиях неопределённости / В. М. Кейн, М. Ю. Смуров // Методы и средства навигации в УВД. – Л.: Изд-во Академии ГА, 1980. – С. 37 – 45.
4. Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решения/ Под ред. И. Ф. Шиханова. – М.: Статистика, 1979. – 184 с.
5. Кунцевич В. М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак. – Киев: Наук. думка, 1985. – 245 с.

ПОЛЯКОВ Владислав Александрович – к.т.н., ст. научн. сотр., ст. научн. сотр. Института транспортных систем и технологий Национальной академии наук Украины.

Научные интересы:

– динамика больших, сложных электромеханических систем.

ХАЧАПУРИДЗЕ Николай Михайлович – к.т.н., ст. научн. сотр., зам. директора по научной работе Института транспортных систем и технологий Национальной академии наук Украины.

Научные интересы:

– динамика и прочность нелинейных механических систем.

УДК 532.516

Д. А. Редчиц

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО БАРЬЕРНОГО РАЗРЯДА ПРИ РАБОТЕ ПЛАЗМЕННОГО АКТУАТОРА

Постановка проблемы и анализ публикаций по теме исследований. Управление дозвуковыми потоками воздуха представляет значительный интерес в связи с перспективами развития наземного транспорта, авиации, ветроэнергетики, создании новых типов газовых турбин и других приложений. Одним из возможных методов воздействия на ламинарный или турбулентный поток воздуха без применения расходных материалов является применение плазменного актуатора (ПА) [1-3].

Плазменный актуатор состоит из двух расположенных существенно ассиметрично электродов, которые разделены диэлектриком как показано на рис. 1. Один из электродов открытый и контактирует с воздухом, а другой полностью погружен в диэлектрический материал. Электроды, как правило, длинные и тонкие, и располагаются вдоль размаха на аэродинамической поверхности.

Использование ПА для управления потоком обладает рядом преимуществ перед механическими системами. Они целиком электронные, просты в своей конструкции, не имеют подвижных частей, обладают низкой инерционностью, возможна их интеграция в поверхность, могут располагаться на очень тонких поверхностях. Среди методов плазменного управления структурой течения воздуха диэлектрический барьерный разряд (ДБР) рассматривается как один из перспективных для практического применения, так как ДБР отличается устойчивой работой при атмосферном давлении без свертывания разряда в сжатую дугу. Диэлектрический барьерный разряд – это электрический разряд в газовой среде, возникающий между двумя электродами, один или оба из которых покрыт диэлектриком (рис. 1).

Плазменные актуаторы успешно использовались в различных приложениях по управлению потоком, такими как порождение неустойчивости пограничного слоя на остром конусе при числе Маха 3.5 [1], увеличение подъемной силы на элементах крыла [2], управление отрывом потока на лопатках турбины низкого давления, управление потоком на плохо обтекаемом теле, снижение сопротивления, нестационарном генерировании вихрей, управление отрывом потока с передней кромки профиля.

На сегодняшний день, несмотря на многочисленные экспериментальные исследования воздействия плазмы на окружающий ее воздух, отсутствует общая теория взаимодействия, которая основывалась на плазменных и аэродинамических процессах. Данный факт объясняется отсутствием достоверных результатов по многим химическим реакциям, возникающим в результате воздействия ДБР на окружающую среду, а также скорости их протекания.

Кроме того, существенное различие во времени аэродинамических процессов ($\tau \sim 10^{-2}$ с) и процессов, происходящих при электрическом разряде ($\tau \sim 10^{-9}$ с), не дает возможности провести прямое численное моделирование рассматриваемых процессов, происходящих в ДБР, даже с использованием современных суперкомпьютеров ни в настоящее время, ни в обозримом будущем. Поэтому для моделирования этих процессов применяются различные модели плазменного воздействия на поток.

Целью работы является разработка подхода к моделированию диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора в подвижной сплошной среде.

Постановка задачи. В работе рассматривается низкоскоростное движение воздуха при малых числах Маха ($M < 0.3$). В этом случае эффектами сжимаемости воздуха пренебрегают и его можно рассматривать как несжимаемую жидкость.

Исходная система уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости

Процессы динамики вязкой несжимаемой жидкости описываются осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье-Стокса с учетом массовых сил

$$\nabla\vec{u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\left(\left(\nu+\nu_t\right)\left(\nabla\vec{u}\right)\right) + \vec{f}_b, \tag{2}$$

где ∇ – оператор Гамильтона t – время, $\vec{u}$ – вектор средней скорости, p – давление, ρ – плотность, ν и ν_t – молекулярный и турбулентный коэффициенты кинематической вязкости, $\vec{f}_b$ – вектор массовой силы, отнесенный к единице объема.

В качестве начальных условий задавались параметры невозмущенного потока во всей расчетной области. На внешней границе применялись неотражающие граничные условия. На поверхности твердого тела ставилось условие прилипания.

Исходная система уравнений электростатики

Для данного класса задач плазму можно рассматривать как ионизированный квазинейтральный газ. В общем случае она может быть описана четырьмя уравнениями Максвелла в виде

$$\nabla\times\vec{H} = j + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_c, \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \tag{3}$$

где $\vec{H}$ – напряжённость магнитного поля, $\vec{B}$ – магнитная индукция, $\vec{E}$ – напряжённость электрического поля, $\vec{D}$ – электрическая индукция, j – электрический ток, ρ_c – плотность результирующего заряда.

Можно полагать, что заряды в плазме имеют достаточно времени (по сравнению с гидродинамическими временами) для перераспределения в области и система становится квазистационарной. В этом случае электрический ток j, напряжённость магнитного поля $\vec{H}$ и магнитная индукция $\vec{B}$ равны нулю. К тому же производные по времени электрической индукции $\partial\vec{D}/\partial t$ и магнитной индукции $\partial\vec{B}/\partial t$ равны нулю. Принимая во внимание выше сказанное, из системы уравнений Максвелла остается только одно уравнение $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_c$, представляющее собой закон Гаусса для электрической индукции.

В этом случае сила Лоренца, отнесенная к единице объема, имеет вид

$$\vec{f}_b = \rho_c\vec{E} \tag{4}$$

и входит в правую часть уравнения Навье-Стокса (2), как массовая сила. Вектор электрической индукции $\vec{D}$ связан с вектором напряжённости электрического поля $\vec{E}$ через абсолютную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_o$ и равен $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, где ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость среды, ε_o – электрическая постоянная.

По определению, для случая $\nabla\times\vec{E} = 0$, напряженность электрического поля $\vec{E}$ может быть получена из градиента скалярного потенциала Φ. В этом случае $\vec{E} = -\nabla\Phi$. Тогда закон Гаусса примет вид $\nabla\left(\varepsilon_r\nabla\Phi\right) = -\rho_c/\varepsilon_o$.

Плотность результирующего заряда в любой точке плазмы определяется как разность между плотностью положительного и отрицательного заряда. Полагая квазистационарное состояние плазмы, а временные масштабы достаточно большие для перераспределения зарядов, и применяя соотношение Больцмана $n = n_0 \exp(e\Phi / kT)$, получим

$$\rho_c / \varepsilon_o = -\left(e^2 n_0 / \varepsilon_o\right)\left[\left(1/kT_i\right) + \left(1/kT_e\right)\right]\Phi \tag{5}$$

где T_i и T_e – температура ионов и электронов в плазме, соответственно.

Вводя Дебаевскую длину λ_D, характеризующую расстояние, на которое распространяется действие электрического поля отдельного заряда в нейтральной среде, состоящей из положительно и отрицательно заряженных частиц

$$1/\lambda_D = \left(e^2 n_0 / \varepsilon_o\right)\left[\left(1/kT_i\right) + \left(1/kT_e\right)\right]\Phi, \tag{6}$$

выражение (5) примет вид

$$\rho_c / \varepsilon_o = \left(-1/\lambda_D^2\right)\Phi \cdot \tag{7}$$

С момента, когда частицы газа становятся слабо ионизированными, можно предположить, что потенциал Ф может состоять из двух частей: потенциал от внешнего электрического поля и потенциал, соответствующий плотности результирующего заряда в плазме

$$\Phi = \phi + \varphi. \tag{8}$$

Если предположить, что Дебаевская длина мала и заряд на стенке не большой, а распределением заряженных частиц в области управляет потенциал на стенке, возникший из-за электрического заряда на той же стенке, то влиянием очень слабого электрического поля плазмы на внешнее электрическое поле можно пренебречь.

Поэтому можно записать два отдельных уравнения с точки зрения этих двух потенциалов, одно для внешнего электрического поля обусловленного приложенным напряжением к электродам

$$\nabla\left(\varepsilon_r \nabla\phi\right) = 0, \tag{9}$$

и другое уравнение для потенциала, действующего со стороны заряженных частиц

$$\nabla\left(\varepsilon_r \nabla\varphi\right) = -\rho_c / \varepsilon_o. \tag{10}$$

Учитывая выражения (7), (8) и (9) уравнение (10) примет вид

$$\nabla\left(\varepsilon_r \nabla\rho_c\right) = \rho_c / \lambda_D^2. \tag{11}$$

После того как в области получено распределение потенциала и плотности результирующего заряда в результате решения уравнений (9) и (11), соответственно, сила Лоренца (4) примет следующий вид $\vec{f}_B = \rho_c \vec{E} = \rho_c\left(-\nabla\phi\right)$.

Уравнение (9) решается для электрического потенциала, используя приложенное напряжение к электродам как граничные условия, а также соответствующие значения относительной диэлектрической проницаемости для воздуха и диэлектрик. На границе раздела сред используется среднее значение относительной диэлектрической проницаемости. Переменное напряжение, приложенное к открытому (верхнему) электроду задается как $\phi(t) = \phi^{\max} f(t)$. Функция формы волны $f(t)$ может быть синусоидой $f(t) = \sin(2\pi\omega t)$ или прямоугольной $f(t) = 1$ для $\sin(2\pi\omega t) \geq 0$, $f(t) = -1$ для $\sin(2\pi\omega t) < 0$, где ω – частота и $\phi^{\max}$– амплитуда колебаний. К изолированному электроду прикладывается нулевой потенциал. На внешних границах ставится условие Неймана $\partial\phi / \partial n = 0$.

Уравнение (11) решается относительно плотности результирующего заряда ρ_c только в воздушной области. Нормальный градиент для плотности результирующего заряда на поверхности твердого тела полагался равным нулю, за исключением области над изолированным электродом. На внешней границе плотность результирующего заряда равнялась нулю. В области над изолированным электродом плотность заряда описывается таким образом, чтобы синхронизировать с изменением во времени напряжения $\phi(t)$, приложенного к открытому электроду $\rho_{c,w}(x,t)=\rho_c^{\max}G(x)f(t)$, где $\rho_c^{\max}$ – максимальное значение плотности заряда в области. Изменение плотности заряда на стенке $\rho_{c,w}$ в области плазмы над изолированным электродом в направлении x описывается функцией $G(x)$. Экспериментальные исследования [3] свидетельствуют о том, что распределение плотности заряда подчиняется половине Гауссова распределения $G(x)=\exp\left[-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)\right]$ для $x\geq 0$, где μ – локальный параметр, указывающий на положение максимума, σ – коэффициент масштаба, определяющий скорость затухания. В расчетах локальный параметр μ выбирается таким образом, чтобы пик функции $G(x)$ соответствовал левой грани изолированного электрода. Значение коэффициента масштаба $\sigma=0.3$ обеспечивает постепенное уменьшение распределения плотности заряда от левой грани электрода к правой. Значения частоты и амплитуды приложенного к электродам напряжения берется из экспериментов. Установлено [3], что Дебаевская длина λ_D равна 0.00017 м, а максимальная плотность заряда в области $\rho_c^{\max}$ принимается равной 0.0075 Кл/м^3.

Численный метод. Автором разработан специализированный пакет вычислительной гидродинамики (CFD) на основе уравнений Навье-Стокса, включая несколько дифференциальных моделей турбулентности, для расчета стационарных и нестационарных ламинарных и турбулентных течений. Для моделирования диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора дополнительно решались два уравнения, описывающие распределение приложенного напряжения и плотности заряженных частиц, которые были интегрированы в разработанный CFD пакет. Воздействие диэлектрического барьерного разряда на окружающую среду осуществлялось через силу Лоренца, входящую как источниковый член в уравнения Навье-Стокса.

Система исходных уравнений гидродинамики (1)-(2) и электростатики (9), (11) записывалась относительно произвольной криволинейной системы координат в безразмерном виде. Интегрирование уравнений плазменной аэродинамики осуществлялось численно с использованием метода контрольного объема. Для конвективных потоков в уравнениях гидродинамики использовалась противопоточная аппроксимация Rogers-Kwak, основанная на схеме Roe третьего порядка точности. Производные в уравнениях (9), (11) и в вязких членах уравнения (2) аппроксимировались центрально-разностной схемой второго порядка.

Результаты и обсуждение. В работе [3] выполнено экспериментальное изучение воздействия диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора на окружающую среду (находящийся в покое воздух). Геометрические характеристики плазменного актуатора приведены на рис. 2. Начало координат совпадает с левым краем открытого электрода. Электроды представляют собой полоски меди толщиной $t_e=0.07$ мм. Открытый электрод шириной $L_1=5$ мм приклеивался к верхней стороне акриловой диэлектрической подложки, а изолированный электрод, шириной $L_2=15$ мм был погружен на глубину $y_e=3$ мм в диэлектрик. Длина электродов составляла 160 мм, что обеспечивало отсутствие трехмерных эффектов в срединной области плазменного актуатора, где происходили экспериментальные измерения. Зазор x_e между электродами равнялся нулю. К верхнему электроду прикладывалось напряжение $\varphi_{\max} = 14$ кВ с частотой $\omega = 10$ кГц, а нижний был заземлен. Относительная диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon_{r1} = 1.0006$, акрила $\varepsilon_{r2} = 3.1$.

Плазменный актуатор помещался в камеру из органического стекла для визуализации течений воздуха вблизи электродов с помощью PIV (Particle image velocimetry) технологии. С помощью PIV измерены распределения компонент вектора скорости $\vec{U}$ в сечениях $x = 15$ мм (в безразмерных единицах $\bar{x} = 1.5$) и $x = 20$ мм ($\bar{x} = 2.0$), а также установлен угол раскрытия струи воздуха, образовавшейся в результате воздействия плазменного актуатора на покоящийся воздух, равный $\sim 12^{\circ}$.

В настоящей работе математическое моделирование ДБР при работе плазменного актуатора проводилось в безразмерном виде. В качестве характерных величин использовались $L = 0.01$ м, $U = 3$ м/с, $\rho_{\infty} = 1.225$ кг/м^3, $\rho_{c\max} = 0.0075$ Кл/м^3, $\varphi_{\max} = 14000$ В, $\nu_{\infty} = 1.47 \cdot 10^{-5}$ м^2/с. После обезразмеривания получим: $\bar{L}_1 = 0.5$, $\bar{L}_2 = 1.5$, $\bar{x}_e = 0$, $\bar{y}_e = 0.3$, $\bar{t}_e = 0.007$, $\bar{\lambda}_D = 0.017$, $\bar{\rho}_{c\ \max} = 1$, $\bar{\varphi}_{\max} = 1$, $\bar{\omega} = 33.3$. В правой части уравнений Навье-Стокса (2), записанных в безразмерном виде, появляются два критерия подобия: первый характеризует отношение сил инерции к силам вязкости $\mathrm{Re} = LU / \nu_{\infty}$, а второй отношение электрических сил к силам инерции $D_c = \rho_{c\max} \cdot E_{\max} \cdot L / \rho_{\infty} \cdot U^2$. В нашем случае $\mathrm{Re} = 2040$, а $D_c = 9.52$.

Расчетная сетка (рис. 3) генерировалась как для области воздуха, так и в зоне диэлектрика. Число узлов сетки составляло 2×10^5 и 3×10^5, соответственно. Минимальный шаг по пространству составлял 10^{-5}. Шаг интегрирования $\Delta\bar{t} = 0.1$.

В результате решения уравнения (9) получено распределение электрического потенциала и напряженности электрического поля в расчетной области (рис. 4). Максимальное изменение электрического потенциала (напряженности электрического поля) наблюдается в области между двумя электродами. Экспериментально установлено [3], что в этой зоне концентрация плазмы имеет максимальное значение.

Распределение плотности заряженных частиц при решении уравнения (11) приведено на рис. 5. Плотность заряда достигает максимальной величины в области над левым углом изолированного электрода. Тонкий слой плазмы, сформировавшийся на поверхности выше изолированного электрода, захватывает небольшой участок в окрестности правого края открытого электрода (рис. 5). Такое распределение плотности заряда соответствует плазменному профилю, наблюдаемому в экспериментах [1-3].

Получено распределение линий тока и x-компоненты вектора скорости $\vec{U}$ в вычислительной области в целом и вблизи плазменного актуатора рис. 6. В результате воздействия плазменного актуатора образуется струя воздуха, которая начинается вблизи правого края открытого электрода. Взаимодействие индуцированной разрядом струи с окружающим вязким газом (воздухом) приводит к рождению постепенно затухающего с течением времени вихря. Воздух всасывается в область над изолированным электродом, получает импульс за счет силы Лоренца в основном в направлении x, ускоряется и выбрасывается из этой области, постепенно замедляясь и расширяясь. По плотности линий тока можно судить об интенсивности течения в пристеночной области. Угол раскрытия струи по результатам расчетов составляет 11.3°, что хорошо согласуется с экспериментальными данными. В результате вычислительного эксперимента построены профили компонент вектора скорости $\vec{U}$ в различных сечениях расчетной области (рис. 7). Видно, что в сечении $\bar{x} = 0$

компоненты вектора скорости близки к нулю, а в сечении $\bar{x} = 0.5$, соответствующее правому краю открытого электрода, наблюдается резкое увеличение (по модулю) U_y.

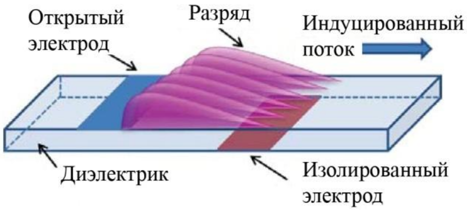


Рис. 1 Схема диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора

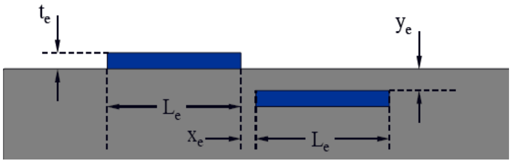


Рис. 2. Геометрические характеристики плазменного актуатора

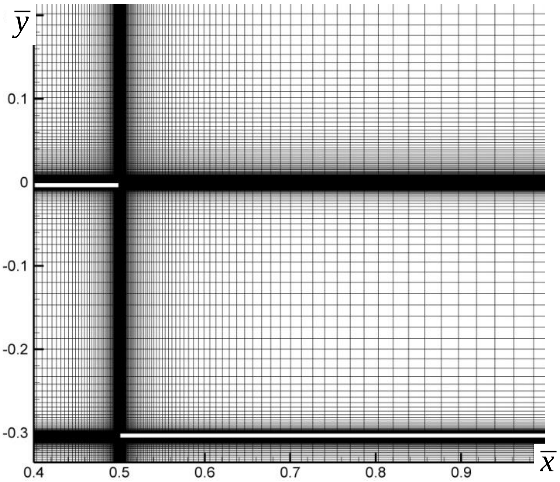


Рис. 3. Расчетная сетка возле плазменного актуатора

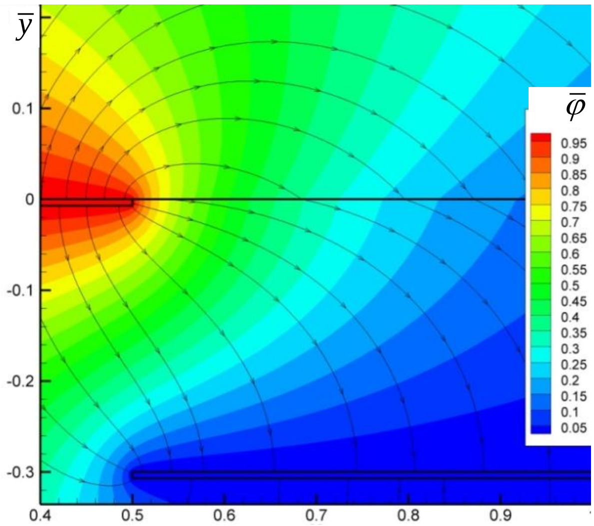


Рис. 4. Распределение электрического потенциала и напряженности электрического поля

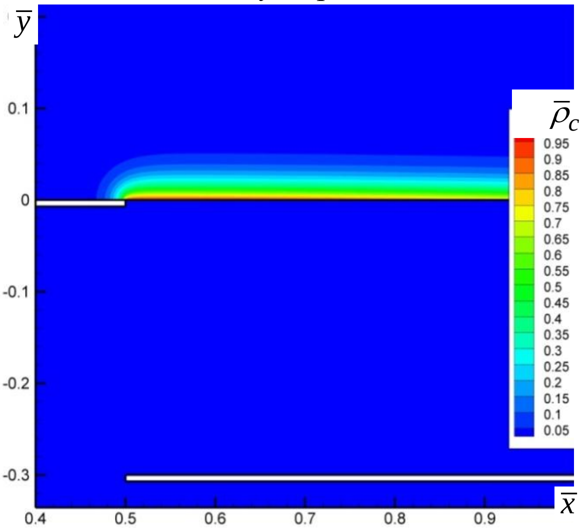


Рис. 5. Распределение плотности заряженных частиц

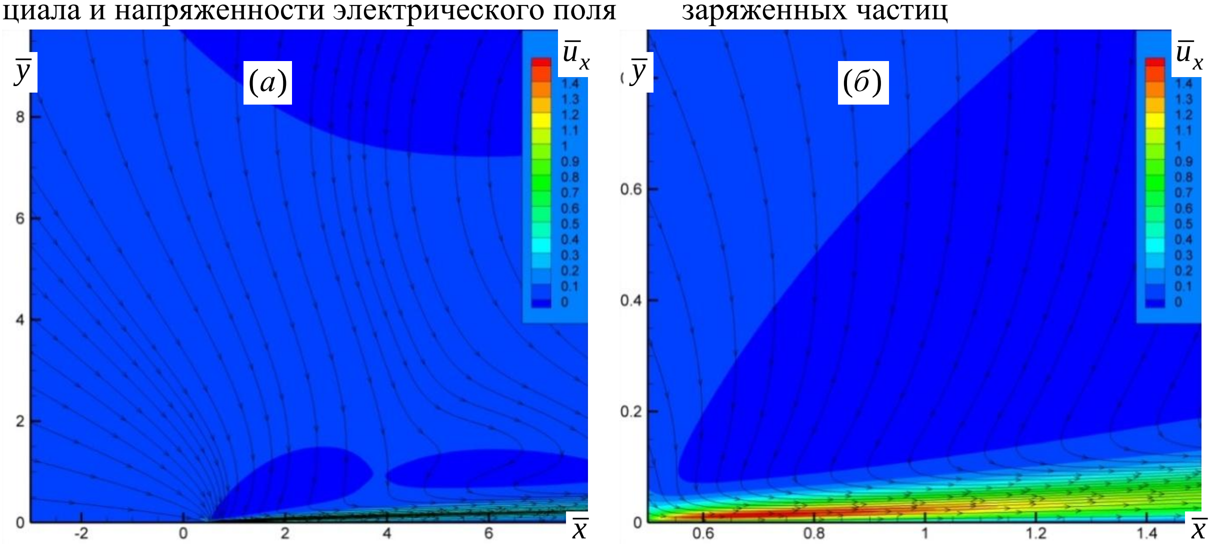


Рис. 6. Распределение линий тока и x-компоненты вектора скорости $\vec{U}$ в вычислительной области в целом и вблизи плазменного актуатора

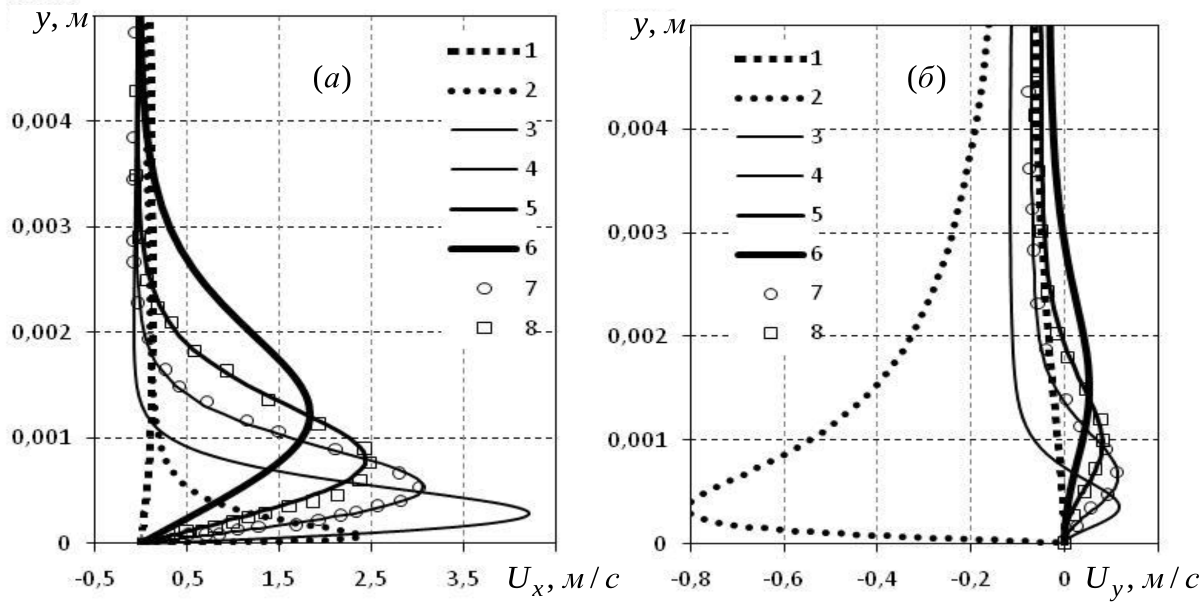


Рис. 7. Профили x (а) и y (б) компонент вектора скорости $\vec{U}$ в сечениях $\bar{x}=0$ (1), $\bar{x}=0.5$ (2), $\bar{x}=1.0$ (3), $\bar{x}=1.5$ (4, 7), $\bar{x}=2.0$ (5, 8), $\bar{x}=2.5$ (6) (1-6 – расчет, 7-8– эксп. [3])

Это объясняется тем фактом, что в данной зоне начинает формироваться реактивная струя воздуха за счет ускорения электрическим полем частиц плазмы. При $\bar{x}=0.7$ струя обладает максимальной скоростью $U=4.5$ м/с ($\bar{U}=1.5$). В дальнейшем струя начинает замедляется и утолщаться. Так при $\bar{x}=1.0$ значение x- компоненты вектора скорости уже 4.2 м/с, а при $\bar{x}=1.5$ – 3.0 м/с. Результаты численного моделирования показывают удовлетворительное совпадение по профилям скорости в различных сечениях струи воздуха с экспериментальными данными.

Выводы. Разработан подход к моделированию диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора в подвижной сплошной среде. Предложенная методика учитывает физические особенности рассматриваемого класса задач и обладает высокой вычислительной эффективностью. На основе разработанного подхода выполнено моделирование воздействия диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора на находящийся в покое воздух. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Показаны широкие возможности применения данного подхода к моделированию динамики низкоскоростных потоков жидкости и газа при наличии электростатического поля.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Corke T. Boundary Layer Instability on a Sharp Cone at Mach 3.5 with Controlled Input / T. Corke, D. Cavalieri, E. Matlis// AIAA Journal, Vol. 40, No 5., pp. 1015.
2. Corke T. Application of Weakly ionized Plasmas as Wing Flow Control Devices / T. Corke, E. Jumper, M. Post, D. Orlov// AIAA-2002-0350.
3. Durscher R. Induced Flow from Serpentine Plasma Actuators Acting in Quiescent Air/ R. Durscher, S. Roy // AIAA-2011-957 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Orlando, Florida, Jan. 4-7, 2011.

РЕДЧИЦ Дмитрий Александрович – к.ф.-м.н., ст.н.с., старший научный сотрудник Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– вычислительная гидродинамика (CFD), математическое моделирование, численные методы.

УДК 004.925

О. Н. Романюк, М. Д. Обідник

МЕТОДИ ДОДАТКОВОЇ ТРІАНГУЛЯЦІЇ

Постановка проблеми. У сучасних системах синтезу реалістичних зображень необхідно забезпечити високу якість передачі всіх властивостей об'єкта моделювання: об'ємність, місце розташування, передачу напівтонів, тіней, освітлення та текстури поверхні. При цьому, чим вище ступінь реалістичності зображення, тим більше потрібно обчислень для його формування. Генерація об'ємних зображень − складна обчислювальна задача, у зв'язку з цим на практиці виконують її декомпозицію. Складні зображення формують з фрагментів об'єктів, для чого їх розбивають на складові частини. Процес розбиття поверхні об'єктів на полігони отримав назву тесселяції. [1]. Найпоширенішим видом теселяції є тріангуляція – розбиття на трикутники, оскільки цей процес найпростіший і має ряд переваг над поданням мережі іншими формами полігонів. Деталізація об'єктів, яка визначається щільністю тріангуляційної мережі, повинна бути достатньою для адекватного відтворення всіх особливостей об'єкту.

Аналіз публікацій за темою досліджень. Існують методи, що дозволяють проводити тріангуляцію у об’єктному просторі сцени (до передачі її у графічний конвеєр), однак це призводить до збільшення обсягу даних, що передаються по шині. Тому більш доцільною є розробка нових методів, за якими додаткова тріангуляція проводиться вже під час обробки віртуальної сцени 3D-прискорювачем.

Технологія TruForm [2] виконує додаткову тріангуляцію, використовуючи кубічні патчі Бєзьє. Вона дозволяє підвищити реалістичність 3D-зображень і не вимагає модифікації підсистеми рендерингу відеокарти. TruForm включає в себе етап передачі полігональної інформації зі сцени на 3D-акселератор, етап внутрішнього перетворення трикутників у криві поверхні, а також створення нових трикутників за допомогою визначення контрольних точок (рис. 1). Ітерації розбиття на співставні трикутники виконуються для кожного полігона у сцені.

Геометрія кубічної поверхні розраховується за такими формулами:

$$b: R \to R^3$$

$$b(u,v) = \sum_{i+j+k=3} b_{ijk} \frac{3!}{i!\,j!\,k!} u^i v^j w^k = b_{300}w^3 + b_{030}u^3 + b_{003}v^3 + b_{210}3w^2u +$$

$$+ b_{120}3wu^2 + b_{201}3w^2v + b_{021}3u^2v + b_{102}3wv^2 + b_{012}3uv^2 + b_{111}6wuv,$$

де u,v,w - параметри кубічного сплайна Бєзьє, значення яких $u,v,w \ge 0$, $w = 1 - u - v$;

b_{ijk} − геометричні коефіцієнти або контрольні точки;

$b_{300}, b_{030}, b_{003}$ - коефіцієнти вершин;

$b_{210}, b_{120}, b_{021}, b_{012}, b_{102}, b_{201}$ - дотичні коефіцієнти;

b_{111} - центральний коефіцієнт.

Недоліком технології є те, що вона дозволяє згладити тільки цілком всю сцену. При цьому необхідно виконати великий обсяг складних математичних розрахунків, що пов’язано з побудовою складної кубічної поверхні. Також вона може спричинити появу візуальних артефактів у місцях зі значними геометричними нерівностями.

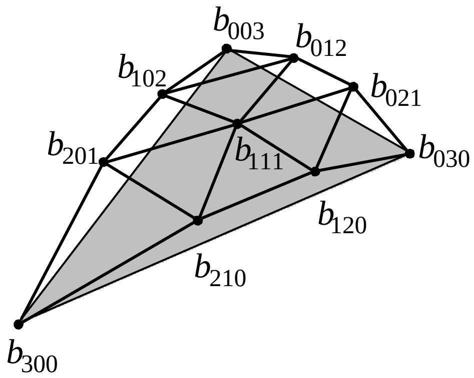


Рис. 1. Побудовані контрольні точки технології TruForm

Технологія Phong Tessellation [3] передбачає додаткову теселяцію для формування вигнутих контурів, обраховуючи тільки позиції вершин полігональної мережі та нормалі в них. У розрахунках використовуються барицентричні координати та квадратичні патчі для відновлення поверхні. Технологія реалізується у три етапи:

1) розраховується лінійна тесселяція [3];
2) середня результуюча точка проектується на дотичні площини, що проходять через вершини трикутника;
3) обчислюється барицентрична інтерполяція цих трьох проекцій.

Якість результуючого зображення значно покращується порівняно з технологією TruForm, проте технології Phong Tessellation притаманні деякі недоліки. По-перше, для її реалізації необхідно виконати значно більший обсяг обчислень, порівняно з технологією Phong Shading, яка вважається високотрудомісткою. По-друге, аналогічно до технології TruForm, технологія Phong Tessellation застосовується для кожного об'єкта сцени, що передбачає додаткові розрахунки для об'єктів, які займають невелику площу на екрані користувача.

Ще один метод додаткової тріангуляції описано у [4]. Він полягає у визначенні точок, що мають найбільше значення інтенсивності кольору на кожному з ребер трикутника.

Даний метод додаткової тріангуляції оперує з інтенсивностями кольору, тому найбільш прийнятний для зафарбовування за методом Гуро. Зафарбовування за Фонгом, у такому випадку, вимагає довизначення нормалей у контрольних точках.

Постановка задачі. Задачею даного дослідження є розбиття вихідного трикутника на складові з метою підвищення деталізації і подальшого використання спрощених розрахунків із застосуванням апроксимаційних формул. Бажано, щоб утворені трикутники мали однакову площу, що дасть можливість збалансовано завантажити шейдерні процесори.

Розробка методів додаткової тріангуляції.

Розробимо різні методи додаткової тріангуляції. Найкраще вирішує задачу розбиття на трикутники, що мають однакову площу, медіанний перетин, оскільки він має такі властивості:

- медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка називається його середньою точкою, і діляться нею на дві частини у відношенні 2:1, рахуючи від вершини [5];
- трикутник ділиться трьома медіанами на шість рівновеликих трикутників [5].

Відомо, що точка перетину медіан трикутника (центроїд) розраховується за формулами:

$$x=\frac{x_a+x_b+x_c}{3},$$
$$y=\frac{y_a+y_b+y_c}{3}, \tag{1}$$

де (x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c) − координати відповідних вершин трикутника.

Знайдемо нормаль у середній точці, використовуючи принцип інтерполяції нормалей у трикутнику. На рис. 2 зображено трикутник ABC. Точки M_{ab}, M_{ac}, M_{bc} − середини ребер AB, AC, BC відповідно. Точка O − точка перетину медіан трикутника ABC. Вектори $\vec{N}_a, \vec{N}_b, \vec{N}_c, \vec{N}_U, \vec{N}_o$ − відповідно нормалі в точках A, B, C, M_{ab}, O.

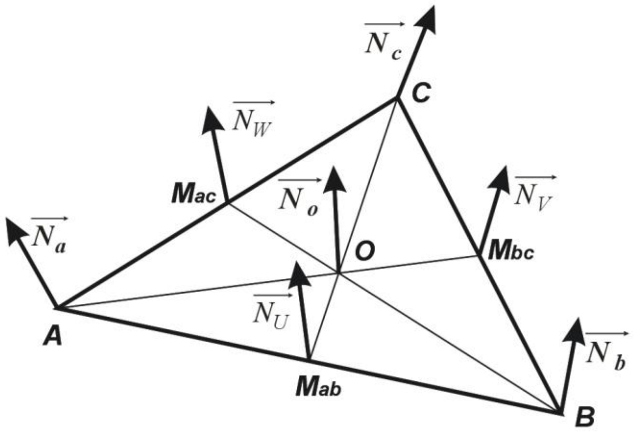


Рис. 2. Розрахунок нормалі в середній точці

Нормаль $\vec{N}_U$ можна розрахувати так:

$$\vec{N}_U=\frac{\vec{N}_a+\vec{N}_b}{2}. \tag{2}$$

Враховуючи властивість медіанного поділу, що середня точка ділить медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини, а також те, що вектори лінійно інтерполюються, можна записати, що

$$\vec{N}_o=\frac{2\vec{N}_U+\vec{N}_c}{3}. \tag{3}$$

Підставивши формулу (2) у формулу (3), отримуємо

$$\vec{N}_o=\frac{2\cdot\left(\dfrac{\vec{N}_a+\vec{N}_b}{2}\right)+\vec{N}_c}{3}=\frac{\vec{N}_a+\vec{N}_b+\vec{N}_c}{3}. \tag{4}$$

Вирази (1) і (4) дають змогу розбити трикутник ABC (рис. 2) на 3 складових трикутника AOB, AOC, BOC, які мають однакову площу (це випливає з властивості медіанного перетину).

Нормаль, розрахована за формулою (4), має не одиничний розмір, що передбачає виконання операції нормалізації для подальших розрахунків. Тому доцільно визначити саме нормалізований вектор у точці перетину медіан. У [6] виведено формулу для знаходження нормалізованого вектора у будь-якій точці трикутника з використанням його барицентричних координат:

$$\vec{N}_O(m_A, m_B, m_C) = \vec{N}_A \cdot m_A^2 + \vec{N}_B \cdot m_B^2 + \vec{N}_C \cdot m_C^2 + (4\vec{N}_U - \vec{N}_A - \vec{N}_B) \cdot m_A \cdot m_B +$$
$$+ (4\vec{N}_V - \vec{N}_B - \vec{N}_C) \cdot m_B \cdot m_C + (4\vec{N}_W - \vec{N}_C - \vec{N}_A) \cdot m_C \cdot m_A, \quad (5)$$

де $\vec{N}_U, \vec{N}_V, \vec{N}_W$ − нормалі в центрах сторін AB, BC, CA відповідно, а m_A, m_B, m_C визначаються за формулами:

$$m_A = \frac{S(BCO)}{S(ABC)},\ m_B = \frac{S(CAO)}{S(ABC)},\ m_C = \frac{S(ABO)}{S(ABC)}.$$

Застосуємо формулу (5) для точки медіанного перетину. При цьому $m_A = m_B = m_C = 1/3$, оскільки площі сегментів, на які розбивається вихідний трикутник, рівні. Підставивши ці значення у формулу (5), отримаємо:

$$\vec{N}_O = \frac{1}{6} \cdot \vec{N}_A + \frac{1}{6} \cdot \vec{N}_B + \frac{1}{6} \cdot \vec{N}_C + \frac{1}{6} \cdot (4\vec{N}_U - \vec{N}_A - \vec{N}_B) + \frac{1}{6} \cdot (4\vec{N}_V - \vec{N}_B - \vec{N}_C) + \frac{1}{6} \cdot (4\vec{N}_W - \vec{N}_C - \vec{N}_A) =$$
$$= -\frac{1}{6} \cdot \vec{N}_A - \frac{1}{6} \cdot \vec{N}_B - \frac{1}{6} \cdot \vec{N}_C + \frac{4}{6} \cdot \vec{N}_U + \frac{4}{6} \cdot \vec{N}_V + \frac{4}{6} \cdot \vec{N}_W,$$

тобто

$$\vec{N}_O = -\frac{1}{6} \cdot (\vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{N}_C + 4 \cdot \vec{N}_U + 4 \cdot \vec{N}_V + 4 \cdot \vec{N}_W). \quad (6)$$

Формула (6) передбачає розрахунок нормалей у середніх точках сторін трикутника $\vec{N}_U, \vec{N}_V, \vec{N}_W$. За участю авторів виведено формулу для визначення нормалізованого вектора у середній точці ребра трикутника [4]:

$$N_s = \frac{\vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2 + 2\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}}, \quad (7)$$

де $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ − вектори у кінцевих точках ребра.

З використанням поліномів Чебишева отримано таку формулу для спрощеного розрахунку, яка не використовує трудомісткі операції ділення та визначення квадратного кореня [4]:

$$N_s = (\vec{N}_1 + \vec{N}_2) \cdot (a \cdot (\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2)^2 + b \cdot (\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) + c),$$

де $a = (0{,}103),\ b = (-0{,}306)$ та $c = (0{,}705)$.

Для розрахунку додаткової тріангуляції необхідно довизначити нормалі $\vec{N}_U, \vec{N}_V, \vec{N}_W$ у відповідних точках M_{ab}, M_{bc}, M_{ca} за формулою (7). Таким чином, трикутник ABC розбивається на 3 (AOB, AOC, BOC) або на 6 ($AOM_{ac}, M_{ac}OC, COM_{bc}, M_{bc}OB, BOM_{ab}, M_{ab}OA$) складових, що мають рівну площу (рис. 3. а), б)).

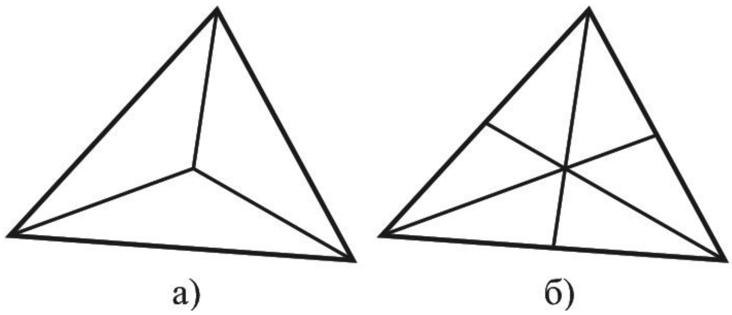


Рис. 3. Розбиття трикутника на складові методом медіанного перетину

Розглянемо ще один метод додаткової тріангуляції, що базується на діленні трикутника в середніх точках ребер (рис. 4). Доведемо, що $M_{ab}\, M_{ac} = CM_{bc} = M_{bc}B$. Кожна з точок M_{ac}, M_{bc}, M_{ab} ділить відповідне ребро трикутника навпіл. Тому відрізок $M_{ac}M_{ab}$ є середньою лінією трикутника. За теоремою про середню лінію трикутника $M_{ac}M_{ab} \parallel BC$, а також $M_{ab}\, M_{ac} = CM_{bc} = M_{bc}B$. Аналогічно можна показати, що $M_{ab}\, M_{bc} = AM_{ac} = M_{ac}C$ та $M_{ac}\, M_{bc} = AM_{ab} = M_{ab}B$. Утворені трикутники рівні між собою, оскільки рівні їхні сторони (рис. 4).

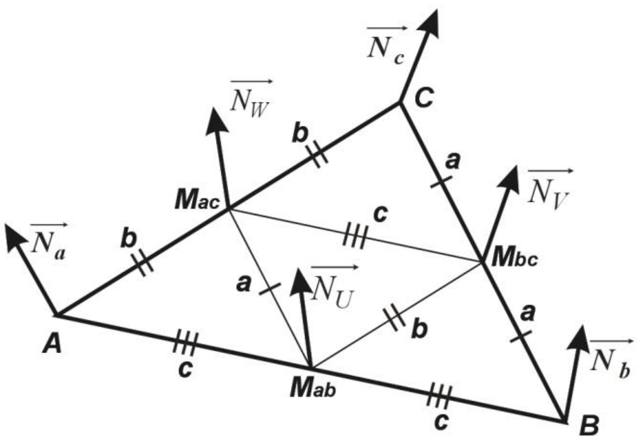


Рис. 4.

Розроблені варіанти розбиття трикутника можна застосувати для додаткової тріангуляції. Така процедура включає в себе визначення додаткових точок на вихідному трикутнику, розрахунок векторів у них, а також їх нормалізацію. Вона дозволяє вирішити задачу декомпозиції безпосередньо у 3D-акселераторі, що значно скорочує обсяг даних, що передаються по шині. За рахунок того, що трикутники, отримані в результаті такої додаткової тріангуляції, мають однакову площу, досягається збалансоване завантаження шейдерних процесорів.

Для визначення кількості ітерацій додаткової тріангуляції можна ввести критерій розміру кінцевого полігона на екрані комп'ютера. З використанням розроблених методів можна розбити всю вихідну сцену на трикутники приблизно однакового розміру за рахунок декількох ітерацій додаткової тріангуляції. Перевагою такого розбиття є те, що об'єкти, які знаходяться близько до спостерігача будуть тріангулюватись детально, а ті, що знаходяться далеко і не займають багато місця на екрані, – додатково розбиватись не будуть. Основними перевагами запропонованих методів додаткової тріангуляції є простота реалізації та значно менша кількість обчислень у порівнянні з технологіями TruForm та Phong Tessellation.

Висновки. У статті розроблено методи додаткової тріангуляції для задачі зафарбовування. Розглянуті різні варіанти розбиття трикутника на складові сегменти, що мають однакову площу.

Запропоновані процедури розбиття трикутника на складові частини дозволяють у подальшому використовувати простіші з обчислювальної точки зору вирази, а також реалізацію їх апаратними блоками.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Романюк А. Алгоритмы триангуляции / А. Романюк, А. Сторчак // "Комиздат" 2004 г. Режим доступу: http://citforum.univ.kiev.ua/programming/theory/alg_triangl/index.shtml
2. Vlacho A. Curved PN Triangles / A. Vlachos, J. Peters, C. Boyd, J. L. Mitchell // ATI Research, Microsoft Corporation, University of Florida. Режим доступу: http://developer.amd.com/media/gpu_assets/CurvedPNTriangles.pdf
3. Boubekeur T. Phong Tessellation / T. Boubekeur, M. Alexa // ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH Asia 2008 Proceedings).: TU Berlin. Режим доступу: http://perso.telecom-paristech.fr/~boubek/papers/PhongTessellation/PhongTessellation.pdf
4. Романюк О. Н. Високопродуктивні методи та засоби зафарбовування тривимірних графічних об’єктів. Монографія. / О. Н. Романюк, А. В. Чорний. – Вінниця : УНІВЕСУМ-Вінниця, 2006. – 190 с.
5. Мантуров О. В. Математика в понятиях, определениях и терминах: В 2-х ч.:Ч.2/ О. В Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Сорокин, Н. Г. Федин. — К.: Рад. шк., 1986. — 360 с.
6. Костюк Ю. Л. Визуально гладкая аппроксимация однозначной поверхности, заданной нерегулярным набором точек / Ю. Л. Костюк, А. Л. Фукс // Геоинформатика-2000: Труды межд. научно-практ. конф. –Томск: Изд-во Томск, ун-та, 2000. – С. 41–45.

РОМАНЮК Олександр Никифорович – д.т.н., професор кафедри програмного забезпечення, перший проректор Вінницького національного технічного університету.

Наукові інтереси:

− Комп’ютерна графіка.

ОБІДНИК Микола Дем’янович – аспірант кафедри програмного забезпечення.

Наукові інтереси:

− Комп’ютерна графіка.

УДК 539.3

В. Б. РУДНИЦКИЙ, Н. А. ЯРЕЦКАЯ

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛОЯ И УПРУГОГО ЦИЛИНДРА С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ

Постановка проблемы. В статье в рамках линеаризованной теории упругости [1-4] приводится решение смешанной задачи о давлении упругого цилиндрического штампа на слой с начальными (остаточными) напряжениями.

Основная часть. Рассмотрим случаи, когда слой лежит на жестком основании без трения и слой скреплен с жестким основанием. Исследования выполнены в общем виде для теорий больших (конечных) начальных деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Предполагается, что упругие потенциалы – дважды непрерывно-дифференцируемые функции алгебраических инвариантов тензора деформации Грина, и начальное состояние в слое – однородное. Все исследования проведены в координатах начального деформированного состояния y_i, которые связаны с лагранжевыми координатами (естественного состояния) отношениями $y_i = \lambda_i x_i \quad (i = 1,2,3)$, где λ_i – коэффициенты удлинения, что определяют перемещения начального состояния.

Кроме того, предположим, что действие штампа вызывает в слое малое возмущение основного напряженно-деформированного состояния, для которого выполняются условия

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

Величины, относящиеся к упругому штампу, записываем в принятых обозначениях теории упругости, а величины, относящиеся к предварительно напряженному слою, с начальными (остаточными) напряжениями в обозначениях [1,2].

Пусть в упругий слой с начальными напряжениями (которые возникают до контакта) вдавливается упругий цилиндричный штамп высотой H под действием силы P. Сила приложена к упругому штампу так, что его свободный торец деформируется в направлении оси Oy_3 на одинаковую величину ε, а поверхности вне области контакта остаются свободными от напряжений. В системе круговых цилиндрических координат $(r, \ \theta, \ z_i)$ такой постановке соответствуют граничные условия.

На торце упругого штампа $z_i = n_i^{-1/2} H$

$$u_z = -\varepsilon; \quad \tau_{rz} = 0 \quad (0 \le r \le R). \tag{1}$$

На границе упругого слоя в области контакта $z_i = 0$

$$u_3 = u_z; \quad \tilde{Q}_{33} = \sigma_{zz} \quad \tilde{Q}_{3r} = \tau_{rz} = 0 \quad (0 \le r \le R). \tag{2}$$

На границе упругого слоя вне области контакта $z_i = 0$

$$\tilde{Q}_{33} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r} = 0 \quad (R \le r < \infty). \tag{3}$$

На боковой поверхности упругого штампа $r = R$

$$\sigma_{rr} = 0; \quad \tau_{rz} = 0 \quad (0 \le z_i \le H). \tag{4}$$

На нижней поверхности слоя, лежащего на жестком основании и скрепленного с основанием, $z_i = -\dfrac{\lambda_3 H_2}{\sqrt{n_i}} = -\dfrac{H_i}{\sqrt{n_i}}$

$$u_3 = 0 \quad \tilde{Q}_{3r} = 0 \quad (0 \le r < \infty). \tag{5}$$

$$u_3 = 0 \quad u_r = 0 \quad (0 \le r < \infty). \tag{6}$$

где $z_i = n_i^{-1/2} y_3$; H_2 – толщина слоя в естественном (недеформированном) состоянии; H_1 – толщина слоя в начальном деформированном состоянии; R – радиус штампа; n_i – корни разрешающего уравнения [3, формула (2,12)].

Для определения напряженно-деформированного состояния осесиметрической статической задачи в упругом цилиндре используем линеаризованные уравнения [2,3] из которых следуют выражения для компонент вектора перемещения и тензора напряжения.

Тогда для равных корней $n_1 = n_2$ компоненты вектора перемещения имеют вид:

$$
\begin{gathered}
U_r = \frac{1}{v_1}\Bigg(2D_0 r(2z_1+1) + \sum_{k=1}^{\infty} I_1(v_1\gamma_k r)v_1\gamma_k\left(B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + (A_k + z_1 B_k)v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)\right) - \\
- \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_1(\alpha_k r)\alpha_k\left(S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1)\right)\Bigg) \\
U_3 = a_1\Bigg(4D_0 z_1(z_1+1) + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + z_1 B_k) I_0(v_1\gamma_k r)v_1^2\gamma_k^2 S_1(v_1\gamma_k z_1) - \\
\sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k^2\left(S_2(\alpha_k z_1) + z_1 S_3(\alpha_k z_1)\right)\Bigg) + a_2\Bigg(2A_0 - 4D_0 z_1(2z_1+1) + \\
+ 2D_0 r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r)v_1\gamma_k\left(2B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) - (A_k + z_1 B_k)v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)\right) + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k\left(2S_5(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_2(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_3(\alpha_k z_1)\right)\Bigg)
\end{gathered} \tag{7}
$$

где $a_1 = \begin{cases} \dfrac{w_{1111}}{w_{1133} + w_{1313}}, & \text{сжимаемые тела;} \\ \dfrac{x_{1111}}{x_{1133} + x_{1313}}, & \text{несжимаемые тела.} \end{cases}$ $a_2 = \begin{cases} \dfrac{w_{3113}}{n_1\left(w_{1133} + w_{1313}\right)}, & \text{сжимаемые тела;} \\ \dfrac{x_{3113}}{n_1\left(x_{1133} + x_{1313}\right)}, & \text{несжимаемые тела.} \end{cases}$

Из (7) получаем выражения для определения составляющих вектора напряжений при $r = const$ в круговых цилиндрических координатах

$$
\begin{gathered}
Q_{rr} = a_3\Bigg(2D_0(2z_1+1) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(v_1\gamma_k(A_k + z_1 B_k)S_6(v_1\gamma_k z_1) + B_k S_1(v_1\gamma_k z_1)\right)\left(I_0(v_1\gamma_k r) - \frac{I_1(v_1\gamma_k r)}{v_1\gamma_k r}\right)v_1^2\gamma_k^2 - \\
- \sum_{k=1}^{\infty}\left(J_0(\alpha_k r) - \frac{J_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r}\right)\alpha_k^2\left(S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1)\right)\Bigg) + a_4\Bigg(4D_0(2z_1+1) + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r)v_1^2\gamma_k^2\left(B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + (A_k + z_1 B_k)v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)\right) - \\
- \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^2\left(S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1)\right) + \frac{a_2}{a_1}\Bigg(-4D_0(4z_1+1) - \\
- \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r)v_1^2\gamma_k^2\left(3B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + (A_k + z_1 B_k)v_1\gamma_k S_6(v_1\gamma_k z_1)\right) + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^2\left(3S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1)\right)\Bigg)\Bigg) + a_0'.
\end{gathered} \tag{8}
$$

$$Q_{r3}=a_5\left(4D_0r+\sum_{k=1}^{\infty}I_1(v_1\gamma_kr)v_1^{\,2}\gamma_k^{\,2}(2B_kS_6(v_1\gamma_kz_1)-v_1\gamma_k(A_k+z_1B_k)S_1(v_1\gamma_kz_1))-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}J_1(\alpha_kr)\alpha_k^{\,2}(2S_5(\alpha_kz_1)+\alpha_kS_2(\alpha_kz_1)+z_1\alpha_kS_3(\alpha_kz_1))\right)+ \qquad (9)$$
$$+a_6\left(\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+z_1B_k)I_1(v_1\gamma_kr)v_1^{\,3}\gamma_k^{\,3}S_1(v_1\gamma_kz_1)+\sum_{k=1}^{\infty}J_1(\alpha_kr)\alpha_k^{\,3}(S_2(\alpha_kz_1)+z_1S_3(\alpha_kz_1))\right),$$

где $a_0' =\begin{cases}0, & \text{сжимаемые тела;}\\ p\lambda_1q_1, & \text{несжимаемые тела.}\end{cases}$ $\quad a_0'' =\begin{cases}0, & \text{сжимаемые тела;}\\ p\lambda_3q_3, & \text{несжимаемые тела.}\end{cases}$

$$a_3=\begin{cases}-\dfrac{w_{1111}}{v_1}, & \text{сжимаемые тела;}\\ -\dfrac{x_{1111}}{v_1}, & \text{несжимаемые тела.}\end{cases}\qquad a_4=\begin{cases}\dfrac{w_{1111}w_{1133}}{v_1\left(w_{1133}+w_{1313}\right)}, & \text{сжимаемые тела;}\\ \dfrac{x_{1111}x_{1133}}{v_1\left(x_{1133}+x_{1313}\right)}, & \text{несжимаемые тела.}\end{cases}$$

$$a_5=\begin{cases}-\dfrac{w_{1313}}{n_1}+\dfrac{w_{3131}w_{3113}}{n_1(w_{1133}+w_{1313})}, & \text{сжимаемые тела;}\\ -\dfrac{x_{1313}}{n_1}+\dfrac{x_{3131}x_{3113}}{n_1(x_{1133}+x_{1313})}, & \text{несжимаемые тела.}\end{cases}\qquad a_6=\begin{cases}\dfrac{w_{1111}w_{1331}}{\left(w_{1133}+w_{1313}\right)}, & \text{сжимаемые тела;}\\ \dfrac{x_{1111}x_{1331}}{\left(x_{1133}+x_{1313}\right)}, & \text{несжимаемые тела.}\end{cases}$$

При $y_3=const$ в круговых цилиндрических координатах:

$$Q_{33}=\frac{1}{v_1}\left(a_7\left(2D_0(2z_1+1)+\sum_{k=1}^{\infty}(v_1\gamma_k(A_k+z_1B_k)S_6(v_1\gamma_kz_1)+B_kS_1(v_1\gamma_kz_1))\left(I_0(v_1\gamma_kr)-\frac{I_1(v_1\gamma_kr)}{v_1\gamma_kr}\right)v_1^{\,2}\gamma_k^{\,2}-\right.\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\left(J_0(\alpha_kr)-\frac{J_1(\alpha_kr)}{\alpha_kr}\right)\alpha_k^{\,2}(S_3(\alpha_kz_1)+\alpha_kS_4(\alpha_kz_1)+z_1\alpha_kS_5(\alpha_kz_1))\right)+a_8\left(4D_0(2z_1+1)+\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}I_0(v_1\gamma_kr)v_1^{\,2}\gamma_k^{\,2}(B_kS_1(v_1\gamma_kz_1)+(A_k+z_1B_k)v_1\gamma_kS_6(v_1\gamma_kz_1))- \qquad (10)$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}J_0(\alpha_kr)\alpha_k^{\,2}(S_3(\alpha_kz_1)+\alpha_kS_4(\alpha_kz_1)+z_1\alpha_kS_5(\alpha_kz_1))\right)-a_9\left(4D_0(4z_1+1)+\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}I_0(v_1\gamma_kr)v_1^{\,2}\gamma_k^{\,2}(3B_kS_1(v_1\gamma_kz_1)+(A_k+z_1B_k)v_1\gamma_kS_6(v_1\gamma_kz_1))-$$
$$\left.\left.-\sum_{k=1}^{\infty}J_0(\alpha_kr)\alpha_k^{\,2}(3S_3(\alpha_kz_1)+\alpha_kS_4(\alpha_kz_1)+z_1\alpha_kS_5(\alpha_kz_1))\right)\right)+a_0''$$

$$Q_{3r}=a_5\left(4D_0r+\sum_{k=1}^{\infty}I_1(v_1\gamma_kr)v_1^{\,2}\gamma_k^{\,2}(2B_kS_6(v_1\gamma_kz_1)-v_1\gamma_k(A_k+z_1B_k)S_1(v_1\gamma_kz_1))-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}J_1(\alpha_kr)\alpha_k^{\,2}(2S_5(\alpha_kz_1)+\alpha_kS_2(\alpha_kz_1)+z_1\alpha_kS_3(\alpha_kz_1))\right)+$$
$$+a_{10}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+z_1B_k)I_1(v_1\gamma_kr)v_1^{\,3}\gamma_k^{\,3}S_1(v_1\gamma_kz_1)+\sum_{k=1}^{\infty}J_1(\alpha_kr)\alpha_k^{\,3}(S_2(\alpha_kz_1)+z_1S_3(\alpha_kz_1))\right),$$

где $a_7 = \begin{cases} -w_{3311}, & \text{сжимаемые тела;} \\ -x_{3311}, & \text{несжимаемые тела.} \end{cases}$ $a_8 = \begin{cases} \dfrac{w_{1111}w_{3333}}{\left(w_{1133}+w_{1313}\right)}, & \text{сжимаемые тела;} \\ \dfrac{x_{1111}x_{3333}}{\left(x_{1133}+x_{1313}\right)}, & \text{несжимаемые тела.} \end{cases}$

$a_9 = \begin{cases} \dfrac{w_{3333}w_{3113}}{n_1\left(w_{1133}+w_{1313}\right)}, & \text{сжимаемые тела;} \\ \dfrac{x_{3333}x_{3113}}{n_1\left(x_{1133}+x_{1313}\right)}, & \text{несжимаемые тела.} \end{cases}$ $a_{10} = \begin{cases} \dfrac{w_{1111}w_{3131}}{\left(w_{1133}+w_{1313}\right)}, & \text{сжимаемые тела;} \\ \dfrac{x_{1111}x_{3131}}{\left(x_{1133}+x_{1313}\right)}, & \text{несжимаемые тела.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} p = a_{11}\Bigg(& 4D_0(2z_1+1) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r)v_1^{\,2}\gamma_k^{\,2}(B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + v_1\gamma_k(A_k+z_1B_k)S_6(v_1\gamma_k z_1)) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^{\,2}(S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1)) - \frac{x_{3113}}{n_1}\Bigg(4D_0(4z_1+1) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(v_1\gamma_k r)v_1^{\,2}\gamma_k^{\,2}(3B_k S_1(v_1\gamma_k z_1) + v_1\gamma_k(A_k+z_1B_k)S_6(v_1\gamma_k z_1)) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^{\,2}(3S_3(\alpha_k z_1) + \alpha_k S_4(\alpha_k z_1) + z_1\alpha_k S_5(\alpha_k z_1))\Bigg)\Bigg); \end{aligned} \tag{11}$$

$a_{11} = \dfrac{1}{v_1}\left(\dfrac{x_{1111}}{\lambda_1 q_1} - \dfrac{x_{1133}-x_{1313}}{\lambda_3 q_3}\right)$, $\quad z_i = n_i^{-1/2}y_3, \quad (i=\overline{1,3})$,.

Для неравных корней $n_1 \neq n_2$ компоненты вектора перемещения будут:

$$\begin{aligned} U_r = \Bigg(& 4D_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_1(v_1\gamma_k r)v_1^2\gamma_k^2 S_6(z_1v_1\gamma_k) - \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k^2 S_4(z_1\alpha_k) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k I_1(v_2\gamma_k r)v_2^2\gamma_k^2 S_6(z_2v_2\gamma_k) - \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k^2 S_5(z_2\alpha_k)\Bigg); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3 = & \frac{m_1}{v_1}\left(4D_0 z_1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_0(v_1\gamma_k r)v_1^{\,2}\gamma_k^{\,2}S_1(v_1\gamma_k z_1) - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^{\,2}S_2(\alpha_k z_1)\right) + \\ & + \frac{m_2}{v_2}\left(4D_0 z_2 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k I_0(v_2\gamma_k r)v_2^{\,2}\gamma_k^{\,2}S_1(v_2\gamma_k z_2) - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^{\,2}S_2(\alpha_k z_2)\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Из (12) получаем выражения для определения составляющих вектора напряжений при $y_3 = const$ и $r = const$ в круговых цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} Q_{33} = C_{44}\Bigg(& (1+m_1)l_1\left(4D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_0(v_1\gamma_k r)v_1^{\,3}\gamma_k^{\,3}S_6(v_1\gamma_k z_1) - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^{\,3}S_4(\alpha_k z_1)\right) + \\ & + (1+m_2)l_2\left(4D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k I_0(v_2\gamma_k r)v_2^{\,3}\gamma_k^{\,3}S_6(v_2\gamma_k z_2) - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^{\,3}S_5(\alpha_k z_2)\right)\Bigg) + a_0''; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} Q_{3r} = C_{44}\Bigg(& \frac{(1+m_1)}{v_1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k I_1(v_1\gamma_k r)v_1^{\,3}\gamma_k^{\,3}S_1(v_1\gamma_k z_1) + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k^{\,3}S_2(\alpha_k z_1)\right) + \\ & + \frac{(1+m_2)}{v_2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k I_1(v_2\gamma_k r)v_2^{\,3}\gamma_k^{\,3}S_1(v_2\gamma_k z_2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k^{\,3}S_3(\alpha_k z_2)\right)\Bigg). \end{aligned}$$

$$Q_{r3} = a^1_{13}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k I_1(v_1\gamma_k r) v_1^3 \gamma_k^3 S_1(v_1\gamma_k z_1) + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k^3 S_2(\alpha_k z_1)\right) +$$
$$+ a^2_{13}\left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k I_1(v_2\gamma_k r) v_2^3 \gamma_k^3 S_1(v_2\gamma_k z_2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k^3 S_3(\alpha_k z_2)\right); \qquad (14)$$

$$Q_{rr} = -v_1 a_3 \left(4D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(I_0(v_1\gamma_k r) - \frac{I_1(v_1\gamma_k r)}{v_1\gamma_k r}\right) v_1^3\gamma_k^3 S_6(v_1\gamma_k z_1) - \right.$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty}\left(J_0(\alpha_k r) - \frac{J_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r}\right)\alpha_k^3 (S_4(\alpha_k z_1) + S_5(\alpha_k z_2)) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(I_0(v_2\gamma_k r) - \frac{I_1(v_2\gamma_k r)}{v_2\gamma_k r}\right) v_2^3\gamma_k^3 S_6(v_2\gamma_k z_2) \Bigg) +$$
$$+ \frac{a_{12}}{r}\left(4D_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_1(v_1\gamma_k r) v_1^2\gamma_k^2 S_6(v_1\gamma_k z_1) - \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\alpha_k r)\alpha_k^2 (S_4(\alpha_k z_1) + S_5(\alpha_k z_2)) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} B_k I_1(v_2\gamma_k r) v_2^2\gamma_k^2 S_6(v_2\gamma_k z_2)\right) + \lambda_3 v_1 \frac{a_4}{a_1}\left(\frac{m_1}{n_1}\left(4D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_0(v_1\gamma_k r) v_1^3\gamma_k^3 S_6(v_1\gamma_k z_1) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^3 S_4(\alpha_k z_1)\right) + \frac{m_2}{n_2}\left(4D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k I_0(v_2\gamma_k r) v_2^3\gamma_k^3 S_6(v_2\gamma_k z_2) - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r)\alpha_k^3 S_4(\alpha_k z_2)\right)\right) + a_0',$$

где $a_{12} = \begin{cases} w_{1122}, & \text{сжимаемые тела;} \\ x_{1122}, & \text{несжимаемые тела.} \end{cases}$ $a^i_{13} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_3 w_{1313} + w_{1331} m_i}{v_i}, & \text{сжимаемые тела;} \\ \dfrac{\lambda_3 x_{1313} + x_{1331} m_i}{v_i}, & \text{сжимаемые тела.} \end{cases}$

$$S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_i z_i) + D_k \cos(\gamma_k v_i z_i),\ S_2 = E_k sh(\alpha_k z_i) + F_k ch(\alpha_k z_i),$$
$$S_3 = N_k sh(\alpha_k z_i) + M_k ch(\alpha_k z_i),\ S_4 = E_k ch(\alpha_k z_i) + F_k ch(\alpha_k z_i), \qquad (15)$$
$$S_5 = N_k ch(\alpha_k z_i) + M_k sh(\alpha_k z_i),\ S_6 = C_k \cos(\gamma_k v_i z_i) - D_k \sin(\gamma_k v_i z_i)\,.$$

Выводы. Таким образом, в работе получены аналитические зависимости, которые отображают влияние начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние системы упругого штампа и слоя с начальными напряжениями. Исследован вопрос о влиянии начальных напряжений на закон распределения контактных усилий в слое с начальными напряжениями и упругом штампе. Отмечено значительное влияние начальных напряжений на характер и величину распределения напряжений и перемещений в области контакта и упругого штампа.

ЛІТЕРАТУРА

1. Guz A.N. Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses/ A.N. Guz, V.B. Rudnitsky. – Khmelnitskiy, Software the Miller "Scientific editions", 2006. – P. 710.
2. Guz A.N. Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses / A.N. Guz, V.B. Rudnitsky. – Khmelnitskiy, Software the Miller "Scientific editions", 2004. – P. 682.
3. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / А. Н. Гузь. – Киев: Наук. думка, 1983. – 286 с.
4. Rudnitsky V. B. Contact interaction of resilient die and cylindrical die with initial (residual) tension. / V. B. Rudnitsky, N. O. Yaretska // Вісник Хмельницького національного університету. Науковий журнал: Технічні науки. – Хмельницький: ХНУ, 2007. – №5. – С. 136–137.

РУДНИЦЬКИЙ Вячеслав Брониславович – д. т. н., профессор, заведующий кафедры высшей математики Хмельницкого национального университета.

Научные интересы:

– механика твердого деформируемого тела.

ЯРЕЦКАЯ Наталия Александровна – аспирантка, преподаватель кафедры высшей математики Хмельницкого национального университета.

Научные интересы:

– механика твердого деформируемого тела.

УДК 519.63

А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов

ЯВНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Постановка проблемы. При численном интегрировании дифференциальных уравнений гиперболического типа в областях сложной геометрической формы удобно применять неструктурированные сетки [1]. Для решения таких задач актуальным является создание схем повышенного порядка точности, не допускающих существенных осцилляций численных результатов [2].

В статье [3] авторами предложен способ построения кусочно-полиномиальной реконструкции переменных, на базе которого с применением метода контрольного объёма разработана явная схема высокого порядка точности для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках.

В работе выполнено обобщение разработанных ранее подходов для численного интегрирования уравнений Эйлера на неструктурированных сетках при моделировании невязких течений сжимаемого газа, а также предложен модифицированный способ минимизации коэффициентов реконструкции, обеспечивающий отсутствие существенных нефизических осцилляций численного решения вблизи разрывов. Апробация разностного метода выполнена при решении задач распада разрыва Римана: тест Сода, тест Годунова [4], тест Лакса [5].

Численный метод интегрирования уравнений Эйлера. Рассматривается численное решение системы двухмерных уравнений Эйлера, описывающих невязкое течение сжимаемого газа, представленных в консервативной (дивергентной) форме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E(Q)}{\partial x}+\frac{\partial F(Q)}{\partial y}=0,\ (x,\,y)\in\Omega,\ t>0\,, \tag{1}$$

где x, y, t – декартовы координаты на плоскости и время; $Q=Q(x,\,y,\,t)=\left(\rho,\,\rho u,\,\rho v,\,\dfrac{p}{\gamma-1}+\rho\dfrac{u^2+v^2}{2}\right)^t$ – вектор-столбец консервативных переменных; $E=E(Q),\ F=F(Q)$ − потоковые функции вида

$$E=\left(\rho u,\ p+\rho u^2,\ \rho uv,\ u\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\rho\frac{u^2+v^2}{2}\right)\right)^t,$$

$$F=\left(\rho v,\ \rho uv,\ p+\rho v^2,\ v\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\rho\frac{u^2+v^2}{2}\right)\right)^t;$$

ρ, u, v, p, γ − плотность газа, компоненты вектора скорости, статическое давление и показатель адиабаты для воздуха, равный 1.4, соответственно; Ω − расчётная область с кусочно-гладкой границей. Связь вектора примитивных $q=q(x,\,y,\,t)=(\rho,\,u,\,v,\,p)^t$ и консервативных переменных определяется соотношениями:

$$q_1=Q_1,\ q_2=\frac{Q_2}{Q_1},\ q_3=\frac{Q_3}{Q_1},\ q_4=(\gamma-1)\left(Q_4-0.5\frac{Q_2^2+Q_3^2}{Q_1}\right).$$

В момент $t=0$ задано начальное условие $Q(x,\,y,\,0)=\varphi(x,\,y)$.

Уравнение (1) решается с применением метода контрольного объёма для неструктурированной сетки, состоящей из элементов (ячеек) P произвольной формы.

Значения переменных привязаны к центру элемента сетки. После интегрирования по ячейке и применения теоремы о среднем и теоремы Грина уравнение (1) примет вид

$$\frac{d\overline{Q}}{dt}=RSH\left(\overline{Q}\right)\equiv-\frac{1}{S_P}\sum_{i=1}^{N_P}\int\limits_{L_{P,i}}\left(E\cdot n_x+F\cdot n_y\right)_i dL,\ \overline{Q}\equiv\frac{1}{S_P}\iint\limits_P Q(x,y,t)ds,\ t>0\,, \tag{2}$$

где $\overline{Q}$ − среднее значение вектора консервативных переменных; S_P − площадь ячейки; $L_{P,i}$ − линейный элемент (ребро) границы ячейки; N_P − число рёбер ячейки; $\vec{n}=\left(n_x,n_y\right)$ − вектор внешней нормали к границе ячейки.

На временной оси задаётся сетка узлов вида $t_n=\tau\cdot n,\tau>0,n\in N\cup 0$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2) решается методом Рунге-Кутта третьего порядка аппроксимации по времени:

$$\overline{Q}^{(1)}=\overline{Q}^{n}+\tau\cdot RSH\left(\overline{Q}^{n}\right),\overline{Q}^{(2)}=\frac{3}{4}\overline{Q}^{n}+\frac{1}{4}\overline{Q}^{(1)}+\frac{1}{4}\tau\cdot RSH\left(\overline{Q}^{(1)}\right),$$

$$\overline{Q}^{n+1}=\frac{1}{3}\overline{Q}^{n}+\frac{2}{3}\overline{Q}^{(2)}+\frac{2}{3}\tau\cdot RSH\left(\overline{Q}^{(2)}\right).$$

Значение шага по времени определяется как

$$\tau=\nu\frac{d}{\max\limits_P\left(\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{\gamma\rho p^{-1}}\right)},$$

где ν − число Куранта, d − линейный размер сетки.

Для дискретизации по пространству выполняется параметризация линейных элементов границы и приближенное вычисление интегралов с применением трёхточечной квадратурной формулы Гаусса, после чего правая часть (2) принимает вид

$$RSH\left(\overline{Q}^{n}\right)\approx-\frac{1}{S_P}\sum_{i=1}^{N_P}\sum_{j=1}^{3}\frac{\omega_j\left|L_{P,i}\right|}{2}G_{ij}^{n}\,.$$

Здесь G_{ij}^{n} − значение потока в j узле квадратурной формулы на границе ячейки с координатами x_{ij},y_{ij}; ω_j − весовые коэффициенты квадратурной формулы; $\left|L_{P,i}\right|$ − длина ребра границы.

При вычислении G_{ij}^{n} используется расщепление [6], которое обеспечивает линейную устойчивость схемы (разности против потока):

$$G_{ij}^{n}=0.5\left(G\left(Q_{ij,L}^{n}\right)+G\left(Q_{ij,R}^{n}\right)\right)-0.5\left|\tilde{A}\right|\left(q_{ij,R}^{n}-q_{ij,L}^{n}\right),$$

где $G_{ij}^{n}=E\left(Q_{ij}^{n}\right)\cdot n_{x,i}+F\left(Q_{ij}^{n}\right)\cdot n_{y,i}$; $q_{ij,L}^{n},q_{ij,R}^{n}$ − векторы примитивных переменных, полученные по интерполированным в узел из текущей P и смежной P_i ячеек консервативным переменным $Q_{ij,L}^{n}$ и $Q_{ij,R}^{n}$. Слагаемое $\left|\tilde{A}\right|\left(q_{ij,R}^{n}-q_{ij,L}^{n}\right)$ вычисляется следующим образом:

$$\left|\tilde{A}\right|\left(q_{ij,R}^{n}-q_{ij,L}^{n}\right)=\Delta_1+\Delta_4+\Delta_5\,,\ \Delta_1=\left|\tilde{U}\right|\left\langle\left(\Delta\rho-\frac{\Delta p}{\tilde{a}^2}\right)\Delta_2+\tilde{\rho}\Delta_3\right\rangle,$$

$$\Delta_2=\left(1,\tilde{u},\tilde{v},\frac{\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}{2}\right)^t,\Delta_3=\left(0,\Delta u-n_x\Delta U,\Delta v-n_y\Delta U,\tilde{u}\Delta u+\tilde{v}\Delta v-\tilde{U}\Delta U\right)^t,$$

$$\Delta_{4,5}=\left|\tilde{U}\pm\tilde{a}\right|\left(\frac{\Delta p-\tilde{\rho}\tilde{a}\Delta U}{2\tilde{a}^2}\right)\cdot\left(1,\,\tilde{u}\pm n_x\tilde{a},\,\tilde{v}\pm n_y\tilde{a},\,\tilde{H}_0\pm\tilde{a}\tilde{U}\right)^t,$$

где

$$\Delta\xi=\xi^n_{ij,R}-\xi^n_{ij,L},\ \xi=[\rho,u,v,p,U],\ U=n_xu+n_yv,\ H_0=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{u^2+v^2}{2},$$

$$\tilde{\rho}=\sqrt{\rho^n_{ij,L}\cdot\rho^n_{ij,R}},\ \tilde{\kappa}=w_L\kappa^n_{ij,L}+w_R\kappa^n_{ij,R},\ \kappa=[u,v,p,H_0],\ \tilde{a}^2=(\gamma-1)\left\langle\tilde{H}_0-\frac{\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}{2}\right\rangle,$$

$$w_L=\frac{\sqrt{\rho^n_{ij,L}}}{\sqrt{\rho^n_{ij,L}}+\sqrt{\rho^n_{ij,R}}},\ w_R=1-w_L,\ \tilde{U}=n_x\tilde{u}+n_y\tilde{v}.$$

Распределение консервативных переменных в каждом элементе задаётся полиномиальной реконструкцией переменных степени k вида

$$R_P(x,y)=\bar{Q}+\bar{x}_P\left(\hat{Q}_x\right)_P+\bar{y}_P\left(\hat{Q}_y\right)_P+$$
$$+0.5\left[\bar{x}^2_P-I_{xx}\right]\left(\hat{Q}_{xx}\right)_P+\left[\bar{x}_P\bar{y}_P-I_{xy}\right]\left(\hat{Q}_{xy}\right)_P+0.5\left[\bar{y}^2_P-I_{yy}\right]\left(\hat{Q}_{yy}\right)_P, \qquad (3)$$
$$I_{\underbrace{x}_{n}\underbrace{y}_{m}}=\frac{1}{S_P}\oint_{L_P}\frac{\bar{x}^{n+1}_P\bar{y}^m_P}{n+1}dy,\ \bar{z}_P=z-z_P,\ z=[x,y],$$

где x_P, y_P – координаты центра ячейки, $\hat{Q}_\psi,\psi=[x,y,xx,xy,yy,\ldots]$ – значения минимизированных коэффициентов реконструкции, удовлетворяющих условиям аппроксимации:

$$\left(\hat{Q}_\psi\right)_P=\left(Q_\psi\right)_P+\mathrm{O}\left(d^{k+1-(n+m)}\right),\ \psi=\underbrace{x}_{n}\underbrace{y}_{m},\ 0\le n\le k,\ 0\le m\le k,\ 0\le n+m\le k.$$

При этом $Q^n_{ij,L}=R_P\left(x_{ij},y_{ij}\right),\ Q^n_{ij,R}=R_{P_i}\left(x_{ij},y_{ij}\right)$.

Минимизация коэффициентов реконструкции (3) выполняется для обеспечения нелинейной устойчивости явной схемы (уменьшения возможных осцилляций решения):

$$\left(\hat{Q}_\psi\right)_P=\min\bmod\left(\left(\bar{\bar{Q}}_\psi\right)_P,\left(\tilde{Q}_\psi\right)_{P_1},\ldots,\left(\tilde{Q}_\psi\right)_{P_{n_P}}\right),\ \psi=[x,y,xx,xy,yy,\ldots],$$

где

$$\min\bmod(a,b)=\frac{sign(a)+sign(b)}{2}\min(|a|,|b|),\ \min\bmod(a,b,c)=\min\bmod(\min\bmod(a,b),c)$$

$\left(\bar{\bar{Q}}_\psi\right)_P$ – значение коэффициента в текущей ячейке, удовлетворяющее условию аппроксимации, а $\left(\tilde{Q}_\psi\right)_{P_i}$ – полученное интерполированием из соседней i-й ячейки с выполнением требования сохранения порядка точности. Таким образом, при минимизации из рассматриваемого набора аппроксимаций выбирается значение наименьшее по модулю.

В работе [3] при вычислении коэффициентов реконструкции в текущей ячейке определяются весовые разности $\left(\delta_\psi Q\right)_P$, имеющие первый порядок точности, которые затем, начиная с коэффициентов более высоких порядков, рекуррентно уточняются для обеспечения необходимой точности. Так, для кубической реконструкции эта процедура состоит из следующих шагов:

$$\bar{\bar{Q}}_\psi=\delta_\psi Q=Q_\psi+\mathrm{O}(d),\ \psi=[xxx,xxy,xyy,yyy],$$

$$\overline{\overline{Q}}_{\psi} = \delta_{\psi} Q - B_{\psi}^{\xi} \overline{\overline{Q}}_{\xi} = Q_{\psi} + \mathrm{O}\left(d^{2}\right), \psi = [xx, xy, yy], \xi = [xxx, xxy, xyy, yyy],$$

$$\overline{\overline{Q}}_{\psi} = \delta_{\psi} Q - C_{\psi}^{\xi} \overline{\overline{Q}}_{\xi} = Q_{\psi} + \mathrm{O}\left(d^{3}\right), \psi = [x, y], \xi = [xx, xy, yy, xxx, xxy, xyy, yyy],$$

где B_{ψ}^{ξ}, C_{ψ}^{ξ} – матрицы коэффициентов разложения разностей второго и первого порядков соответственно. По повторяющему индексу ξ выполняется суммирование. При этом $\left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_i}$ строятся следующим образом:

$$\left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_i} = \left(\overline{\overline{Q}}_{\psi}\right)_{P_i}, \psi = [xxx, \ldots, yyy],$$

$$\left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_i} = \left(\overline{\overline{Q}}_{\psi}\right)_{P_i} + \overline{x}_{P_i}\left(\hat{Q}_{\psi x}\right)_{P_i} + \overline{y}_{P_i}\left(\hat{Q}_{\psi y}\right)_{P_i}, \psi = [xx, \ldots, yy], \overline{z}_{P_i} = z_P - z_{P_i}, z = [x, y],$$

$$\left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_i} = \left(\overline{\overline{Q}}_{\psi}\right)_{P_i} + \overline{x}_{P_i}\left(\hat{Q}_{\psi x}\right)_{P_i} + \overline{y}_{P_i}\left(\hat{Q}_{\psi y}\right)_{P_i} +$$

$$+ \frac{\overline{x}_{P_i}^2}{2}\left(\hat{Q}_{\psi xx}\right)_{P_i} + \overline{x}_{P_i}\overline{y}_{P_i}\left(\hat{Q}_{\psi xy}\right)_{P_i} + \frac{\overline{y}_{P_i}^2}{2}\left(\hat{Q}_{\psi yy}\right)_{P_i}, \psi = [x, y].$$

Существенное расширение набора аппроксимаций для определения из них минимального по модулю значения обеспечивает модификация описанного выше подхода, в которой объединены шаги рекуррентного уточнения и минимизации коэффициентов. Инвариантность выполнения условий аппроксимации относительно такой перестановки очевидна. В этом случае завершающий шаг нахождения коэффициентов на примере кубической реконструкции имеет вид:

$$\left(\overline{\overline{Q}}_{\psi}\right)_P = \left(\delta_{\psi} Q\right)_P = \left(Q_{\psi}\right)_P + \mathrm{O}(d),$$

$$\left(\hat{Q}_{\psi}\right)_P = \min\operatorname{mod}\left(\left(\overline{\overline{Q}}_{\psi}\right)_P, \left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_1}, \ldots, \left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_{np}}\right), \psi = [xxx, \ldots, yyy];$$

$$\left(\overline{\overline{Q}}_{\psi}\right)_P = \left(\delta_{\psi} Q\right)_P - B_{\psi}^{\xi}\left(\hat{Q}_{\xi}\right)_P = \left(Q_{\psi}\right)_P + \mathrm{O}\left(d^2\right), \xi = [xxx, \ldots, yyy],$$

$$\left(\hat{Q}_{\psi}\right)_P = \min\operatorname{mod}\left(\left(\overline{\overline{Q}}_{\psi}\right)_P, \left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_1}, \ldots, \left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_{np}}\right), \psi = [xx, \ldots, yy];$$

$$\left(\overline{\overline{Q}}_{\psi}\right)_P = \left(\delta_{\psi} Q\right)_P - C_{\psi}^{\xi}\left(\hat{Q}_{\xi}\right)_P = \left(Q_{\psi}\right)_P + \mathrm{O}\left(d^3\right), \xi = [xx, \ldots, yyy],$$

$$\left(\hat{Q}_{\psi}\right)_P = \min\operatorname{mod}\left(\left(\overline{\overline{Q}}_{\psi}\right)_P, \left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_1}, \ldots, \left(\tilde{Q}_{\psi}\right)_{P_{np}}\right), \psi = [x, y].$$

При таком подходе на шаге коррекции минимизируется вклад разностей более высокого порядка, что обеспечивает более монотонные результаты разностной схемы, особенно в областях с разрывами и большими градиентами полей решений.

Численные результаты. В исследовании выполнена проверка свойства метода по обеспечению отсутствия существенных осцилляций для ряда задач распада разрыва Римана. Рассматривается численное решение уравнения (1) относительно безразмерных газодинамических переменных $\left(\overline{\rho}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{p}\right)^t$, пространственных $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ и временной $\overline{t}$ координат. Для удобства изложения в дальнейших записях над безразмерными переменными черта опускается. Фрагмент дискретизации расчётной области $\Omega = (-0.5, 0.5) \times (-0.01, 0.01)$ представлен на рис. 1.

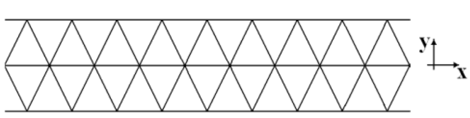


Рис. 1. Вид расчётной сетки

Линейный размер сетки $d = 0.01$. В момент времени $t = 0$ задаётся распределение примитивных переменных

$$q(x, y, 0) = (\rho_L, u_L, v_L, p_L)^t,\ x \le x_0,\ q(x, y, 0) = (\rho_R, u_R, v_R, p_R)^t,\ x > x_0$$

а при $t > 0$ выполняется постановка следующих граничных условий:

$$q(-0.5, y, t) = (\rho_L, u_L, v_L, p_L),\ q(0.5, y, t) = (\rho_R, u_R, v_R, p_R),\ y \in [-0.01, 0.01],$$

$$q(x, -0.01, t) = q(x, 0.01, t),\ x \in [-0.5, 0.5].$$

Поиск решения осуществляется в момент времени, когда возмущения, вызванные распадом, ещё не доходят до границ $x = -0.5$ и $x = 0.5$. Рассматриваются следующие варианты задачи:

- Test 1 (тест Сода): $q(x, y, 0) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1)^t, & x \le 0, \\ (0.125, 0, 0, 0.1)^t, & x > 0; \end{cases}$
- Test 2 (тест Годунова): $q(x, y, 0) = \begin{cases} (1, 0, 0, 2.5)^t, & x \le 0.3, \\ (1, -2.8026, 0, 0.5)^t, & x > 0.3; \end{cases}$
- Test 3 (тест Лакса): $q(x, y, 0) = \begin{cases} (0.445, 0.699, 0, 3.528)^t, & x \le 0, \\ (0.5, 0, 0, 0.574)^t, & x > 0. \end{cases}$

На рис. 2 − 4 представлены результаты расчётов рассматриваемых задач в моменты времени $t = 0.15$, $t = 0.2$, и $t = 0.1$ соответственно. На всех графиках непрерывной линией изображен вид точного решения задачи, а линией с прозрачными и чёрными маркерами обозначены численные результаты, полученные с применением реконструкции 1-й и 4-й степени соответственно. Число Куранта при $k = 1$ задавалось равным $\nu = 0.1$, а при $k = 4$ − $\nu = 0.02$ (выбрано для выполнения равенства $O(\tau^3) = O(d^4)$).

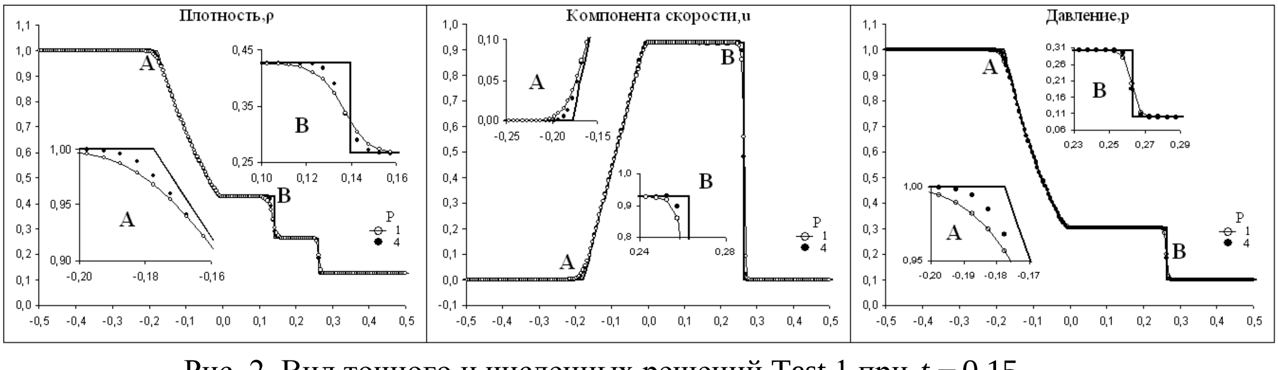


Рис. 2. Вид точного и численных решений Test 1 при $t = 0.15$

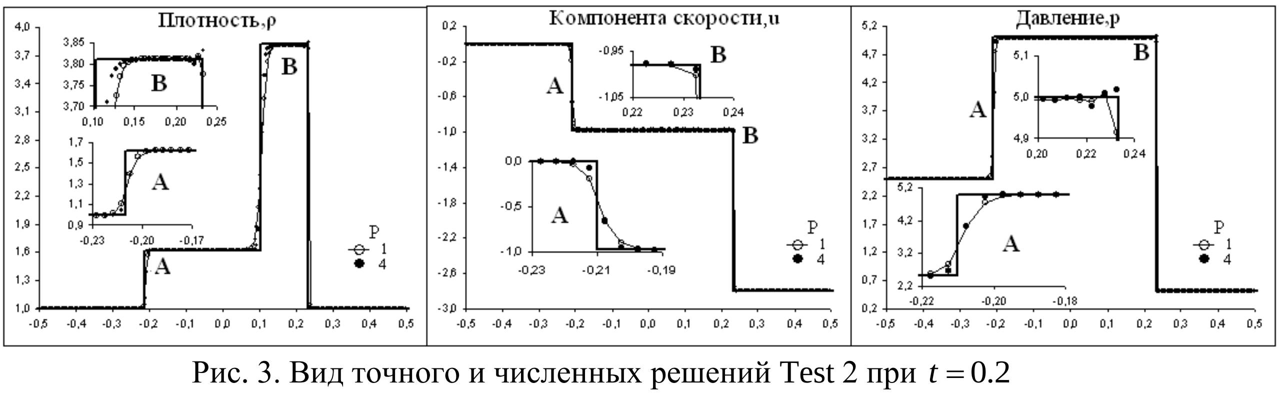


Рис. 3. Вид точного и численных решений Test 2 при $t = 0.2$

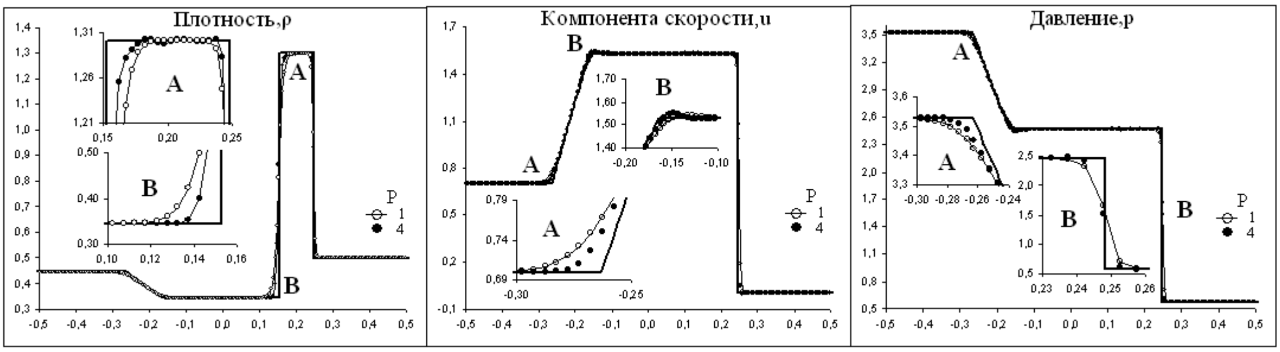


Рис 4. Вид точного и численных решений Test 3 при $t = 0.1$

Для всех рассмотренных задач полученные численные решения хорошо согласуются с точными. В Test 1 и Test 3 после распада разрыва вправо распространяется ударная волна, за которой следует контактный разрыв, а влево волна разрежения. Численное решение Test 1 вблизи разрывов является монотонным, тогда как в распределении плотности Test 3 справа от контактного разрыва при использовании реконструкции 4-й степени появляются незначительные осцилляции. В Test 2 после распада разрыва влево распространяются две ударные волны, разделённые контактным разрывом. В решении с полиномом реконструкции 4-й степени наблюдаются незначительные осцилляции возле правой ударной волны (рис. 3., распределения плотности и статического давления, фрагмент B).

Результаты, полученные с применением кусочно-линейной реконструкции (полином 1-й степени), являются более монотонными. Полученные численно ударные волны и контактные разрывы хорошо локализованы, а применение процедуры минимизации коэффициентов реконструкции обеспечивает отсутствие существенных осцилляций решения вблизи разрывов. На увеличенных фрагментах видно, что при повышении степени полинома реконструкции k улучшается согласование численного и точного решений (уменьшается область размазывания разрывов).

Выводы. На основе предложенного способа построения кусочно-полиномиальной реконструкции переменных и с применением метода контрольного объёма построена явная разностная схема высокого порядка точности для численного интегрирования уравнений Эйлера на неструктурированных сетках при моделировании невязких течений сжимаемого газа. Выполнена модификация способа минимизации коэффициентов реконструкции.

Полученные численные решения характеризуются отсутствием существенных осцилляций вблизи контактного разрыва и ударных волн. При увеличении степени полинома реконструкции улучшается согласование численных и точных решений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Venkatakrishnan V. A perspective on unstructured grid flow solvers / V.A. Venkatakrishnan//AIAA, Aerospace Sci. Meeting. – 1996. –№ 33. – V.34. − P. 533−547.
2. Hu C. Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes on Triangular meshes/C. Hu, C.-W. Shu //J. of Comp. Phys. − 1999. − V. 150. − P. 97−127.
3. Русанов А.В. Явная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках / А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Серия МИА.– Харьков, 2010. − № 926. − С. 123−138.

4. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене / А.А. Приходько. – Киев: Наукова думка, 2003. − 379 с.
5. Ванин В.А. Математическое моделирование аэро-электродинамических нестационарных процессов на основе монотонных разностных схем: дис. … д-ра техн. наук: 01.05.02 / Виктор Антонович Ванин. − Х.: Ин-т пробл. машиностр., 2005. − 405 с.
6. Roe P.L. Approximate Riemann schemes / P.L. Roe // J. of Comp. Physics. − 1981. − V. 43. − P. 357−372.

РУСАНОВ Андрей Викторович − д.т.н., зам. директора по научной работе ИПМаш НАН Украины им. А.Н. Подгорного, зав. отд. гидроаэромеханики энергетических машин.

Научные интересы:

– вычислительная газогидродинамика;

– методы проектирования проточных частей энергетических машин на основе современных компьютерных технологий.

КОСЬЯНОВ Дмитрий Юрьевич − аспирант каф. газогидромеханики и тепломассообмена НТУ «ХПИ», вед. инж. отд. гидроаэромеханики энергетических машин.

Научные интересы:

– вычислительная газогидродинамика;

– численные методы на неструктурированных сетках.

УДК 517.9

В.Г.Самойленко, Ю.І.Самойленко

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Постановка задачі та аналіз публікацій з теми дослідження. Одним з ефективних підходів дослідження нелінійних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами та малими параметром є асимптотичні методи, які дозволяють побудувати наближений розв'язок з наперед заданою точністю. В [1 – 3] для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній вигляду

$$\varepsilon^{N_0} u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon) u_t + b(x,t,\varepsilon) u u_x, \quad N_0 \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де функції $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ записуються у вигляді асимптотичних рядів

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)\varepsilon^k, \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,t)\varepsilon^k ,$$

$a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}\times[0;T])$, $k \ge 0$, причому $a_0(x,t) \ne 0$, $b_0(x,t) \ne 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0;T]$; $\varepsilon > 0$ – малий параметр, за допомогою методу ВКБ запропоновано алгоритм побудови його асимптотичного однофазового солітоноподібного розв'язку у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau) \right] + O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \quad \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}, \tag{2}$$

де $\varphi(t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}\times[0;T])$ – скалярна дійсна функція; функції $u_j(x,t)$, $j = \overline{0,N}$ – нескінченно диференційовні (в точках $t=0$, $t=T$ розглядаються відповідно ліва та права похідні); функції $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, – нескінченно диференційовні і при $\tau \to \pm\infty$ прямують до деякої нескінченно диференційовної функції $f^{\pm}(x,t)$. Тут функція $\varphi(t)$ визначається в процесі побудови асимптотичного розв'язку (2).

При побудові асимптотичного розв'язку (2) виникає допоміжна задача, що пов'язана з дослідженням задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами першого порядку

$$\Lambda w = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0;T], \tag{3}$$

$$w_j(x,t)\Big|_{x=\varphi(t)} = \nu(t) \tag{4}$$

де диференціальний оператор Λ має вигляд

$$\Lambda = a_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + b_0(x,t)u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + b_0(x,t)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x},$$

крива $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times[0;T] : x = \varphi(t)\}$.

При цьому функція $\nu(t)$, $t \in [0;T]$, є нескінченно диференційовною функцією і має місце умова

$$A(\varphi(t),t) = -a_0(\varphi(t),t)\varphi'(t) + b_0(\varphi(t),t)u_0(\varphi(t),t) > 0. \tag{5}$$

Метою даної статті є дослідження задачі Коші (3), (4) та встановлення достатніх умов існування її нескінченно диференційовного розв'язку.

Основна частина. В [1 – 3] показано, що крива Γ трансверсальна характеристикам рівняння (3), а отже, розв'язок задачі Коші (3), (4) існує, принаймні, в деякому околі кривої Γ. Для дослідження питання про існування розв'язку задачі Коші застосуємо метод характеристик. Зауважимо, що інтегрування в явному вигляді рівняння (3) можливе лише при певних умовах, зокрема, у випадку, коли коефіцієнти рівняння (3) факторизуються.

Має місце теорема.

Теорема 1. *Нехай функції* $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t)$ *є нескінченно диференційовними на множині* $\mathbb{R}\times[0;T]$, *задовольняють умову (5) і для всіх* $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0;T]$ *має місце співвідношення*

$$a_0(x,t)=A_1(x)A_2(t)\neq 0,\ b_0(x,t)=B_1(x)B_2(t)\neq 0,\ u_0(x,t)=\varphi_1(x)\varphi_2(t)\neq 0.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3) можна записати у неявному вигляді за допомогою формули

$$\Phi(\xi(x,t,w),\eta(x,t,w))=0, \tag{6}$$

де

$$\xi(x,t,w)=w\int_0^t\frac{B_2(t)\varphi_2(t)}{A_2(t)}dt-\int_{x_0}^{x}\frac{A_1(x)}{B_1(x)\varphi_1(x)}dx, \tag{7}$$

$$\eta(x,t,w)=w\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_0)}-\frac{1}{\varphi_1(x_0)\varphi_2(t)}\int_{x_0}^{x}\frac{f(\xi,t)}{b_0(\xi,t)}d\xi. \tag{8}$$

При цьому функція $\Phi(\xi,\eta)\in C^\infty(\Xi;\mathbb{R})$ *є такою довільною функцією, що існує хоча б одна точка* $(\xi,\eta)\in\Xi$, *для якої* $\Phi(\xi,\eta)=0$, *і повна похідна за змінною* w *від функції в лівій частині рівності (6) не дорівнює нулеві для всіх* $(x,t,w)\in G$, *де* G *– область значень змінних* (x,t,w) *відображення* $(x,t,w)\to(\xi(x,t,w),\eta(x,t,w))$.

При доведенні теореми використовуються система характеристик для рівняння (3) та умова (5).

Знайдемо розв'язок задачі Коші (3), (4) в явному вигляді. Для цього розглянемо систему (7), (8), яка отримана з системи характеристик для рівняння (3).

Функція $w=w(x,t)$ задовольняє умову $w(\varphi(t),t)=\nu(t)$. Поклавши в (7), (8) $x=\varphi(t)$, $w(\varphi(t),t)=\nu(t)$, отримаємо систему рівностей

$$\xi=g_1(t),\quad \eta=g_2(t), \tag{9}$$

де

$$g_1(t)=\nu(t)\int_0^t\frac{B_2(t)\varphi_2(t)}{A_2(t)}dt-\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{A_1(x)}{B_1(x)\varphi_1(x)}dx,$$

$$g_2(t)=\frac{\varphi_1(\varphi(t))}{\varphi_1(x_0)}\nu(t)-\frac{1}{\varphi_1(x_0)\varphi_2(t)}\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{f(\xi,t)}{b_0(\xi,t)}d\xi.$$

Таким чином, питання про існування розв'язку задачі Коші (3), (4) зводиться до дослідження співвідношень (9), кожне з яких задає деяку функцію t від ξ та η неявним чином.

Виключаючи змінну t з (9), отримаємо співвідношення

$$\xi=g(\eta).$$

Отже, розв'язок задачі Коші (3), (4) можна подати у неявному вигляді таким чином

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_0)}w-\frac{1}{\varphi_1(x_0)\varphi_2(t)}\int_{x_0}^{x}\frac{f(\xi,t)}{b_0(\xi,t)}d\xi = g\left(w\int_0^t\frac{B_2(t)\varphi_2(t)}{A_2(t)}dt-\int_{x_0}^{x}\frac{A_1(x)}{B_1(x)\varphi_1(x)}dx\right). \qquad (10)$$

При цьому, очевидно, що при $x=\varphi(t)$ та $w(\varphi(t),t)=\nu(t)$ функція $g(\eta)$ задовольняє умову

$$\frac{\varphi_1(\varphi(t))}{\varphi_1(x_0)}w-\frac{1}{\varphi_1(x_0)\varphi_2(t)}\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{f(\xi,t)}{b_0(\xi,t)}d\xi = g\left(\nu(t)\int_0^t\frac{B_2(t)\varphi_2(t)}{A_2(t)}dt-\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{A_1(x)}{B_1(x)\varphi_1(x)}dx\right).$$

Висновки. Розглянуто лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами, яке виникає при побудові асимптотичного розв’язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза. Отримано достатні умови, при яких розв’язок задачі Коші для згаданого вище рівняння існує. Знайдено розв’язок цієї задачі в неявному вигляді.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Самойленко В.Г. Асимптотичні розклади однофазових солітоноподібних розв’язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В.Г.Самойленко, Ю.І.Самойленко // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, № 1. – С. 111 – 124.
2. Самойленко В.Г. Асимптотичні розв’язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В.Г.Самойленко, Ю.І.Самойленко // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 1. – С. 122 – 132.
3. Maslov V.P. Geometric asymptotics for PDE. I. / V.P. Maslov, G.A.Omel’yanov. – Providence: AMS. – 2001. – 243 p.
4. Самойленко Ю.І. Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами (загальний випадок) / Ю.І.Самойленко // Математичний вісник НТШ. Львів. – 2010. – Т. 7. – С. 227 – 242.
5. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння / А.М.Самойленко, М.О.Перестюк, І.О.Парасюк. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

САМОЙЛЕНКО Валерій Григорович – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Наукові інтереси:

– диференціальні рівняння з частинними похідними, теорія динамічних систем, нелінійний аналіз, асимптотичні методи, диференціальні рівняння з запізнюючим аргументом, імпульсні системи, історія математики.

САМОЙЛЕНКО Юлія Іванівна – к.ф.-м.н., старший науковий співробітник механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Наукові інтереси:

– диференціальні рівняння з частинними похідними, асимптотичні методи, імпульсні системи.

УДК 519.6:004.942

Г. Э. Саруханян, В. Т. Лазурик, А. Б. Батраков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭМИССИИ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СПЕКТРОВ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Постановка проблемы. Исследования возможностей получения тормозного излучения (ТИ) на сильноточном ускорителе релятивистских электронов «Темп-Б» (ННЦ ХФТИ) стимулируются необходимостью экспериментального моделирования радиационного воздействия на материалы и объекты в реакторной зоне [1]. Характеристики ТИ определяются конструкцией конвертера и параметрами электронного пучка. В связи с тем, что для сильноточного электронного пучка характерен достаточно широкий энергетический разброс [2], актуальной задачей является исследование выхода ТИ в зависимости от формы спектра электронного пучка с целью оптимизации параметров конвертера. В настоящее время базовым методом решения задач такого типа является компьютерное моделирование процессов взаимодействия электронного и фотонного излучения с веществом методом Монте-Карло [3].

Целью работы является компьютерное моделирование процесса генерации тормозного излучения электронного пучка для изучения зависимостей коэффициента преобразования энергии электронов в энергию излучения от параметров моделей спектра электронного пучка.

Математические модели и средства моделирования. В работе рассмотрены две модели спектра электронного пучка, которые традиционно используются при аппроксимации экспериментальных данных. В первой модели спектр электронов описывается функцией имеющей треугольную форму, которая задается следующими параметрами: максимальная E_{max}, минимальная E_{min} и наиболее вероятная E_{prob} энергия электронов в пучке (см. рис.1). На рисунке показана, часто используемая в технической литературе характеристика унимодальных функций - полная ширина кривой на полувысоте (FWHM).

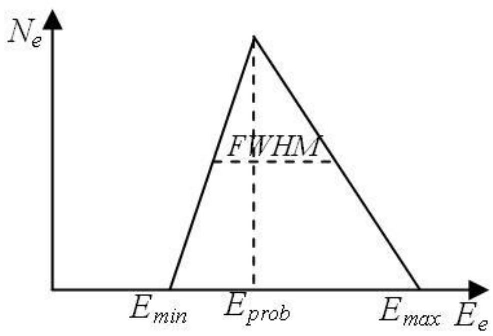


Рис.1. Модель спектра электронов описываемого треугольной формой.

Функция, описывающая спектр электронов в этой модели, имеет вид:

$$f(E)=\begin{cases} 0, E<E_{\min} \\ \dfrac{2\cdot(E-E_{\min})}{\Delta_1\cdot\Delta}, E_{\min}\le E\le E_{prob} \\ \dfrac{2\cdot(E_{\max}-E)}{\Delta_2\cdot\Delta}, E_{prob}\le E\le E_{\max} \\ 0, E>E_{\max}. \end{cases}, \quad (1)$$

где $\Delta = E_{\max} - E_{\min}$, $\Delta_1 = E_{prob} - E_{\min}$, $\Delta_2 = \Delta - \Delta_1 = E_{\max} - E_{prob}$.

Во второй модели предполагается, что спектр электронов пучка может быть описан «экспоненциальной» формой и определяется следующими параметрами: максимальной E_{max}, наиболее вероятной E_{prob} энергией электронов в пучке и E_{slop} – энергией электронов на левом склоне спектра, для которой интенсивность электронов в 10 раз меньше чем интенсивность электронов при энергии E_{prob}(см. рис.2).

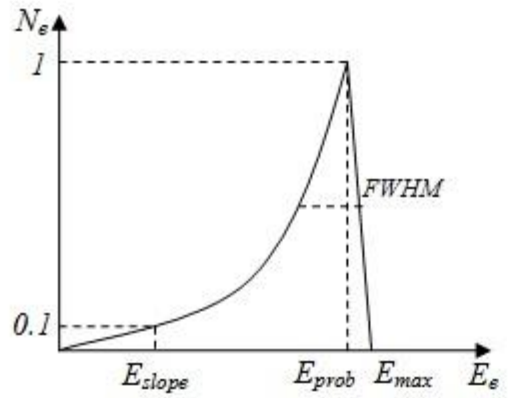


Рис.2. Модель спектра электронов описываемого «экспоненциальным» формой.

Спектр электронов в «экспоненциальной» модели имеет следующий вид:

$$f(E) = \begin{cases} A_n e^{\mu(E-E_{prob})}, 0 < E \le E_{prob} \\ A_n(k_1 E + k_2), E_{prob} < 0 \le E_{\max} \\ 0, E > E_{\max} \end{cases}, \qquad (2)$$

где

$$\mu = \frac{\ln 0.1}{E_{slope} - E_{prob}}, k_1 = \frac{1}{E_{prob} - E_{\max}}, k_2 = \frac{E_{\max}}{E_{\max} - E_{prob}}, A_n = \frac{2\mu}{2(1 - e^{-\mu E_{prob}}) + \mu(E_{\max} - E_{prob})}.$$

Компьютерное моделирование процессов генерации тормозного излучения и определение характеристик излучения проводилось с использованием специализированного программного модуля ModeSXR, входящего в состав программного пакета RT-Office, который предназначен для моделирования радиационно-технологических процессов [4]. В серии расчётов исходными данными служили характерные параметры ускорителя «Темп-Б» (энергия электронов в диапазоне от 500 кэВ до 1 МэВ, ток пучка от 25кА до 50кА, длительность импульса от 1.5 мкс до 2.5 мкс). Относительно конвертера предполагалось, что это однослойная конструкция из тантала с варьируемой толщиной слоя в диапазоне от 0.005см до 0.03см.

Для определения зависимости коэффициента преобразования η энергии электронного пучка в энергию рентгеновского излучения от вида и параметров спектра электронного пучка, были проведены серии расчётов, в каждой из которых фиксировался один из параметров электронного пучка. Анализ результатов этих расчётов позволил предположить, что коэффициент преобразования η определяется в основном величиной средней энергии электронов в пучке E_{av}, Значения E_{av} для двух моделей могут быть рассчитаны по формулам:

$$E_{av} = \frac{1}{3}\left(\frac{E_{\min}^3}{\Delta_1 \cdot \Delta} - \frac{E_{prob}^3}{\Delta_1 \cdot \Delta_2} + \frac{E_{\max}^3}{\Delta_2 \cdot \Delta}\right), \qquad (3)$$

– для спектра электронов, описываемого треугольной формой

$$E_{av} = A_n\left(\frac{(\mu E_{prob} - 1 + e^{-\mu E_{prob}})}{\mu^2} + \frac{k_1}{3}(E_{\max}^3 - E_{prob}^3) + \frac{k_2}{2}(E_{\max}^2 - E_{prob}^2)\right), \qquad (4)$$

– для спектра электронов, описываемого «экспоненциальной» формой.

Результаты и обсуждение. Исходя из предположения об определяющей роли величины E_{av} в зависимости коэффициента преобразования η от параметров спектра электронов, была проведена серия расчётов при фиксированном значении E_{av}, но с варьируемыми параметрами E_{prob} и E_{min} для модели спектра с треугольной формой и E_{prob}, E_{slope} - спектра с «экспоненциальной» формой.

Табл. 1.

Результаты расчётов для спектра с треугольной формой

E_{min}	E_{max}	E_{prob}	*FWHM*	E_{av}	η (h=0.005cm)	η(%) (h=0.015cm)	η (h=0.03cm)
0,5	1	0,873	0,25	0,791	0,009132	0,01284	0,01072
0,6	1	0,773	0,2	0,791	0,009119	0,01253	0,01037
0,523	0,95	0,9	0,2135	0,791	0,009134	0,01247	0,01022
0,673	0,9	0,8	0,1135	0,791	0,009117	0,01226	0,01028
0,7	0,923	0,75	0,1115	0,791	0,009109	0,01234	0,01037

Табл. 2.

Результаты расчётов для спектра с «экспоненциальной» формой

E_{slope}	E_{max}	E_{prob}	*FWHM*	E_{av}	η (h=0.005cm)	η (h=0.015cm)	*H* (h=0.03cm)
0,5	1	0,99	0,1525	0,791	0,009136	0,01291	0,01069
0,539	1	0,9	0,1586	0,791	0,009147	0,01297	0,01071
0,662	0,9	0,85	0,0815	0,791	0,009121	0,01219	0,01012
0,594	0,95	0,9	0,1172	0,791	0,009131	0,01243	0,01028
0,732	0,85	0,8	0,0455	0,791	0,009126	0,01224	0,01019

Статистическая погрешность результатов моделирования, приведенных в таблицах, не превышает 1,5%. Сравнение представленных данных позволяет сделать заключение, что коэффициент преобразования η слабо зависит от формы спектра и ее параметров при фиксированном значении E_{av}. Поэтому, в дальнейшем будем полагать, что коэффициент преобразования η зависит только от среднего значения энергии электронов в пучке E_{av}. Модельная погрешность, возникающая за счет использования этого предположения, для диапазона средних энергий E_{av} от 0,5 до 1,0 МэВ и толщин конвертеров в диапазоне от 0,005 до 0,03 см, составляет не более 5%.

На рисунке 3, представлены зависимости коэффициента преобразования η от величины E_{av} при различных толщинах конвертера. Для сравнения, на рисунке представлены, полученные методом наименьших квадратов, аппроксимации каждой серии результатов моделирования полиномом второй степени.

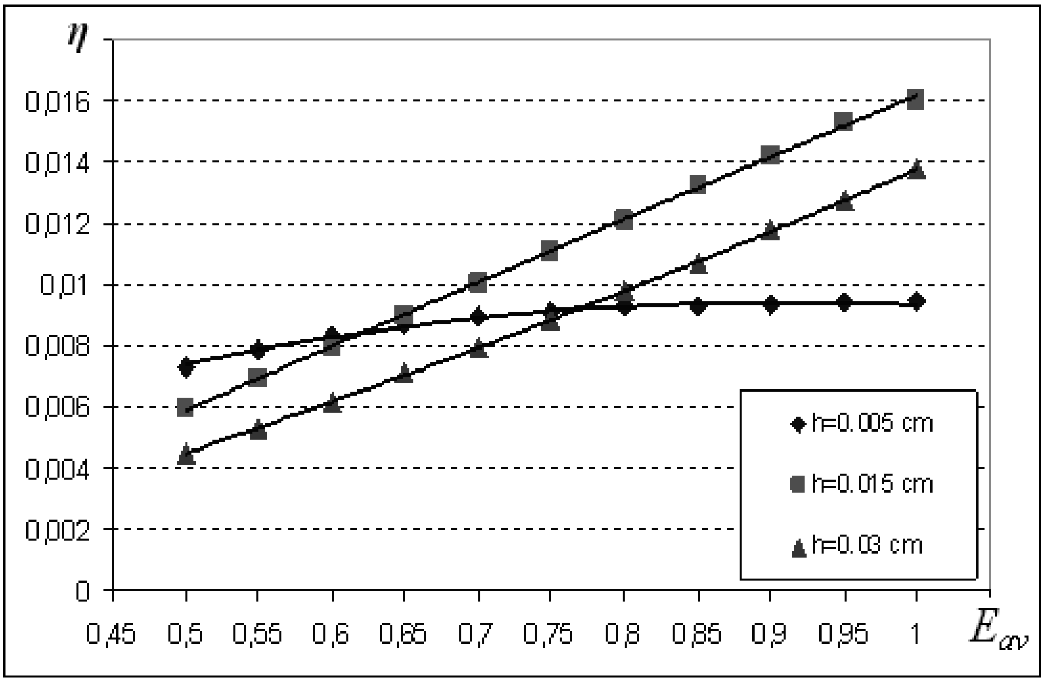


Рис. 3. Зависимость коэффициента преобразования рентгеновского излучения от среднего значения энергии электронов в пучке

Как видно из рисунка, зависимость коэффициента преобразования η может быть с хорошей точностью аппроксимирована полиномом второй степени, зависящим от среднего значения энергии электронов E_{av}. Критерием точности аппроксимации будем считать коэффициент детерминации R^2, который для диапазона средних энергий E_{av} от 0,5 до 1,0 МэВ при использовании конвертеров с толщиной в диапазоне от 0,005 до 0,03 см принимает значения достаточно близкие к единице (R^2>0,98).

В соответствии с полученными выше выводами, зависимость коэффициента преобразования η от среднего значения энергии электронов в пучке E_{av} в диапазоне от 0,5 до 1 МэВ может быть представлена в виде:

$$\eta\ (E_{av}\ ,h) = a_0(h) + a_1(h)*\ E_{av} + a_2(h)*\ (E_{av})^2, \qquad (5)$$

где a_0(h), a_1(h) и a_2(h) – коэффициенты полинома, полученные методом наименьших квадратов по результатам моделирования коэффициентов преобразования *η(h)*, для толщин конвертера h=0.005, 0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03 см. Значения коэффициентов полиномиальной аппроксимации приведены в таблице 3.

Табл. 3.

Коэффициенты аппроксимирующего полинома для разных толщин конвертера

a_i \ h	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025	0.03
a_0	-0.0005	-0.0085	-0.005	-0.0031	-0.0026	-0.0025
a_1	0.0219	0.0372	0.0224	0.0153	0.0129	0.0118
a_2	-0.012	-0.0137	-0.0012	0.0034	0.0043	0.0045

Полиномиальная аппроксимация проведена по систематическому набору результатов моделирования, полученному при изменении параметров модели таким образом, что среднее значение энергии электронов в пучке $\boldsymbol{E_{av}}$ и толщины конвертера $\boldsymbol{h_{av}}$ изменялись с малым шагом (dE << E_{av}, dh << h_{av}), Поэтому данные, полученные с помощью компьютерного моделирования достаточно плотно заполняют область параметров модели, которая представляет практический интерес, что может свидетельствовать в пользу корректности полученных выводов.

Выводы. Развитое аналитическое представление коэффициента преобразования энергии электронного пучка в энергию рентгеновского излучения позволяет перейти к решению задачи оптимизации толщины конвертера. В случае, когда процесс формирования сильноточного электронного пучка является стохастическим процессом, оптимальной толщиной является значение ***h***, при которой достигается минимум среднего значения коэффициента преобразования:

$$\overline{\eta}(h) = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \eta(E_{av}, h)\rho(E_{av})dE_{av}, \quad (6)$$

где $\rho(E_{av})$ - плотность вероятности значений E_{av}. Задаче анализа эмпирических данных и восстановления распределения вероятности $\rho(E_{av})$ будут посвящены дальнейшие исследования в этом направлении.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Оптимизация параметров релятивистских электронных пучков для генерации мощного рентгеновского тормозного излучения / А.Б. Батраков, С.П. Бондаренко, Ю.Ф. Лонин, А.Г. Пономарев, Г.В. Сотников// Вопросы атомной науки и техники. – 2010.– № 4.– Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (7). – С.21–24.
2. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц/ Р. Миллер; [перевод с англ.]. – М.: Мир, 1984.
3. Lux I. Monte Carlo Particle Transport Methods: Neutron and Photon Calculations/ I Lux and L Koblinger. – CRC Press, Boca Raton, 1991.
4. RT-Office for Optimization of Industrial EB and X-Ray Processing/ V.T Lazurik, V.M. Lazurik , G.F. Popov , Yu.V. Rogov //Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear Physics Investigations (42). – 2004. – No. 1.– P.186–189.

САРУХАНЯН Георг Эдуардович – аспирант кафедры моделирования систем и технологий факультета компьютерных наук Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, младший научный сотрудник ННЦ ХФТИ.

Научные интересы:

– моделирование пучково-плазменных систем.

ЛАЗУРИК Валентин Тимофеевич – д.ф.-м.н., зав. каф. моделирования систем и технологий факультета компьютерных наук Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, старший научный сотрудник.

Научные интересы:

– развитие физических моделей и математических методов моделирования процессов облучения в радиационных технологиях, создание систем компьютерного моделирования прохождения излучения через гетерогенные объекты.

БАТРАКОВ Алексей Борисович – младший научный сотрудник ННЦ ХФТИ.

Научные интересы:

– сильноточные ускорители заряженных частиц

УДК 621.793.

І. В. Смирнов, І. В. Мельник, А. Ю. Андрейцев

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНО-ТИМЧАСОВОГО РЕЖИМУ ІОННО-ПЛАЗМОВОГО ПЛАКУВАННЯ ПОРОШКІВ

Постановка проблеми. Створення сучасних порошкових матеріалів передбачає застосування широкої номенклатури композиційних порошків, що викликає необхідність розробки гнучких і універсальних технологій, які забезпечують порошковим матеріалам необхідні властивості. Одним з напрямів розв'язання цієї задачі є технології плакування порошків іонно-плазмовими методами у вакуумі. Дані методи дозволяють наносити покриття практично з усіх металів і сплавів, легко змінювати товщину покриття, а також температуру в контактній зоні. Важливішим і складним є визначення температури частинок порошку в процесі плакування. Практика показує, що при нанесенні покриттів іонно-плазмовим методом відбувається істотне зростаюче розігрівання поверхні основи, що може викликати небажані зміни в структурі і складі матеріалу. При цьому спостерігається зміна температури в широких межах від 297 до 1000ºС і вище, в залежності від розмірів деталей і режимів роботи вакуумної установки. Іншою особливістю нанесення покриттів на частинки порошку є розвинена поверхня 10–100 $м^2$ і більше, що викликає необхідність збільшення швидкості випаровування металу і тривалості процесу плакування. Таким чином, для отримання якісного плакованого порошку, з одного боку, необхідно визначити час для нанесення на частинки плакованої оболонки певної товщини, і, з іншого боку не допустити перегріву частинок порошку, особливо дрібних фракцій.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Теоретичне моделювання процесів взаємодії атомів конденсату з поверхнею основи виконувалося в ряді робіт. В роботі [1] досліджувався ефект зменшення коефіцієнту конденсації металів в вакуумі при підвищенні температури основи. При цьому встановлена наявність критичної температури поверхні, при якій коефіцієнт конденсації дорівнює нулю. Теоретичні дослідження моделі визначення припустимого теплового потоку на поверхню основи проведені в роботі [2]. Дані дослідження дозволили визначити граничні робочі параметри імпульсного джерела плазми. В роботі [3] запропонований метод визначення температури поверхні при взаємодії з потоком низькотемпературної плазми. Отримано аналітичний розв'язок граничної задачі теплопровідності для нестаціонарного випадку на основі перетворення Лапласа і надані практичні рекомендації з застосування методу при формуванні мікро- и наноструктур в низькотемпературної плазмі. Питанням, пов'язаним з особливостями іонно-плазмового плакування керамічних порошків, визначенням тимчасових та режимних параметрів присвячена робота [4]. Проведений аналіз свідчить про обмеженість досліджень температурних режимів в процесі плакування порошків і необхідність проведення математичного моделювання в зв'язку зі складністю експериментального визначення температури нагріву окремих частинок порошку.

Мета роботи полягала в моделюванні температурних та тимчасових режимів плакування порошків в залежності від потужності іонно-плазмового випарника, матеріалу і розміру частинок порошку.

Основна частина.

У нерухомій вакуумованій масі порошку теплопередача здійснюється тільки контактною теплопровідністю частинок і випромінюванням. При передачі тепла шляхом контактної теплопровідності увесь термічний опір зосереджений в місці контакту частинок. При цьому теплопровідність визначається фізичними характеристиками матеріалу порошку, щільністю і геометрією засипки і не залежить від розміру частинок. При теплообміні шляхом випромінювання шар порошку є системою теплових екранів, кількість яких залежить від радіусу і геометрії засипки. Внаслідок низької контактної теплопровідності і екрануючої дії при променистому теплообміні, ефективна теплопровідність шару виявляється на рівні 10^{-2}–10^{-3} Вт/м·град.

Металізацію порошків здійснювали на установці іонно-плазмового напилення АНГА-1, обладнаний спеціальним пристроєм барабанного типу для перемішування порошку [5]. Технологія, устаткування і процеси, що відбуваються при плакуванні порошку даним методом, розглянуті в [6]. В якості матеріалів оболонки використовувалися Ti, Al, Cu, що мають різну природу випаровування. Покриття з цих металів наносилися на частинки порошку Al_2O_3, ZrO_2, WC, які широко використовуються в практиці отримання жароміцних і зносостійких покриттів газотермічним напиленням, наплавленням, спіканням і т. п.

Оцінити в першому наближенні температуру поверхні частинок порошку можна на підставі рівняння теплового балансу [7], яке для сферичної частинки порошку матиме вигляд

$$\frac{\pi d^2}{4} P_{\text{пит}} = cm \frac{dT_{\text{пов}}}{dt} + \left(T_{\text{пов}} - T_0\right) I\left(d\right), \tag{1}$$

де d, c, m – діаметр, теплоємність і маса частинки порошку, $P_{\text{пит}}$ – питома потужність, що поглинається, $T_{\text{пов}}$ – температура на поверхні частинки порошку.

Геометрію системи, частинки порошку – тепловий топік представлено на рис.1.

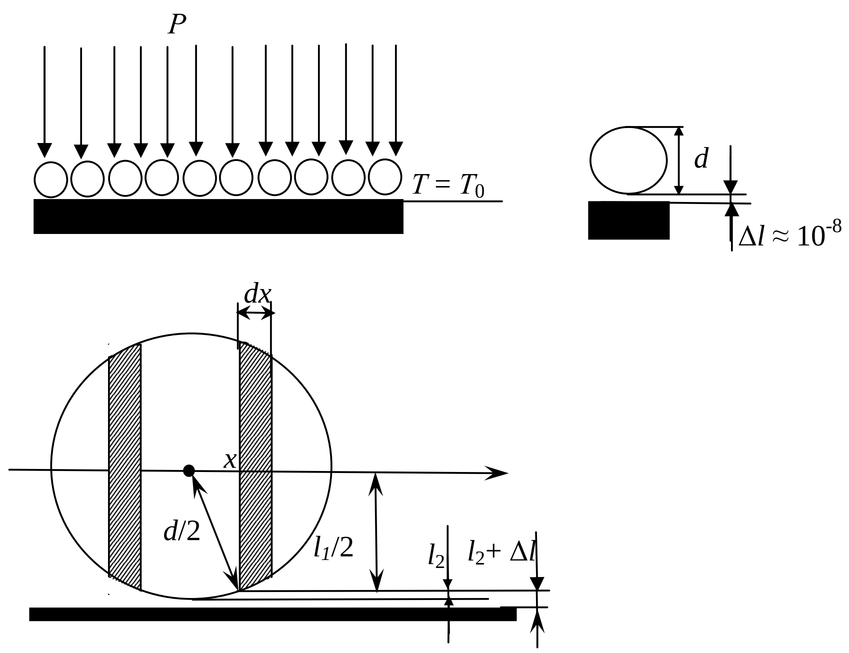


Рис. 1. Геометрія системи, що моделюється

В рівнянні (1) функція $I(d)$ – це інтеграл, що враховує теплопровідності матеріалу частинки порошку і оточуючого середовища (в даному випадку теплопровідність вакууму).

$$I(d)=\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{2\pi x dx}{\frac{2}{\lambda_1}\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-x^2}-\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{d}{2}-\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-x^2}\right)}=\frac{\pi\lambda_1\lambda_2 d}{2\lambda_2+\lambda_1}+\frac{\pi d\lambda_1^2\lambda_2}{(2\lambda_2+\lambda_1)^2}\ln\left(\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\right),$$

де λ_1, λ_1 – теплопровідність частинки порошку і оточуючого середовища.

Після відповідних підстановок і інтегрування рівняння (1) отримаємо

$$\frac{dT_{\text{пов}}}{dt}=-\frac{6}{c\rho\pi d^3}T_{\text{пов}}I(d)+\frac{6}{c\rho\pi d^3}T_0 I(d)+\frac{3}{2c\rho d}P_{\text{уд}}. \qquad (2)$$

Введемо позначення

$$a=-\frac{6\lambda_1\lambda_2}{c\rho h^2(2\lambda_2+\lambda_1)}\left(1+\frac{\lambda_1}{2\lambda_2+\lambda_1}\ln\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\right);\ b=-aT_0+\frac{3}{2c\rho d}P_{\text{уд}}. \qquad (3)$$

Розв'язок рівняння (2) з врахуванням (3) і початкової умови $T(0)=T_0$ матиме вигляд

$$T(t)=\left(T_0+\frac{b}{a}\right)e^{at}-\frac{b}{a}. \qquad (4)$$

Таким чином, з рівняння (4) отримуємо час, необхідний для досягнення заданої (припустимої) температури частинок порошку обраної фракції

$$t=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{aT_{\text{пов}}+b}{aT_0+b}\right). \qquad (5)$$

Графічні залежності часу плакування від діаметра частинок порошку оксиду алюмінію для заданих температур показані на рис. 2.

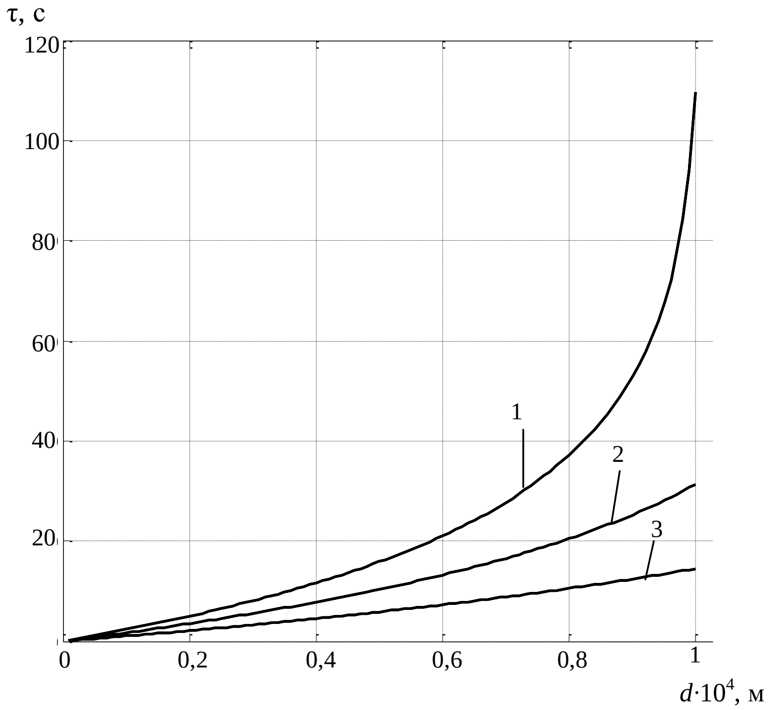


Рис.2. Залежність часу плакування від діаметра частинок порошку оксиду алюмінію при досягненні температури на їх поверхні 300ºС (1), 250ºС (2) і 200ºС (3)

На підставі рис.2 можна зробити висновок, що досягнення температури, наприклад, 300°С на поверхні частинок порошку діаметром 60 мкм відбувається за час приблизно 20 с, тобто досить швидко. В цьому випадку потрібне застосування додаткових заходів щодо стабілізації температури порошку, яка може здійснюватися шляхом інтенсивного перемішування порошку, періодичним виводом його із зони дії плазмового потоку або шляхом циклічного проведення процесу плакування.

Особливістю плакування порошків, як було вказано вище, є також нанесення покриття на велику поверхню, що викликає необхідність збільшення тривалості процесу плакування, пов'язаної з випаровуванням більшої кількостей металу. У зв'язку з цим, процес плакування порошку доцільно характеризувати ефективною швидкістю зростання товщини оболонки на частинках $V_{еф}$ мкм/хв. Знаючи дану швидкість, яка визначається експериментально на плоских зразках – свідках, можна визначити час необхідний для нанесення плівки потрібної товщини на частинках обраної фракції порошку

$$\tau = \int_0^h \frac{dh}{V_{еф}} = \int_0^h \frac{M_П S_Ч}{M_Ч S_П V_К} dh, \tag{6}$$

де h – товщина плівки, що наноситься на частинки порошку, мкм; $V_К$ – швидкість конденсації металу плівки на плоску поверхню, мкм/хв; $S_П$, $S_Ч$ – площа шару порошку і площа поверхні окремої частинки порошку, відповідно, мм^2; $M_П$, $M_Ч$ – загальна маса порошку і маса окремої частки порошку відповідно, гр.

Припускаючи, що форма частинок порошку є сферичною, після відповідних підстановок і інтегрування рівняння (6), отримаємо

$$\tau = \frac{M_П}{\rho\, S_П V_К} \left(\frac{R+h}{R} \right)^3, \tag{7}$$

де ρ, R – щільність і радіус частинок порошку.

Графічні залежності часу плакування при досягненні товщини оболонки 1 мкм від діаметра частинок порошку з різних матеріалів показані на рис. 3.

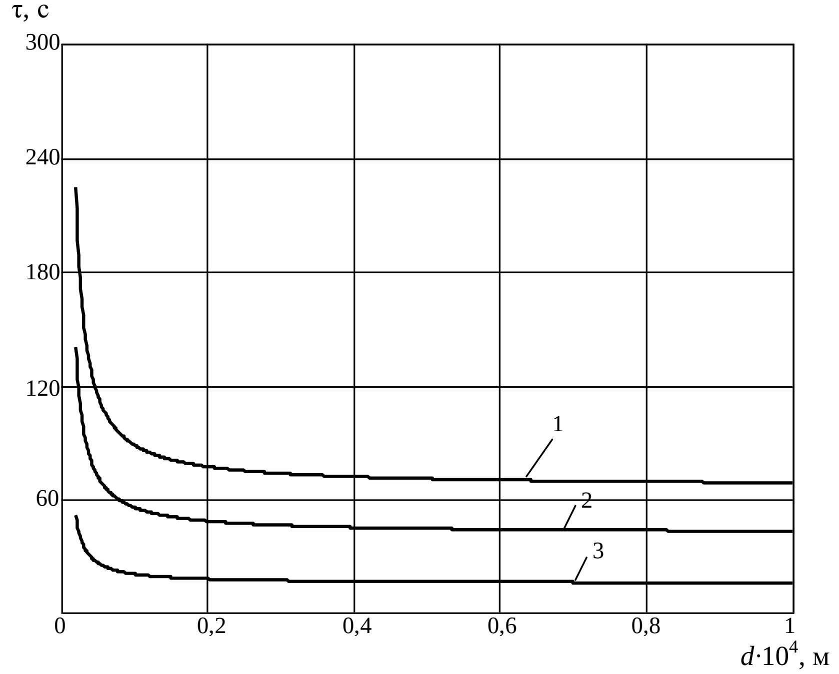


Рис.3. Залежність часу плакування від діаметра частинок порошку оксиду алюмінію (1), оксиду цирконію (2), карбіду вольфраму (3)

Як видно з (7), час металізації для отримання необхідної товщини плівки залежить як від кількості завантаження порошку, його фракції, так і від продуктивності випарника і площі пристрою для завантаження і перемішування порошку.

З аналізу графіків (рис.3) слідує висновок про значний вплив діаметра частинок порошку на час плакування. Тобто, у разі зменшення діаметра частинок менше 10 мкм різко зросте час плакування і падає швидкість конденсації, а у разі зменшення до 1 мкм і менше час плакування збільшується до технологічно неприйнятних значень. Тому, при визначенні часу плакування необхідно враховувати масу і розмір частинок порошку. Наприклад, час плакування частинок діаметром 20–100 мкм для досягнення товщини оболонки 1 мкм, не повинен перевищувати 60–80 хвилин при загальній масі порошку 300 гр. Отримані залежності часу плакування від товщини оболонки добре узгоджуються з експериментальними даними.

Таким чином, максимальна кількість порошку заданої дисперсності, що завантажується в металізаційний пристрій, пов’язана з габаритними розмірами пристрою і потужністю випарника. Для збільшення продуктивності установки доцільно раціонально підвищувати кількість металу, що випаровується за одиницю часу. Проте, це також має границю у зв'язку з виникненням крапельної фази в продуктах ерозії катода і перегрів частинок порошку.

Висновки та перспективи подальших досліджень.

Запропоновані математичні моделі, що дозволяють визначити час досягнення на поверхні частинок порошку заданої температури, а також час плакування для отримання на частинках оболонки необхідної товщини. Це дозволяє коригувати технологічний режим іонно-плазмового плакування залежно від кількості завантаження порошку, його фракції і продуктивності випарника.

В перспективі математична модель температурного режиму порошку може бути вдосконалена з врахуванням втрати температури частинками на випромінювання.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Клебанов Ю. Д. О предельной температуре положки при нанесении покрытий испарением и конденсацией в вакууме/ Ю. Д. Клебанов, В. П. Мусатов, В. П. Сумароков//Физика и химия обработки материалов. – 1980.– №3.– С.60-63.
2. Довгань А. Н. Определение температурного режима положки при осаждении алмазоподобных покритий импульсными источниками плазмы / А. Н. Довгань // Авиационно-космическая техника и технология.– 2009.– № 10 (67).– С.61-65.
3. Казанский Н. Л. Метод определения температуры поверхности в области ее взаимодействия с потоком низкотемпературной плазмы/ Н. Л. Казанский, А. И. Колпаков, В. А. Колпаков, В. Д. Паранин // Журнал технической физики.– 2007.– Т.77.– Вып. 12.– С.21-25.
4. Новиков Н. Н. Особенности поведения дисперсных материалов при их металлизации в вакууме/ Н. Н. Новиков. – Рук. деп. Укр. НИИНТП от 12.09.87.– 20 с.
5. Пат. 41184 Україна , МПК (2009) B22F1/00. Пристрій для нанесення покриттів на порошок / В. І. Копилов, А. Н. Степанчук, І. В. Смирнов, І. А. Сєліверстов, А. В. Чорний. – опубл. 12.05.09. – бюл. № 9.
6. Копилов В. І. Процеси іонно-плазмового плакування порошків для газотермічних покриттів / В. І. Копилов, І. В. Смирнов, І. А. Сєліверстов // Наукові вісті НТУУ „КПІ”. – 2009. – №3. – С.11-20.
7. Лыков А. В. Теория теплопроводности/ А. В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

СМИРНОВ Игорь Владимирович – к.т.н., доцент кафедры инженерии поверхности, сварочный факультет Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт».

Научные интересы:

– процессы фазо - структурообразования и физико-механические свойства плазменных покрытий.

АНДРЕЙЦЕВ Андрей Юрьевич – к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики государственного экономико-технологического университета транспорта.

Научные интересы:

– симметрия дифференциальных уравнений, математическое моделирование экономических и физических процессов.

МЕЛЬНИК Игорь Витальевич – д.т.н., доцент кафедры электронных приборов и устройств факультета электроники Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт».

Научные интересы:

– моделирование технологических процессов, связанных с термической обработкой различных материалов и изделий.

УДК 519.6

А.В. Сохацький

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА З ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Постановка проблеми. Сучасний етап дослідження різноманітних фізичних явищ характеризується широким використанням математичного моделювання з застосуванням комп'ютерних технологій. Математичні моделі, алгоритми, комплекси програм, електрообчислювальні машини (ЕОМ) та системи їх підтримки є важливими елементами моделювання. Сукупність вказаних елементів створює технологічний ланцюг математичного моделювання: математична модель - чисельні алгоритми – програмування – ЕОМ – розрахунки - аналіз результатів - прийняття рішення.

Значна потреба в математичному моделюванні зумовлена наступними чинниками: складність досліджуваних задач, дорожнеча експериментального обладнання, зростання цін на енергоресурси, скорочення термів досліджень, успіхи розвитку ЕОМ, необхідністю розробки автоматизованих систем управління на виробництві та різноманітних галузях людської діяльності.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Більшість фізичних процесів, що вивчаються є нелінійними та еволюційними. Їх описують відповідними системами рівнянь. Теорія таких рівнянь вивчена недостатньо і для більшості задач їх розв'язок може бути неєдиним [1]. Складність та багатомірність досліджуваних явищ вимушує приймати цілий ряд припущень і шукати їх наближена постановку задачі. Математична модель повинна описувати основні закономірності досліджуваних процесів. При виборі моделі необхідно аналізувати весь технологічний ланцюг та враховувати не тільки досконалість складових, але й рівень технічних засобів, що доступні.

Відсутність строгих доказів існування та єдності розв'язку ставить питання про відповідність фізико-математичної моделі досліджуваному явищу. При недостатній інформативності процесів слід розглядати ряд варіантів з різними моделями, що ураховують основні закономірності явища. Таким чином вибір та формулювання фізико-математичних моделей є багатопараметричною задачею, що вимагає для свого розв'язування аналізу цілого ряду моделей.

Постановка задачі. Необхідність розв'язування складних задач вимагає розробки математичних моделей різного рівня складності, які б описували закономірності досліджуваних явищ з потрібною точністю [2-4]. Найбільш поширеною математичною моделлю опису турбулентних течій в наш час є осереднені по Фавру-Рейнольдсу рівняння Нав'є-Стокса, замкнуті відповідною моделлю турбулентної в'язкості. Відомі аналітичні розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса одержані, в основному, для випадків, коли їх вдається призвести до лінійних, або знайти автомодельну змінну. Ці розв'язки надають велику допомогу при розумінні практично важливих процесів, але їх кількість дуже незначна. Сучасний рівень обчислювальної техніки та числових методів дозволяє проводити моделювання течій на основі числового інтегрування цих рівнянь з використанням сучасних комп'ютерних технологій. Останнім часом друкується все більше наукових праць з чисельних методів розв'язку повних та осереднених рівнянь Нав'є-Стокса. Їх аналіз показує, що значний прогрес був досягнений в результаті застосування скінченно-різницевих методів та емпіричних моделей турбулентності. Проте існує і ще цілий ряд проблем розв'язування задач аеродинаміки з використанням рівнянь Нав'є-Стокса. У зв'язку з цим необхідно проводити пошук нових ефективних шляхів розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса для розрахунку аеродинамічних характеристик тіл з використанням сучасних інформаційних технологій.

Основна частина. Основними рівняннями, які описують просторові течії стисливої в'язкої рідини з постійними властивостями при відсутності зовнішніх сил є осереднені рівняння Нав'є - Стокса [2].

Осереднені рівняння Нав'є-Стокса відносно узагальнених криволінійних координат (ξ,η,ζ) мають вигляд

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial\left(E_i-\hat{E}\right)}{\partial\xi}+\frac{\partial\left(F_i-\hat{F}\right)}{\partial\eta}+\frac{\partial\left(G_i-\hat{G}\right)}{\partial\zeta}=H\,, \tag{1}$$

де $\hat{E}=\xi_x E_v+\xi_y F_v+\xi_z G_v$, $\hat{F}=\eta_x E_v+\eta_y F_v+\eta_z G_v$, $\hat{G}=\zeta_x E_v+\zeta_y F_v+\zeta_z G_v$, H – вектор джерельних членів.

Вектори q, E_i, F_i, G_i, E_v, F_v, G_v визначаються наступними співвідношеннями

$$q=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{bmatrix},\quad E_i=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho U\\ \rho Uu+p\\ \rho Uv\\ \rho Uw\\ (E_t+p)U\end{bmatrix},\quad F_i=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho V\\ \rho uV\\ \rho vV+p\\ \rho wV\\ (E_t+p)V\end{bmatrix},\quad G_i=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho W\\ \rho uW\\ \rho vW\\ \rho wW+p\\ (E_t+p)W\end{bmatrix},$$

$$E_v=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}-q_x\end{bmatrix},\ F_v=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{yz}\\ u\tau_{xy}+v\tau_{yy}+w\tau_{xz}-q_y\end{bmatrix},\ G_v=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zz}\\ u\tau_{xz}+v\tau_{yz}+w\tau_{zz}-q_z\end{bmatrix},$$

де ρ – густина, u, v, w - декартові складові вектора швидкості, $U=\xi_x u+\xi_y v+\xi_z w$, $V=\eta_x u+\eta_y v+\eta_z w$, $W=\zeta_x u+\zeta_y v+\zeta_z w$- контраваріантні складові вектора швидкості, $e=\rho\left[\varepsilon+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right]$- повна енергія, $\tau_{xx},\tau_{yy},\tau_{zz},\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$ - компоненти тензора напружень, q_x, q_y, q_z - теплові потоки.

Система рівнянь (1) доповнюється рівнянням стану

$$p=(\gamma-1)\left[e-\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2+w^2\right)\right]. \tag{2}$$

Для замикання системи рівнянь (1) в роботі використано модель турбулентності Спаларта –Аллмараса в реалізації від'єднаних вихорів (DES) [5].

Турбулентні ефекти описуються в рамках гіпотези Буссинеска про уявлення дотичних напружень з використанням напівемпіричної моделі для турбулентної в'язкості. Рівняння (1) замикається диференціальним рівнянням переносу вихорової кінематичної псевдов'язкості:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\nu})}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\tilde{\nu}u_j\right)=E_t+F_t-G_t+T_t\,, \tag{3}$$

де $E_t = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho(\nu+\tilde{\nu})\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\right)+C_{b2}\rho\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\right]_t$ - дифузійний член, що задовольняє межові умові на стінці $\tilde{\nu}=0$; $F_t = C_{b1}(1-f_{t2})\rho\tilde{S}\tilde{\nu}$ -вираз, що описує виробництво турбулентності в області і підтримує опис течії в ламінарному підшарі; $G_t = C_{w1}f_w\rho\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2$ - вираз, що описує розпад турбулентності в ламінарному підшарі; $T_t = f_{t1}\rho\Delta U^2 + f_{t2}\rho\frac{C_{b1}}{\kappa^2}\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2$ - вираз наближеного опису перехідного режиму з згладжувальними функціями f_{t1}, f_{t2} , які забезпечують перехід від ламінарного до турбулентного режиму в пристінній області.

Вихорова в'язкість розраховується за співвідношенням:

$$\mu_{tur} = \rho\tilde{\nu}f_{\nu 1}, \tag{4}$$

де $f_{\nu1} = 1-\chi^3/\left(\chi^3 - C_{\nu1}^3\right)$- демпферна функція для відношення кінематичних в'язкостей $\chi = \tilde{\nu}/\nu_{lam}$, що відповідає демпферу Ван-Дріста.
Допоміжні співвідношення визначаються з виразів

$$\tilde{S} = f_{\nu3}\omega + \frac{\tilde{\nu}}{(\kappa d)^2}f_{\nu2},$$

де d- найближча відстань до стінки,

$f_{\nu2} = 1-\chi/(1+\chi f_{\nu1})$, $\omega = |\nabla\times\tilde{\nu}|$ - модуль вихору,

$$f_{\nu2} = \left[1+\frac{\chi}{c_{\nu2}}\right]^{-3}, \qquad f_{\nu3} = \frac{(1+\chi f_{\nu1})(1-f_{\nu2})}{\chi}, \qquad f_w = g\left[\left(1+C_{w3}^6\right)/\left(g^6+C_{w3}^6\right)\right]^{1/6},$$

$$g = r + C_{w2}\left(r^6 - r\right), \quad r \equiv \tilde{\nu}/\left(\tilde{S}\kappa d^2\right),$$

$$C_{w1} = C_{b1}/\kappa^2 + (1+C_{b2})/\sigma,$$

$$C_{w2} = 0{,}3, \; g = r + C_{w2}\left(r^6 - r\right),$$

$$C_{w3} = 2, \; f = g\left(\frac{1+C_{w3}^6}{g^6+C_{w3}^6}\right),$$

$$f_{t1} = c_{t1}g_t \exp\left(-c_{t2}\frac{\omega_t^2}{\Delta U^2}\left[d^2 + g_t^2 d_t^2\right]\right),$$

$$g_t = \min\left(0.1, \Delta U/\omega_t\Delta x\right), \; f_{t2} = c_{t3}\exp\left(-c_{t4}\chi^2\right),$$

$$c_{\nu1} = 7.1, c_{\nu2} = 5.0, c_{t1} = 1, c_{t2} = 2, c_{t3} = 1.1, c_{t4} = 2, \; C_{b1} = 0{,}1355, C_{b2} = 0{,}622, C_{b3} = 2/3.$$

Модель відокремлених вихорів (DES) формується шляхом заміни змінної d на $\tilde{d}$, яка визначається за формулою [6]

$$\tilde{d} \equiv \min(d, C_{DES}\Delta) \;, \tag{5}$$

де $\Delta \equiv \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $C_{DES} = 0{,}65$ - стала моделі DES.

В роботі використовується модель турбулентності модель Спаларта- Аллмараса в реалізації відокремлених вихорів.

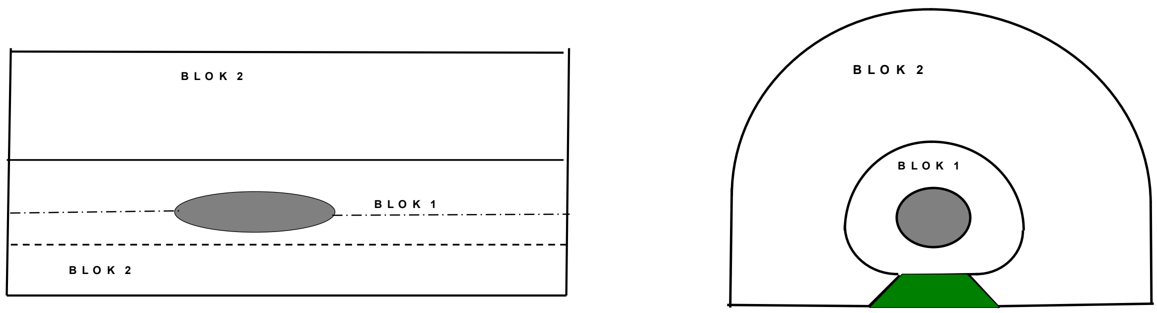
Комп'ютерні розрахунки. Для чисельного розв'язування системи вихідних рівнянь використано метод контрольного об'єму. Конвективні потоки через грані контрольного об'єму визначались за допомогою методу розщеплення Ван-Ліра [7].

Виконано числові розрахунки обтікання перспективного транспортного засобу, який рухається поблизу трапецеподібної шляхової структури. Комплекс програм написано на мові програмування FORTRAN90.

Транспортний апарат має вісесиметричний корпус, переріз якого має форму близьку до кола. Носова та кормова частини мають еліпсоїдальну форму. Розрахункова область складається з двох блоків (рис.1.). Сітка блока №1 має Н-подібну форму у поздовжній площині та С-подібну форму у поперечній площині. Сітка блока №2 також має Н - подібну форму у поздовжній площині та С - подібну форму у поперечній площині. Загальна кількість вузлів складає 1214396. Відстань до поверхні трапецеподібної шляхової структури складає h=0,0125 максимального поперечного розміру міделя транспортного апарата. Розрахунки проведено для чисел Рейнольда Re=2000000 та Маха M=0,4.

Для розрахунку обтікання використовувалися осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса, замкнені однопараметричною моделлю турбулентності Спаларта-Аллмараса в реалізації відокремлених вихорів [5,6].

За результатами розв'язування рівнянь Нав'є-Стокса було отримано розподіл величин тиску та вектора швидкості навколо транспортного апарата. На рис.2-5 показано розподіл ізобар, завихренності, ізомах.



а) *б*)

Рис. 1. Багатоблокова структура розрахункової області навколо корпусу швидкісного транспортного апарата:
а – переріз у поздовжній площині; *б* - переріз у поперечній площині

Рис. 2. Ізобари в площині XOY розрахункової області навколо корпусу швидкісного транспортного апарата

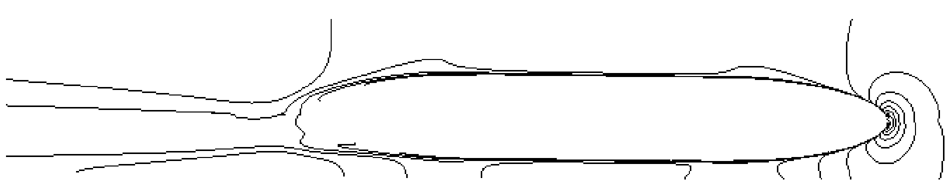


Рис. 3. Ізолінії завихренності у площині XOY розрахункової області навколо корпусу швидкісного транспортного апарата

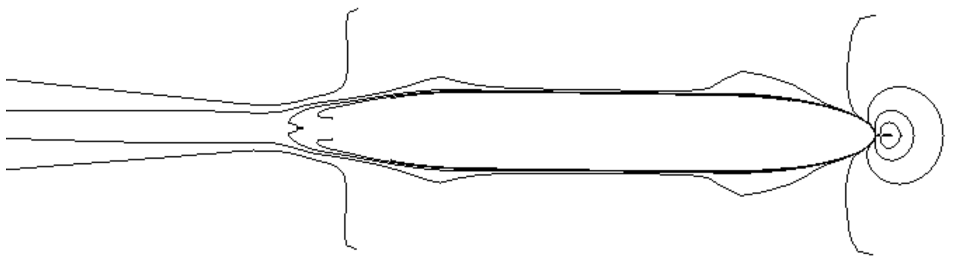


Рис. 4. Ізолінії завихренності у площині XOZ розрахункової області навколо корпусу швидкісного транспортного апарата

Рис. 5. Ізомахи площині XOY розрахункової області навколо корпусу швидкісного транспортного апарата

Розрахунки показали, що при наближенні до шляхової структури порушується симетрія обтікання. Зона найбільшого тиску в носику зміщується вниз до площини шляхової структури. Це призводить до появи кабрувального моменту. Під днищем транспортного апарата, в поздовжньому напрямку, під дією шляхової структури зменшується величина тиску в порівнянні з верхньою частиною. Між шляховою структурою та днищем транспортного апарата зона пониженого тиску більш виражена, ніж над транспортним апаратом. В результаті виникає від'ємна підіймальна сила, яка намагається змістити транспортний апарат до шляхової структури.

Висновки та перспективи подальших досліджень.

Розроблено методику, алгоритм та програмний комплекс для чисельного розв'язування осереднених рівнянь Нав'є-Стокса замкнутих за допомогою однопараметричної диференціальної моделі турбулентності Спаларта–Аллмараса в реалізації від'єднанних вихорів. Наведено результати розрахунку аеродинаміки перспективного транспортного апарата поблизу шляхової структури.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Ковеня В.М. Некоторые тенденции развития математического моделирования/ В.М Ковеня // Вычислительные технологии. – 2002.–Т.7. – № 2. – С.59–73.
2. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмін/ Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – Т.1. – 392 с. – Т.2. – 336 с.
3. Приходько А.А. Компьютерные технологи в аэрогидродинамике и тепломассобмене. / А.А. Приходько.– Киев: Наукова думка, 2003. – 380 с.
4. Приходько А.А. Математическое и экспериментальное моделирование аэродинамики элементов транспортных систем вблизи экрана/ А.А. Приходько, А.В. Сохацкий – Днепропетровск: Наука и образование, 1998. – 160 с.

5. Spalart P.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows/ P.R. Spalart, S.R. Allmaras // La Recherche Aerospatiale. – 1994.– N 1. – P. 5–21.
6. Forsythe J.R. Detached-Eddy Simulation of Fighter Aircraft at High Alpha / J.R. Forsythe, K.D. Squires, K.E. Wultzer, P.R. Spalart// AIAA Paper. – 2002. –Vol. 0591.
7. Van Leer B. Flux–vector splitting for the Euler equations / B. Van Leer //Lecture Notes in Phys. - 1982. - V. 170. – P. 507–512.

СОХАЦЬКИЙ Анатолій Валентинович – д.т.н., кафедра транспортних систем та технологій Академії митної служби України, старший науковий співробітник Інституту транспортних систем та технологій НАН України.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання з використанням сучасних комп’ютерних технологій.

УДК 534.29:66.084

В.Л. Старчевський, Л.І. Шевчук, І.С. Афтаназів

ПНЕВМОГІДРАВЛІЧНЕ КАВІТАЦІЙНЕ ОЧИЩЕННЯ ВОДИ ВІД БІОЛОГІЧНОГО ЗАБРУДНЕННЯ

Постановка проблеми. Властиві останньому століттю урбанізація суспільства та неодмінно супутній їй стрімкий розвиток переробних та виробничих галузей не могли негативно не відобразитись на оточуючому людство довкіллі, в тому числі першочергово на якості повітря та води. І хоч негативний вплив погіршення якості води та повітря на здоров'я людей менш відчутний в часі за смертоносний вплив радіації чи миттєву загрозу життю людей такими природними катаклізмами, як потужні землетруси, цунамі чи тайфуни, та згубні для здоров'я теперішніх та майбутніх поколінь наслідки не менш вагомі. Вже зараз медичні обстеження у різноманітних регіонах Земної кулі, у тому числі і в Україні, школярів, дошкільнят та молоді свідчать про суттєве погіршення їх загального стану здоров'я. Медики одностайні у своїх висновках – першопричина цьому – забруднення повітря та води.

Зрозуміло, що суттєво зменшити побутове та промислове забруднення води, як і промислові викиди в атмосферу, на даному етапі суспільного розвитку людства не реально, тому особливої актуальності набувають дослідження, спрямовані на вдосконалення існуючих та розробку новітніх технологій захисту і збереження довкілля.

Незважаючи на доволі значний перелік фізико-хімічних методів очищення води від різноманітних забруднень досконалого, універсального і придатного для широкої розмаїтої гами можливих забруднень все ще неіснує. Особливою мірою це стосується біологічного забруднення води, оскільки шкідливій мікрофлорі, як правило, притаманна репродуктивна здатність, до того ж швидкоплинна в часі. Тому пошуки новітніх технологій водопідготовки, спрямовані на створення нових, більш досконалих із позицій забезпечення високої якості водоочищення за умови їх придатності для промислового застосування, все ще залишаються вагомим як технічним завданням, так і суспільною проблемою. Певною мірою цим вимогам відповідає новостворений в НУ «Львівська політехніка» метод пневмогідравлічного кавітаційного очищення води.

Метод пневмогідравлічного кавітаційного очищення води від біологічного забруднення належить до фізико-хімічних технологічних процесів водоочищення і може бути застосований, наприклад, для знезараження біологічно забрудненої питної води, стоків хімічних, харчових та переробних підприємств від різноманітних забруднень, в тому числі і біологічних. Даний метод належить до групи методів кавітаційного ініціювання та активації окиснювально-відновлювальних реакцій у рідинах енергією сплескування великої кількості самозароджуваних в рідині кавітаційних бульбашок.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Кавітаційні методи ініціювання та активації окиснювально-відновлювальних реакцій у рідинах мають доволі широке промислове застосування. Основою їх використання в хіміко-технологічних процесах постали дані теоретико-експериментальних досліджень явища збурення кавітації в рідинах шляхом дії на рідину ультразвуку із частотою 22 КГц або 44 КГц [1]. Суть ультразвукового методу полягає у застосуванні коливань ультразвукової частоти для створення умов росту ядер кавітації, якими являються завжди наявні в рідині різноманітні газові включення. Співпадіння частоти власних коливань ядер кавітації із частотою ультразвуку збурює явище резонансу, яке супроводжується миттєвим розширенням з подальшим сплескуванням кавітаційних бульбашок. При сплескуванні кавітаційних бульбашок відбувається трансформація накопиченої потенціальної енергії рідини, що оточує бульбашку, в кінетичну. Цей процес завершується в момент руйнування бульбашки, а корисна потужність виділяється у вигляді енергетичного імпульсу. При цьому, навколо кожної сплеснутої кавітаційної бульбашки генерується сферична ударна хвиля, а кожна сплеснута бульбашка постає джерелом трьох-чотирьох чергових зародків кавітаційних каверн, тобто процес набуває лавиноподібного характеру. Додаючись щомиттєво між собою, ударні хвилі сусідніх сплеснутих кавітаційних бульбашок формують у невеликому об'ємі доволі потужне енергетичне поле. Як наслідок – забезпечення суттєвої інтенсифікації окисних реакцій і, відповідно, пов'язаних з цим очисних процесів, в тому числі і водоочищення та знезараження води від біологічних забруднень.

Однак, проходження ультразвуку крізь рідину супроводжується значними втратами енергії акустичних хвиль, зумовленими розсіюванням ультразвуку на неоднорідностях багатофазного середовища. Тому збурення кавітаційних явищ ультразвуком ефективне лише у незначних об'ємах рідини (як правило, до 500 мл), енергозатрати на обробку одиниці об'єму рідини доволі суттєві, що практично унеможливлює на даний час промислове використання ультразвукової кавітації, обмежуючи сферу її застосування лабораторними дослідженнями.

Із поміж різноманітних методів збурення кавітаційних явищ в рідинах (ультразвукових, електромагнітних, газонаповнюючих тощо) найширшого розповсюдження, в силу їх придатності для обробки великих об'ємів та обсягів рідин, набули методи гідродинамічного збурення кавітації, які належать до так званих механічних методів [2]. Перевага методів гідродинамічного збурення кавітації у високій продуктивності, простоті реалізації, незначних питомих (на одиницю об'єму рідини) енергозатратах тощо. Як правило, збурення гідродинамічних кавітаційних явищ в рідинах реалізовують в результаті механічних рухів в них твердих тіл за певних швидкостей їх відносних переміщень відносно рідини. Це і методи збурення кавітації вібруючими в рідині пластинами, і обертовими в рідині лопатями із виступами-збурювачами тощо.

Переважно в гідродинамічних кавітаторах енергія, необхідна для створення кавітації, підводиться безпосередньо робочим органом, що обертається (крильчатка, гвинт, ротор тощо). Пояснення механізму впливу гідродинамічного кавітаційного поля на технологічні середовища ґрунтується на кумулятивній гіпотезі, згідно якої в заключній стадії сплескування бульбашок виникають мікроструминки високого енергетичного потенціалу. Внаслідок таких явищ створюються умови для інтенсифікації окиснювально-відновлювальних реакцій у рідинах, масообмінних процесів й екстрагування тощо. Ефекти, які супроводжують кавітацію, також впливають на оброблюване середовище, змінюючи його фізико-хімічні властивості, що є важливим для очисних процесів, що контролюються хімічною кінетикою. Практично виникає можливість технологічно цілеспрямовано використовувати кавітаційну дію у виробничих процесах.

Однак, на відміну від ультразвукової кавітації, гідродинамічна характеризується меншою інтенсивністю утворення кавітаційних бульбашок, а отже, і значно нижчою ефективністю. Крім того, наявність рухомих в рідині вібруючих пластини чи обертових лопатей, їх приводів рухів та перетворюючих механізмів не тільки зумовлює значну енергозатратність гідродинамічного способу збурення кавітації, а і суттєво понижує надійність та довговічність реалізуючого його обладнання. Певним недоліком є і дуже обмежена спроможність регулювання технологічних параметрів гідродинамічної кавітації, оскільки кавітаційний режим в рідині зароджується і існує у вузькому діапазоні тільки певних частот і швидкостей відносних механічних переміщень збурювачів (пластин чи лопатей). Відповідно цим зумовлені і обмеження у регулюванні кінцевої якості готового продукту.

У загальному, гідродинамічним та ультразвуковим методами на сьогоднішній час і обмежуються технологічні можливості у збуренні кавітації в рідинах, що придатні для промислового застосування.

Поряд з тим, відомим є і явище „холодного кипіння”, тобто активного виділення великої кількості бульбашок розчиненого в рідині газу в газорідинних сумішах при стрімкому пониженні тиску. Так само, як і те, що в процесах тепло- та масообміну при вдуванні у киплячу рідину в незначних кількостях газу відбувається інтенсифікуюча дія газорідинного ефекту, особливо відчутна при кипінні із використанням коливань тиску [3]. Тут явно відчуваються певні ресурси та можливості у застосуванні явища „холодного кипіння” внаслідок подачі в потік рідини пульсуючих струменів газу не тільки для збурення та стабільного підтримання кавітації в рідинних розчинах, а і для інтенсифікації тут окислювальних реакцій, у тому числі і спрямованих на знешкодження біологічних мікроорганізмів у питній та технологічних водах, тобто в процесах знезараження води, водопідготовки та водоочищення.

Таким чином, з одного боку лабораторними дослідженнями та практикою промислового використання переконливо доведена висока ефективність застосування кавітаційних явищ у рідинах для ініціювання та активації різноманітних окиснювально-відновлювальних процесів, у тому числі і для операцій водопідготовки та водоочищення. З іншого боку, слід визнати, що, на жаль, все ще відсутні як простий та економічний метод збурення і стабільного підтримання кавітації, так і продуктивне високоефективне обладнання для його реалізації в умовах виробництва.

Метою даного дослідження є створення нового ефективного методу збурення кавітації в рідинах для активації окислювальних реакцій, пристосування його для водоочищення шляхом інактивації патогенних мікроорганізмів та знезараження біологічного забруднення, розробка технологічних схем його промислового застосування і конструктивних схем реалізуючого його високопродуктивного і ефективного обладнання.

Об’єктом дослідження були технологічні схеми та операції водопідготовки та водоочищення, механізми впливу кавітаційних явищ та різноманітних газів на патогенну флору у газорідинних розчинах.

Предметом дослідження – промислове та дослідне обладнання для збурення кавітації в рідинах, гідродинаміка в умовах кавітаційного перемішування, кінетичні закономірності енергетичного впливу на знезараження мікроорганізмів в умовах кавітації.

Методики дослідження – мікробіологічні методи визначення концентрації мікроорганізмів у водних розчинах, pH-метрія для визначення pH води та водних розчинів, швидкісна відеозйомка для визначення параметрів парогазової фази.

Основна частина. Принципова схема пневмогідравлічного кавітатора зображена на рис. 1 та рис.2. Для зручності нумерація позицій складових деталей на цих рисунках спільна. До його складу входять завантажувальна камера 1 забрудненої рідини, робоча камера 2, отвір відтоку газу 3, отвір відводу очищеної рідини 4. В робочу камеру 2 заведено пустотілу вісь 5, на якій вільно із можливістю обертання навколо власної геометричної осі встановлено крильчатки 6 із лопотями 7. В місцях встановлення крильчаток 6 на осі 5 виконано радіальні отвори 8, крізь які стиснутий газ поступає в кільцеву проточку 9 на маточині крильчатки (рис.2). Із цієї кільцевої проточки через радіальні отвори 10 в маточині крильчатки стиснутий газ поступає в поздовжні отвори 11 лопатей, з яких має можливість проникати в відвідні отвори 12, із подальшим виходом в потік рідини. Для зменшення втрат газу маточина ущільнена в проточці 13 осі 5 ущільнювачами 14.

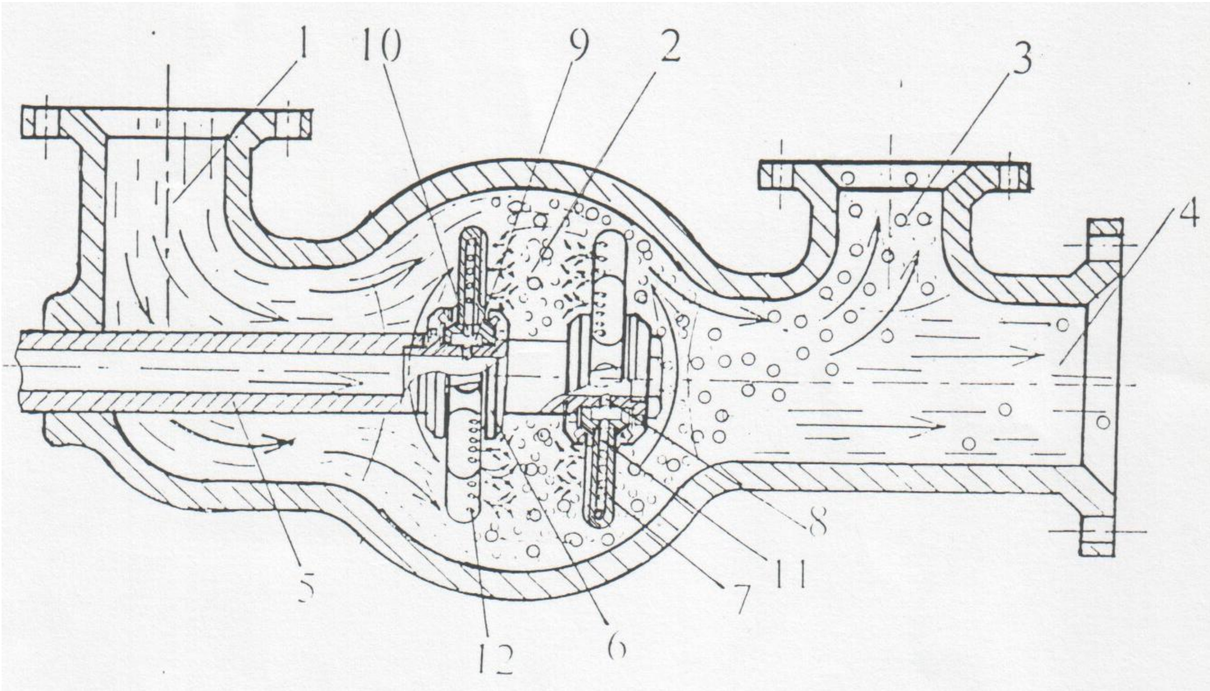


Рис.1. Пневмогідравлічний кавітатор

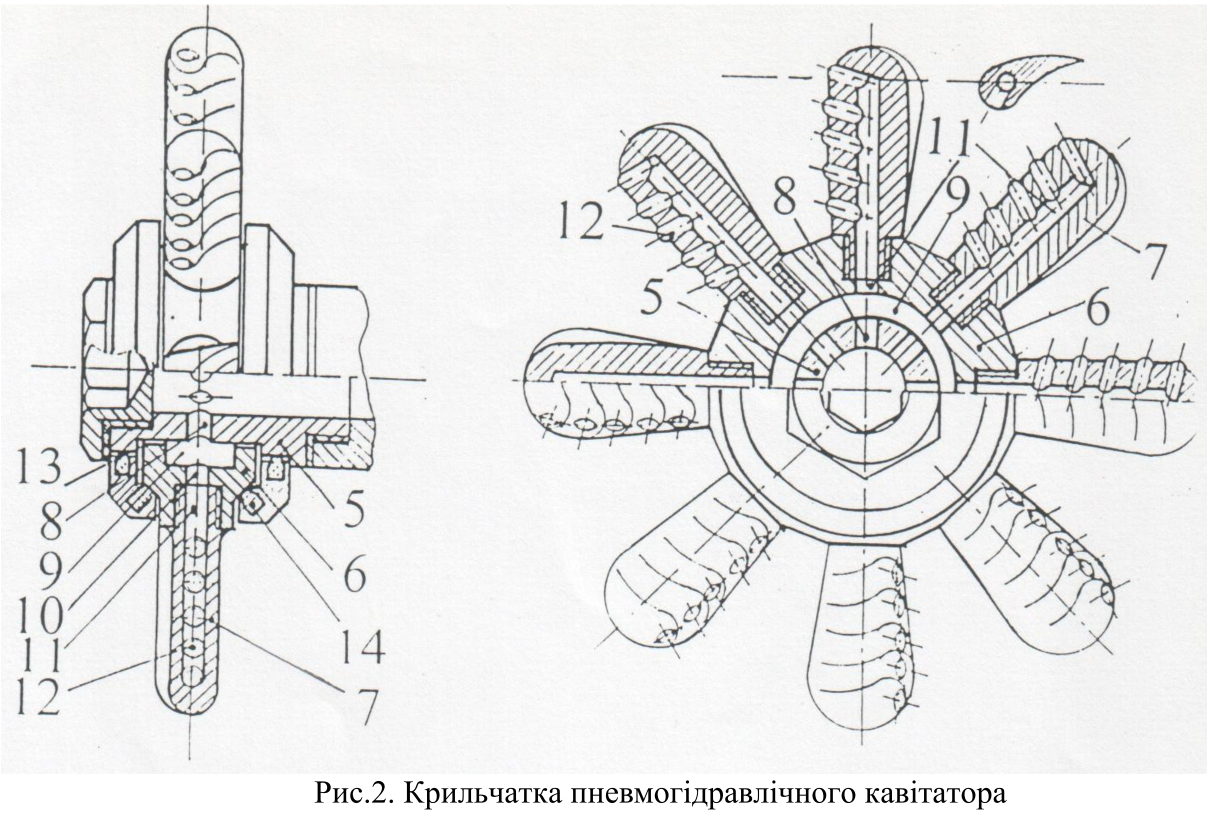


Рис.2. Крильчатка пневмогідравлічного кавітатора

Робота кавітатора здійснюється наступним чином. При одночасній подачі в робочу камеру 2 кавітатора забрудненої води та в пустотілу вісь 5 пульсуючого стиснутого газу, газ крізь отвори 8 в осі проникає в кільцеву проточку 9 маточини крильчатки 6. Із кільцевої проточки через радіальні отвори 10 газ із крильчатки проникає в поздовжні отвори 11 лопатей, звідки пульсуючими струменями крізь вихідні отвори 12 проникає в очищувану рідину (воду) з боку загрібної частини лопатей крильчатки 6.

При виході з отвору 12 кожна пульсуюча струминка ударно взаємодіє із очищуваною рідиною, надаючи лопаті певний імпульс сили на реактивне переміщення в рідині. Оскільки реактивні пульсуючі імпульси витоку газу однонаправлені для крильчатки 6 в цілому, вона набуває направленого обертового руху на осі 5 в напрямку, протилежному реактивним пульсуючим струминкам виходу газу. При обертанні крильчатки у заповненій підлягаючою обробці рідиною проточній робочій камері на лопатях крильчатки із засмоктуючого боку утворюються газові каверни з фіксованою лінією відриву. В хвостовій частині каверни, в ділянці її замикання, утворюється велика кількість кавітаційних бульбашок (кавітаційне поле), які сплескують в проточній робочій камері, забезпечуючи відповідний вплив на технологічне середовище.

Частота обертання крильчатки, при цьому, в основному залежатиме від тиску та частоти пульсацій газу, в'язкості оброблюваного рідинного середовища та сил опору переміщення крильчатки по кільцевій проточці осі 5. Змінюючи тиск та частоту пульсацій поступаючого у вісь 5 газу регулюють частоту обертання крильчатки, досягаючи так званої «критичної частоти обертання», характерною особливістю якої є стрибкоподібне («пікове») збільшення кількості самосформованих в рідині кавітаційних бульбашок. За даними лабораторних досліджень для очищення забрудненої біологічними мікроорганізмами води ця «критична» частота обертання, залежно від розмірів крильчатки, знаходиться в межах 24…50Гц.

Поряд із самозбуренням в рідині зародження кавітаційних бульбашок переміщенням в її потоці лопатей, зародками кавітаційних бульбашок постає і кожна потрапляючи через вихідні отвори 12 лопатей в рідину із високою частотою струминка стиснутого газу. Саме завдяки пульсації поверхневий натяг рідини формує із струминок окремі газові бульбашки та мікрокаверни. Завдяки поверхневому натягу рідини вони збільшуються в об'ємі і сплескують із вивільненням енергії у вигляді сферичного ударного імпульсу, створюючи тим самим додаткове кавітаційне поле.

Таким чином, у робочій камері самоформується два різновиди кавітаційних полів – збурене переміщенням в ній лопатей крильчатки (по аналогії із гідродинамічними кавітаторами) та сформоване струминками реактивних струменів пульсуючого газу, що потрапляють в рідину крізь отвори в лопатях. Кавітаційні поля нашаровуються, формуючи в результаті спільне сумарне кавітаційне поле високої інтенсивності. Як наслідок - суттєво збільшується чисельність кавітаційних бульбашок в одиниці об'єму родини, порівняно із гідродинамічними кавітаторами, зростає інтенсивність окисних реакцій та очисних процесів.

Вивільнена при сплескуванні кавітаційних мікробульбашок енергія призводить до різкого розширення клітин забруднюючих воду мікроорганізмів і розриву їх мембран та оболонок, тобто до руйнування мікроорганізмів.

Після проходження крізь кавітаційне поле робочої ділянки кавітатора знезаражена газорідинна суміш під дією напору обертової крильчатки та тиску газу далі переміщується по кавітатору. При цьому через газовідвідний отвір 3 із рідини виділяється основна частина розчиненого в ній робочого газу, вуглекислого газу CO_2, як продукту руйнування мікроорганізмів, та повітря, а очищена рідина витікає із кавітатора через відвідний отвір 4.

Із метою інтенсифікації утворення в рідинному розчині кавітаційних бульбашок, обертові крильчатки з лопатями можуть розташовувати паралельно на спільному пустотілому валу, крізь який до лопатей подають газ із пульсуючим тиском. У цьому випадку розміщені поряд крильчатки завдяки розвороту лопатей вихідними для газу отворами назустріч, обертаються у протилежних напрямах, а віддаль між сусідніми крильчатками встановлюють на подвійній ширині кавітаційного поля, рівній максимальному діаметру лопатей. Цим досягається інтенсифікація самозбурення кількості кавітаційних бульбашок, відповідно, і окисних реакцій та водоочисних процесів.

Принципова технологічна схема очищення води від бактеріального забруднення із використанням запропонованого пневмогідравлічного кавітатора зображена на рис. 3. Забруднена вода із резервуару 1 (чи відкритої водойми) насосом 2 по трубопроводу 4 подається на кавітатор 5. Одночасно із балона 9 стиснутого газу в кавітатор 5 подається пульсуючий струмінь стиснутого газу під тиском, що не менш, ніж вдвічі перевищує тиск рідини в кавітаторі, наприклад, понад 1 МПа. Пульсацію стиснутого газу із частотою, кратною частоті коливань молекул води, тобто 22 Гц або 44 Гц, забезпечують вмонтованим в трубопровід 4 подачі газу пневмоелектрозолотником 6.

У робочій зоні кавітатора забруднена рідина піддається активному кавітаційному впливу, збуреному обертовими лопатями та пульсуючими газовими струминками. Вивільнена тут при сплескуванні кавітаційних бульбашок енергія призводить до різкого розширення клітин мікроорганізмів і розриву їх мембран, тобто до руйнування оболонок мікроорганізмів, внаслідок чого забруднена вода очищується від біологічного забруднення. Поряд з тим, як відомо, сплескування кавітаційних бульбашок активізує окиси реакції в рідині, що додатково сприяє очищенню забрудненої води, підвищуючи її фізико-хімічні показники.

У подальшому через вертикальне вихідне сопло 8 кавітатора 5 суміш відпрацьованих газів, включно із новоутвореним внаслідок руйнування мікроорганізмів вуглекислим газом CO_2, виділеним із рідини в кавітаторі розчиненим повітрям тощо, відсмоктується вакуумним насосом 11 із рідини, трубопроводом 6 зворотної подачі подається на позицію 13 фільтрування від механічних домішок, крапель рідини тощо. Тут, у разі потреби, із суміші відпрацьованих газів виокремлюють очищений робочий газ, подають його на компресор 10, звідки під тиском він знову поступає у балон 9 стиснутого газу. Очищена вода з кавітатора по трубопроводу 5 поступає в замкнутий резервуар-відстійник 12. Тут очищена вода відстоюється, а утворений осад із інактивованим мулом періодично очищують через фланцевий отвір А. Залишки суміші відпрацьованого газу в резервуарі – відстійнику 12 випаровуються із очищеної води і через фланцевий отвір Б у його верхній частині відсмоктуються вакуумним насосом 11 у трубопровід 6 зворотної подачі, поступаючи після очищення через компресор 10 у резервуар 9 стиснутого газу. Таким чином забезпечується замкнутий цикл використання стиснутого газу, що зводить до мінімуму його витрати.

Відстояну від інактивованого мулу і залишків газу очищену воду помпою 2 трубопроводом 7 подають у резервуар 14 очищеної води для подальшого її цільового використання. Для забору води в ньому передбачені насос 2 та трубопровід 8.

Для регулювання тисків газу і води в трубопроводах вмонтовано регулюючі вентилі 3, для вимірювання тиску робочого газу - манометр 7.

Різновид робочого газу тут, як правило, обирають залежно від характеру забруднення рідини і технологічних вимог на ступінь її очищення. Так для знезараження води від бактерій різновиду *Pseudomona* достатнє застосовування вуглекислого газу CO_2, а від бактерій *Sarcina* - доречно застосовувати інертний газ аргон Ar. Ступінь очищення води в цих випадках сягає 75-80%. Найкращого результату (до 90%) очищення води від дріжджів *Saccharomyces* із використанням запропонованого кавітатора досягається при використанні озону O_3. Аналогічно підходить до вибору різновиду газу і при використанні даного кавітатора для ініціювання та активації окисних реакцій в технологічних процесах очищення рідин та інших процесах.

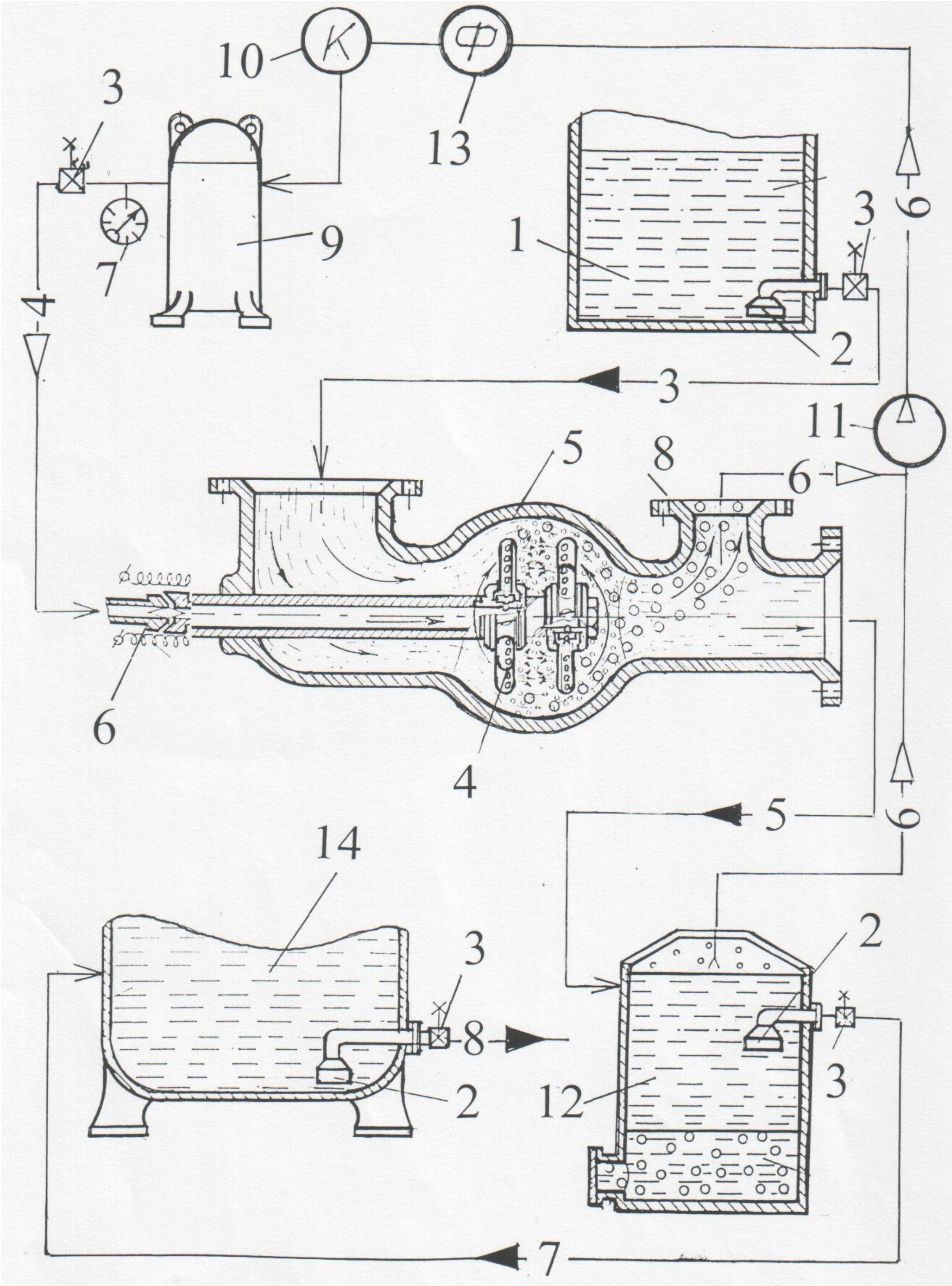


Рис.3. Принципово технологічна схема пневмогідравлічного кавітаційного очищення води від біологічного забруднення

Висновки. Запропонований метод пневмогідравлічного збурення кавітації завдяки застосуванню для його реалізації пульсуючого газу, що під тиском подається в робочу зону кавітатора, має ряд техніко-економічних та технологічних переваг. Зокрема:

1. Можливість широкого діапазону регулювання інтенсивності самоутворення зародків кавітаційних бульбашок зміною частоти пульсацій та тиску стиснутого газу, що подається в робочу зону кавітатора. Це надає можливість регулювання в конкретних часових проміжках кількості кавітаційних бульбашок в одиниці об'єму газорідинної суміші, а отже, і інтенсивності окисних реакцій чи очисних процесів та зумовленої цим якості вихідного готового продукту.

2. Спроможність регулювання інтенсивності та ефективності окисних реакцій в робочій зоні кавітатора завдяки можливості підбору найефективнішого для конкретних інгредієнтів окисних реакцій певного різновиду збурюючого кавітацію газу.

3. Довговічність та висока надійність реалізуючого даний метод обладнання завдяки відсутності у приводі обертового руху збурюючих кавітацію лопатей рухомих та обертових вузлів і деталей.

4. Незначна собівартість реалізації завдяки можливості рекомбінації збурюючого кавітацію газу та замкнутості технологічного циклу його багаторазового використання. Через відсутність тут енерговитратного електромагнітного перетворюючого обладнання, яке використовують при реалізації ультразвукових методів, чи енергоспоживаючих двигунів і редукторів, притаманних методам гідродинамічної кавітації, запропонований спосіб значно енергоощадніший, а отже, і економічніший.

Таким чином, основними перевагами методу пневмогідравлічного збурення кавітації в рідинах, порівняно із відомим, є:

– висока продуктивність, придатність для обробки значних обсягів рідин та енергоощадність порівняно із ультразвуковою кавітаційною обробкою;

– простота реалізації та висока надійність обладнання порівняно із різноманітними методами гідродинамічного збурення кавітації завдяки відсутності у приводі обертового руху збурюючих кавітацію лопатей обертових та рухомих механізмів;

– незначна собівартість реалізації технологій із використанням запропонованого кавітатора завдяки можливості рекомбінації збурюючого кавітацію газу та замкнутості технологічного циклу його багаторазового використання.

Відзначені переваги відкривають перспективи для широкого промислового застосування кавітаційного пневмогідравлічного очищення води не тільки від біологічного забруднення, а і від інших забруднювачів, що піддаються знешкодженню окисними реакціями. При цьому, подальші дослідження даного методу доречно скерувати в руслі вивчення кінетики формування кавітаційного поля підвищеної інтенсивності, аналізу превалюючого впливу на знезараження води технологічних параметрів процесу (тиску та частоти пульсацій газу, частоти обертання лопатей, величини напору та швидкості подачі забрудненої води тощо), підборі для конкретного різновиду біологічного забруднення оптимального за ефективністю знешкоджуючого середовища та газу.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Маргулис М.А. Основы звукохимии (химические реакции в акустических полях)/ М.А. Маргулис. – М: Высш. шк., 1984. – 272 с.

2. Вітенько Т.М. Гідродинамічна кавітація у масообмінних, хімічних і біологічних процесах: монографія/ Т.М. Вітенько. – Тернопіль, в-во ТДТУ ім. І. Пулюя, 2009. – 224 с.
3. Вітенько Т.М. Механізм та кінетичні закономірності інтенсифікуючої дії гідродинамічної кавітації у хіміко-технологічних процесах: дис. … доктора техн. наук /Т.М. Вітенько . – Львів, 2010.

СТАРЧЕВСЬКИЙ Володимир Людвігович – д.т.н., професор, завідувач кафедри «Загальної хімії», Національного університету «Львівська політехніка».

Наукові інтереси:

– застосування кавітаційних явищ в різноманітних хіміко-технологічних процесах, у тому числі і для очищення води від забруднень.

ШЕВЧУК Лілія Іванівна – к. т. н., доцент кафедри «Технологія органічних продуктів», Національного університету «Львівська політехніка».

Наукові інтереси:

– застосування кавітаційних явищ в різноманітних хіміко-технологічних процесах, у тому числі і для очищення води від забруднень.

АФТАНАЗІВ Іван Семенович – д. т. н., професор, завідувач кафедри «Нарисної геометрії і графіки», Національного університету «Львівська політехніка».

Наукові інтереси:

– застосування кавітаційних явищ в різноманітних хіміко-технологічних процесах, у тому числі і для очищення води від забруднень.

УДК 517.443

О.Ю. Тарновецька

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА-ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростіших випадках величини, які характеризують напружений стан композита, виражаються у вигляді полі - параметричного невласного інтегралу, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім’ї невласних інтегралів присвячена дана робота.

Основна частина. Розглянемо задачу про конструкцію обмеженого на множині $I_1^+=\{r: r\in(0,R_1)\cup(R_1,\infty)\}$ розв’язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Лежандра для модифікованих функцій

$$(B_\alpha^* - q_1^2)u_1(r) = -g_1(r),\ r\in(0,R_1), \tag{1}$$

$$(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2)u_2(r) = -g_2(r),\ r\in(R_1,\infty),$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)u_1(r)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)u_2(r)\right]\Bigg|_{r=R_1}=\omega_{j1},\ j=1,2. \tag{2}$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j>0$, $\alpha_{jk}^1\ge 0$, $\beta_{jk}^1\ge 0$, $c_{11}c_{21}>0$, $c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1-\alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1$, $j,k=1,2$.

У рівностях (1) бере участь диференціальний оператор Ейлера 2-го порядку[1] $B_\alpha^* = r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)r\frac{d}{dr}+\alpha^2$ та узагальнений диференціальний оператор Лежандра [2] $\Lambda_{(\mu)}=\frac{d^2}{dr^2}+\operatorname{cth} r\frac{d}{dr}+\frac14+\frac12\left(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r}+\frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\right)$, $2\alpha+1>0$, $\mu_1\ge\mu_2\ge 0$.

Фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^*-q_1^2)V=0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha-q_1}$ та $v_2 = r^{-\alpha+q_1}$; фундаментальну систему розв’язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2)V=0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра 1-го роду $P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ та 2-го роду $L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ [2], $(\mu)=(\mu_1,\mu_2), \nu_2=-\frac12+q_2$.

Наявність фундаментальної системи розв’язків дає можливість побудувати загальний розв’язок крайової задачі (1),(2) методом функцій Коші [1,3]:

$$u_1(r)=A_1r^{-\alpha+q_1}+\int_0^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,$$

$$u_2(r) = B_2 L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr) + \int_{R_1}^{\infty} E_2(r,\rho) g_2(\rho) sh\rho d\rho \ . \tag{3}$$

У рівностях (3) $E_j(r, \rho)$ – функції Коші:

$$E_1 = \frac{1}{2q_1 Z_{\alpha;11}^{12}(q_1, R_1)} \begin{cases} r^{-\alpha+q_1} \Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1, \rho), 0 < r < \rho < R_1 \\ \rho^{-\alpha+q_1} \Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1, r), 0 < \rho < r < R_1 \end{cases} \tag{4}$$

$$E_2 = -\frac{B_\mu(q_2)}{Z_{\nu_2;12}^{(\mu),12}(chR_1)} \begin{cases} L_{\nu_2}^{(\mu)}(ch\rho) F_{\nu_2,12}^{(\mu),1}(chR_1, chr), \ 0 < r < \rho < R_1, \\ L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr) F_{\nu_2,12}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho), \ 0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \tag{5}$$

Функції, які беруть участь у рівняннях (4), (5), загальноприйняті.

Умови спряження (2) для визначення величин A_1 та B_2 дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} &Z_{\alpha;11}^{12}(q_1, R_1) A_1 - Z_{\nu_2,12}^{(\mu),12}(chR_1) B_2 = \omega_{11}, \\ &Z_{\alpha;21}^{12}(q_1, R_1) A_1 - Z_{\nu_2,22}^{(\mu),12}(chR_1) B_2 = \omega_{21} + G_{12}, \end{aligned} \tag{6}$$

Тут бере участь функція

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \int_0^{R_1} \frac{\rho^{-\alpha+q_1}}{Z_{\alpha,11}^{12}(q_1, R_1)} g_1(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho + \frac{c_{21}}{shR_1} \int_{R_1}^{\infty} \frac{L_{\nu_2}^{(\mu)}(ch\rho)}{Z_{\nu_2;11}^{(\mu);12}(chR_1)} g_2(\rho) sh\rho d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі: для будь-якого ненульового вектора $\vec{q} = \{q_1; q_2\} \neq \vec{0}$ визначник алгебраїчної системи (6) відмінний від нуля

$$\Delta_{\alpha,(\mu)}(q) \equiv Z_{\nu_1;12}^{(\mu),12}(chR_1) Z_{\alpha,12}^{12}(q_1, R_1) - Z_{\nu_1;22}^{(\mu);12}(chR_1) Z_{\alpha,11}^{12}(q_1, R_1) \neq 0, \nu_1 = -\tfrac{1}{2} + q_1. \tag{7}$$

Введемо до розгляду головні розв‘язки крайової задачі (1), (2):

1) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{\alpha,(\mu);11}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_1 \Delta_{\alpha,(\mu)}(q)} \begin{cases} r^{-\alpha+q_1} [Z_{\nu_{2;12}}^{(\mu);12}(chR_1) \psi_{\alpha,21}^{1*}(q_1, \rho) - \\ \rho^{-\alpha+q_1} [Z_{\nu_{2;12}}^{(\mu);12}(chR_1) \psi_{\alpha,21}^{1*}(q_1, r) - \end{cases}$$

$$-Z_{-\nu_{2;22}}^{(\mu);12}(chR_1) \psi_{\alpha,11}^{1*}(q_1, \rho)], \qquad R_1 < r < \rho < \infty,$$

$$-Z_{\nu_{2;22}}^{(\mu);12}(chR_1) \psi_{\alpha,11}^{1*}(q_1, r)], \qquad R_1 < \rho < r < \infty,$$

$$H_{\alpha,(\mu);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{shR_1} \frac{r^{-\alpha+q_1}}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)} L_{\nu_2}^{(\mu)}(ch\rho), H_{\alpha,(\mu);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \frac{\rho^{-\alpha+q_1}}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)} L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr), \tag{8}$$

$$H_{\alpha,(\mu);22}(r,\rho,q) = \frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)} \times \begin{cases} L_{\nu_2}^{(\mu)}(ch\rho) \big[Z_{\alpha,11}^{12}(q_1, R_1) F_{\nu_2;22}^{(\mu),1}(chR_1, chr) - \\ L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr) \big[Z_{\alpha,11}^{12}(q_1, R_1) F_{\nu_2;22}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho) - \end{cases}$$

$$- Z_{\alpha,21}^{12}(q_1, R_1) F_{\nu_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, chr)], R_1 < r < \rho < \infty,$$

$$- Z_{\alpha,21}^{12}(q_1, R_1) F_{\nu_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho)], \ R_1 < \rho < r < \infty.$$

2)породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\alpha,(\mu);11}^1(r,q) = \frac{Z_{\nu_2;22}^{(\mu);12}(chR_1)}{-\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)} r^{-\alpha+q_1}, R_{\alpha,(\mu);21}^1(r,q) = \frac{Z_{\nu_2;12}^{(\mu);12}(chR_1)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)} r^{-\alpha+q_1},$$

$$R_{\alpha,(\mu);11}^2(r,q) = \frac{Z_{\alpha,21}^{12}(q_2, R_1)}{-\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)} L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr), R_{\alpha,(\mu);21}^2(r,q) = \frac{Z_{\alpha,11}^{12}(q_2, R_1)}{\Delta\alpha,_{(\mu)}(q)} L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr), \tag{9}$$

В результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (6), підстановки одержаних значень A_1, B_2 в формули (3) та низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)- (2):

$$u_j(r) = R^j_{\alpha,(\mu);11}(r,q)\omega_{11} + R^j_{\alpha,(\mu);21}(r,q)\omega_{21} +$$
$$+\int_0^{R_1} H_{\alpha,(\mu);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho + \int_{R_1}^{\infty} H_{\alpha,(\mu);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)sh\rho d\rho,\ j=1{,}2\,. \quad (10)$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)-(2) методом гібридного інтегрального перетворення, породженого на множині I_1^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО) $M_{\alpha,(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)B^*{}_\alpha + \theta(r - R_1)\Lambda_{(\mu)}$, (11)

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$ самоспряжений і має дві особливі точки $r=0$ та $r=\infty$ [4]. В цьому випадку його спектр дійсний та неперервний , а спектральна функція комплекснозначна [4]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$, а спектральна вектор-функція

$V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) + \theta(r-R_1)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\in G$. При цьому $V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta) = V_{\alpha,(\mu),j1}(r,\beta) + iV_{\alpha,(\mu),j2}(r,\beta)$, де *i*- уявна одиниця. Якщо покласти $b_j(\beta) = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, k_j \ge 0, j=1{,}2$ то, очевидно, що функції $V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)$ повинні задовільняти диференціальні рівняння Ейлера та Лежандра

$$\left(B^*{}_\alpha + b_1^2\right)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) = 0,\ r\in(0,R_1), \quad (12)$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta) = 0,\ r\in(R_1,\infty),$$

та однорідні умови спряження

$$\left[\left(\alpha^1_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^1_{j1}\right)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) - \left(\alpha^1_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^1_{j2}\right)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_1} = 0,\ j=1{,}2\,. \quad (13)$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_\alpha^* + b_1^2\right)U = 0$ утворюють функції $V_1 = r^{-\alpha}\cos(b_1\ln r)$ та $V_2 = r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)U = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра $A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)$ та $B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)$, $\nu_2^* = -\frac{1}{2} + ib_2$ [4]. Це дозволяє будувати функції $V_{\alpha,(\mu),jk}(r,\beta)$ як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) [4]:

$$V_{\alpha,(\mu),1}(r,\beta) = \frac{q_2}{(b_1 S_{(\mu)} f_{\alpha,(\mu),22})^{1/2}}[\omega_{\alpha,(\mu),1}(\beta)V_2(r,\beta) - \omega_{\alpha,(\mu),2}(\beta)V_1(r,\beta) +$$
$$+ i(\gamma_{(\mu)}q^{-1}_{\alpha,(\mu)}\omega_{\alpha,(\mu)})^{1/2}(e_{\alpha,(\mu),12}(\beta)V_2(r,\beta) - e_{\alpha,(\mu),22}(\beta)V_1(r,\beta)],$$
$$V_{\alpha,(\mu),2}(r,\beta) = (b_1 S_{(\mu)} f_{\alpha,(\mu),22})^{1/2}[f_{\alpha,(\mu),22}(\beta)A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr) - \gamma_{(\mu)} f_{\alpha,(\mu),23}(\beta)B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)] +$$
$$+ i[b_1\gamma_{(\mu)}S_{(\mu)}q_{\alpha,(\mu)} f^{-1}_{\alpha,(\mu),22}\omega_{\alpha,(\mu)}]^{1/2} B^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(chr),\ q_2 = b_1 c_{21}(shR_1)^{-1}. \quad (14)$$

У рівностях (14) беруть участь величини та функції:

$$Y^{11}_{\alpha;m1}(b_1,R_1) = [(\beta^1_{m1} - \alpha^1_{m1}\alpha R_1^{-1})\cos(b_1\ln R_1) - b_1 R_1^{-1}\alpha^1_{m1}\sin(b_1\ln R_1)]R_1^{-\alpha},$$

$$Y^{12}_{\alpha;m1}(b_1, R_1) = [(\beta^1_{m1} - \alpha^1_{m1}\alpha R_1^{-1})\sin(b_1 \ln R_1) + b_1 R_1^{-1}\alpha^1_{m1}\cos(b_1 \ln R_1)]R_1^{-\alpha},$$

$$Y^{(\mu),11}_{\nu_2^*,m2}(chR_1) = \alpha^1_{m2} shR_1 A^{(\mu)/}_{\nu_2^*}(chR_1) + \beta^1_{m2} A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chR_1),$$

$$Y^{(\mu),12}_{\nu_2^*,m2}(chR_1) = \alpha^1_{m2} shR_1 B^{(\mu)/}_{\nu_2^*}(chR_1) + \beta^1_{m2} B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chR_1),\ \nu_2^* = -\frac{1}{2} + ib_2;$$

$$e_{\alpha,(\mu),jk}(\beta) = Y^{1j}_{\alpha,11}(b_1, R_1) Y^{(\mu),1k}_{\nu_2^*;22}(chR_1) - Y^{1j}_{\alpha,21}(b_1, R_1) Y^{(\mu),1k}_{\nu_2^*;12}(chR_1);\ j,k = 1,2,$$

$$\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta) = e_{\alpha,(\mu);11}(\beta) + \gamma_{(\mu)} e_{\alpha,(\mu);22}(\beta), \omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta) = e_{\alpha,(\mu);21}(\beta) - \gamma_{(\mu)} e_{\alpha,(\mu);12}(\beta);$$

$$\gamma_{(\mu)}(\beta) = \cos\mu_1\pi sh2\pi b_2(\cos\mu_2\pi + \cos\mu_1\pi ch2\pi b_2)^{-1},$$

$$\omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) = [\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta)]^2, q_{\alpha,(\mu)} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \frac{c_{21}}{S_{(\mu)}(b_2) shR_1},$$

$$S_{(\mu)}(b_2) = \frac{2^{\mu_1-\mu_2}\pi^3\gamma_{(\mu)}(\beta)(sh2\pi b_2)^{-1}}{\left|\Gamma(1/2 + ib_2 + \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2))\right|^2 \left|\Gamma(1/2 + ib_2 + \frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2))\right|^2};$$

$$f_{\alpha,(\mu),22}(\beta) = \omega_{\alpha,(\mu),1} e_{\alpha,(\mu),22} - \omega_{\alpha,(\mu),} e_{\alpha,(\mu),12};\quad f_{\alpha,(\mu),23}(\beta) = \omega_{\alpha,(\mu),1} e_{\alpha,(\mu),12} - \omega_{\alpha,(\mu),2} e_{\alpha,(\mu),22} \equiv$$
$$\equiv \gamma^{-1}_{(\mu)}(\omega_{\alpha,(\mu),1} e_{\alpha,(\mu),21} - \omega_{\alpha,(\mu),2} e_{\alpha,(\mu),11}).$$

Визначимо вагову функцію $\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha-1} + \theta(r - R_1)\sigma_2 shr, \sigma_1 = c_{11} shR_1 : c_{21} R_1^{2\alpha+1}, \sigma_2 = 1$ та спектральну густину $\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) = \beta[b_1(\beta)]^{-1}([\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta)]^2)^{-1}$.

Згідно з роботою [4] запровадимо пряме $H_{\alpha,(\mu)}$ та обернене $H^{-1}_{\alpha,(\mu)}$ ГІП, породжене на множині I_1^+ ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$:

$$H_{\alpha,(\mu)}[g(r)] = \int_0^\infty g(r)\overline{V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)}\sigma(r)dr \equiv \overline{\tilde{g}_n(\beta)}, \tag{15}$$

$$H^{-1}_{\alpha,(\mu)}[\overline{\tilde{g}(\beta)}] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\overline{\tilde{g}(\beta)} V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)]\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta \equiv g(r), \tag{16}$$

$$H_{\alpha,(\mu)}[M_{\alpha,(\mu)}[g(r)]] = -\beta^2\overline{\tilde{g}(\beta)} - (k_1^2\overline{\tilde{g}_1} + k_2^2\overline{\tilde{g}_2}) + c_{21}^{-1} shR_1[\overline{Z^1_{\alpha,(\mu);12}(\beta)}\omega_{21} - \overline{Z^1_{\alpha,(\mu);22}(\beta)}\omega_{11}],$$

$$\overline{Z^1_{\alpha,(\mu);m2}(\beta)} = (\alpha^1_{m2} d/dr + \beta^1_{m2})\overline{V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)}\Big|_{r=R_1}, m = 1,2. \tag{17}$$

Тут прийняті позначення:

$$\overline{\tilde{g}_1(\beta)} = \int_0^{R_1} g_1(r)\overline{V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)}\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr, \overline{\tilde{g}_2(\beta)} = \int_{R_1}^\infty g_2(r)\overline{V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)}\sigma_2 shrdr.$$

Одержані формули (15), (16), (17) складають математичний апарат для розв’язання крайової задачі (1), (2) за відомою логічною схемою [4]. Опустивши викладки, отримуємо єдиний розв’язок крайової задачі (1), (2):

$$u_j(r) = \int_0^{R_1}(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\mathrm{Re}V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha,(\mu),1}(\rho,\beta)}]\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}d\beta)g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho +$$

$$+ \int_{R_1}^\infty(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha,(\mu),2}(\rho,\beta)}]\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2 + q_1^2}d\beta)g_2(\rho)\sigma_2 sh\rho d\rho +$$

$$+ \frac{shR_1}{c_{21}}[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\frac{\overline{Z^1_{\alpha,(\mu);12}(\beta)}}{\beta^2 + q_1^2}V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)]\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta\omega_{21} - \tag{18}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu),22}(\beta)}V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}d\beta\omega_{11}],\ j=1,2.$$

Порівнюючи розв'язки (10) та (18) внаслідок єдиності, одержуємо наступні формули обчислення невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[V_{\alpha,(\mu),j}(\beta)\overline{V_{\alpha,(\mu),k}(\rho,\beta)}\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2})d\beta=\frac{1}{\sigma_k}H_{\alpha,(\mu);j,k}(r,\rho,q),\ j,k=1,2, \tag{19}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu),12}(\beta)}V_{\alpha,(\mu);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2})d\beta=\frac{c_{21}}{shR_1}R^j_{\alpha,(\mu);21}(r,q),\ j=1,2, \tag{20}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu),22}(\beta)}V_{\alpha,(\mu);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2})d\beta=-\frac{c_{21}}{shR_1}R^j_{\alpha,(\mu);11}(r,q),\ j=1,2, \tag{21}$$

Функції впливу $H_{\alpha,(\mu),jk}(r,\rho,q)$ визначені рівностями (18), а функції Гріна умовами спряження $R^j_{\alpha,(\mu);21}(r,q)$ визначені формулами (9).

Зауважимо, що при $\max\{q_1^2,q_2^2\}=q_2^2$ треба покласти $k_2^2=0, k_1^2=q_2^2-q_1^2\ge 0$, тобто $b_1=(\beta^2+q_2^2-q_1^2)^{1/2}, b_2=\beta.$ У рівностях (18)-(21) замість $(\beta^2+q_1^2)$ буде вираз $(\beta^2+q_2^2)$.

Оскільки праві частини в рівностях (19)-(21) не залежать від нерівності $q_1^2-q_2^2\ge 0$ або нерівності $q_2^2-q_1^2\ge 0$, то можна покласти $q_1^2=q_2^2=q_0^2>0$, звужуючи при цьому сім'ю невласних інтегралів.

Висновок. Якщо вектор функція $f(r)=\{B^*{}_\alpha[g_1(r)];\Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]\}$ неперервна на множині I_1^+, функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження (2) та виконується умова (7) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(2), то справджуються формули (19)-(21) обчислення невласних поліпараметричних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$, визначеного рівністю(11).

ЛІТЕРАТУРА:

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений/В.В. Степанов.– М.:Физматгиз,1959. – 468 с.
2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс/Г.Е. Шилов. – М.:Наука, 1965. – 328 с.
3. Конет І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера- Фока./І.М. Конет, М.П.Ленюк. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.
4. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1/ М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик.– Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.

ТАРНОВЕЦЬКА Ольга Юріївна - асистент кафедри інформаційних систем ЧФ НТУ "ХПІ"

Наукові інтереси:

– диференціальні рівняння, математичний аналіз.

УДК: 004.7 : 004.512

О.А. Тодорико, Г.А. Добровольский

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ХЕШИРОВАНИЯ ПО НЕСКОЛЬКИМ СИГНАТУРАМ ДЛЯ ОЧИСТКИ И ОБЪЕДИНЕНИЯ СЛОВАРЕЙ ДАННЫХ НА ПРИМЕРЕ НАЗВАНИЙ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Постановка проблемы. Со временем в словарях данных накапливаются ошибочные записи. Кроме лексического шума, возникающего из-за несогласованного употребления терминов и сокращений, ошибочного написания слов, серьёзной проблемой является структурная неоднородность [1]. Она появляется при объединении записей разной структуры. Однако успешный анализ требует правильных данных, поэтому после ввода необходимо исправить ошибки, установить правильные связи, убрать дубликаты. При этом элементарной операцией является поиск похожих записей.

Целью работы является применение разработанных словарных алгоритмов поиска по сходству для решения задачи очистки-объединения словарей с учетом лексической несогласованности.

Постановка задачи. Из двух источников данных $A=\{a\}$ и $B=\{b\}$ необходимо составить множества пар $M=\{(a,b) : a \in A, b \in B, a=b\}$, $U=\{(a,b) : a \in A, b \in B, a \neq b\}$ и $P=\{(a,b):(a,b)\notin M \cup U\}$. Множество M — содержит пары близких записей, U — отличающиеся записи, P - пары с неопределенной близостью. Основная задача — определить какому множеству принадлежит произвольно взятая пара (a,b).

Каждая запись из множества A или множества B содержит n атрибутов $a=\{fa_1, fa_2, ..., fa_n\}$ и $b=\{fb_1, fb_2, ... , fb_n\}$. Для каждой пары записей (a,b) попарное сравнение атрибутов даст набор из n чисел $d=\{d_1,d_2, ... d_n\}$, где d_i – расстояние между fa_i и fb_i. На основании этого набора принимается решение о принадлежности пары к одному из трех множеств M,U или P.

Анализ публикаций. Описанная проблема известна под разными названиями [1]: связывание записей, удаление дубликатов, очистка-объединение, идентификация экземпляров, уплотнение базы данных, сопоставление названий. Далее в тексте будет использоваться термин очистка-объединение.

В настоящее время для очистки-объединения применяются и разрабатываются программные инструменты: Febrl, TAILOR, WHIRL, Flamingo, WizSame, BigMatch [1]. В них для вычисления близости строк чаще всего используются известные метрики: Jaro-Winkler, дистанция редактирования, n-граммы и их модификации [1], иногда применяется фонетическое кодирование. Для поиска записей применяются упорядоченные списки, разбиение на блоки, упорядоченные хеш-таблицы и т. д. [1]. Для принятия решения о близости записей, имеющих несколько строковых атрибутов, применяются различные варианты классификаторов: максимизация математического ожидания (EM-Based), минимизация погрешности (Error-Based), минимизация стоимости (Cost-Based), классификаторы, основанные на правилах, разные способы кластеризации, смешанные модели. Показателями качества очистки-объединения служат относительное сокращение объема данных, полнота и точность выборки близких пар [1].

Алгоритм очистки-объединения словарей в простейшей реализации имеет сложность порядка $O(n*m)$, где n - количество элементов множества $A=\{a\}$, m - количество элементов множества $B=\{b\}$. Поэтому для работы с большими объемами данных необходимо реализовать максимально быструю проверку близости записей.

Однако значительная вычислительная сложность алгоритмов Jaro-Winkler и дистанции редактирования делает неэффективным их использование для работы с большими массивами данных. Метод n-грамм работает быстро, пока не возникает необходимость интенсивного произвольного доступа к файлу поискового индекса. Также следует отметить, что отличающиеся всего одной буквой слова с длиной менее $2n$ не всегда имеют общие подстроки длины n.

Вследствие низкой скорости традиционных методов сравнения строк, большинство существующих программных систем не могут работать с наборами данных большого объёма. Исключением является только система BigMatch, но и в ней количество данных ограничено объемом оперативной памяти.

Ранее было показано [1,6], что значительно ускорить поиск по сходству может предварительная фильтрация с помощью быстрых и неточных функций сравнения. Наиболее известными из таких методов являются хеширование по сигнатуре [1] и, в случае поиска точного соответствия, фильтр Блума[1]. Такие алгоритмы легко адаптируются для параллельных вычислений и оптимальны при обработке больших объемов данных.

Другой недостаток перечисленных выше систем, хорошо работающих с англоязычными данными, - их неприспособленность к работе с синтетическими языками (украинским, русским и т.д.). В частности отсутствуют подходящие фонетические алгоритмы и морфологические анализаторы.

Основная часть. Опыт эксплуатации системы учёта абитуриентов показал, что ошибки чаще всего встречаются в географических названиях и адресах. Поэтому для иллюстрации предлагаемого метода были выбраны словари «Школы» и «Населенные пункты». Эталонным считался словарь «Населенные пункты».

Аналогичная задача решалась Андреевым А.М., Березкиным Д.В., Нечкиным А.С., Симаковым К.В., Шаровым Ю.Л. [1] с помощью метода расширения выборки. При этом выполнялся только поиск опечаток, а межобъектные связи игнорировались. Кроме того следует отметить, что поиск 2-х и более опечаток методом расширения выборки значительно замедляется [5].

Предварительное изучение словаря «Школы» показало, что чаще всего допускаются ошибки в написании, в переводе на украинский язык, подмена символа на его визуальный эквивалент, например, украинская «і» заменяется латинской «i». Кроме того, встречаются ошибки в связях: отнесение населенного пункта к неправильному району или к микрорайону, пропуск района.

В отличие от исправления обычных текстов, эта задача имеет свою специфику. Для географических названий практически не требуется морфологический анализ, существует эталонное множество — список населённых пунктов, в котором заданы связи между ними (населенный пункт принадлежит известным району и области) [1].

Запись в словаре «Населенные пункты» содержит несколько атрибутов (*населенный пункт, район, область)*, при этом населенный пункт может не относиться ни к одному району. Запись в словаре «Школы» также содержит кроме идентификатора и названия школы атрибуты (*населенный пункт, район, область).* Таким образом, необходимо сопоставить каждой школе правильный населённый пункт, район и область с учётом связей между ними.

Для принятия решения о похожести двух записей необходимо сначала вычислить расстояние между парами соответствующих атрибутов, и на основании полученного набора расстояний, отнести записи к множеству M, U или P. При этом учитываются и расстояние, и связи между атрибутами – наличие населенного пункта в данной области и данном районе. Во множество M попадают только пары с минимальным расстоянием и связанными атрибутами. Если какое-то условие не выполняется, запись относится к множеству P, при невыполнении всех условий к множеству U:

$$(a,b) \in \begin{cases} M & \text{если } d(fa_i, fb_i) \le limit, i = \overline{r,a,c} \\ P & \text{если } d(fa_r, fb_r) \le limit \text{ или } d(fa_a, fb_a) \le limit \text{ или } d(fa_c, fb_c) \le limit \\ U & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \quad (1)$$

где $a=\{fa_r, fa_a, fa_c\}$ - эталонная запись, имеющая строковые атрибуты fa_r –область, fa_a – район, fa_c –населенный пункт; $b=\{fb_r, fb_a, fb_c\}$ - запись школы содержит аналогичные поля; $d(fa_i,fb_i)$, $i = \overline{r,a,c}$ – дистанция между атрибутами записей.

Если в записях a и b заданы все атрибуты, то решение принимается по правилу (1) с учетом дистанций между всеми атрибутами. Если населенный пункт не относится ни к одному району, дистанция между районами считается равной нулю, даже если он задан в записи школы. Отдельно рассматривается случай, когда район указан в эталонном образце, а в записи школы - нет. Если в заданной области одна запись с данным населенным пунктом, то результат записывается во множество M, если несколько - во множество P, иначе во множество U.

Вычисление расстояния между строковыми атрибутами выполняется в два этапа. Сначала отбрасываются совсем неподходящие пары, для чего эффективнее всего использовать хеширование по нескольким сигнатурам[5]. А на оставшемся множестве пар уже используется более точный метод - метрика Дамерау-Левенштейна.

Использованные в работе алгоритмы сравнения строк базируются на сопоставлении каждой записи набора сигнатур таким образом, чтобы сигнатуры похожих записей отличались незначительно. Построение сигнатур для каждого атрибута каждой эталонной записи является подготовительным этапом и выполняется один раз перед началом очистки словаря.

Сигнатурой строки $sign(v)$ при заданном алфавите Abc размера m называется битовый вектор размерности m, k-й элемент которого равняется единице, если в строке v есть k-й символ алфавита. Полученный битовый вектор интерпретируется как двоичная запись числа - значения хеш-функции $H(v)$. Если строка v получена из строки u в результате одной операции редактирования, то в силу определения сигнатуры, битовые векторы $sign(v)$ и $sign(u)$ отличаются не более чем в двух разрядах. Это свойство позволяет использовать сигнатуры для поиска по сходству.

Структура данных, использованная для хеширования по нескольким сигнатурам, легко поддается горизонтальному масштабированию – разделению записей в поисковом индексе на группы, которые хранятся и обрабатываются на разных серверах.

Для реализации было выбрано два различных варианта построения сигнатур.

Вариант 1. Каждый атрибут в поисковом индексе описывается набором сигнатур $H=\{H_0,H_1,\ldots,H_n\}$, в котором H_0 - все символы атрибута, указанные в алфавите Abc, H_i ($i=1,2,\ldots,n$, где $n=L/3$, L — длина атрибута) — сигнатуры непересекающихся подстрок длиной три символа. Если количество символов не кратно трем, то в конец добавляются пробелы.

До вычисления расстояния между атрибутами вычисляется количество общих бит dw сигнатур $H_0(fa)$ - атрибута эталона и $H_0(fb)$ - атрибута школы. Если dw меньше минимально допустимого значения, то запись считается неподходящей и пропускается.

Дополнительные хеши H_i ($i=1,2,3,\ldots,n$) используются для ранжирования результатов поиска с помощью релевантности, вычисляемой по формуле:

$$Rel = dw + \sum_{i=1}^{n} w_i \tag{2}$$

где w_i - количество общих бит i-й сигнатуры $H_i(fb)$ и i-й сигнатуры $H_i(fa)$.

Вариант 2. В этом варианте для сравнения строк *fa* и *fb* используются сигнатуры $H=\{H_0,H_1,\ldots,H_n\}$. Для построения $H_1(x)$ используются все символы строки $x \in \{fa, fb\}$. Для каждого из n наиболее частых символов языка находится его позиция k в строке, и сигнатура $H_i(x)$ $(i=2,\ldots,n)$ вычисляется для подстроки из символов, находящихся на позициях k-1, k, $k+1$. В $H_0(x)$ хранится длина строки x. Ближайшими считаются строки с минимальной величиной *Dist*:

$$Dist = \left|L_{fa} - L_{fb}\right| + diff + dw + \sum_{i=1}^{n} w_i \ . \tag{3}$$

где L_{fa} и L_{fb} длины атрибутов *fa* и *fb* соответственно, *diff* - количество символов, которые есть в *fa*, но нет в *fb*; *dw* - количество символов, которые есть в *fb*, но нет в *fa*; w_i - количество несовпадающих бит в сигнатурах $H_i(fb)$ и $H_i(fa)$, если $H_i(fb)$ и $H_i(fa)$ не равны нулю, при этом $w_i=0$, если обе сигнатуры нулевые, иначе $w_i=1$.

Если в формуле (3) одно из слагаемых превышает допустимое количество ошибок, пара записей отбрасывается и далее не рассматривается.

Результатом работы описанных выше алгоритмов является пары записей, которые могут оказаться близкими. При этом записи, которые отличаются слишком сильно, отбрасываются на этапе предварительной фильтрации, что позволяет экономить вычислительные ресурсы. Из полученного набора пар записей с помощью метрики Дамерау-Левенштейна и правила (1) выбираются максимально похожие пары.

Показателем качества предварительной фильтрации служит эффективность отбора индекса — процент пар, которые могут оказаться близкими[6]. Таким образом, чем больше доля правильно отброшенных пар, тем меньше показатель эффективности и тем качественнее работает алгоритм.

В процессе очистки справочника школ необходимо было каждой из 1525 записей найти соответствие в эталонном справочнике населенных пунктов, содержащем 29 801 запись. Таким образом, необходимо было рассмотреть 45 446 525 пар. Этап предварительной фильтрации оставил 21 894 пар для подробного анализа, сократив выборку в 2075.75 раз. То есть эффективность отбора индекса равна 0.048 %.

По результатам работы были вычислены общепринятые показатели работы алгоритмов с различными способами индексирования — полнота и точность [4].

Всего выбрано 1478 пар записей, из них правильно сопоставлено 1477, т.е. точность равна 1477/1478=0,9993. В одной паре при наличии двух равнозначных результатов был выбран первый встретившийся. С ошибочно введённым названием населенного пункта «Біл***е***цьке», было связано название «Біле***н***ьке», хотя в той же области существует и «Біл***и***цьке».

В списке записей, которым не нашлось соответствия в эталоне, содержатся школы, имеющие более четырех ошибок в названии населенного пункта, или неправильно выбранные область или район. Если ослабить требования к близости названий района или области, нельзя однозначно выбрать пару искомой записи, так как возможно несколько равноценных вариантов. Исключение составляют три записи, у которых совпадают область и населенный пункт, но не совпадает район. Эти записи эксперт может связать с эталонными, поэтому общее число релевантных пар будем считать равным 1480=1477+3. Таким образом полнота равна 1477/1480=0,9980.

Вычисленные показатели точности и полноты подтверждают высокое качество работы метода.

Выводы. На примере словарей данных «Населенные пункты» и «Школы» показано, что предложенные методы предварительной фильтрации позволяют существенно сократить количество трудоемких операций вычисления близости строк.

Одним из важных преимуществ данного метода является его независимость от языка – он одинаково эффективно работает с украинским, русским, английским и другими языками.

Структура данных легко поддается горизонтальному масштабированию, поэтому в дальнейшем можно скооперировать для решения задачи очистки-объединения несколько серверов одновременно.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Elmagarmid K. Ahmed, Duplicate Record Detection: A Survey / Ahmed K. Elmagarmid, Panagiotis G. Ipeirotis, and Vassilios S. Verykios // IEEE transactions on knowledge and data engineering, january 2007. – 2007.– Vol. 19. – No. 1.
2. Manning Christopher, Introduction to Information Retrieval / Christopher D. Manning, Prabhakar Raghavan, Hinrich Schütze // Cambridge University Press, 2008. – 496 p.
3. Record Linkage: A Machine Learning Approach, A Toolbox, and A Digital Government Web Service / Mohamed G. Elfeky, Vassilios S. Verykios, Ahmed K. Elmagarmid, Thanaa M. Ghanem, Ahmed R. Huwait // Dept. of Computer Sciences, Purdue University, Technical Report CSD-03-024. – P.29.
4. Тодоріко, О.О. Словниковий пошук за схожістю за допомогою хешів на основі сигнатур / О.О. Тодоріко, Г.А. Добровольський // Вісник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ. – 2010. – № 3(39). – С. 467-471.
5. Бойцов, Л. М. Классификация и экспериментальное исследование современных алгоритмов нечеткого словарного поиска [Электронный ресурс] / Л. М. Бойцов // Труды шестой всероссийской научной конференции (RCDL’2004) – Пущино, Россия, 2004. – Режим доступа: http://www.rcdl.ru/papers/2004/paper27.pdf
6. Bloom Burton Howard Space/time trade-offs in hash coding with allowable errors / Burton H. Bloom // Communications of the ACM 1970. – T. 13 (7). – P.422–426.
7. Автоматизация обнаружения и исправления опечаток в названиях географических объектов для системы семантического контроля документов электронной библиотеки / А.М. Андреев, Д.В. Березкин, А.С. Нечкин, К.В. Симаков, Ю.Л. Шаров // Труды девятой всероссийской научной конференции (RCDL’2007) – Переславль-Залесский: Университет города Переславль, 2007. – Т.2. – С. 49–56.
8. Органи місцевого самоврядування: Законодавство, щодо адміністративно-територіального устрою [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.rada.gov.ua/zakon/new/ADM/zmist.html

ТОДОРИКО Ольга Алексеевна – ассистент кафедры информационных технологий Запорожского национального университета.

Научные интересы:

– методы и технологии информационного поиска.

ДОБРОВОЛЬСКИЙ Геннадий Анатольевич - зав. лаб. веб-технологий и дистанционного обучения ЗНУ.

Научные интересы:

– информационные технологии в образовании, разработка архитектуры современного программного обеспечения.

УДК 514.18

Г.Я. Тулученко, А.Н. Хомченко, А.П. Мотайло

ТРИЛІНІЙНИЙ ГАРМОНІЧНИЙ БАЗИС ОКТАЕДРА

Постановка проблеми. Базисні функції, що задовольняють рівнянню Лапласа, покращують обчислювальні характеристики скінченного елемента (СЕ), з яким вони асоційовані, у порівнянні із іншими видами базисних функцій, які не є гармонічними, у граничних задачах еліптичного типу [1]. Тому побудова таких базисів для різних СЕ є актуальною проблемою, оскільки ця закономірність має місце для СЕ будь-якої геометрії.

Аналіз публікацій за темою досліджень. У роботах [2-3] наводяться два набори базисних функцій (лінійних та квадратичних) для октаедра як семивузлового скінченного елемента. У роботі [4] побудовано квадратичний гармонічний базис для октаедра як шестивузлового серендипового СЕ (ССЕ).

Ціль статті. Побудувати базис для ССЕ у вигляді октаедра, що складається із гармонічних функцій, які лінійні за кожним незалежним аргументом, та дослідити його властивості.

Основна частина. Автор статті [2] наголошує на тому, що октаедри природно розглядати як узагальнення гексагонів у просторі, аналогічно тому як паралелограми є більш загальним випадком чотирикутників у порівнянні із прямокутниками на площині.

Гексагон, оснащений набором трилінійних базисних функцій, є СЕ, що має назву тривимірного мультиплекса [5]. Лінійність відносно кожної незалежної змінної базисних функцій тривимірного мультиплекса пов’язана із вдало обраною системою координат, у якій осі перпендикулярні граням гексагона (рис. 1).

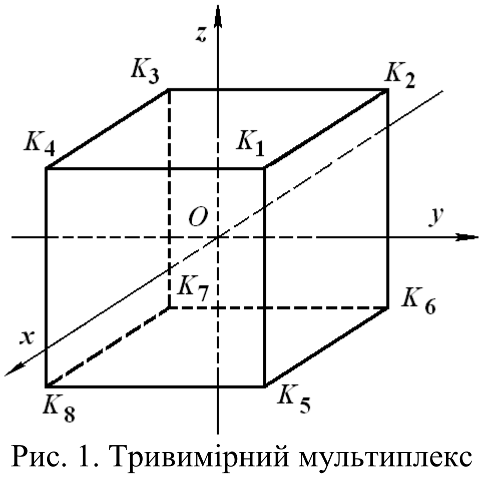


Рис. 1. Тривимірний мультиплекс

Наприклад, базисна функція для вузла K_1 має вигляд [5]:

$$N_1^{hex}(x;y;z)=\frac{1}{8}(x+1)(y+1)(z+1),$$
$$\text{де } |x|\le 1;\ |y|\le 1;\ |z|\le 1. \tag{1}$$

При повороті системи координат на довільний кут (але такий, що осі не переходять одна в іншу або самі в себе) вираз базисної функції (1) перестає бути лінійним відносно кожної змінної, але залишається гармонічною функцією (як відомо, оператор Лапласа є інваріантним відносно перетворення простору – повороту) [6].

Тому логічно припустити, що для октаедра теж існує система координат, у якій можна побудувати скінченноелементний базис із трилінійними функціями.

Поглянемо на октаедр, як на трикутну антипризму із основами $K_1K_2K_6$ та $K_3K_4K_5$ (рис. 2). Центр системи координат сумістимо із барицентром октаедра, вісь Oz спрямуємо через барицентри основ; вісь Ox проведемо таким чином, щоб вершини K_1 та K_3 проектувалися на цю вісь.

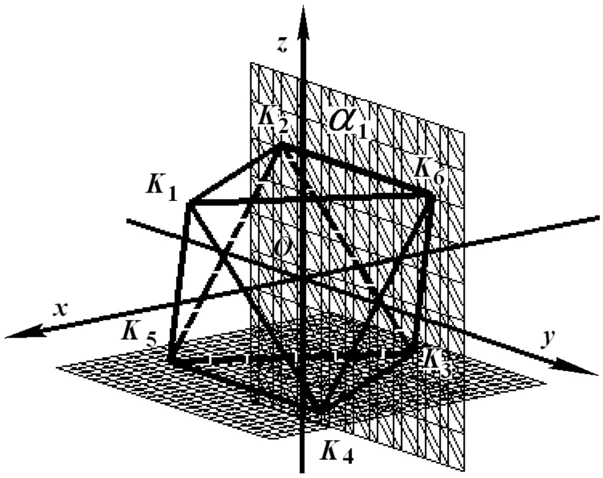


Рис. 2. Октаедр, орієнтований у системі координат як антипризма

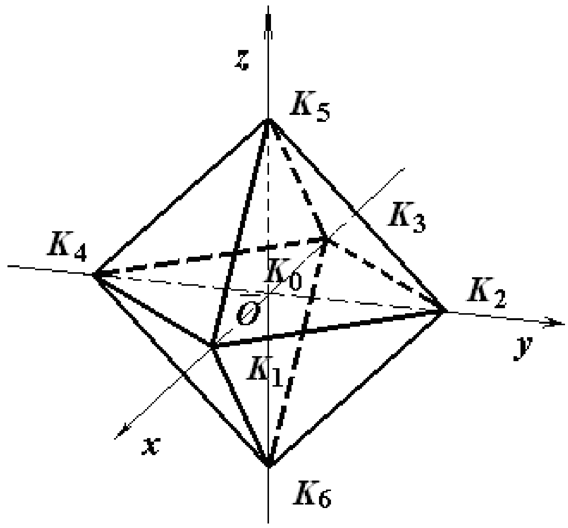


Рис. 3. Октаедр, орієнтований традиційно

Побудуємо базисну функцію N_1 для вузла K_1 у обраній системі координат.

Для октаедра, вписаного у сферу одиничного радіуса, рівняння граней–основ у цьому випадку мають вигляд:

$$(K_1K_2K_6): \ \sqrt{3}z-1=0; \tag{2}$$

$$(K_3K_4K_5): \ \sqrt{3}z+1=0, \tag{3}$$

оскільки відстань до цих граней від початку координат є радіусом вписаної у октаедр сфери, який дорівнює $1/\sqrt{3}$. Легко обчислити, що радіус кола, описаного навколо граней октаедра дорівнює $\sqrt{2/3}$.

Розглянемо окремо основи антипризми (рис. 4-5).

Очевидно, що вершини антипризми будуть мати такі координати:

верхня основа: $K_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}};0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $K_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $K_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

нижня основа: $K_3\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};0;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $K_4\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $K_5\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Тоді рівняння площини, що проходить через пряму (K_2K_6) перпендикулярно до основи $(K_1K_2K_6)$, має вигляд:

$$\alpha_1: \quad x+\frac{1}{\sqrt{6}}=0 \text{ або } \sqrt{6}x+1=0, \tag{4}$$

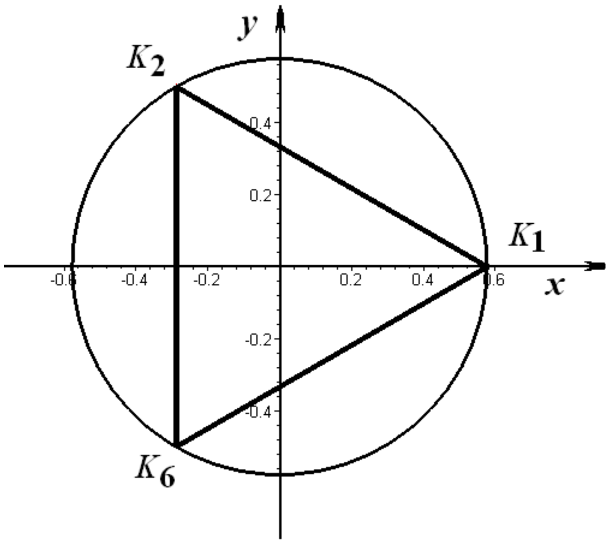


Рис. 4. Проекція верхньої основи антипризми на площину *xOy*

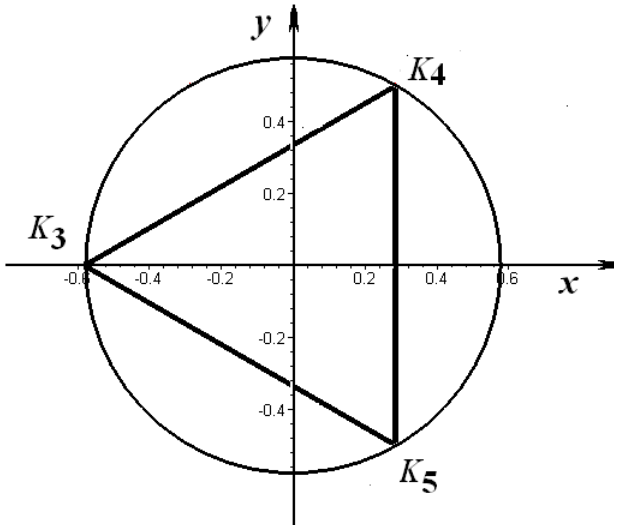


Рис. 5. Проекція нижньої основи антипризми на площину *xOy*

а рівняння площини, що проходить через пряму (K_4K_5) перпендикулярно до основи $(K_3K_4K_5)$, має вигляд:

$$\alpha_3: \quad x-\frac{1}{\sqrt{6}}=0 \text{ або } \sqrt{6}x-1=0. \tag{5}$$

Площини $(K_1K_2K_6)$ та α_1 проходять через всі вершини антипризми, крім K_1. Площини $(K_3K_4K_5)$ та α_3 теж проходять через всі вершини антипризми, але вже крім вершини K_3. Тоді за одним із методів побудови базисних функцій СЕ – методом лінійних множників – добутки цих площин після нормування є базисними функціями для вершин K_1 та K_3 відповідно [5]. Повторивши описаний алгоритм побудови базисної функції для кожної із вершин, отримаємо такий гармонічний базис октаедра:

$$N_1(x;y;z)=\frac{1}{6}(\sqrt{3}z+1)\left(\sqrt{6}x+1\right);$$

$$N_2(x;y;z)=-\frac{1}{6\sqrt{2}}(\sqrt{3}z+1)\left(\sqrt{3}x+3y-\sqrt{2}\right); \tag{6}$$

$$N_3(x;y;z)=\frac{1}{6}(\sqrt{3}z-1)\left(\sqrt{6}x-1\right);$$

$$N_4(x;y;z) = -\frac{1}{6\sqrt{2}}(\sqrt{3}z-1)\left(\sqrt{3}x+3y+\sqrt{2}\right);$$

$$N_5(x;y;z) = -\frac{1}{6\sqrt{2}}(\sqrt{3}z-1)\left(\sqrt{3}x-3y+\sqrt{2}\right);$$

$$N_6(x;y;z) = -\frac{1}{6\sqrt{2}}(\sqrt{3}z+1)\left(\sqrt{3}x-3y-\sqrt{2}\right).$$

Для порівняння обчислювальних характеристик базису (6) із вже відомими базисами перейдемо до системи координат як на рис. 3. Після очевидних перетворень отримаємо такий набір базисних функцій (7):

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{6}(x+y-z+1)(2x-y+z+1);\\
N_2 &= -\frac{1}{6}(x+y-z+1)(x-2y-z-1);\\
N_3 &= \frac{1}{6}(x+y-z-1)(2x-y+z-1);\\
N_4 &= -\frac{1}{6}(x+y-z-1)(x-2y-z+1);\\
N_5 &= -\frac{1}{6}(x+y-z-1)(x+y+2z+1);\\
N_6 &= -\frac{1}{6}(x+y-z+1)(x+y+2z-1).
\end{aligned} \tag{7}$$

Для зручності читачів у табл. 1 наведені базиси октаедра, відомі із робіт [2, 4].

Таблиця 1

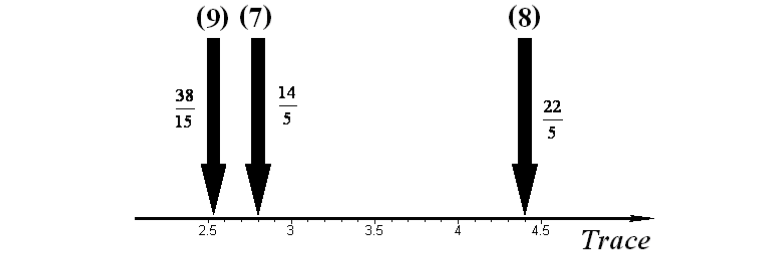
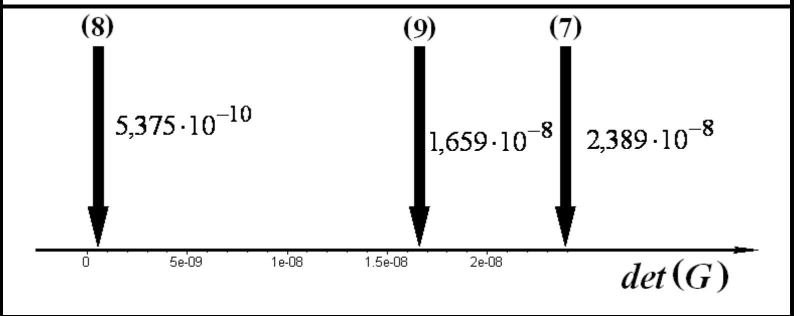
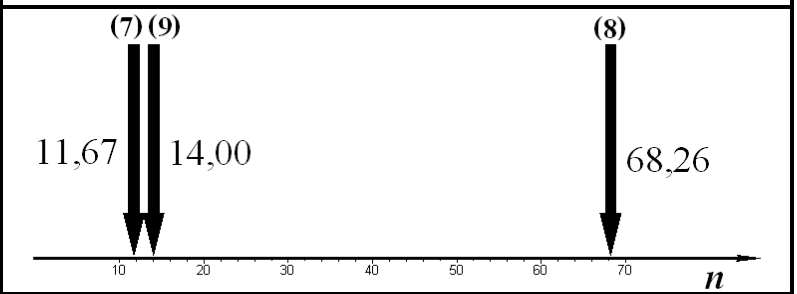
Базиси октаедра

Лагранжевий базис із роботи [2]		Гармонічний базис із роботи [4]	
$N_0 = 1 - x^2 - y^2 - z^2$	(8)	немає	(9)
$N_1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$		$H_1 = \frac{1}{6}\left(1+2x^2+3x-y^2-z^2\right)$	
$N_2 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y$		$H_2 = \frac{1}{6}\left(1+2y^2+3y-x^2-z^2\right)$	
$N_3 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$		$H_3 = \frac{1}{6}\left(1+2x^2-3x-y^2-z^2\right)$	
$N_4 = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y$		$H_4 = \frac{1}{6}\left(1+2y^2-3y-x^2-z^2\right)$	
$N_5 = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z$		$H_5 = \frac{1}{6}\left(1+2z^2+3z-x^2-y^2\right)$	
$N_6 = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z$		$H_6 = \frac{1}{6}\left(1+2z^2-3z-x^2-y^2\right)$	

Такі локальні обчислювальні характеристики скінченноелементних базисів октаедра (7-9), величина сліду матриці жорсткості для ізотропного середовища, величина визначника матриці Грама, числа обумовленості в нормі L_2 для матриці Грама наведені у табл. 2.

Таблиця 2

Локальні характеристики базисів октаедра

<table>
<tr><td>Величини слідів матриць жорсткості</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Визначники матриці Грама</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Числа обумовленості в нормі L_2 матриці Грама</td><td>
</td></tr>
</table>

Висновки та перспективи подальших досліджень. Як відомо, чим менша величина сліду матриці жорсткості СЕ, тим кращі його обчислювальні властивості [7]. Результати порівняння величини слідів матриць жорсткості [5] октаедра (*Trace*), які обчислені при використанні гармонічних базисів (7) та (9), приводять до матриць жорсткості із слідами, що значно менші за слід матриці жорсткості, обчисленої при використанні лагранжевого базису октаедра (8) як 7-вузлового СЕ (із сьомим вузлом у барицентрі СЕ).

Стійкість обчислювальних процесів, що проводяться із використанням різних наборів базисних функцій, прогнозується на підставі величини визначників матриць Грама та чисел обумовленості цих же матриць [9]. Отримані у даній роботі та у роботі [4] гармонічні базиси за цими критеріями також мають кращі інтерполяційні властивості, ніж базис (9). Для гармонічних базисів маємо близькі за значеннями величини оцінок з почерговою зміною домінування базисів (7) та (9) за різними критеріями. Із цих співвідношень і випливають напрямки подальших досліджень.

Розглянуті локальні характеристики базисів (7-9) є не єдиними, що визначають їх обчислювальні властивості. Тому логічним продовженням виконаних досліджень є порівняння всіх перелічених вище базисів октаедра на основі інших відомих критеріїв та застосування їх для розв'язання практичних задач.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Юлдашев О.И. Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации [Электронный ресурс] / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // Объединенный институт ядерных исследований. Лаборатория информационных технологий. Научный отчет 2006-2007. – Дубна: Объединенный институт ядерных исследований, 2007. – С. 317–320. – Режим доступа к отчету: http://lit.jinr.ru/Reports/SC_report_06-07/pdfall/p317.pdf.
2. de Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow [Електронний ресурс] / Han de Bruijn – Режим доступу:http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf
3. Greiner G. Hierarchical tetrahedral-octahedral subdivision for volume visualization / G. Greiner, R. Grosso // The Visual Computer. – 2000. – I.16. – P. 357–369.
4. Мотайло А.П. Базисы шестиузлового октаэдра [Электронный ресурс] / А.П. Мотайло. — Материалы международной научно-практической конференци "Перспективные научные исследования – 2011". Серия: Математика: Прикладная математика (17-25 февраля 2011 г.). – София, Болгария. – Режим доступа: http://www.rusnauka.com.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. — 392 с.
6. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
7. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
8. Пинежанинов Ф. Свойства базисных функций [Электронный ресурс] / Ф.Пинежанинов, П.Пинежанинов. – Режим доступа: http://www.exponenta.ru/soft/mathemat/pinega/a2/a2.asp.

ТУЛУЧЕНКО Галина Яківна – професор кафедри вищої математики Херсонського національного технічного університету, д.т.н, доцент.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та інформаційні технології у природничих та технічних науках.

ХОМЧЕНКО Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, завідуючий кафедрою прикладної математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

– ймовірнісні схеми випадкових блукань, методи відновлення гармонічних функцій, принцип барицентричного усереднення.

МОТАЙЛО Анжеліка Павлівна – старший викладач кафедри вищої математики Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

– метод скінченних елементів.

УДК 539.3

О. В. Тумашова, І. С. Костенко

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГНУЧКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ

Постановка проблеми. Відкриті прямокутні в плані циліндричні оболонки зі змінними параметрами широко застосовуються як елементи сучасних конструкцій. Наявність достатньо високого рівня навантаження призводить до необхідності дослідження їх напружено-деформованого стану в геометрично нелінійній постановці. Крім того, працездатність і стійкість таких конструкцій істотно залежить від впливу різних варіантів граничних умов на краях пологої оболонки і становить безпосередній теоретичний та практичний інтерес. В даній роботі запропоновано підхід до чисельного розв'язку крайових задач, які описують геометрично нелінійну деформацію пологих циліндричних панелей скінчених розмірів зі змінними параметрами. Він базується на застосуванні наближеного аналітичного методу Власова-Канторовича, методу лінеаризації нелінійних одновимірних крайових задач та стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації розв'язку лінійних крайових задач.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Розвитку теорії та методів дослідження напружено-деформованого стану гнучких циліндричних оболонок під дією силових навантажень присвячена велика кількість робіт вітчизняних та зарубіжних вчених. Проблемою дослідження гнучких оболонок та панелей займались такі вчені, як Новожилов В.В., Вольмир А.С., Корнішин М.С. [1], Григоренко Я.М., Мукоєд А.П. [2] та інші вчені. На підставі аналізу наукових джерел слідує, що вивчались, як правило, нескінченні пластини та оболонки довільної конфігурації. За допомогою даного підходу авторами досліджувались гнучкі циліндричні пологі оболонки скінченних і нескінченних розмірів зі змінними геометричними параметрами [3, 4, 5].

Мета статті. За допомогою даного підходу авторами були досліджені деякі оцінки достовірності отриманих результатів за допомогою порівняння результатів розв'язку даної задачі для панелі скінчених розмірів з результатами для нескінченно довгої циліндричної панелі [4, 5], але оцінка достовірності результатів розв'язку даного класу задач з метою апробації методу Власова-Канторовича не проводилась і це викликає певну зацікавленість.

Основна частина. Будемо виходити з рівнянь [3], які описують нелінійну задачу деформації пологих оболонок, розмірності 2а*2в, які знаходяться під дією нормального поверхневого навантаження q, коли товщина та кривизна оболонки є змінними. Серединна поверхня оболонки до деформації віднесена до ортогональної системи координат x0y.

Задачу статики гнучких оболонок можна сформулювати в наступному безрозмірному векторному вигляді:

$$\frac{\partial \vec{N}^*}{\partial x^*} = \vec{F}(x^*, y^*, \vec{N}^*, \frac{\partial \vec{N}^*}{\partial y^*}, \frac{\partial^2 \vec{N}^*}{\partial y^{*2}}, \frac{\partial^3 \vec{N}^*}{\partial y^{*3}}, \frac{\partial^4 \vec{N}^*}{\partial y^{*4}}), \qquad (1)$$

де $\vec{N}^{*T} = \{N_y^*, S_x^*, Q_x^*, M_x^*, u^*, v^*, w^*, \theta_x^*\}$ - вектор розв'язувальних функцій, x^* вздовж x, $-1 \le x^* \le 1$ та y^*- вздовж напрямної y, $-1 \le y^* \le 1$. Для визначення напружено-деформованого стану панелі необхідно задати граничні умови на прямолінійних і криволінійних краях. Покладемо граничні умови на прямолінійних краях у вигляді:

$$u^* = N_y^* = w^* = M_y^* = 0, \quad y^* = 1, y^* = -1. \tag{2}$$

Тоді на криволінійних краях можна задати будь-які граничні умови. Для пониження розмірності системи нелінійних диференціальних рівнянь (1) представимо розв'язувальні функції та навантаження у вигляді розкладу в ряд:

$$\{N_y, Q_x, M_x, u, w, \theta_x\} = \sum_{i=1}^{p} (N_{yi}(x), Q_{xi}(x), M_{xi}(x), u_i(x), w_i(x), \theta_{xi}(x)\} \cos\frac{i\pi}{2} y;$$

$$\{v, S_x\} = \sum_{i=1}^{p} \{v_i(x), S_{xi}(x)\} \sin\frac{i\pi}{2} y; \tag{3}$$

$$q = \sum_{i=1}^{p} q_i \cos\frac{i\pi}{2} y$$

Формули (3) мусять задовільняти граничним умовам (2), в них знак * ми опустили. Підставивши розклади (3) в систему нелінійних диференціальних рівнянь (1) та застосувавши процедуру Бубнова-Галеркіна, отримаємо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь порядку 8р у векторному вигляді:

$$\frac{d\vec{R}}{dx} = \vec{\Phi}(x, \vec{R}). \tag{4}$$

Граничні умови на криволінійних краях після перетворення приймають вигляд:

$$C_1\vec{R} = \vec{c}_1 \quad x = -1\ , \qquad C_2\vec{R} = \vec{c}_2 \quad x = 1, \tag{5}$$

де C_1 , C_2 – прямокутні матриці розмірності 4р*8р, $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ -4р вимірні вектори.

Розв'язок задачі (4), (5) за допомогою методу лінеаризації зведемо до послідовності лінійних крайових задач (6), (7) за ітераційною схемою

$$\frac{d\vec{R}^{(i+1)}}{dx} = \vec{\Phi}(x, \vec{R}^{(i)}) + J(\vec{R}^{(i)})(\vec{R}^{(i+1)} - \vec{R}^{(i)}), \tag{6}$$

$$C_1\vec{R}^{(i+1)}(x) = \vec{c}_1 \quad x = -1 \quad , \quad C_2\vec{R}^{(i+1)}(x) = \vec{c}_2 \quad x = 1, \tag{7}$$

де $J(\vec{R})$ - матриця Якобі системи. Кожна з задач цієї послідовності розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

За початкове наближення вибирається розв'язок лінійної задачі. В процесі чисельного розв'язку значення векторів $\vec{R}^{(i)}$ між вузлами інтегрування обчислюються за допомогою лінійної інтерполяції, що дозволяє на кожному наближенні зберігати інформацію сталого об'єму.

З метою апробації методу Власова-Канторовича для розв'язку даного класу задач:

1. Проведемо співставлення розв'язку методом Власова-Канторовича задачі про деформацію колової нескінченно довгої циліндричної панелі сталої товщини в залежності від числа утримуваних членів ряду в розкладі (3) з точним розв'язком, отриманим в статті [6]. Для цього розглянемо розв'язок задачі про деформацію колової нескінченно довгої циліндричної панелі сталої товщини, яка знаходиться під дією зовнішнього навантаження $q = q_0 \cos\frac{\pi}{2} y$. В силу симетрії відносно площини, яка проходить через пряму $y = 0$ і нормаль до панелі, граничні умови на прямолінійних контурах мають вигляд:

$$v = \vartheta_y = Q_y = 0, \quad при \ \ y = 0;$$

$$w = N_y = M_y = 0, \quad при \ y = 1.$$

Задача розв'язувалась при наступних значеннях параметрів: $h=1;\ k_y=10;\ \nu=0{,}3;\ q_o=5;10;20;30.$

В таблиці 1 наведені амплітудні значення для колового переміщення v при $y=1$, отримані точно і за допомогою методу Власова-Канторовича для різних значень $p=1,2,3,5,7,8,9$, що відповідають числу утримуваних членів ряду в розкладі (3). Значення функції v наведені для різних навантажень q_0.

Таблиця 1

q_0	Точний розв'язок	Розв'язок по методу Власова-Канторовича						
		$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=5$	$p=7$	$p=8$	$p=9$
5	0,6983	0,7874	0,7730	0,7623	0,7113	0,7106	0,7030	0,6986
10	1,0090	1,3652	1,1698	1,1147	1,0684	1,0655	1,0282	1,0103
20	0,4675	1,8927	1,1109	0,8906	0,7054	0,6939	0,5445	0,4728
30	-1,6243	-1,5824	-0,1768	-0,6723	-1,0894	-1,1152	-1,4511	-1,6126

З таблиці 1, порівнюючи отримані результати можна зробити висновок, що для розв'язку даної задачі про деформацію колової нескінченно довгої циліндричної панелі необхідно утримувати 9 членів ряду в розкладі (3) для того, щоб отримати достатньо точний розв'язок. Аналізуючи рівняння і їх розв'язки для всіх розв'язувальних функцій, отриманих в статті [6], можна зробити висновок, що проведена оцінка для функції v відноситься до всіх розв'язувальних функцій. На цій основі можна припустити, що для панелей подібного класу будемо мати аналогічні результати.

2. Порівняємо результати розв'язку задачі при застосуванні методу Власова-Канторовича, отримані при різному числі членів ряду, утримуваних в розкладі (3). Для цього розглянемо деформацію гнучкої циліндричної панелі скінченних розмірів під дією зовнішнього навантаження $q=q_0\cos\dfrac{\pi}{2}y$. Покладемо граничні умови на прямолінійних краях у вигляді (2), а на криволінійних контурах уналаступному вигляді:

$$u=v=w=M_x=0 \quad \textit{при} \quad x=1;\quad x=-1.$$

Задача розв'язувалась при наступних значеннях параметрів: $h=1;\ k_y=10;\ \lambda=4;\ \nu=0{,}3;\ q_o=5;10;20;30.$ В таблиці 2 наведені амплітудні значення для прогину w в центрі панелі, отримані на основі нелінійної теорії для різних значень $p=1,\ 3,5,6,7$, що відповідають числу утримуваних членів ряду в розкладі (3). Значення прогину w наведені для різних значень q_0.

Таблиця 2

q_0	Число членів ряду утримуваних в розкладі (3)				
	$p=1$	$p=3$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
5	0,528	0,439	0,366	0,362	0,362
10	1,015	0,684	0,530	0,522	0,520
20	1,789	0,973	0,719	0,704	-
30	2,359	1,164	0,849	0,830	-

Наведені результати в таблиці 2 показують, що при розв'язку задачі достатньо взяти 7 членів ряду в розкладі (3), щоб отримати похибку до 2%.

Висновки і перспективи подальших досліджень.

1. Побудовано ефективний метод розв'язку двовимірних нелінійних крайових задач та з метою апробації методу Власова-Канторовича для розв'язку даного класу задач проведено співставлення розв'язку методом Власова-Канторовича задачі про деформацію колової нескінченно довгої циліндричної панелі сталої товщини в залежності від числа утримуваних членів ряду в розкладі (3) з точним розв'язком і порівняно результати розв'язку задачі для панелей скінченних розмірів при застосуванні методу Власова-Канторовича, отриманих при різному числі членів ряду p, утримуваних в розкладі (3).

2. Застосування даного методу та апробація методу Власова-Канторовича до розв'язку анізотропних оболонок даного класу.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения/ М.С.Корнишин.– М.: Наука, 1964. – 192 с.
2. Григоренко Я.М. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ/ Я.М. Григоренко, А.П.Мукоєд.– Київ: Либідь, 1992 . – 147 с.
3. Григоренко Я.М. Розв'язок двовимірних задач про нелінійну деформацію циліндричних панелей зі змінними параметрами/Я.М. Григоренко, О.В.Тумашова //Доп. АН УРСР Сер. А. – 1988. – №7. – С. 36–39.
4. Тумашова О.В. Вплив зміни довжини гнучкої циліндричної панелі на її деформацію/ О.В. Тумашова, І.С. Костенко// Вістник ХНТУ.–Херсон, 2005.– №2(22). – С. 332–334.
5. Тумашова О.В. Порівняння точного та наближеного методу розв'язків задачі деформації нескінченно довгої циліндричної панелі/ О.В. Тумашова, Л.І. Козак //"Математичне моделювання складних систем". Серія: Фізико-математичні та технічні науки. Збірник наукових праць Львівського державного інституту новітніх технологій та управління ім. В.Чорновола. –Львів, 2007. – С. 71–73.
6. Тумашова О.В. Розв'язок задачі деформації нескінченно довгої циліндричної панелі наближеним методом/ О.В.Тумашова, Л. І.Козак //"Математичне моделювання складних систем " Серія: Фізико-математичні та технічні науки. Збірник наукових праць Львівського державного інституту новітніх технологій та управління ім. В.Чорновола.– Львів, 2009. – С. 194–197.

ТУМАШОВА Ольга Володимирівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри обчислювальної математики і програмування НУ"Львівська політехніка".

Наукові інтереси:

– нелінійна теорія оболонок, математичні моделі в механіці деформівного твердого тіла, методи наближених обчислень, інформаційні технології.

КОСТЕНКО Ірина Сергіївна – к.ф.-м.н., доцент кафедри обчислювальної математики і програмування НУ"Львівська політехніка".

Наукові інтереси:

– механіка руйнування, математичні моделі в механіці деформівного твердого тіла, інформаційні технології.

УДК 338.24 (075.8) 331:656.13:658.7

Ю.Н. Убайдуллаєв, Д.С. Караєв

МОДЕЛЬ РОЗМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ НА ПЛОЩИНІ З ЕВКЛІДОВОЮ МЕТРИКОЮ В ЗАДАЧАХ ОРГАНІЗАЦІЇ МАТЕРІАЛЬНО-ТЕХНІЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МНС

Постановка проблеми. Теоретичним і практичним дослідженням питань автоматизації управління автотранспортним забезпеченням у сфері МНС присвячено значну кількість робіт. Дослідження, проведені в роботах, свідчать про те, що без використання добре розвинутого інформаційного ресурсу у вигляді сукупності документів в інформаційних системах (бібліотеках, архівах, базах (банках) даних тощо), досягнути ефективного управління і проведення рятувальних та інших невідкладних робіт за сучасних умов практично неможливо. Наявність і повнота інформаційного ресурсу стає таким же вирішальним чинником успіху, як і кількість та якість оперативно-рятувальних підрозділів МНС у ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій (НС). Основними напрямками робіт, що присвячені питанням удосконалення управління оперативно-рятувальними підрозділами МНС та питанням автоматизації процесів управління, виконаних останнім часом, є розроблення гібридних експертних систем підтримки ухвалення рішення; розробка й обґрунтування рекомендацій з підвищення ефективності систем управління аварійно-рятувальними підрозділами на основі застосування засобів автоматизації

Проте, поряд з успішним рішенням деяких завдань у раніше проведених дослідженнях слабко вирішуються питання розробки нового чи вдосконалення існуючого спеціалізованого інформаційно-аналітичного забезпечення (ІАЗ) автоматизованих систем управління автомобільними перевезеннями з урахуванням планування і розміщення об'єктів на площині.

Аналіз досягнень і публікацій. Висока ефективність, використання методів та моделей для ІАЗ аварійно-рятувального автомобільного перевезення (АП) може бути досягнута, якщо будуть забезпечені такі умови: системний підхід до вирішення задачі, що розглядається; адекватність моделі реальній системі, об'єктивне врахування взаємозв'язку підсистем; гнучка багатоваріантність, тобто узгодженість матеріальних, транспортних, інформаційних та інших потоків; формування та оптимізація моделі реальної системі у взаємозв'язку забезпечення, зберігання, доставки матеріальних засобів; безперервність процесу впровадження моделі планування і розміщення об'єктів на площині; модель розміщення об'єктів на площині з безперервним простором рішень [1, 4-8].

Аналіз існуючих методів роботи органів управління [1-5] доводить, що при формуванні рішень посадові особи органів управління обробляють значні обсяги інформації, вирішують велику кількість розрахункових задач різної складності. Ці обставини вимагають формування кожного завдання планування і розміщення об'єктів і критеріїв оцінки можливих варіантів рішення.

Внаслідок досліджень інформаційних процесів штабів ліквідації наслідків НС при плануванні роботи встановлено [1-8], що подальше підвищення ефективності системи управління аварійно-рятувальними підрозділами може бути досягнуто на основі автоматизації процесів обґрунтування прийняття рішень посадовими особами штабу з урахуванням показників характеристик нових об'єктів і розміщення існуючих, взаємодії нових і існуючих об'єктів органів забезпечення та споживачів. Застосування методів і засобів нових інформаційних технологій при розробці перспективних АСУ дозволить не тільки значно скоротити час циклу управління, але і підвищить якість рішень, що приймаються.

Ціль статті. Формулювання майже кожного завдання планування й розміщення об'єктів містить ті самі основні показники, які можуть бути використані для класифікації завдань отримання оптимальних варіантів здійснення АП. До таких показників відносяться характеристики нових об'єктів і розміщення існуючих, взаємодія нових і існуючих об'єктів, простір рішень, а також міра відстані між об'єктами (або метрика простору переміщень) і критерії оцінки можливих варіантів рішення.

Основна частина. Розглянемо кожний з перерахованих показників більш докладно.

Основним показником, що характеризує нові об'єкти, буде їх число. Крім того, залежно від розмірів кожний новий об'єкт можна розглядати або як точку, або як якийсь протяжний об'єкт. В останньому випадку керуючою змінною є форма об'єкта (або форма займаної ним площі) і задача розміщення зводиться до задачі планування. Нарешті, розміщення кожного нового об'єкта може залежати або не залежати від розміщення інших нових об'єктів.

Що стосується існуючих об'єктів, то вони також залежно від розмірів можуть розглядатися або як точка, або як протяжний об'єкт. Крім того, розміщення існуючих об'єктів може бути статичним або динамічним, детермінованим або стохастичним. Якщо розміщення існуючих об'єктів з керуючою змінною, то виникає задача перерозподілу, а якщо, крім того, керуючою змінною є форма займаної ними площі, то задача перепланування.

Взаємодія нових і існуючих об'єктів може виконувати функцію головного параметра задачі або керуючої змінної. У ряді випадків ступінь цієї взаємодії залежить від розміщення нових об'єктів, причому характер взаємодії може бути статичним або динамічним, детермінованим або стохастичним.

Простір рішень може бути одномірним, дво- або тривимірним (найчастіше виникають два останні випадки). Крім того, він може бути дискретним або безперервним. У першому випадку для розміщення нових об'єктів є кінцеве число місць, у той час як у другому випадку, тобто коли простір передбачається безперервним, існує нескінченне число місць для розміщення нових об'єктів.

Міра відстані (або метрика простору переміщення) також ураховується при формулюванні завдань розміщення. Іноді, як наближена оцінка фактичних відстаней обчислюються евклідові відстані, в інших випадках доводиться вимірювати й зберігати фактичні відстані для проведення наступних обчислень.

Вибір критерію оцінки можливих рішень істотно залежить від того, по якому показнику проводити оптимізацію: оптимальним можна вважати рішення, що приводить до мінімізації загальних витрат; у іншому випадку - визначальним критерієм є максимізація державної вигоди. За винятком задач покриття, задачі планування й розміщення, як правило, зводяться до мінімізації зваженої суми відстаней або мінімізації максимальної зваженої відстані між об'єктами [4-8].

Складемо задачу розміщення. Нехай m існуючих об'єктів розміщені в різних точках $P_1,...,P_m$ площини, а n нових об'єктів - у точках $X_1,...,X_n$. Відстань між точками розташування j-го нового й i-го існуючих об'єктів позначимо як $d(X_j, P_i)$, відстань між точками розташування j-го і k-го нових об'єктів - як $d(X_j ,X_k)$.

Позначимо питомі витрати (тобто витрати на одиницю відстані) на перевезення між j-м новим і i-м існуючими об'єктами через W_{ji} , а аналогічні витрати на перевезення між j-м і k-м новими об'єктами - через v_{ik}. Тоді загальні транспортні витрати, пов'язані з розміщенням нових об'єктів у точках $X_1,..., X_n$ будуть визначатися формулою

$$f(X_1,...,X_n)=\sum_{1\le j<k\le n} v_{jk} d(X_j,X_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{ji} d(X_i,P_i) \quad (1)$$

Багатоелементна задача розміщення може бути сформульована як задача вибору такого розташування нових об'єктів у точках $X_1^*,...,X_n^*$, при якому мінімізуються загальні транспорті витрати.

При такому підході задача розміщення декількох об'єктів на площині з евклідовою метрикою складається в мінімізації цільової функції

$$f(X_1,...,X_n)=\sum_{1\le j<k\le n} v_{jk}\sqrt{\left[(x_j-x_k)^2+(y_j-y_k)^2\right]}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{ji}\sqrt{\left[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2\right]}\to \min, \quad (2)$$

де $X_j=(x_j,y_j)$ і $P_i=(a_i,b_i)$.

Необхідною умовою оптимальності розміщення нових об'єктів є рівність нулю (або зміна знака) часткових похідних функції $f(X_1,...,X_n)$ по $X_1,...,X$.

Часткові похідні $f(X_1,...,X_n)$ по $X_1,...,X$ дорівнюють відповідно

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{n}\frac{v_{jk}(x_j-x_k)}{D_{jk}}+\sum_{i=1}^{m}\frac{w_{jk}(x_j-a_i)}{E_{ji}},\ j=1,...,n, \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}=\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{n}\frac{v_{jk}(y_j-y_k)}{D_{jk}}+\sum_{i=1}^{m}\frac{w_{jk}(y_j-b_i)}{E_{ji}},\ j=1,...,n, \quad (4)$$

де $D_{jk}=\sqrt{\left[(x_j-x_k)^2+(y_j-y_k)^2\right]}, E_{jk}=\sqrt{\left[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2\right]}$.

Помітимо, що якщо j-й і k-й нові об'єкти розташовані в одній точці (D_{jk}=0) і j-й новий і i-й існуючий об'єкти розташовані в одній точці (E_{ji}=0), то часткові похідні $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ та $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ - не визначені.

Геометрично кожна складова цільової функції являє собою рівняння прямого кругового конуса. Отже, рівняння являє собою суму конусів, вершини яких є точками розриву похідних, що утворюють усічену поверхню. Так як конус з граничною формою гіперболоїда, то, заміняючи конуси гіперболоїдами, одержимо гладку апроксимуючу функцію $\widehat{f}$. Більше того, оскільки функції, що описують гіперболоїди, є строго опуклими, то функція $\widehat{f}$ також строго опукла за умови, що принаймні один ваговий множник (коефіцієнт) W_{jj} більше нуля для кожного j-го об'єкта.

Рівняння гіперболоїда із центром у точці (a_i, b_i) на площині $E_n=\{x,y\}$ може бути записане у вигляді

$$\widehat{f}=w_{ji}\sqrt{\left[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2\right]+\varepsilon}.$$

Можна побачити, що додавання константи є відповідає заміні вершини конуса на гладку гіперболічну поверхню, і отже, часткові похідні існують повсюди. Крім того, чим менше величина я, тим точніше гіперболоїд апроксимує конус.

Приймаючи, що

$$D_{jk}=\sqrt{\left[(x_j-x_k)^2+(y_j-y_k)^2+\varepsilon\right]};\ \ E_{jk}=\sqrt{\left[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2+\varepsilon\right]},$$

можна сформулювати нову задачу оптимізації як задачу мінімізації цільової функції вигляду

$$f\left(X_1,...,X_n\right)=\sum_{1\le j<k\le n} v_{jk}\widehat{D}_{jk}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{ji}\widehat{E}_{ji}\to\min, \tag{5}$$

де $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\widehat{f}\left(X_1,...,X_n\right)=f\left(X_1,...,X_n\right)$.

При дуже малих значеннях константи ε рішення рівняння (5) майже аналогічно рішенню рівняння (1).

Беручи часткові похідні $\widehat{f}$ по x_j, і y_j прирівнюючи їх до нуля та вирішуючи відносно x_j, і y_j, отримуємо наступні ітераційні формули:

$$x_j^{(h+1)}=\frac{\sum\limits_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{n}\dfrac{v_{jk}x_k^{(h)}}{\widehat{D}_{jk}^{(h)}}+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{w_{ji}a_i}{\widehat{E}_{ji}^{(h)}}}{\sum\limits_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{n}\dfrac{v_{jk}}{\widehat{D}_{jk}^{(h)}}+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{w_{ji}}{\widehat{E}_{ji}^{(h)}}}, \tag{6}$$

$$y_j^{(h+1)}=\frac{\sum\limits_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{n}\dfrac{v_{jk}y_k^{(h)}}{\widehat{D}_{jk}^{(h)}}+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{w_{ji}b_i}{\widehat{E}_{ji}^{(h)}}}{\sum\limits_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{n}\dfrac{v_{jk}}{\widehat{D}_{jk}^{(h)}}+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{w_{ji}}{\widehat{E}_{ji}^{(h)}}}, \tag{7}$$

де верхні індекси позначають номер ітерації.

Відомо, що якщо рішення сходиться, то це рішення оптимальне. Хоча не доведено, що вирази (6) і (7) завжди дають збіжне рішення, однак при великій кількості експериментальних рішень, отриманих методом гіперболічної апроксимації, не спостерігалося жодного випадку, коли о рішення не сходилося. Вирази (6) і (8) можна звести до ітераційних виразів, які використовуються у градієнтних методах пошуку, однак величина кроку при гіперболічній апроксимації не оптимальна.

Для випадку одного об'єкта й при ε=0 вирази (6) і (7) зводяться відповідно до вигляду

$$x_j^{(h+1)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{w_i a_i}{E_i^{(h)}}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{w_{ji}}{\widehat{E}_i^{(h)}}},\quad x_j^{(h+1)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{w_i b_i}{E_i^{(h)}}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{w_i}{E_i^{(h)}}}. \qquad (8), (9)$$

У наданому вигляді математична модель легко реалізується на ПЕОМ.

Висновки. Таким чином, основними вимогами, які висуваються до планування і розміщення об’єктів на площині з евклідовою метрикою в задачах організації матеріально-технічного забезпечення МНС слід вважати:

- інваріантність інформації, що використовується для визначених рівнів управління;
- відповідність структури інформаційно-аналітичного забезпечення системи управління АП вимогам управління;
- охоплення усієї території для внесення в бази даних;
- безперервність ведення баз даних та їх системна єдність з моніторингом;
- наочність баз даних, яка досягається чіткою системою ведення документації та сучасними системами геоінформаційного картографування;
- оперативність, стійкість, безперервність, прихованість, надійність, гнучкість, дублювання важливих ланок, захищеність, які дають можливість оцінити модель

оцінки розміщення об'єктів на площині з евклідовою метрикою в задачах організації матеріально-технічного забезпечення МНС.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Болотських М.В. Склад, завдання та організація взаємодії сил цивільного захисту, координація дій під час ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій природного та техногенного характеру/ М.В. Болотських // Матеріали 10-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції "Організація управління в надзвичайних ситуаціях". – 2008. – С. 5–9.
2. Грешимов А.А. Математические методы принятия решений/ А.А. Грешимов.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. – 584 с.
3. Убайдуллаєв Ю.Н. Модель графопобудови маршрутів руху транспорту та сил при ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій/ Ю.Н. Убайдуллаєв, В.В. Демченко, Д.С. Караєв//Прикладна геометрія та інженерна графіка.– Київ, 2008. – Вип.80. – С. 520–525.
4. Убайдуллаєв Ю.Н. Етапи процесу формування рішення автомобільних перевезень для забезпечення та захисту населення і об'єктів при надзвичайних ситуаціях. / Ю.Н. Убайдуллаєв, В.В. Демченко, Д.С. Караєв// Матеріали НТК "Актуальні проблеми наглядово-профілактичної діяльності МНС України"/ УЦЗУ. – Харків, 2008. – С.171–172.
5. Убайдуллаєв Ю.Н. Основні методи аналізу та прогнозування ризиків в проблемах забезпечення безпеки та захисту населення та об'єктів економіки/ Ю.Н. Убайдуллаєв, В. В. Барбашин, Д.С. Караєв// Матеріали НТК "Актуальні проблеми наглядово-профілактичної діяльності МНС України"/ УЦЗУ. – Харків, 2008. – С.176–177.
6. Убайдуллаев Ю.Н. Обоснование выбора критериев оценки эффективности процесса управления автомобильными перевозками в условиях ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций/Ю.Н.Убайдуллаєв, Д.С. Караєв // Материалы XV Международной НТК "Информационная среда ВУЗа"/ Иван. гос. архит.-строит. акад. – Иваново (РФ), 2008. – С.704–707.
7. Убайдуллаєв Ю.Н. Модель оцінки впливу вдосконалення системи інформаційно-аналітичного забезпечення управління автомобільними перевезеннями на процес організації матеріально-технічного забезпечення МНС / Ю.Н. Убайдуллаєв, Д.С. Караев // Вестник ХНТУ.– Херсон: ХНТУ, 2010.– Вып. 3(39).– С.472-476.
8. Убайдуллаєв Ю.Н. Модель оцінки ефективності вирішення завдань автомобільних перевезень за часом, трудовитратами та вартістю / Ю.Н. Убайдуллаєв, Д.С. Караев // "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – Київ: 2010. – С. 166–171.

УБАЙДУЛЛАЄВ Юсуфжон Нуруллайович – кандидат технічних наук, професор Національного університету оборони України.

Наукові інтереси:

– математичне та експериментальне моделювання технологічних та фізичних процесів та явищ, застосування математичних методів в технічних системах.

КАРАЄВ Денис Серверович – аспірант кафедри прикладної математики Київського національного університету будівництва і архітектури.

Наукові інтереси:

– математичне та комп'ютерне моделювання явищ і процесів, математичні методи в технічних задачах і системах керування.

УДК 519. 711.3

А. В. Усов, Л. А. Воробьева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ВОССТАНАВЛЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ СУДОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Постановка проблемы и анализ публикаций. В современном судоремонте на Украине наблюдается интенсивное повышение потребности в технологиях восстановления функциональных способностей деталей машин и механизмов посредством нанесения износостойких покрытий. В связи с этим приобретают особую актуальность современные ремонтно-восстановительные технологии, которые позволяют восстанавливать работоспособность деталей машин непосредственно в производственных условиях их эксплуатации [1]. Одним из направлений современных ремонтных технологий для восстановления размеров и функциональных свойств изношенных деталей, есть использование различных технологических методов, основы которых базируются на формировании покрытий из износостойких материалов. Для выбора типа покрытия указанного назначения и способа нанесения необходимо обосновать требования к их износостойкости и физико-механическим свойствам с учетом особенностей условий эксплуатации, а также свойств материала самой восстанавливаемой детали. На основании изложенного можно сделать вывод, что рассматриваемая проблема, состоящая в обосновании эффективности восстановления изношенных деталей судовых конструкций является актуальной научной проблемой.

Размерная механическая обработка деталей после нанесения на их рабочие поверхности износостойких покрытий связана с появлением на них дефектов типа трещин [2]. При исследовании механических свойств покрытий, обычно предполагают, что их разрушение происходит непосредственно в зоне воздействия нагрузки, в особенности, если последняя локализована в малой зоне. Прочность покрытия определяют по возникающим в них напряжениям скалывания, сдвига и отрыва, а основания — по максимальным контактным напряжениям.

Основная часть. Рассмотрим задачу для упругого полупространства полностью сцепленного с бесконечным покрытием толщиной $2h$ и загруженного нормальной $q_3(x,y)$ и касательными $q_m(x,y)$ $(m=1,2)$ нагрузками (ось Oz направим внутрь упругого слоя, оси Ox и Oy расположены в серединной плоскости покрытия). Здесь и в дальнейшем нижним индексом $m=1,2,3$ обозначены величины изменяющиеся в направлениях осей Ox, Oy, Oz соответственно. Между покрытием, моделируем как бесконечная пластинка, и упругим слоем расположены полосовые отслоения (трещины). Обозначая $p_m(x,y)$ контактные напряжения между покрытием и упругим слоем, $\bar{U}_m(x,y)$ перемещения серединной плоскости покрытия ($m=1,2,3$), запишем следующие дифференциальные уравнения [3]:

$$\begin{gathered}
\left[\bar{U}_1\right]''_{xx}+\nu_2\left[U_2\right]''_{xy}+\nu_1\left[\bar{U}_1\right]''_{yy}=\theta^{-1}\left[p_1-q_1\right]; \quad 2\nu_2=1+\nu;\ 2\nu_1=1-\nu; \\
\left[\bar{U}_2\right]''_{yy}+\nu_2\left[U_1\right]''_{xy}+\nu_1\left[\bar{U}_2\right]''_{xx}=\theta^{-1}\left[p_2-q_2\right]; \theta=2Eh\big/\left(1-\nu^2\right); \\
D\Delta^2\bar{U}_3=q_3-p_3+h\left[q_1+p_1\right]'_x+h\left[q_2+p_2\right]'_y; \quad \Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2; \quad D=\theta h^2/3; \\
\left[\bar{U}_m,q_m,p_m\right]=\left[\bar{U}_m(x,y),q_m(x,y),p_m(x,y)\right], \quad \left(|x|,|y|<\infty\right).
\end{gathered} \tag{1}$$

Перемещения $V_m(x,y)$ поверхностных точек упругого слоя определяются формулами [3, 4]:

$$V_m(x,y)=\theta_0\sum_{j=1}^{3}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}K_{mj}(x-s,y-\eta)p_j(s,\eta)dsd\eta;$$

$$K_{mj}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}H_{mj}(\alpha,\beta)e^{-ix\alpha-iy\beta}d\alpha\,d\beta;$$

$$H_{11}=\overline{\alpha}+\zeta_0\beta^2\overline{\alpha}^3;\quad H_{22}=\overline{\alpha}+\zeta_0\alpha^2\overline{\alpha}^3;\quad H_{33}=\overline{\alpha};\quad H_{12}=H_{21}=-\zeta_0\alpha\beta\overline{\alpha}^3; \tag{2}$$

$$H_{31}=-H_{13}=\alpha_0 i\alpha\overline{\alpha}^2;\quad H_{32}=-H_{23}=\alpha_0 i\beta\overline{\alpha}^2;\quad \overline{\alpha}=1\Big/\sqrt{\alpha^2+\beta^2};$$

$$\theta_0=2(1-v_0^2)\big/E_0;\quad \zeta_0=v_0/(1-v_0);\quad \alpha_0=(1-2v_0)/(2-2v_0).$$

(E, E_0 – модули упругости; v, v_0 – коэффициенты Пуассона материалов покрытия и полупространства).

Перемещения покрытия и поверхностных точек упругого полупространства в зоне контакта должны удовлетворять условиям:

$$\overline{U}_1-h\left[\overline{U}_3\right]'_x=V_1;\quad U_2-h\left[U_3\right]'_y=V_3;\quad U_3=V_3,\quad (x\notin(\alpha_i,\beta_i),\quad i=\overline{1,N}),\quad |y|<\infty. \tag{3}$$

При обработке тел с покрытием возникает вопрос о возможном расширении существующего отслоения (трещины), т.е. когда в точках $x=a_i-0$, $x=b_i+0$, ($i=1,2,...,N$) наступает состояние подвижного равновесия, определяемого условием [5]

$$N_{m,i}^{\mp}(y)=K_m/\pi,\quad m=\overline{1,3};\quad i=\overline{1,N},\quad |y|<\infty\ , \tag{4}$$

где K_m – коэффициенты сцепления на скалывание ($m=1$), сдвиг ($m=2$) и на отрыв ($m=3$) покрытия, которые определяются экспериментально; $N_{m,i}^{\mp}(y)$ – коэффициенты интенсивности контактных напряжений для i-го отслоения в точках конца и начала участка сцепления, полученные на основе линейной теории упругости, определяются по формулам [5]

$$N_{m,i}^{-}(y)=\lim_{x\to a_i-0}\sqrt{a_i-x}\,p_m(x,y),\quad N_{m,i}^{+}(y)=\lim_{x\to b_i+0}\sqrt{x-b_i}\,p_m(x,y)\ . \tag{5}$$

Следуя работе [6] введем функции, определяющие величины раскрытия полосовых отслоений

$$\chi_1=U_1-h\left[U_3\right]'_x;\quad \chi_2=U_2-h\left[U_3\right]'_y-V_2,\quad \chi_3=U_3-V_3,\quad |x,y|<\infty. \tag{6}$$

Применяя преобразование Фурье по переменными x, y с параметрами α, β к формулам (1)-(6), разрешив эти уравнения относительно $p_m^{\alpha\beta}$ и применив обратное преобразование Фурье по переменной α, получим такие интегро-дифференциальные равенства [7]:

$$\begin{pmatrix}p_1^{\beta}(x)\\ p_2^{\beta}(x)\\ p_3^{\beta}(x)\end{pmatrix}\underset{x\notin(a_i,b_i)}{=}-\left(\frac{d^2}{dx^2}-\beta^2\right)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{a_j}^{b_j}\begin{pmatrix}K_{11}^{\beta,1}(x-s) & K_{12}^{\beta,1}(x-s) & K_{13}^{\beta,1}(x-s)\\ K_{21}^{\beta,1}(x-s) & K_{22}^{\beta,1}(x-s) & K_{23}^{\beta,1}(x-s)\\ K_{31}^{\beta,1}(x-s) & K_{32}^{\beta,1}(x-s) & K_{33}^{\beta,1}(x-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{1,j}^{\beta}(x)\\ \chi_{2,j}^{\beta}(x)\\ \chi_{3,j}^{\beta}(x)\end{pmatrix}ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}K_{11}^{\beta,0}(x-s) & K_{12}^{\beta,0}(x-s) & K_{13}^{\beta,0}(x-s)\\ K_{21}^{\beta,0}(x-s) & K_{22}^{\beta,0}(x-s) & K_{23}^{\beta,0}(x-s)\\ K_{31}^{\beta,0}(x-s) & K_{32}^{\beta,0}(x-s) & K_{33}^{\beta,0}(x-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{1,j}^{\beta}(x)\\ q_{2,j}^{\beta}(x)\\ q_{3,j}^{\beta}(x)\end{pmatrix}ds\underset{x\in(a_i,b_i)}{=}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

$$K_{pm}^{\beta,r}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha^{2r}e^{-iz\alpha}L_{pm}^{\beta}(\alpha)d\alpha;\quad p,m=\overline{1,3};\quad i=\overline{1,N};\quad r=0,1..$$

Здесь $L^{\beta}_{j,m}(\alpha)$ – элементы обратной матрицы для матрицы $\bar{L}^{\beta}(\alpha)$:

$$\bar{L}^{\beta}(\alpha)=\begin{pmatrix} \beta^2+H_{11}^{\alpha\beta} & \alpha\beta+H_{12}^{\alpha\beta} & i\alpha h+H_{13}^{\alpha\beta} \\ \alpha\beta+H_{21}^{\alpha\beta} & \alpha^2+2\nu_1\beta^2+H_{22}^{\alpha\beta} & i\beta h+H_{23}^{\alpha\beta} \\ -i\alpha h+H_{11}^{\alpha\beta} & i\beta h+H_{32}^{\alpha\beta} & 1+H_{11}^{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Второе равенство в (7) является матричной системой интегродифференциальных уравнений для определения трансформант Фурье раскрытия j-х отслоений, а первое равенство в (7) определяет трансформанты Фурье контактных напряжений между отслоениями.

Из представления для $K_{jj}^{\beta,1}(x)$ следует, что эти функции имеют логарифмическую особенность при $x=0$. Поэтому решения системы интегро-дифференциальных уравнений из (7) при $x\in(\alpha_i,\beta_i)$ разыскивается в виде ряда по многочленам Чебышева второго рода $U_m(x)$ [7] ($j=\overline{1,3}$; $i=\overline{1,N}$.):

$$\chi_{j,i}(s)=\ell_i^{-2}\sqrt{(\beta_i-s)(s-\alpha_i)}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{m,j}^{(i)}U_m\left((s-\zeta_i)/\ell_i\right);\quad 2\ell_i=\beta_i-\alpha_i;\quad 2\zeta_i=\beta_i+\alpha_i. \quad (9)$$

Для определения коэффициентов $\varphi_{m,j}^{(i)}$ получена система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{m,j}^{(i)}I_{m,i,j}^{(i,r)}=f_{j,k}^{(r)},\quad (j=\overline{1,3},\quad r=\overline{1,N},\quad k=\overline{0,\infty}). \quad (10)$$

Коэффициенты системы (10) зависят от нагрузок на покрытие и от материала упругого полупространства.

Трансформанты Фурье коэффициентов $N_{0,j,i}^{\mp}$ будут вычисляться по формулам:

$$N_{\beta,j,i}^{-}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)(-1)^{m+1}\varphi_{m,j}^{(i)},\quad N_{\beta,j,i}^{+}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\varphi_{m,j}^{(i)},\quad \left(i=\overline{1,N};\quad j=\overline{1,3}\right). \quad (11)$$

Для одного полосового отслоения решение существенно упрощается и с увеличением ширины отслоения сходимость предложенного приближенного решения ухудшается. Поэтому укажем другое решение для одного отслоения, сходимость которого с увеличением ширины отслоения будет улучшаться. Будем считать, что отслоение занимает область:

$$-a\le x\le a,\quad |y|<\infty.$$

Представив трансформанты Фурье заданных нагрузок по переменной y с параметром β в виде четной $q_{m,\beta}^{+}(x)$ и нечетной $q_{m,\beta}^{-}(x)$ составляющих, получим систему интегральных уравнений с разностями и суммационными ядрами ($\alpha_0=\beta a$):

$$\sum_{j=1}^{3}\int_0^{\infty}\left[\ell_{m,j}^{\beta}\left(|t-\tau|\right)\mp K_{m,j}^{\beta}\left(t+\tau+2\alpha_0\right)\right]p_{j,\beta}^{\pm}(\tau+\alpha_0)d\tau=f_{m,\beta}^{\pm}(t),\qquad m=\overline{1,3}. \quad (12)$$

Решения этой системы разыскиваем в виде [3]:

$$p_{j,\beta}^{\pm}(\tau+\alpha_0)=2(2t)^{-1/2}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\varphi_{n,j}^{\pm}(\beta)L_n^{-1/2}(2t),\quad \beta>0;\quad t\ge 0, \quad (13)$$

$\mu_n=2\sqrt{2}n!/\Gamma(n+0{,}5)$; $L_n^{\alpha}(z)$ – многочлены Чебышева-Лагерра; $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [7]. Коэффициенты $\varphi_{n,j}^{\pm}(\beta)$ определяются из системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(I_{m-n}^{r,j} \mp k_{m+n}^{r,j}\right)\varphi_{n,j}^{\pm}(\beta)= f_{m,j}^{\pm}; \quad r=\overline{1,3}; \quad m=\overline{0,\infty}. \tag{14}$$

Коэффициенты интенсивности при $x = a$ равны:

$$N_{\beta,j} = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\left(\varphi_{n,j}^{+}(\beta)+\varphi_{n,j}^{-}(\beta)\right), \quad j=\overline{1,3}. \tag{15}$$

Если нагрузки на покрытие $q_j(x,y)=\bar{q}_j(x)$, то контактные напряжения $\bar{p}_j(x)$, ($x \ge 0$) можно определить из интегро-дифференциальных уравнений [3]:

$$\bar{p}_j(x)+D_j\int_0^{\infty}\bar{K}_j(x-s)\bar{p}_j(s)ds=\bar{q}_j(x); \quad \bar{K}_j(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{-1}e^{-ixt}dt, \quad x>0,$$
$$D_1=D_2=-d^2/dx^2; \quad D_3=d^4/dx^4. \tag{16}$$

Построены точные решения этих уравнений методом факторизации [3].

Для установления расчетных зависимостей между технологическими параметрами обработки и явлением отрыва покрытий при условии их недостаточно прочного сцепления предлагается следующая математическая модель.

Система уравнений, определяющих тепловое и напряженно-деформированное состояние изделия с покрытием при механической обработке, содержит уравнение нестационарной тепловодности [2] ($k=1, -h \le z \le h$ и $k=2, h \le z < \infty$):

$$a_k^2\bar{\Delta}T_k=\partial T_k/\partial\tau; \quad \bar{\Delta}=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2, \tag{17}$$

и уравнение упругости Ламе в перемещениях:

$$\tilde{\theta}_k\,\partial\theta_k/\partial z+\bar{\Delta}\tilde{U}_k=b_k^T\,\partial T_k/\partial z; \quad \tilde{\theta}_k\,\partial\theta_k/\partial x+\bar{\Delta}\tilde{V}_k=b_k^T\,\partial T_k/\partial x;$$
$$\tilde{\theta}_k=1/(1-2v_k); \quad b_k^T=2\tilde{\theta}_k G_k(1+v_k)\alpha_t^{(k)}, \quad \theta_k=\partial\tilde{U}_k/\partial z+\partial\tilde{V}_k/\partial x, \tag{18}$$

где $T_k(x,z,\tau)$ – температура в точке с координатами (x,z) и в любой момент времени τ (при $k=1$ – в покрытии, при $k=2$ – в упругом полупространстве); a_k – температуропроводности материалов; $\alpha_t^{(k)}$ – температурный коэффициенты линейного расширения; v_k, G_k – постоянные Ламе; U_k, V_k – компоненты вектора перемещений точки (x,z). Начальные условия для данной задачи можно взять нулевые. Граничные условия для температурных полей и полей напряжений, учитывающие теплообмен с поверхности вне зоны контакта круга с деталью и интенсивного тепловыделения в зоне обработки, имеют вид [2, 3] ($|y|<\ell$):

$$\lambda_1\partial T_1/\partial z=-q_1(z,\tau); \quad \sigma_z^1(x,0,\tau)=\sigma_z^2(x,0,\tau), \tag{19}$$

где $q(z,\tau)$ – интенсивность теплового потока, выделяемого в зоне контакта инструмента с обрабатываемой поверхностью; λ_1 – коэффициент теплопроводности шлифуемого материала; ℓ – длина зоны контакта инструмента с обрабатываемой поверхностью; γ_1 – коэффициент теплообмена с окружающей средой; σ_x^1, σ_x^2 – нормальные напряжения, соответственно в покрытии и матрице.

Условия сопряжения покрытия с упругим полупостанством:

– для температурных полей

$$T_1(x,h-0,\tau)=T_2(x,h+0,\tau), \quad \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}(x,h-0,\tau)=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}(x,h+0,\tau); \tag{20}$$

– для деформационных полей и полей напряжения

$$U_1(x,h-0)=U_2(x,h+0); V_1(x,h-0)=V_2(x,h+0); \sigma_x^1(x,h-0)-\sigma_x^2(x,h+0)=\langle\sigma_x\rangle, |x|<a. \tag{21}$$

Решение уравнений (9)-(11) с условиями (12)-(14) позволило получить в явном виде выражения для расчета температуры как в покрытии так и в основном материале в виде [2]:

$$T_1(x,z,\tau)=\frac{cV_{kp}}{\pi\lambda_1\ell\sqrt{Vg}}\int_0^{\tau}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{e^{-\frac{(z-\eta)^2+(z-\eta)^2}{4a_1^2(\tau-t)^2}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-t)}}+\gamma e^{\gamma^2(\tau-t)}\left[1+\Phi\left(\gamma\sqrt{\tau-t}\right)\right]\right\}d\eta dt,\ \ 0<z<h\,.$$

$$T_2(x,z,\tau)=\frac{cV_{kp}}{\pi\lambda_2\ell\sqrt{Vg}}\int_0^{\tau}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\sqrt{z^2+(x-\eta)^2}\,e^{-\frac{Vg(y-\eta)^2}{2a_2}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}K_{1/2}\left(\frac{Vg}{2a_2}\sqrt{(x-\eta)^2+z^2}\right)d\eta dt,\quad z>h. \qquad (22)$$

($\Phi(x), K_{1/2}(x)$ – функции Лапласа и Бесселя).

Температурные напряжения определяются формулами

$$\begin{aligned}&\sigma_x^{(1)}=\sigma_y^{(1)}=-\overline{\alpha}_t^{(1)}T_1(x,z,\tau)+b_1^*x/h+b_0^*;\quad \overline{\alpha}_t^{(k)}=\alpha_t^kE_k\big/(1-\nu_k),\\ &\sigma_x^{(2)}=\sigma_y^{(2)}=-\overline{\alpha}_t^{(2)}T_2(x,z,\tau)+m_1^{-1}\left(m_hb_1^*\,x/h+b_0^*\right),\end{aligned} \qquad (23)$$

$$N_0^*b_0^*=2m_1\left[2\left(m_1+m_h^3\right)N_1^*-3\left(m_h^2-m_1\right)N_2^*\right],\ N_0^*b_1^*=6m_1\left[2\left(m_1+m_h\right)N_2^*-\left(m_h^2-m_1\right)N_1^*\right],$$

$$hN_1^*=\left[\overline{\alpha}_t^{(1)}\int_0^{+h}T_1(x,z,\tau)dx+\overline{\alpha}_t^{(2)}\int_0^{\delta}T_2(x,z,\tau)dx\right],h^3N_2^*=\left[\overline{\alpha}_t^{(1)}\int_0^{+h}T_1(x,z,\tau)dx+\overline{\alpha}_t^{(2)}\int_0^{\delta}T_2(x,z,\tau)dx\right],$$

$$N_0^*=4\left(m_1+m_h\right)\left(m_1+m_h^3\right)-3\left(m_h^2-m_1\right)^2;\quad m_1(1-\nu_1)E_2=(1-\nu_2E_1);\quad m_h=\delta/h\,,$$

где V_{kp}, V_{∂} – технологические параметры, $\lambda_1,\lambda_2,a_1,a_2,\alpha_t^{(1)},\alpha_t^{(2)}$ – теплофизические характеристики материалов покрытия и основного материала.

Полученные зависимости (22)-(23) позволяют моделировать процесс шлифования деталей с покрытием с учетом требований к качеству обработанных поверхностей.

Выводы: В работе построена математическая модель по определению условий отрыва отслоившегося покрытия в зависимости от свойств материалов. Получены критериальные соотношения, связывающие температуру шлифования, интенсивность теплового потока, напряженно-деформированное состояние обрабатываемой поверхности изделий с технологическими параметрами, позволяющие управлять качеством обработки с целью предотвращения дефектов отслоения покрытия от основной матрицы.

Результаты работы могут быть применены не только в судовом машиностроении или судоремонте, но и в общем машиностроении.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Маталин А. А. Технологические методы повышения долговечности деталей машин/ А. А. Маталин. – К.: Техника, 1971.
2. Усов А. В. Моделирование систем с распределенными параметрами / А. В. Усов, Д. Н. Дубров, Д. В. Дмитришин.– Одесса: Астропринт, 2003.
3. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. – К.: Вища школа, 1982. – 167 с.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1970. – 357 с.
5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1971. – 420 с.

6. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, жестких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 324 с.
7. Градштейн Н. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Н. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1971. – 1108 с.

УСОВ Анатолий Васильевич – д.т.н., заведующий кафедрой высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета.

Научные интересы:

– математические модели в механике деформируемого твердого тела.

ВОРОБЬЕВА Лариса Александровна – преподаватель математики Морского колледжа технического флота Одесской национальной морской академии.

Научные интересы:

– математические модели в механике деформируемого твердого тела.

УДК 519.711

А.В. Усов, Е.Н. Богданова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ШЛИФОВАНИИ ДЕТАЛЕЙ ИЗ ФЕРРОКЕРАМИКИ

Постановка проблемы и анализ публикаций. При обработке изделий из ферритов, особенно на этапе алмазно-абразивного шлифования их рабочих поверхностей, возникают проблемы сохранения качества. В первую очередь, это относится к тому, что на шлифуемых поверхностях этих изделий из-за высокой хрупкости появляются трещины и сколы [1]. Причиной интенсивного трещино- и сколообразования являются низкие механические свойства самого материала ферритов и формирующиеся в поверхностном слое при шлифовании термомеханические напряжения. В работе [2], посвященной изучению механизма разрушения поверхностного слоя изделий на финишных операциях указывается на определяющую роль термомеханических процессов, сопровождающих алмазно-абразивную обработку.

Основная часть. Для дальнейших исследований кинетики формирования термомеханических процессов в качестве основной теоретической предпосылки воспользуемся следующей системой дифференциальных уравнений, описывающей взаимодействие поля деформаций и поля температуры. Система уравнений, определяющих тепловое и напряженно-деформированное состояние обрабатываемой поверхности деталей, материал которых имеет неоднородности, как произвольного характера, так и ступенчатой формы (например, с различными покрытиями) при шлифовании включает в себя [2]:

а) уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

б) уравнения упругости Ламэ в перемещениях:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \theta}{\partial x}\cdot\frac{1}{1-2\mu} + \Delta\vec{U} = b^T\,\frac{\partial T}{\partial x};\;\; \vec{U} = \frac{U}{2G};\;\; \vec{V} = \frac{V}{2G};\\ &\frac{\partial \theta}{\partial y}\cdot\frac{1}{1-2\mu} + \Delta\vec{U} = b^T\,\frac{\partial T}{\partial y};\;\; b^T = \frac{4G(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha t \end{aligned} \tag{2}$$

в) начальные условия: $T(x, y, o) = 0$ (3)

г) граничные условия для температурных и деформационных полей:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q(y,t)}{\lambda},\;\; |y| < l;\\ &-\frac{\partial T}{\partial x} + jT = 0,\;\; |y| > l;\\ &\sigma_x(x,y,t)\big|_{x=0} = \tau_{xy}(x,y,t)\big|_{x=0} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

где: μ, G - постоянные Ляме; $b_t = 3\lambda_t + 2G$; ρ - плотность обрабатываемого материала:, α_t - температурный коэффициент линейного расширения металла; $a = \lambda / C_v$ - коэффициент температуропроводности; λ - коэффициент теплопроводности; C_v - объемная теплоемкость; $\vec{U}$ (Φ, t),$V(\Phi,t)$ - вектора перемещений внутренней т. Ф $(x, y,)$ поверхностного слоя под действием термомеханических усилий сопровождающих процесс шлифования; $\eta = \alpha_t\beta_t T(\Phi, \tau) / \lambda$; q – мощность теплового источника; $\sigma(x,y)$,

$\tau(x,y)$- нормальные и касательные напряжения; t- время; $a_к$ –длина зоны контакта инструмента с деталью; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа; $2l$ –размер дефекта.

Анализ масштабных схем взаимодействия круга с обрабатываемой поверхностью показал, что кривизна круга и детали в пределах зоны контакта несущественно влияет на геометрическую схему взаимодействия круга с деталью. Поэтому при составлении расчетной схемы допускаем, что деталь представляет собой кусочно-однородную полуплоскость, что позволяет изучать термомеханические процессы при шлифовании деталей с несколькими типами покрытий толщиной $\Delta a_К$ наносимых на основную матрицу. Такая схема предопределяет тепловые и деформационные условия сопряжения слоев по границам их раздела - $a_К$.

Влияние структурных неоднородностей в виде раковин, флокенов и других дефектов, возникающих в материале заготовки детали, как при выплавке, так и по ходу технологического процесса, будем учитывать в модели наличием в поверхностном слое включений и дефектов типа трещин.

Расчетная схема к задаче определения термомеханического состояния при шлифовании деталей из ферромагнитных материалов, в верхнем слое которых имеются неоднородности типа включений и трещин, приведена на рис. 1.

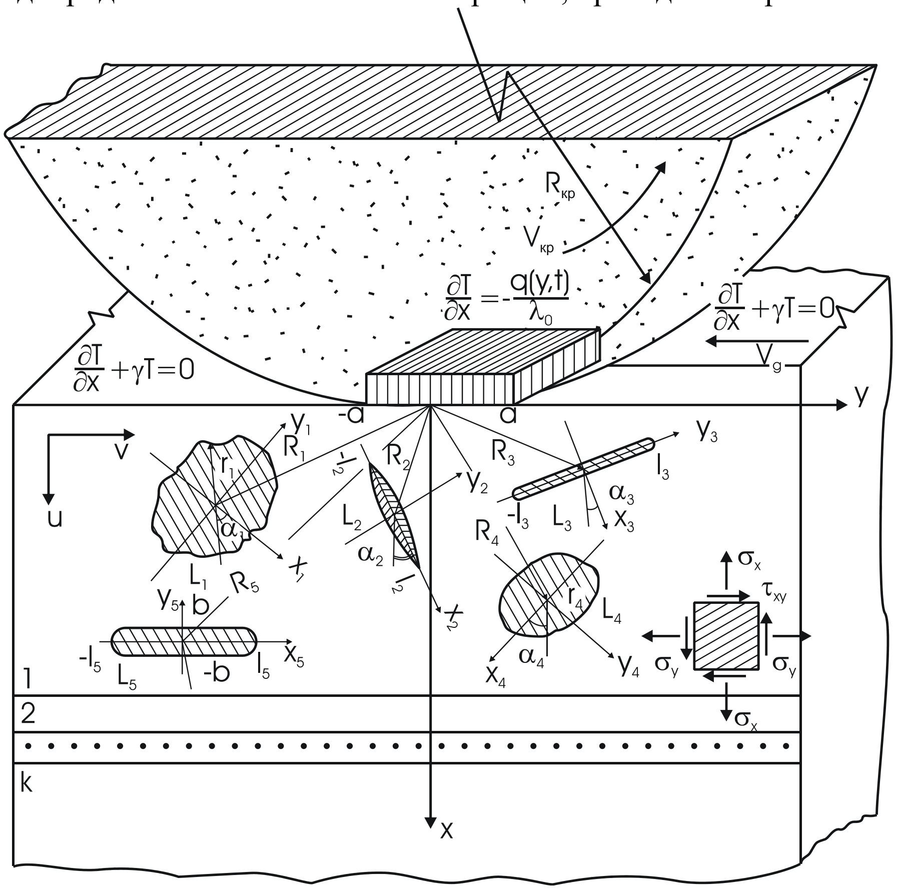


Рис. 1. Расчетная схема для определения термомеханического состояния при шлифовании деталей с многослойным покрытием, в верхнем слое которых имеются неоднородности

д) Условия разрывности решения

на включениях: на трещиноподобных дефектах:

$$< \tilde{u} >= 0; \quad < \sigma_x >\neq 0; \qquad < \sigma_x >= 0; \quad < \tilde{u} >\neq 0;$$
$$< v >= 0; \quad < \tau_{xy} >\neq 0; \qquad < \tau_{xy} >= 0; \quad < \tilde{v} >\neq 0; \tag{5}$$

Условия разрывности решения (5) на включениях и трещиноподобных дефектах следует понимать так [1]:

$$\begin{aligned} &< \tilde{u} >= \tilde{u}(-0,y)-\tilde{u}(+0,y); \quad < \sigma_x >= \sigma_x(-0,y)-\sigma_x(+0,y); \\ &< v >= \hat{v}(-0,y)-\hat{v}(+0,y); \quad < \tau_{xy} >= \tau_{xy}(-0,y)-\tau_{xy}(+0,y). \end{aligned} \tag{6}$$

Моделирование влияния исходной кусочной однородности шлифуемых материалов /деталей с покрытиями/ на термомеханические процессы осуществляется методом разрывных решений, разработанного проф. Г. Я. Поповым [3]. Под ними понимаются такие решения, которые удовлетворяют уравнениям теплопроводности Фурье и упругости Ламе всюду, кроме границ дефектов. При переходе через границу поля смещений и напряжений терпят разрывы I рода, т.е. появляются их скачки $\langle \upsilon \rangle, \langle v \rangle, \langle \sigma_x \rangle, \langle \tau_{xy} \rangle$.

Решение тепловой задачи (1) - (4), осуществляется с помощью интегральных преобразований Фурье по переменной y и Лапласа по t функции $T\,/\,x,y,t\,/$ в I (k=0) слое, которые описываются в интегральной форме в виде:

$$T_0(x,y,t)=\int_{-a}^{a} d\tau \int_0^t \chi(t-\tau,x,y-\eta)\,d\tau, \tag{7}$$

где $q(t,x,y-\eta)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_r K_p^m(y-\eta,x)e^{pt}dp,$

$\chi(y,\tau)=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\chi_m(y)2e^{-\tau}L_m(2\tau)\,L_m(2\tau)$ — полиномы Лаггера,

$K_p^m(y-\eta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{-t\beta(y-\eta)}}{l_{m_1\beta p}}\quad l_{m_1\beta p}$ — выражение, учитывающее теплофизические свойства слоев $/k=0-m/$, их толщину и граничные условия.

Напряженно-деформированное состояние слоистой полуплоскости также оценивается методом разрывных решений. Границы раздела $x=a_k\,(k=0)$ рассматриваются как дефекты, при переходе через которые терпят разрывы поля смещений и напряжений.

Построение разрывных решений уравнений Ламе с заданными скачками осуществляется с помощью функций Треффца:

$$\bar{\upsilon}=\psi_1+(x-a)\psi_0',\ \bar{v}=\psi_2+(x-a)\psi'_0;\ \psi_0'=\frac{\psi_1'+\psi'_2}{3-4\eta},e=\psi_1'+\psi_2''+\psi_0', \tag{8}$$

где “ $\Delta\psi_0(x,y)=0,\Delta\psi_j(x,y)=b_k^tT^{(j)},(j=1,2)$ ” $\dfrac{\partial}{\partial x}$, “ ; ” $\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Напряжения находят по формулам:

$$\begin{aligned} &\sigma_x=(1-\mu)\psi_0'+\psi_1'+(x-a_k)\psi_0''; \quad \sigma_y=-?\,\mu\psi_0'+\psi'_2+(x-a_k)\psi''_0 \\ &\qquad\qquad \tau_{xy}=\psi_1^2+2(x-a_k)\psi'_0+\psi_2'+\psi_0'. \end{aligned} \tag{9}$$

Применение обобщенных преобразований Фурье по переменным x,y к уравнениям (1) - (5), (6), (7) с учетом (9) позволяет получить рекуррентные соотношения, связывающие смещения и напряжения в к-м слое с напряжениями и смещениями, формирующимися в первом слое под действием нестационарных температурных полей.

Влияние неоднородностей в поверхностном слое сталей и сплавов на интенсивность трещино- и сколообразования при шлифовании исследуется следующим образом. В условиях неравномерного нагрева в поверхностном слое возникают тепловые деформации, которые вызывают температурные напряжения. Под действием этих напряжений, концентрирующихся в местах расположения дефектов, и происходит образование шлифовочных трещин. Математически задача формулируется так. Пусть в упругой полуплоскости на линиях $\tilde{x}_i = 0$ имеются дефекты $\left|\tilde{y}_i\right| \le l_i, \left(i = \overline{1,k}\right)$, при переходе через которые терпят разрывы поля смещений и напряжений:

$$\left\langle \tilde{v}(\tilde{y}) \right\rangle = \tilde{v}_k\left(-0,\tilde{y}\right) - \tilde{v}_k\left(+0,\tilde{y}\right); \left\langle \overset{k}{\sigma}_x(\tilde{y}) \right\rangle = \overset{k}{\sigma}_x\left(-0,\tilde{y}\right) - \overset{k}{\sigma}_x\left(+0,y\right); \tag{10}$$

$$\left\langle \tilde{\upsilon}(\tilde{y}) \right\rangle = \tilde{u}_k\left(-0,\tilde{y}\right) - \tilde{u}_k\left(+0,\tilde{y}\right); \left\langle \overset{k}{\tau}_{xy}(\tilde{y}) \right\rangle = \overset{k}{\tau}_{xy}\left(-0,\tilde{y}\right) - \overset{k}{\tau}_{xy}\left(+0,\tilde{y}\right).$$

В зависимости от типа дефектов реализуются граничные условия (8) первого типа, либо второго. Будем различать левый (находящийся при движении по l_i в положительном направлении) и правый берега дефектов, обозначая относящиеся к ним величины индексами “+” и “–”. Решение задачи термоупругости (1) - (4), (5) - (8) для поверхностного слоя, содержащего указанные дефекты при условии, что температурное поле описывается выражением (7) сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений относительно скачков смещений, $\left\langle \tilde{u}'_k\left(\tilde{y}\right)\right\rangle \left\langle \tilde{v}'_x\left(\tilde{y}\right)\right\rangle$ – в случае трещин, и скачков напряжений, $\left\langle \overset{k}{\sigma}_x\left(\tilde{y}\right)\right\rangle \left\langle \overset{k}{\tau}_{xy}\left(\tilde{y}\right)\right\rangle$ – в случае включений.

Наибольший интерес представляет поведение напряжений в окрестности вершин дефектов типа трещин, остроконечных включений, структурных несовершенств, т.е. особенностей напряжений при $y \to \pm l_k$.Характер поля напряжений в непосредственной близости от конца дефекта, полученного в рамках классической теории упругости, определяется коэффициентами интенсивности напряжений $K_I + iK_{II}$.

Так, исследование интенсивности напряжений в вершинах дефекта длиной $2l$, расположенного на глубине σ^*, когда на поверхности тела $/ x = 0, |y| \le a^* /$ задан тепловой поток q, позволило установить предельное значение этого потока q^*, при котором указанный дефект начинает развиваться в магистральную трещину:

$$q^* = \frac{2\sqrt{3}\lambda(1-\nu)K_{4C}}{\alpha_2 El\sqrt{\pi l}\sigma^*}\,. \tag{11}$$

Взаимное влияние дефектов на интенсивность напряжений сказывается при расположении их на расстоянии друг от друга не более $\sigma^* = \dfrac{1}{3}$. При этом наименьшая трещиностойкость материала достигается, если дефекты ориентированы относительно друг друга под углом $\phi = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$. Геометрия и свойства α_t^B включений могут создавать условия как для торможения, так и для развития шлифовочных трещин. Если тепловой поток направлен параллельно большей оси эллиптического включения и прямолинейной термоизолированной трещине, то при коэффициенте линейного температурного расширения включения большем, чем основного материала, $\alpha_t^M / \alpha_t^B > \alpha_t^M /$ увеличение жесткости включения приводит к возрастанию для различных отношений коэффициентов теплопроводности, составляющих материала.

Разработанная математическая модель (1)-(6), описывает термомеханические процессы в поверхностном слое при шлифовании деталей из феррокерамики с учетом технологических дефектов.

Для устранения дефектов типа трещин и сколов на обрабатываемых поверхностях феррокерамических изделий необходимо при выборе технологических параметров удовлетворить следующим критериям по максимально допустимой температуре в зоне обработки T_k^{max}, напряжениям σ_{max}, интенсивности напряжений K_1 и тепловому потоку q^*, которые являются следствием решения поставленной задачи:

$$T_k^{\max}(L,0)=\frac{CV_{kp}a}{\lambda l V_\partial^2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\left[1-\exp\left(-\frac{V_\partial\sqrt{Dt_{шл}}}{a}\right)\right]\le\left[T\right]c.n.;$$

$$\sigma_{\max}(x,\tau)=2G\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t T_k^{\max} erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)\le\left[\sigma\right]_{пч};$$

$$K_1=\frac{1}{\pi\sqrt{l}}\int_{-l}^{l}\sqrt{\frac{l+t}{l-t}}\left\{\sigma_{xx},\sigma_{yy}\right\}dt\le K_{1C}; \qquad q^*=\frac{P_z V_{kp}\alpha_b}{\sqrt{Dt_{шл}}}\le\frac{\sqrt{3}\lambda K_{1C}}{Hl\sqrt{\pi l}\delta^*}.$$

Приведенные расчетные зависимости позволяют выбрать режимы обработки и характеристики инструмента, применение которых позволит избежать трещинообразования на рабочих поверхностях феррокерамических изделий.

Выводы. Разработана математическая модель, которая описывает термомеханические процессы в поверхностном слое при шлифовании деталей из феррокерамики с учетом наследственных дефектов. Получены расчетные зависимости, позволяющие теоретически моделировать условия трещинообразования на рабочих поверхностях феррокерамических изделий при определенных режимах шлифования кругами с известными характеристиками, а также осуществлять их выбор с целью предотвращения указанных дефектов. Основные результаты исследований апробированы в условиях непосредственного производства при изготовлении деталей из феррокерамики, к рабочим поверхностям которых предъявляются повышенные требования относительно их эксплуатационных качеств.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Проблемы порошкового материаловедения/В.Н. Анциферов, В.Н. Летюк, А.Н. Дубров, А.И. Сатин. – Екатеринбург.:УрО РАН, 2005.–408 с.
2. Усов А.В. Моделирование систем с распределенными параметрами/А.В. Усов, А.Н. Дубров, Д.В. Дмитришин.Монография.– Одесса:Астропринт,2002.– 664 с.
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений/Г.Я. Попов. – М.:Наука, 1982. – 344 с.

УСОВ Анатолий Васильевич – д.т.н., профессор, зав. кафедрой высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета.

Научные интересы:

– математические модели технических и социально-экономических систем.

БОГДАНОВА Елена Наиловна – ассистент кафедры физики Одесского национального политехнического университета.

Научные интересы:

– теплофизика, компьютерное моделирование.

УДК 515.2

С.А. Устенко, С.В. Діданов

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНОЇ КРИВОЇ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ КУБІЧНОГО РОЗПОДІЛУ КРИВИНИ

Постановка проблеми. Включення України до системи світових господарських зв’язків поставило перед залізничним транспортом підвищені вимоги до надання транспортних послуг, які в першу чергу? залежать від якості залізничної колії. Від неї залежать подальші витрати на утримання, швидкість руху поїздів тощо. Геометричне моделювання кривих поліпшить взаємодію колії та рухомого складу.

Особливу роль у взаємодії відіграє перехідна крива, вставкою якої забезпечується плавність переходу від прямолінійної ділянки до кругової, чим запобігаються явищу удару колеса по рейці, яке обумовлене раптовою появою (або зникненням) відцентрового прискорення [1].

Аналіз публікацій за темою дослідження. Питанню моделювання перехідних кривих залізничного шляху приділено достатньо уваги. Різні аспекти цього питання висвітлені в роботах [2-5].

Формулювання цілей статті. Метою цієї статті є отримання моделі перехідної кривої із застосуванням кубічного розподілу кривини [6]. Робота є продовженням досліджень, що проводяться в Національному університеті кораблебудування стосовно геометричного моделювання плоских криволінійних обводів об’єктів різних галузей промисловості із застосуванням розподілу кривини.

Основна частина. При русі прямолінійною ділянкою шляху спостерігаються впливу залізничного екіпажу з різних причин, але при переході до криволінійної ділянки виникають зусилля, що значно їх підсилюють. У цьому випадку виникають відцентрові сили, які пропорційні квадрату швидкості руху екіпажу, тому для запобігання появи удару між прямолінійною (1) та круговою (2) ділянками (рис. 1) вбудовують перехідну криву (3). Основною вимогою до перехідної кривої є те, що в початковій точці L її кривина повинна дорівнювати нулю, а в кінцевій точці $C - \frac{1}{R}$.

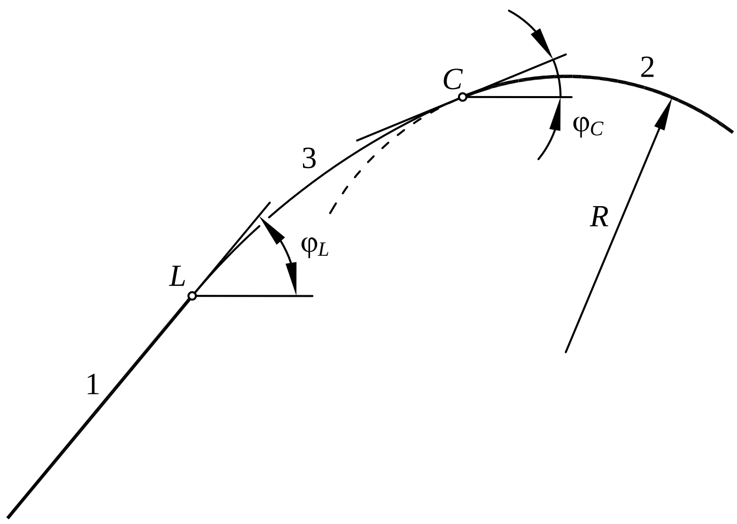


Рис. 1. Побудова перехідної кривої

При вписування екіпажу в криву відбувається його поворот, що призводить до появи кутових прискорень. Можна вважати, що швидкість екіпажу на ділянці перехідної кривої постійна, тому кутове прискорення буде пропорційним швидкості зміни кривини перехідної кривої. Отже, з'являється стрибкоподібне кутове прискорення на початку перехідної кривої та зникає у кінці перехідної кривої, що є дуже небажаним. Таким чином, потрібно забезпечити нульове значення похідної кривини на початку і в кінці перехідної кривої.

Початковими даними для моделювання перехідної кривої будує координати початкової точки L, кути нахилу дотичних у початковій φ_L та кінцевій φ_C точках, радіус колової ділянки R, а також повинні задовольнятись наступні граничні умови:

$$K(0)=0;\ K(S)=\frac{1}{R};\ \left.\frac{dK}{ds}\right|_{s=0}=\left.\frac{dK}{ds}\right|_{s=S}=0, \tag{1}$$

де $K(s)$ – залежність кривини перехідної кривої від параметра s, що є довжиною кривої від точки L до поточної точки, S – довжина всієї перехідної кривої (до точки C).

Виходячи з цих даних, можна зробити висновок, що графік кривини повинен мати точку перегину і мати в початковій та кінцевій точках нульові кути нахилу дотичних (рис. 2).

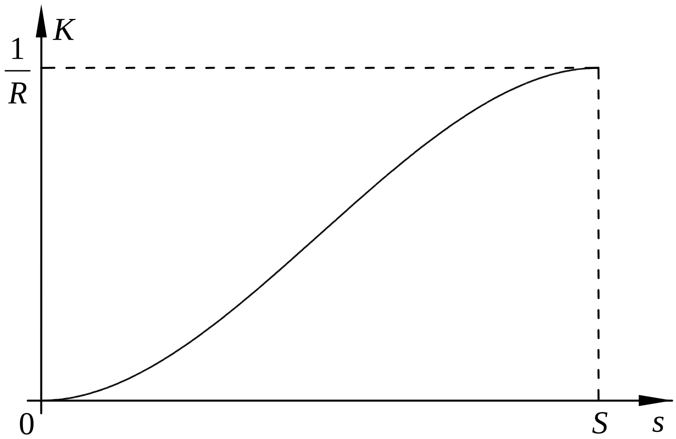


Рис. 2. Кривина перехідної кривої

Оскільки поліном третього степеню має точку перегину, то скористаємось результатами роботи [6], для подання кривини перехідної кривої. Графік кривини матиме наступний вигляд:

$$K(s)=as^3+bs^2+cs+d\,, \tag{2}$$

де a, b, c, d – невідомі коефіцієнти, які треба знайти.

Похідна кривини $K(s)$ по параметру s матиме такий вигляд:

$$\frac{dK}{ds}=3as^2+2bs+c\,.$$

Підставимо граничні умови до рівнянь кривини перехідної кривої та похідної кривини по параметру s і отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} d=0; \\ aS^3+bS^2+cS+d=\dfrac{1}{R}; \\ c=0; \\ 3aS^2+2bS+c=0. \end{cases}$$

Після перетворень знайдемо вирази для невідомих коефіцієнтів:

$$a=-\frac{2}{RS^3};\ b=-\frac{3aS}{2};\ c=0;\ d=0\,.$$

Підставивши їх до рівняння кривини (2), отримаємо:

$$K(s) = \frac{s^2}{RS^3}(3S - 2s), \tag{3}$$

де невідомою є довжина перехідної кривої S.

Згідно твердження 3 роботи [7], приріст кута нахилу дотичної до кривої, утвореної із застосуванням заданого розподілу кривини, дорівнює площі криволінійної трапеції під цим графіком (рис. 3), тобто:

$$\Delta\varphi = \int_0^S K(s)ds, \text{ де } \Delta\varphi = \left|\varphi_C - \varphi_L\right|.$$

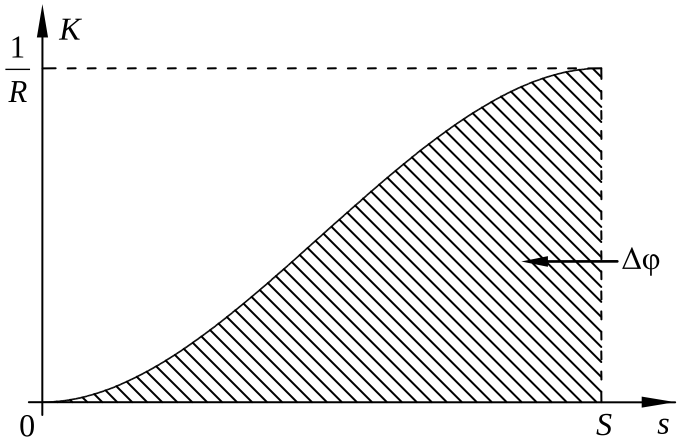


Рис. 3. Приріст нахилу дотичної

Підставляючи до рівняння вираз (3) та виконавши перетворення, отримаємо:

$$S = 2R\Delta\varphi. \tag{4}$$

Підставивши отримане значення довжини перехідної кривої (4) до графіку кривини (3), остаточно отримуємо кубічний розподіл кривини:

$$K(s) = \frac{s^2}{4R^4\Delta\varphi^3}(3R\Delta\varphi - s),$$

На вигляд графіка розподілу кривини перехідної кривої будуть впливати два параметри: приріст кута нахилу дотичної та радіус колової ділянки. Проаналізуємо їх вплив за допомогою спеціально розробленої програми в системі MatLab.

На рис. 4 наведено вплив приросту кута нахилу дотичної до перехідної кривої на залежність її кривини. Графіки отримані при радіусі кругової ділянки 300 м, приріст кута нахилу дотичної змінювався від 40º до 90º з кроком 10º. З рисунку можна зробити висновок, що при збільшенні приросту графік кривини розтягується вздовж довжини перехідної кривої, при цьому максимальне значення кривини не змінюється, оскільки радіус кругової ділянки постійний, а довжина кривої залежить від приросту кута (4).

На рис. 5 наведено вплив радіуса колової ділянки на залежність кривини перехідної кривої. Графіки отримані при прирості кута 70º, радіус кругової ділянки при цьому змінювався від 300 м до 800 м з кроком 100 м. З рисунку можна зробити висновок, що при радіусі кругової ділянки графік кривини одночасно розтягується вздовж довжини та притискається до осі довжини перехідної кривої.

Неважко помітити, що точка перегину графіка кривини лежить посередині довжини. Знайдемо другу похідну кривини (3), прирівняємо її нулю й отримаємо:

$$\frac{d^2K}{ds^2} = \frac{6}{RS^3}(S - 2s) = 0 \Rightarrow s = \frac{S}{2}.$$

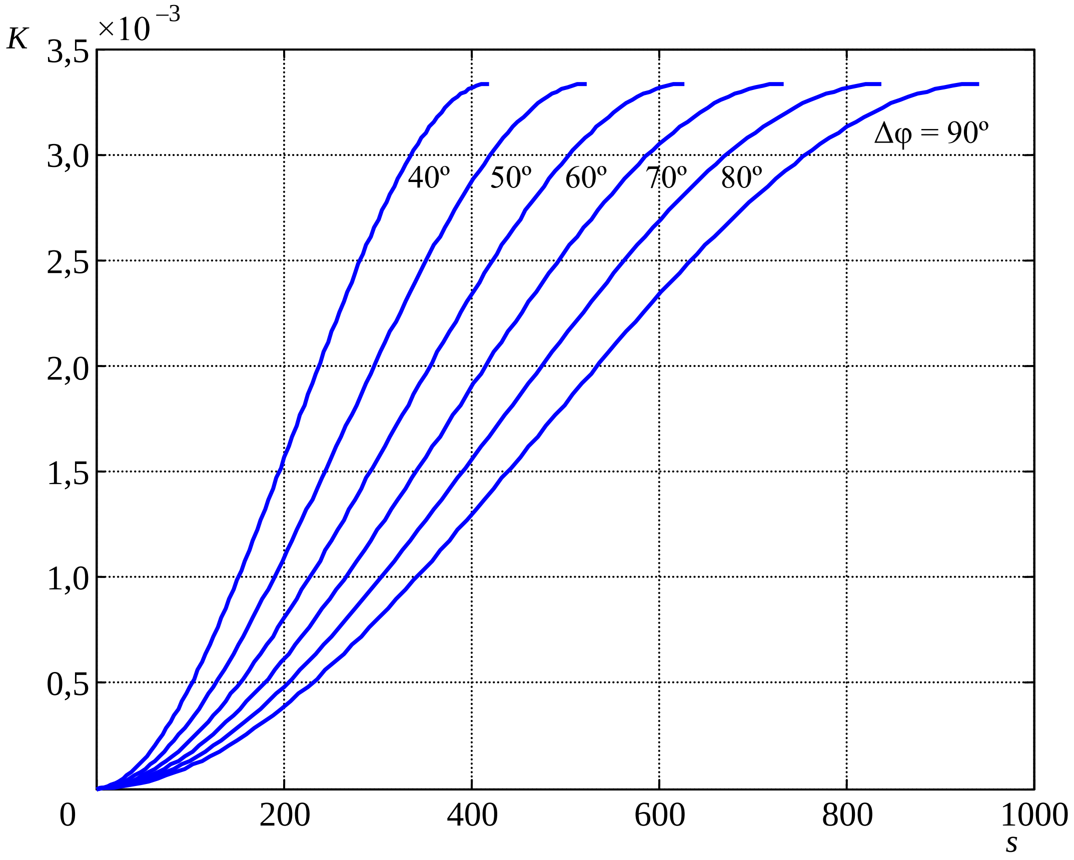


Рис. 4. Вплив приросту нахилу дотичної на кривину перехідної кривої

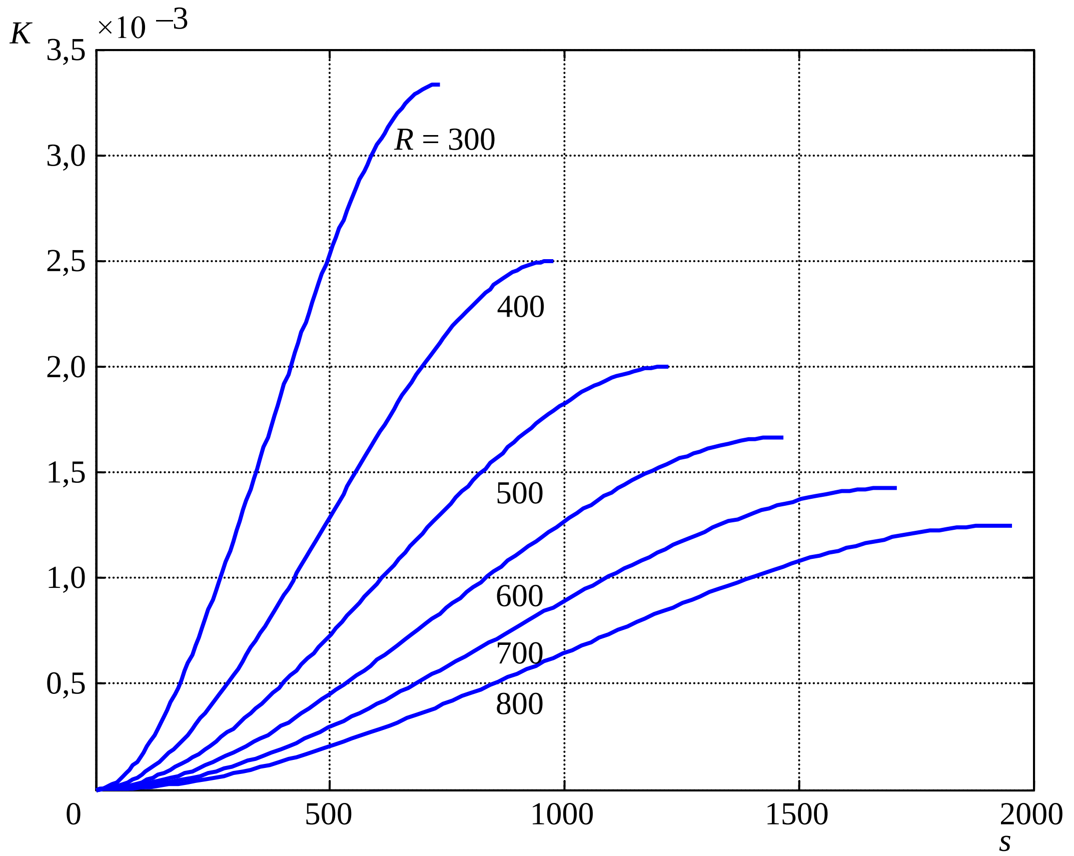


Рис. 5. Вплив радіусу колової ділянки на кривину перехідної кривої

Кут нахилу дотичної до перехідної кривої буде обчислюється за виразом:

$$\varphi(s) = \varphi_L + \int_0^s K(s)ds = \varphi_L + \frac{s^3}{4R^4\Delta\varphi^3}\left(R\Delta\varphi - \frac{s}{4}\right).$$

Згідно роботи [6], рівняння перехідної кривої матиме такий вигляд:

$$x(s) = x_L + \int_0^s \cos\varphi(s)ds;$$
$$y(s) = y_L + \int_0^s \sin\varphi(s)ds.$$

Висновки та перспективи подальших досліджень. Отримано модель перехідної кривої із застосуванням кубічного розподілу кривини та врахуванням граничних умов, що попереджують виникнення стрибкоподібного кутового прискорення. Проведено аналіз отриманого розподілу кривини. Наступним кроком є вибір оптимального розташування колової ділянки залізничного шляху з урахуванням кривини перехідної ділянки.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Амелин С.В. Путь и путевое хозяйство / С.В.Амелин, Л.М.Дановский. – М.: Транспорт, 1986. – 215 с.
2. Ельфимов Г.В. Теория переходных кривых / Г.В. Ельфимов. – М.: Трансжелдориздат, 1948. – 311 с.
3. Путь и путевое хозяйство железных дорог США / [под ред. С.И.Финицкого]. – М.: Транспорт, 1987. – 215 с.
4. Русу С.П. Математическая модель пути пространственной конфигурации при различных режимах движения транспортных экипажей / С.П. Русу, В.В.Кравец // Транспорт. – Дніпропетровськ: СІЧ, 1999. – С. 114–119.
5. Лагута В.В. Удосконалення проектування кривих залізничної колії в плані: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.22.06 "Залізнична колія" / В.В.Лагута. – Дніпропетровськ, 2002. – 18 с.
6. Устенко С.А. Моделювання кривої із застосуванням кубічного закону розподілу її кривини / С.А. Устенко // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вып. 2(31). – С. 480–484.
7. Борисенко В.Д. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу за заданою кривиною / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, В.Є. Спіцин // Праці Харківського державного університету харчування та торгівлі. "Геометричне та комп'ютерне моделювання". – Харків: ХДУХТ, 2004. – Вип. 5. – С. 30–34.

УСТЕНКО Сергій Анатолійович – к.т.н., доцент, докторант Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова.

Наукові інтереси:

– геометричне та комп'ютерне моделювання криволінійних обводів об'єктів різних галузей промисловості із застосуванням розподілу кривини.

ДІДАНОВ Сергій Вікторович – аспірант Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова.

Наукові інтереси:

– геометричне та комп'ютерне моделювання кривих залізничних шляхів у плані, їх з'єднань і перетинів, поздовжнього профілю залізничних шляхів.

УДК 519.6

А.И. Филиппов, О.В. Ахметова, В.А. Рогов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОТОКА СМЕСИ ЖИДКОСТЕЙ

Постановка проблемы и анализ публикаций. Термометрия занимает ведущее место среди физических методов исследования пластов и скважин. Из-за большой сложности термодинамических процессов, при описании которых необходимо использовать сложные модели течения многофазных смесей в трубах, получены приближенные аналитические решения основной задачи термокаротажа только для средней по сечению скважины температуры. Ранее показано, что реальные радиальные распределения температуры могут быть найдены на основе асимптотических методов [4].

Основная часть. Математическая модель базируется на уравнении баланса энергии многофазной среды, которое записывается для удельной внутренней энергии каждой составляющей флюида плотностью ρ_i, заполняющего скважину с объемным содержанием s_i.

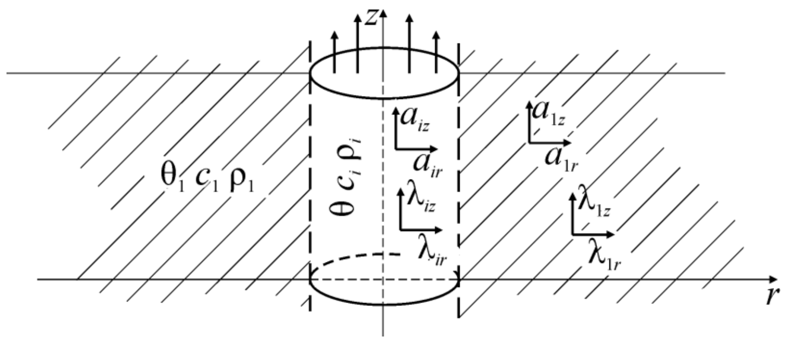


Рис. 1. Геометрия задачи

Постановка задачи в цилиндрических координатах включает уравнение теплопроводности в окружающем трубу массиве

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} = \frac{1}{\rho_1 c_1}\left[\lambda_{1z}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z_{\mathrm{d}}^2} + \lambda_{1r}\frac{1}{r_{\mathrm{d}}}\frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right)\right],\ r_{\mathrm{d}} > r_0,\ \tau > 0,\ z_{\mathrm{d}} > 0 \qquad (1)$$

и уравнение конвективной теплопроводности флюида в скважине после оценки скорости компонентов в вязкой жидкости

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \vec{u}_{\mathrm{ef}}\frac{\partial\theta}{\partial z_{\mathrm{d}}} = \frac{\partial}{\partial z_{\mathrm{d}}}\left(\lambda_z\frac{\partial\theta}{\partial z_{\mathrm{d}}}\right) + \frac{1}{r_{\mathrm{d}}}\frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}}\left(\lambda_r\frac{\partial\theta}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right) + \vec{g}\vec{v}_{\mathrm{ef}}\eta_{\mathrm{ef}},\ r_{\mathrm{d}} < r_0,\ \tau > 0,\ z_{\mathrm{d}} > 0. \qquad (2)$$

На границе трубы и окружающего массива заданы условия равенства температур и тепловых потоков:

$$\theta|_{r_{\mathrm{d}}=r_0} = \theta_1|_{r_{\mathrm{d}}=r_0},\ \lambda_r\left.\frac{\partial\theta}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right|_{r_{\mathrm{d}}=r_0} = \lambda_{1r}\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right|_{r_{\mathrm{d}}=r_0}. \qquad (3)$$

Начальные условия соответствуют естественной невозмущенной температуре Земли, возрастающей с глубиной z_{d} по линейному закону

$$\theta|_{\tau=0} = \theta_1|_{\tau=0} = \theta_{01} - \Gamma z_{\mathrm{d}}, \qquad (4)$$

которая совпадает с температурой в удаленных от трубы точках окружающего массива

$$\theta|_{r_d \to \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d . \tag{5}$$

В точке $z_d = 0$ температура потока известна

$$\theta|_{z_d = 0} = \theta_{01}(\tau) . \tag{6}$$

Для решения задачи (1) – (6) осуществлены обезразмеривание и параметризация. Решение отыскивается в виде асимптотических рядов по параметру ε [1, 4]:

$$T = T^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i T^{(i)} + \theta^{(i)} ,$$

где i - порядковый номер приближения. Нулевое приближение описывает усредненные по сечению скважины значения температуры, что важно для вклада физических процессов. Первое приближение уточняет нулевое и позволяет показать зависимость температурного поля от радиальной координаты при r < 1.

Полученное выражение для температурного поля в скважине в нулевом приближении в пространстве изображений Лапласа–Карсона [2, 3] представится как:

$$T^{(0)u} = \int_0^z \frac{\mathrm{Pe}\nu(1-H) + 2Q_1^u(1,\xi,p)}{\mathrm{Pe}\nu} e^{-\alpha(z-\xi)} d\xi + T_0^u(p) e^{-\alpha z} , \; r < 1 , \; z > 0 \tag{7}$$

и в первом приближении –

$$T^{(1)u} = -\frac{\Lambda r^2}{2}\sqrt{p}kT^{(0)u} + \frac{\Lambda}{4}\sqrt{p}kT_0^u(p)e^{-\alpha z} + \Lambda\int_0^z e^{-\alpha(z-\xi)}\left(\frac{\chi p k^2}{2\mathrm{Pe}\nu} + \frac{\sqrt{p}k(1-H)}{4}\right)d\xi + Q_2^u , \; r < 1 , \; z > 0 , \tag{8}$$

где

$$\alpha = (p + 2\chi k\sqrt{p})/\mathrm{Pe}\nu , \; k = k(p) = K_1(\sqrt{p}) / K_0(\sqrt{p}) . \tag{9}$$

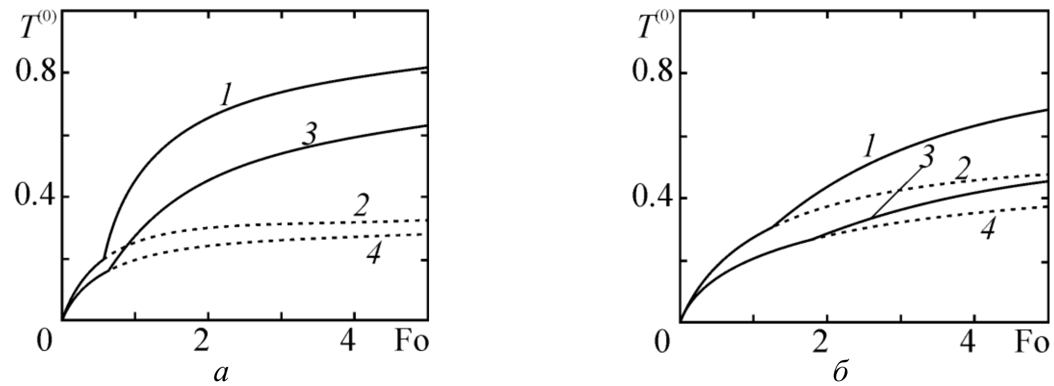
Аналитический переход к оригиналам из (7), (8) затруднен, так как решения включают отношение функций Бесселя второго рода (функции Макдональда) первого и нулевого порядка соответственно (9). Одним из методов численного обращения преобразования Лапласа является Stehfest-алгоритм, предложенный Харальдом Штефестом [5], в основу которого положены соотношения

$$f(t) \approx a\sum_{i}^{N} V_i F(ia), a = \ln(2)/t ,$$

$$V_{\mathrm{i}} = (-1)^{i+N/2} \sum_{j=[(i+1)/2]}^{\min(i,N/2)} \frac{j^{N/2}(2j)!}{(N/2-j)!\,j!\,(j-1)!\,(n-j)!\,(2j-n)!} ,$$

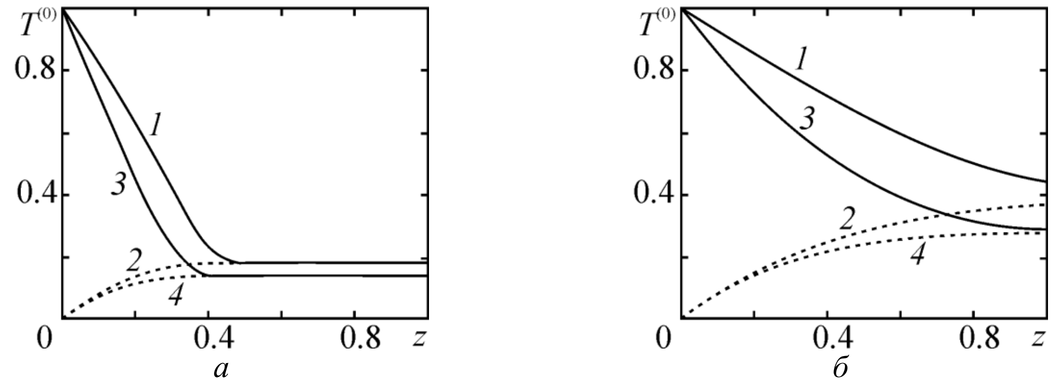
где N – четное число.

Далее представлены графические зависимости, рассчитанные по формулам (7), (8) с использованием указанного численного алгоритма. Рис. 2 иллюстрирует динамику средней температуры на различных глубинах. На рис. 3 представлены кривые изменения средней температуры в скважине с глубиной в различные моменты времени. Изменение температурного поля в первом приближении с течением времени представлено на рис. 4. Рис. 5 показывает изменения температуры в первом приближении при удалении от центра скважины до ее границы.



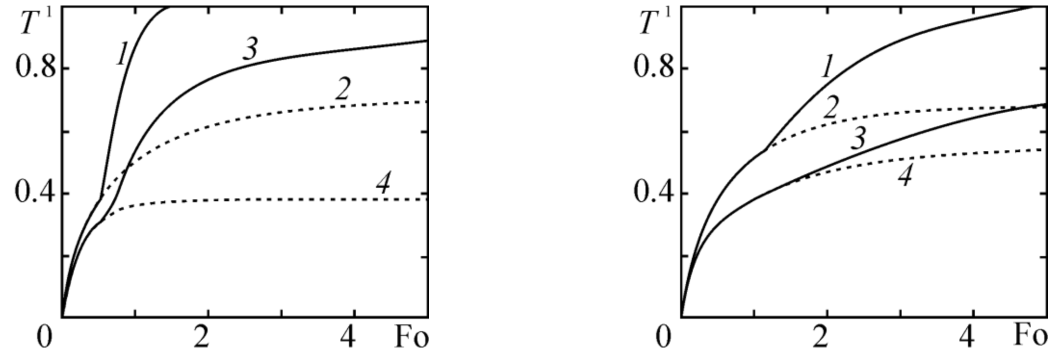
а *б*

Рис. 2. Зависимость температуры T в скважине от безразмерного времени Fo в нулевом приближении в зоне влияния температурных сигналов пласта для z = 0.5 (*а*) и z = 1 (*б*) при различных значениях χ : *1, 2* – χ =1.02, *3, 4* – χ =1.48; штриховые и сплошные линии – нулевой и единичный температурный сигнал пласта соответственно



а *б*

Рис. 3. Зависимость температуры T в скважине от безразмерной вертикальной координаты z в нулевом приближении в зоне влияния температурных сигналов пласта для Fo = 0.5 (*а*) и Fo = 2 (*б*) при различных значениях χ : *1, 2* – χ =1.02, *3, 4* – χ =1.48; штриховые и сплошные линии – нулевой и единичный температурный сигнал пласта соответственно



а *б*

Рис. 4. Кривые температуры T в скважине в зависимости от безразмерного времени Fo в первом приближении в зоне влияния температурных сигналов пласта при r = 0 для z = 0.5 (*а*) и z = 1 (*б*) при различных значениях χ : *1, 2* – χ =1.02, *3, 4* –χ =1.48; штриховые и сплошные линии – нулевой и единичный температурный сигнал пласта соответственно

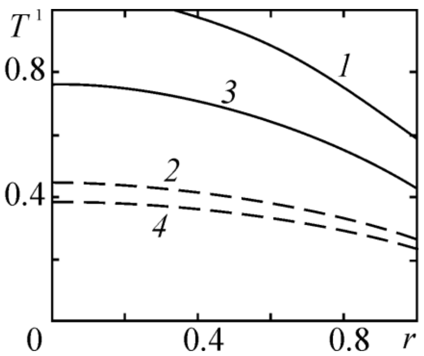


Рис. 5. Температура T в скважине в зависимости от безразмерной горизонтальной координаты r в первом приближении в зоне влияния температурных сигналов пласта при z = 0.5 и Fo = 2 при различных значениях χ: *1, 2* – χ=1.02, *3, 4* – χ=1.48; штриховые и сплошные линии – нулевой и единичный температурный сигнал пласта соответственно

Выводы. Итак, использование Shtefest–алгоритма позволяет расширить возможности асимптотического метода при расчетах температурного поля в цилиндрическом потоке смеси жидкостей.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ: a_{1z} – коэффициент, используемый для введения безразмерного времени; Fo – число Фурье; p – параметр преобразования Лапласа–Карсона; Q – объемный расход или дебит флюида; r, z – цилиндрические координаты; ε – формальный параметр асимптотического разложения; Pe – аналог параметра Пекле; ν – отношение радиуса скважини к ее длине; η_{ef} – эффективный коэфициент адиабатического расширения; τ – размерное время; θ – размерная температура; T – безразмерная температура; $\vec{u}_{\text{ef}}$ – эффективная скорость; λ – эффективная теплопроводность смеси жидкостей в скважине; λ_1 – теплопроводность пласта; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Индексы нижние: 0 – начальные значения параметров, 1,i – номер среды, z, r – направление.

Индексы верхние: в скобках – порядковый номер коэффициента асимптотического разложения, без скобок – порядковый номер асимптотического приближения, u – в изображениях.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Горюнова М.А. Теоретическое исследование температурных полей в стволе действующей скважины/ М.А. Горюнова. – Стерлитамак: Диссертация, 2009.
2. Диткин В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление/ В. А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974. – 544 с.
3. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению/ В. А. Диткин, А.П. Прудников.– М.: Высшая школа, 1965. – 468 с.
4. Построение «в среднем точного» асимптотического решения задачи о радиальном распределении температурного поля в скважине/ А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, О.В. Ахметова, М.А. Горюнова//ТВТ.– 2008. – Т.46, №3.– С. 449-456.
5. Stehfest, H Algorithm 368 - Numerical Inversion of Laplace Transforms, Communications of the ACM, (1970) 13, 47.

ФИЛИППОВ Александр Иванович – д.т.н., проф., зав. лабораторией прикладной физики и механики Института прикладных исследований АН Республики Башкортостан.

Научные интересы:

– теплофизика и теоретическая теплотехника.

РОГОВ Владимир Анатольевич – аспирант кафедры теоретической физики и методики обучения Института прикладных исследований АН Республики Башкортостан.

Научные интересы:

– теплофизика и теоретическая теплотехника.

УДК 532.5

А.И. Филиппов, Т.А. Ишмуратов, Л.М. Султанова, А.И. Янбекова

ГИДРОДИНАМИКА СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ЛЕНТОЧНОМ АДГЕЗИОННОМ НЕФТЕСБОРЩИКЕ

Постановка проблемы и анализ публикаций. Одним из наиболее перспективных способов является сбор нефти с поверхности водоемов при помощи вращающегося барабана или транспортера, в котором захват нефтепродукта с поверхности воды осуществляется за счет адгезионных свойств поверхности. Ввиду сложности процессов до настоящего времени не разработано математическое описание гидродинамических процессов в нефтесборщике [2].

Основная часть. На рис. 1 приведена схема ленточного нефтесборщика, состоящего из двух одинаковых цилиндров радиусом R и эластичной плоской поверхности, полностью смачиваемой нефтью. Вращающиеся цилиндры вызывают движение ленты скоростью $\vec{v}_0$, которая затягивает нефтебитум из слоя толщиной h_0, набегающего на нефтесборщик со скоростью $\vec{v}_н$.

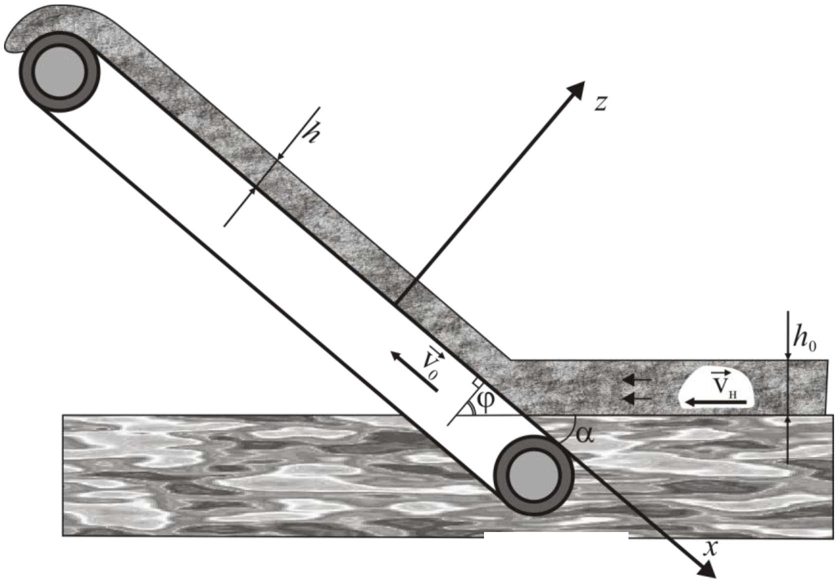


Рис. 1. Геометрия плавления среды

Решение задачи о сборе нефтепродуктов с поверхности водоемов осуществляется в декартовых координатах с осью x, направленной вдоль границы раздела ленты нефтесборщика и слоя нефти, y – параллельно осям цилиндров нефтесборщика, z – направленной по нормали к поверхности нефтесборщика. Движущаяся плоскость наклонена под углом $\alpha = \pi/2 - \varphi$ к горизонту. На достаточном удалении от концов нефтесборщика движение собираемой жидкости с постоянной плотностью ρ определяется координатами x, z, вектора скорости $\vec{v} = (v_x, v_z, 0)$ и описывается уравнениями Навье–Стокса [1]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + g\cos\varphi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right) + g\sin\varphi \quad (2)$$

и неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Будем для простоты считать, что толщина слоя захватываемого битума h много меньше длины транспортера. В этом случае линии тока почти параллельны поверхности нефтесборщика и составляющей скоростью v_z можно пренебречь, поэтому для ламинарного безвихревого течения z-координату скорости можно положить равной нулю: $v_z = 0$. Тогда из уравнения неразрывности (3) следует, что составляющая скорости по координате x зависит только от z:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad v(x) = \text{const}, \quad v = v(z).$$

Условие для нормального напряжения на границе соприкосновения S собираемого битума и воздуха принимает вид: $P\big|_{z=h} = P_0$, поскольку $\partial v_z / \partial z = 0$. Тангенциальное напряжение на поверхности пленки S примет вид: $(\partial v / \partial z)\big|_{z=h} = 0$, поскольку воздух не создает упругих сдвиговых сил.

В случае длительной работы нефтесборщика движение жидкости является установившимся. Постановка задачи в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + g\sin\varphi = 0, \tag{4}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + g\cos\varphi = 0, \tag{5}$$

$$v\big|_{z=0} = -v_0, \ \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=h} = 0 \ P\big|_{z=h} = P_0. \tag{6}$$

Общее решение для поля давлений P собираемой нефти получается путем интегрирования уравнения (4)

$$P = -\rho g z\sin\varphi + \widetilde{P}, \tag{7}$$

где $\widetilde{P}$ – функция давления, определяющаяся из условия $P\big|_{z=h} = P_0$; тогда окончательно выражение (7) преобразуется к виду:

$$P = \rho g(h - z)\sin\varphi + P_0. \tag{8}$$

Для нахождения поля скоростей необходимо продифференцировать уравнение (8) по координате x и подставить в уравнение (5)

$$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + g\cos\varphi = 0. \tag{9}$$

Из (9) найдем выражение для поля скорости с учетом условия (6)

$$v = \frac{g}{2\nu}z(2h - z)\cos\varphi - v_0, \qquad 10)$$

которое при $v_0 = 0$ формально совпадает с решением гидродинамической задачи о течении жидкости по наклонной плоскости, приведенным в [1].

Масса жидкости, увлекаемой в единицу времени через любое поперечное сечение, определяется путем интегрирования (10) в пределах от 0 до h

$$Q = \rho h\left(\frac{g\cos\varphi_0}{3\nu}h^2 - v_0\right). \tag{11}$$

В силу уравнения неразрывности величина $Q = v_н h_0$ постоянна, поэтому с помощью формул Кардано из (11) получим зависимость толщины слоя жидкости h от угла φ

$$h = 2\sqrt{\frac{\nu v_0}{g\cos\varphi}}\cos\left[\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{\frac{4\nu v_0^3}{9gh_0^2 v_н^2\cos\varphi}-1}\right)+\frac{5\pi}{3}\right].$$

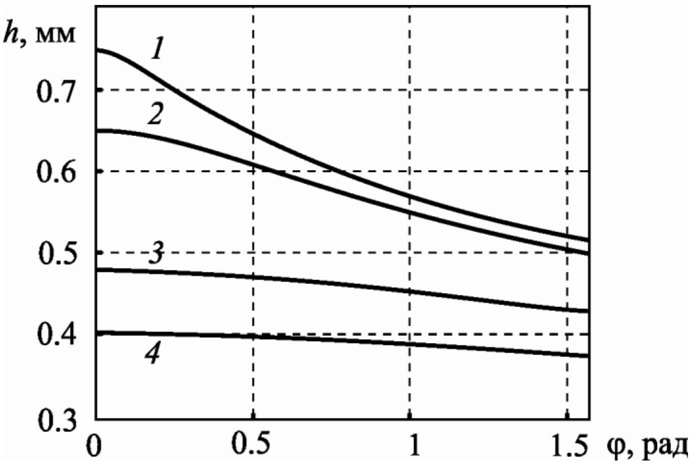


Рис. 2. Зависимость толщины нефтяной пленки h от угла φ при различных v_0: *1* – $v_0 = 0.01$ м/с , *2* – 0.02 м/с , *3* – 0.04 м/с , *4* – 0.05 м/с

На рис. 2. представлена зависимость толщины нефтяной пленки от угла φ. Этот рисунок иллюстрирует увеличение толщины начальной пленки с ростом угла φ, что объясняется уменьшением вклада гравитационного стекания. Значение кинематической вязкости ν принято равным 10^{-5} м^2/с.

Найдем толщину слоя, соответствующего максимальному дебиту. Для этого продиффиринцируем (10) по z и, положив z = 0, имеем

$$h_m = 2\frac{v_0\nu}{g\cos\varphi},$$

тогда для скорости поверхности слоя получим

$$v = \frac{g}{2\nu}h_m(2h_m - h_m)\cos\varphi - v_0 = -\frac{v_0}{2},$$

а максимальная производительность соответственно определяется выражением

$$Q = \frac{2}{3}v_0^{3/2}\sqrt{\frac{\nu}{g\cos\varphi}}.$$

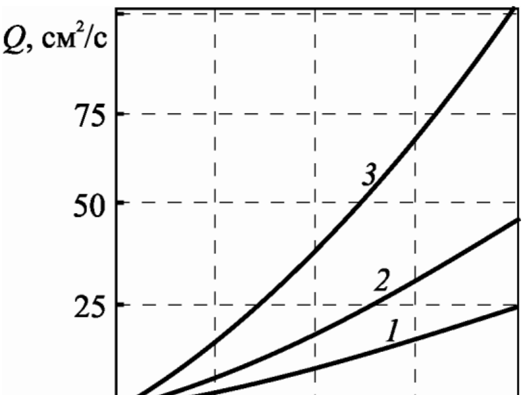


Рис. 3. Зависимость объемной производительности нефтесборщика от скорости v_0 при различных φ: *1* – φ = 0.2 рад, *2* – 0.4 рад , *3* – 0.8 рад

На рис. 3 представлена зависимость производительности нефтесборщика от скорости v_0 при различных углах φ. Кривые на данном рисунке иллюстрируют возрастание производительности по «закону 3/2» при увеличении скорости транспортера v_0.

Итак, представленная в статье теория позволила существенно уточнить представления о гидродинамических процессах при работе ленточного адгезионного нефтесборщика и найти соотношения, описывающие важнейшие технологические параметры нефтесборщика.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ландау Л.Д. Гидродинамика/ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: Наука. – 1986. – 733 с.

2. Моделирование и оптимизация процессов и аппаратов локализации и сбора нефти. Отчет о НИР/ Моделирование и оптимизация процессов и аппаратов локализации и сбора нефти. Отчет о НИР. – Тема № 16/2 по ГНТП АН РБ, Стерлитамак, 2001. – 120 с.

ФИЛИППОВ Александр Иванович – д.т.н., проф., зав. лабораторией физики и астрофизики, зам. директора Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан.

Научные интересы:

– теплофизика и теоретическая теплотехника;

– гидродинамика, движение жидкости;

– радиоактивность и радиоактивный распад.

ИШМУРАТОВ Тимур Ахмадеевич – аспирант кафедры теоретической физики и методики обучения физике института математики и естественных наук Стерлитамакской государственной педагогической академии имени Зайнаб Биишевой.

Научные интересы:

– теплофизика и теоретическая теплотехника;

– гидродинамика, движение жидкости.

СУЛТАНОВА Ляйсан Мухаметовна – студентка 4 курса института математики и естественных наук Стерлитамакской государственной педагогической академии имени Зайнаб Биишевой.

Научные интересы:

– гидродинамика, движение жидкости.

ЯНБЕКОВА Алина Ильгизовна – студентка 4 курса института математики и естественных наук Стерлитамакской государственной педагогической академии имени Зайнаб Биишевой.

Научные интересы:

– теплофизика и теоретическая теплотехника

УДК 550.832.6

А.И.Филиппов, П.Н.Михайлов

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ РАСТВОРОВ РАДИОАКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ

Постановка проблемы и анализ публикаций. В настоящее время наиболее перспективным способом утилизации радиоактивных отходов является их закачка в подземные глубокозалегающие пористые пласты [1]. Этот способ оптимален как по показателям надежности, так и по себестоимости. В связи с этим возникает важная задача по мониторингу зон, охваченных воздействием радиоактивных элементов, особенно с учетом того, что глубокозалегающие пласты, как правило, имеют выход на поверхность. Задача усложняется тем, что возможности экспериментальных методов в данном случае весьма ограничены и прогнозирование производится в основном расчетным путем.

При закачке радиоактивных отходов в глубокозалегающие пласты происходит нарушение естественного температурного поля пласта, которое обусловлено выделением энергии при распаде радионуклидов. При этом температурное поле связано с полем концентрации изотопов [4]. Численные расчеты температурного поля проведены лишь для теплоизолированного пласта [2, 3]. В работе асимптотическим методом исследуется температурное поле в неизолированном пласте; продолжены исследования работ [4, 5, 6].

Основная часть. Математическая постановка задачи. Через скважину малого (по сравнению с расстоянием до точки наблюдения) радиуса в пористый горизонтальный бесконечный пласт закачивается раствор с радиоактивными примесями. Все пласты – пористый, покрывающий и подстилающий – считаются однородными и анизотропными по теплофизическим свойствам. В поступающей в пласт жидкости (при $r \le r_0$) поддерживаются постоянные температура и концентрация примеси. В общем случае температура и концентрация загрязнителя в пласте изменяются за счёт конвективного переноса в направлении вдоль пласта r, теплопроводности и диффузии вдоль r и перпендикулярно плоскости пласта z, за счёт тепловых источников и источников концентрации (в данном случае таким источником является радиоактивный распад загрязнителя). В окружающих средах, в отличие от пласта, отсутствует конвективный перенос, имеют место теплопроводность и диффузия вдоль направлений r и z. Скорость конвективного переноса примесей в пористой среде $\vec{\mathrm{v}}$ связана со скоростью фильтрации $\vec{\mathrm{v}}'$ соотношением $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}'/\left[m + (1-m)K\right]$, где m – пористость пласта, K – коэффициент Генри, определяющий отношение плотности примеси в скелете и растворе.

Математическая постановка осесимметрической задачи теплопереноса для всех областей включает уравнения теплопроводности с учётом радиоактивного распада в покрывающем и подстилающем пластах

$$c_1\rho_{\text{п}1}\frac{\partial T_{1\text{d}}}{\partial\tau} - \lambda_{z1}\frac{\partial^2 T_{1\text{d}}}{\partial z_\text{d}^2} - \lambda_{r1}\frac{1}{r_\text{d}}\frac{\partial}{\partial r_\text{d}}\left(r_\text{d}\frac{\partial T_{1\text{d}}}{\partial r_\text{d}}\right) = \alpha L\rho_{1\text{d}},\ \tau > 0, r_\text{d} > 0, z_\text{d} > h, \tag{1}$$

$$c_2\rho_{\text{п}2}\frac{\partial T_{2\text{d}}}{\partial\tau} - \lambda_{z2}\frac{\partial^2 T_{2\text{d}}}{\partial z_\text{d}^2} - \lambda_{r2}\frac{1}{r_\text{d}}\frac{\partial}{\partial r_\text{d}}\left(r_\text{d}\frac{\partial T_{2\text{d}}}{\partial r_\text{d}}\right) = \alpha L\rho_{2\text{d}}\ ,\ \tau > 0,\ r_\text{d} > 0,\ z_\text{d} < -h\ , \tag{2}$$

а также уравнение конвективного переноса тепла с учётом радиоактивного распада в пористом пласте

$$c\rho_{\text{п}}\frac{\partial T_{\text{d}}}{\partial \tau}-\lambda_z\frac{\partial^2 T_{\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}^2}-\lambda_r\frac{1}{r_{\text{d}}}\frac{\partial}{\partial r_{\text{d}}}\left(r_{\text{d}}\frac{\partial T_{\text{d}}}{\partial r_{\text{d}}}\right)+c_f\rho_f\frac{\text{v}'_0 r_0}{r_{\text{d}}}\frac{\partial T_{\text{d}}}{\partial r_{\text{d}}}=\alpha L\rho_{\text{d}},\ \tau>0, r_{\text{d}}>0, |z_{\text{d}}|<h. \quad (3)$$

Условия сопряжения включают в себя равенства температур и потоков тепла на границах раздела пластов

$$T_{\text{d}}\big|_{z_{\text{d}}=h}=T_{1\text{d}}\big|_{z_{\text{d}}=h},\ T_{\text{d}}\big|_{z_{\text{d}}=-h}=T_{2\text{d}}\big|_{z_{\text{d}}=-h},\ \lambda_z\frac{\partial T_{\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}}\bigg|_{z_{\text{d}}=h}=\lambda_{z1}\frac{\partial T_{1\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}}\bigg|_{z_{\text{d}}=h},\ \lambda_z\frac{\partial T_{\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}}\bigg|_{z_{\text{d}}=-h}=\lambda_{z2}\frac{\partial T_{2\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}}\bigg|_{z_{\text{d}}=-h}.$$

В начальный момент времени и на бесконечности температура пластов равна естественной невозмущенной температуре Земли $T_{\oplus}$:

$$T_{\text{d}}\big|_{\tau=0}=T_{1\text{d}}\big|_{\tau=0}=T_{2\text{d}}\big|_{\tau=0}=T_{\oplus},\ T_{\text{d}}\big|_{r_{\text{d}}\to+\infty}=T_{1\text{d}}\big|_{r_{\text{d}}+z_{\text{d}}\to+\infty}=T_{2\text{d}}\big|_{r_{\text{d}}+|z_{\text{d}}|\to+\infty}=T_{\oplus}.$$

Температура загрязнителя в скважине считается постоянной $T_{\text{d}}\big|_{r_{\text{d}}=0}=T_0$.

Функция плотности источников тепла, входящая в правые части уравнений (1) – (3), находится из решения соответствующей задачи массопереноса [4]. Решения задачи тепло- и массопереноса построены асимптотическим методом [5], [6].

Решение задачи массопереноса в нулевом приближении позволяет определить максимальные размеры зоны загрязнения, а также указать положение фронта радиоактивных веществ в любой момент времени. Недостатком нулевого приближения является то, что оно не описывает распределения плотности загрязнителя по толщине пласта. Этот недостаток устранен с помощью первого приближения. Построенное асимптотическое разложение обладает важным свойством, заключающимся в том, что среднее значение остаточного члена обращается в нуль. Это, естественно, повышает ценность решения для практических приложений. В силу этого целесообразно в асимптотических решениях выделить рассматриваемый класс решений. Асимптотическое приближение задачи, построенное при условии, что решение усредненной задачи для остаточного члена является тривиальным, названо точным в среднем асимптотическим решением [5]. Задача для первых коэффициентов решена операционным методом. В виду громоздкости полученных решений, в работе они не приведены.

При решении температурной задачи полагается, что в окружающих породах она обусловлена только теплообменом с пластом, в который осуществляется закачка. Фактически это означает пренебрежение вкладом энергии, выделяющейся при радиоактивном распаде, в температурное поле в покрывающем и подстилающем пластах. Это оправдано тем, что величина продиффундировавшего в окружающую среду радиоактивного вещества пренебрежимо мала. Также пренебрегается кондуктным переносом тепла по сравнению с конвективным.

Анализ результатов. При распространении радиоактивных отходов в пористом пласте образуются следующие зоны, определяемые физическими процессами, протекающими в жидкости и в скелете: зона загрязнения, зона теплового возмущения и зона чистой воды, появляющаяся в результате оседания радионуклидов на скелете пласта. Предлагаемая математическая модель позволяет определить и сопоставить размеры указанных зон, что важно для практических приложений.

На основе решений тепло- и массопереноса установлены формулы для радиусов зоны радиоактивного заражения $R_p=\sqrt{2\text{v}'_0 r_0\tau/\left((1-m)K+m\right)}$ и зоны теплового возмущения $R_T=\sqrt{2c_f\rho_f\text{v}'_0 r_0\tau/c\rho_{\text{п}}}$. Положение фронта закачиваемой жидкости в пренебрежении радиусом скважины находится согласно формуле $R_w=\sqrt{2\text{v}'_0 r_0\tau/m}$. Если коэффициент Генри K равен нулю, то фронт закачиваемой жидкости совпадает с фронтом загрязнения $R_w = R_p$, при ненулевых же значениях K фронт радиоактивного загрязнения отстает от фронта закачиваемой жидкости, и образуется кольцевая зона с очищенной от примесей водой, размеры которой определяются по формуле

$$\Delta R = R_w - R_p = \sqrt{2 v_0' r_0 \tau / m}\left(1 - \left(\left(m^{-1} - 1\right)K + 1\right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Таким образом, подземные пористые пласты могут служить естественными фильтрами для очищения воды от различных примесей. Из анализа области определения функции, представляющей решение температурной задачи, получено соотношение

$$\left({}^{f}_{0}\chi\left[\left(1-m\right)K + m\right] - 1\right) r'^2 < R_T^2 - r^2,$$

на основе которого установлено, что при значениях коэффициента Генри меньших некоторого критического $K<K_{кр}$, определяемого из равенства ${}^{f}_{0}\chi\left[\left(1-m\right)K + m\right] - 1 = 0$, фронт загрязнения опережаопережает температурный, а при $K>K_{кр}$ – отстает. При этом критическое значение коэффициента Генри $K_{кр} = c_s \rho_s / c_f \rho_f$ не зависит от пористости. Поскольку коэффициенты Генри пористых пластов, как правило, многократно превышают соответствующие критические значения, то в реальных случаях температурный фронт значительно опережает фронт загрязнения. Отмеченное утверждение позволяет разработать метод прогнозирования распространения радиоактивных отходов в подземных глубокозалегающих пластах на основе анализа кривых термокаротажа контрольных скважин.

На рис. 1 представлены графики зависимостей плотности радиоактивных примесей в пористом пласте для различных коэффициентов Генри. В расчетах принято: толщина пласта 20 м, время наблюдения τ =3 года, период полураспада $T_{1/2}$=1 год, пористость m=0.15, объемы закачки V=1500 м^3/сут. Распределение радиоактивных примесей в пласте существенно зависит от коэффициента Генри K. При больших значениях K радионуклиды вследствие осаждения на скелет в основном сосредоточены вблизи скважины, при этом их плотность превышает начальную плотность в закачиваемой жидкости в десятки раз, что может привести к подземному взрыву и выбросу загрязнителя на поверхность. Напротив, при малых значениях K происходит незначительное осаждение на скелет, что приводит к образованию больших зон заражения.

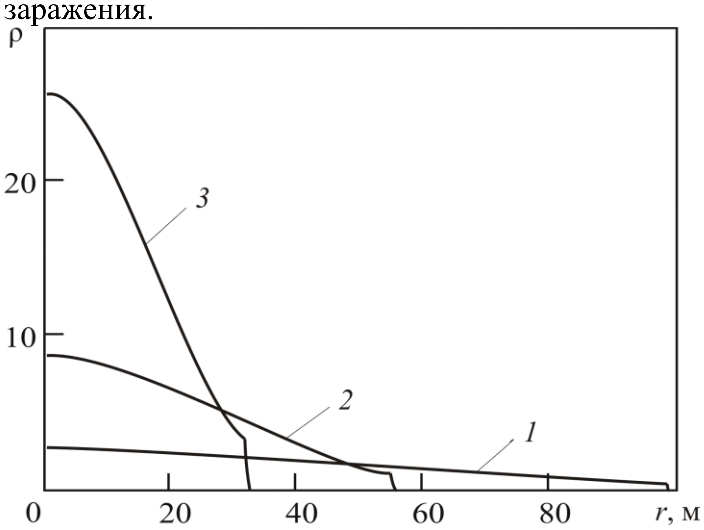


Рис. 1. Зависимость плотности радиоактивных примесей от радиальной координаты в пористом пласте для различных коэффициентов Генри: 1 – K=3, 2 – K=10, 3 – K=30

На рис. 2 приведены зависимости температуры в первом приближении в пористом пласте от радиальной координаты для радионуклидов с разными периодами полураспада . В расчетах принято: толщина пласта 20 м, время наблюдения τ =3 года, объемы закачки V=1500 м^3/сут, температура закачиваемой жидкости T_0=300 K, естественная температура пласта $T_{\oplus} = 280$ К, начальная плотность радиоактивных примесей в закачиваемой жидкости $\rho_0 = 10^{-3}$ кг/м^3, коэффициент Генри $K = 10$, что превышает критическое значение. На графике выделяются две характерные зоны. Первая зона от r=0 до r=R_p – радионуклидная зона, в которой температура определяется радиоактивным распадом загрязнителя и возрастает с увеличением расстояния до оси скважины. В интервале от r=R_p до r=R_T расположена зона температурных возмущений свободная от радиоактивных примесей, в которой температура обусловлена главным образом конвективным выносом тепла из радионуклидной области.

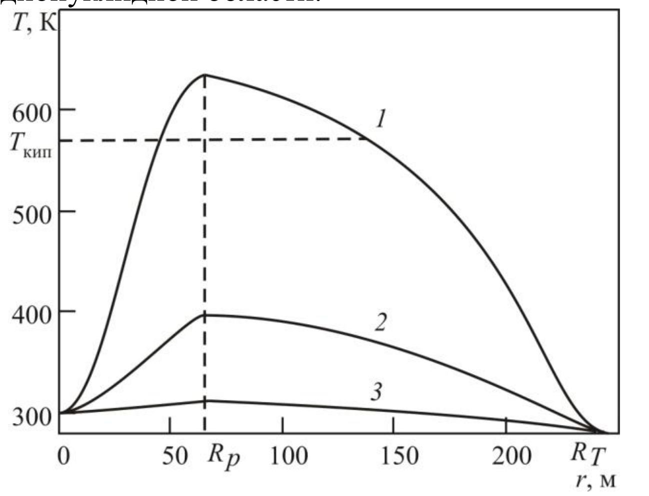


Рис. 2. Зависимость температуры от радиальной координаты в пористом пласте при $K > K_{кр}$ для различных периодов полураспада: 1 – $T_{1/2} = 1$ год, 2 – $T_{1/2} = 2$ года, 3 – $T_{1/2} = 30$ лет

На рис. 3 представлены аналогичные температурные зависимости для случая, когда коэффициент Генри $K = 0.1$ меньше критического. В отличие от предыдущего, в данном случае зона температурных возмущений меньше радионуклидной зоны $R_T < R_p$. Во второй зоне от r=R_T до r=R_p температурное поле обусловлено только распадом радионуклида, температурные возмущения за счет конвективного переноса возмущений температуры из скважины локализованы только в первой зоне $r < R_T$.

Сравнение рисунков 2 и 3 показывает, что температурные возмущения в первом случае (рис. 2) оказываются существенно больше, что объясняется преобладающим локализованным выделением тепла вблизи радионуклидного фронта.

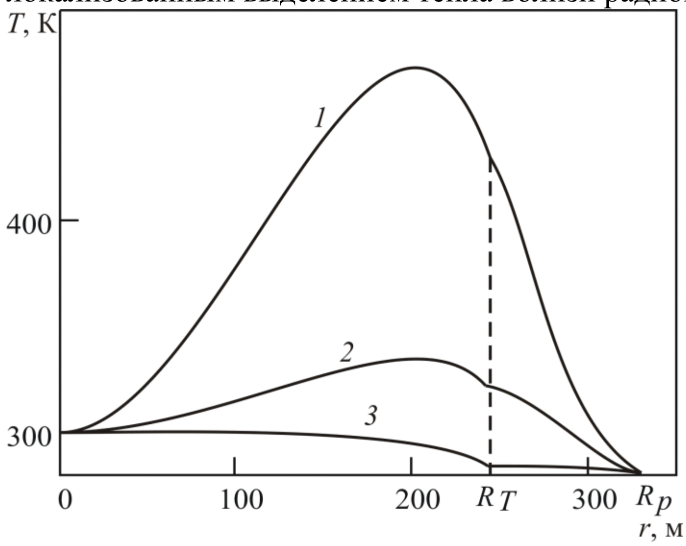


Рис. 3. Зависимость температуры от радиальной координаты в пористом пласте при $K < K_{кр}$. Обозначения те же, что и на рис. 2

Горизонтальная пунктирная линия на рис. 2 соответствует температуре кипения воды при пластовом давлении в 100 атм. Из анализа зависимости температуры от различных параметров следует, что при закачке высококонцентрированных радиоактивных отходов, приводящих к существенному температурному эффекту, необходимо учитывать фазовые переходы.

Выводы. На основе асимптотического метода в нулевом и первом приближениях найдены расчетные формулы для полей концентрации и температурных полей, возникающих при закачке растворов радиоактивных веществ в пористые глубокозалегающие пласты. Получена формула для определения критического значения коэффициента Генри $K_{кр}$. Показано, что при $K<K_{кр}$ фронт загрязнения опережает температурный, а при $K>K_{кр}$ – отстает. Поскольку в реальных случаях $K>K_{кр}$, то возможен способ контроля над зоной заражения на основе измерений температуры в контрольных скважинах. Обнаружено, что при любых значениях K образуется зона очищенной воды. Определены параметры, от которых зависит размер этой зоны.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Глубинное захоронение жидких радиоактивных отходов/[А.И. Рыбальченко, М.К. Пименов, П.П. Костин и др.].– Москва: «ИздАТ», 1994. – 256 с.
2. Температурное поле при глубинном захоронении жидких радиоактивных отходов/[И.М. Косарева, М.К. Савушкина, М.М. Архипова и др.]// Атомная энергия. – 1998. – Т.85, №6. – С. 441 – 448.
3. Температурное поле при глубинном захоронении жидких радиоактивных отходов: моделирование многоэтапного удаления/[И.М. Косарева, М.К. Савушкина, М.М. Архипова и др.] // Атомная энергия. – 2000.– Т.89, №6. – С.435 – 440.
4. Расчет полей концентрации при подземном захоронении растворенных радиоактивных веществ/[А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, И.Н. Михайличенко, А.Г. Крупинов] // Экологические системы и приборы. – 2006. – № 5. – С. 27 – 33.
5. «Точное в среднем» асимптотическое решение задачи о подземном захоронении радиоактивных отходов/ [А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, Д.А. Гюнтер, Д.В. Иванов]// Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2007. – Вып. 2(28).
6. Моделирование взаимосвязанных процессов тепло- и массопереноса при подземном захоронении радиоактивных отходов/ [А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, Д.А. Гюнтер, Д.В. Иванов] // ВАНТ (Вопросы атомной науки и техники). – 2008.–№ 2.– С. 83–91.

ФИЛИППОВ Александр Иванович – д.т.н., профессор, зав. лабораторией прикладной физики Института прикладных исследований АН Республики Башкортостан.

Научные интересы:

– теплофизика, геофизика, физика пористых тел.

МИХАЙЛОВ Павел Никонович – д.ф.-м.н., профессор, с.н.с. Института прикладных исследований АН Республики Башкортостан.

Научные интересы:

– теплофизика, асимптотические методы решения дифференциальных уравнений.

УДК 517.958:52/59; 519.711.3

В.В. Флоринский (мл.), В.В. Флоринский (ст.), Н.А. Чеканов

ГЕНЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Постановка задачи. Рассмотрим оператор $\hat{H}$, действующий в линейном нормированном пространстве S:

$$\hat{H}: S \to \hat{H}[S] \subseteq S . \quad (1)$$

Пусть величина E принадлежит некоторому числовому полю F, а $\psi(x)$ – функция из S. Рассмотрим уравнение:

$$\hat{H}[\psi] = E\psi . \quad (2)$$

Прямая спектральная задача для оператора (1) состоит в отыскании множества функций $\{\psi(x)\} \subset S$ и множества чисел $\{E\} \subset F$, удовлетворяющих уравнению (2). Такие функции $\psi(x)$ называются собственными функциями, а числа $\{E\} \subset F$ – собственными значениями оператора $\hat{H}$. Множество собственных значений оператора образует его спектр.

В данной работе предлагается новый метод решения прямой спектральной задачи, основанный на эволюционном подходе.

Анализ публикаций по теме исследования. Задача (1)-(2) на собственные значения для гамильтоновых операторов возникает, например, в квантовой механике [1], теории хаоса [2], наноиндустрии [3] и других приложениях. Однако точное аналитическое решение данной задачи в общем виде пока не найдено. Имеющиеся численно-аналитические методы, такие как метод диагонализации [4], метод нормальных форм [5], полуклассическое квантование [6], не лишены недостатков. В связи с этим, а также в связи с технологической актуальностью задачи в наноиндустрии [3], возникает необходимость в разработке новых эффективных методов ее решения.

Идеи эволюционного моделирования восходят к работам Фогеля [7] и получают дальнейшее развитие в трудах Холланда [8]. Генетические алгоритмы (ГА) нашли широкое применение в кибернетике и теории искусственного интеллекта [9], при обучении нейронных сетей [10] и в экстремальных задачах с большим числом переменных [11]. Однако в теории операторов при решении задач на собственные значения ГА до настоящей работы не применялись.

Цель статьи. Рассмотрение прямой спектральной задачи с различными операторами в эволюционной постановке и разработка генетических алгоритмов ее решения.

Основная часть.

Пусть в линейном функциональном пространстве S задан базис $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \subset S$. Тогда собственные функции оператора $\hat{H}$ можно представить в виде разложения

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x) , \quad (3)$$

где числовые коэффициенты $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ принадлежат полю F.

Как известно, теоретическое исследование, например, наноструктур приводит к задачам квантовой механики, в которых оператор $\hat{H}$ является гамильтоновым и имеет дискретный спектр [1,2], причем каждому собственному значению $E_k \in F$

соответствует единственная собственная функция $\psi_k(x) \in S$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Таким образом, прямую спектральную задачу можно трактовать как нахождение всех пар $(E_k, \psi_k(x)) \in F \otimes S$, удовлетворяющих уравнению (2) .

В силу формулы (3) каждая собственная функция $\psi_k(x)$ однозначно определяется набором базисных коэффициентов $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, поэтому пару $(E_k, \psi_k(x))$ можно представить в виде упорядоченного числового набора:

$$\pi_k = (a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}, \ldots), \tag{4}$$

где через a_{k0} обозначено собственное значение E_k. Заметим, что последовательность (4) ограничена, т.к. в противном случае ряд (3) расходится.

Если каждое число последовательности (4) интерпретировать как ген, то сам набор следует понимать как генотип некоторого «вида». При фиксированных значениях генов (называемых аллелями) набор π_k будем называть особью, а множество таких особей $\Pi = \{\pi_k\}$ – популяцией. Тогда оператор $\hat{H}$ можно трактовать как отображение множества особей (4) в себя, причем действие этого оператора аналогично эволюционному процессу в «биологической» системе Π.

Перепишем уравнение (2) в виде:

$$H[\pi] = 0, \tag{5}$$

где $H \equiv \hat{H} - E$. Тогда прямая спектральная задача состоит в отыскании популяции Π, удовлетворяющей «условию обитания» (5).

Множество всевозможных популяций особей (4), называемое пространством поиска, обозначим через $\Lambda = \{\Pi\}$. Элементами этого множества, очевидно, являются сами особи π_k.

<u>**Лемма 1.**</u> Пространство поиска Λ является банаховым с нормой:

$$\|\pi\|_{\Lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{2^k (|a_0| + |a_k|)}. \tag{6}$$

Пусть $\pi_1 = (a_{10}, \ldots, a_{1n}, \ldots)$ и $\pi_2 = (a_{20}, \ldots, a_{2n}, \ldots)$ – два элемента из Λ. Их покомпонентным произведением будем называть элемент $\pi \in \Lambda$, определяемый как:

$$\pi = (a_{10}a_{20}, a_{11}a_{21}, a_{12}a_{22}, \ldots, a_{1n}a_{2n}, \ldots). \tag{7}$$

Произведение, введенное по формуле (7), будем обозначать точкой: $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$.

Оператор мутации. Введем оператор мутации M как отображение пространства поиска Λ в себя, которое каждой особи из Λ ставит в соответствие случайный элемент того же пространства:

$$M : \Lambda \to M[\Lambda] \subset \Lambda. \tag{8}$$

Очевидно, отображение (8) можно задать многими способами, поэтому возникает проблема наилучшего выбора оператора мутации. Покажем, что все такие выборы эквивалентны.

<u>Лемма 2.</u> Пусть особь $\pi = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ принадлежит популяции Π, причем $\pi \neq (0,0,\ldots)$, а особь $\tilde{\pi} = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n, \ldots)$ – популяции $\tilde{\Pi}$, которая получена мутацией исходной популяции, т.е. $\tilde{\Pi} = M[\Pi]$. Тогда существует единственная ограниченная последовательность $r = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, такая что $\tilde{\pi} = r \cdot \pi$.

Из леммы 2 следует, что всевозможные способы задания оператора мутации эквивалентны покомпонентному произведению особи π на случайную последовательность аллелей $r \in \Lambda$:

$$M[\pi] \equiv r \cdot \pi \tag{9}$$

Оператор селекции. Пусть последовательность $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к особи π в пространстве Λ, $\|\pi_n - \pi\|_\Lambda \to 0$, и ее образ $\{\hat{H}[\pi_n]\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю $\|\hat{H}[\pi_n]\|_\Lambda \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда особь π называется сильным решением задачи (5).

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, и введем оператор $S[\pi, \varepsilon]$, определенный на поисковом пространстве Λ:

$$S : \Lambda \to S[\Lambda, \varepsilon] \subset \Lambda, \tag{10}$$

образ которого состоит из элементов поискового пространства Λ, с нормой меньше ε.

Отображение $S[\pi, \varepsilon]$, заданное формулой (10), будем называть оператором селекции, а условие:

$$\|\pi\|_\Lambda < \varepsilon \tag{11}$$

сильным критерием эволюции.

Оператор скрещивания. Будем различать виды скрещивания по числу родительских особей и называть их n-скрещиванием, $n = 1, 2, \ldots$. Оператором n-скрещивания будем называть отображение прямого произведения пространства поиска на себя в аналогичное произведение, быть может, другого порядка:

$$C_{nm} : \Lambda^n \to C_{nm}[\Lambda^n] \subset \Lambda^{n+m}. \tag{12}$$

<u>Лемма 3.</u> Для любой непустой популяции Π и любых натуральных чисел n и m верно равенство:

$$C_{nm}[\Pi] = C_{22}^{n-1}[\Pi],$$

где степень означает последовательное $(n-1)$-кратное применение оператора $C_{22}[\Pi]$.

Из леммы 3 заключаем, что все операторы скрещивания C_{nm} эквивалентны 2-скрещиванию.

Простейший генетический алгоритм (ПГА). Рассмотрим прямую спектральную задачу в эволюционной постановке (5) с эволюционным критерием (11). Для поиска приближенного решения, т.е. популяции $\Pi = \{\pi_k\}_{k=1}^{N} \subset \Lambda$, удовлетворяющей критерию $\|\hat{H}[\pi_n]\|_\Lambda < \varepsilon$, построим ПГА (см. рис. 1).

Зададим точность приближения ε и начальную популяцию $\Pi_0 = \{\pi_k\}_{k=1}^{N} \subset \Lambda$, в которой имеются особи, удовлетворяющие эволюционному критерию. Если все ее особи удовлетворяют критерию (17), т.е. $S[\Pi_0] \equiv \Pi_0$, то эта популяция и есть искомое приближенное решение. В противном случае, т.е. при $S[\Pi_0] \subset \Pi_0$, последовательно применим к ней операторы мутации $M[\Pi]$ и 2-скрещивания $C[\Pi]$. В результате получим новое поколение особей Π_1. На поколение Π_1 вновь подействуем оператором селекции S и повторим описанный процесс.

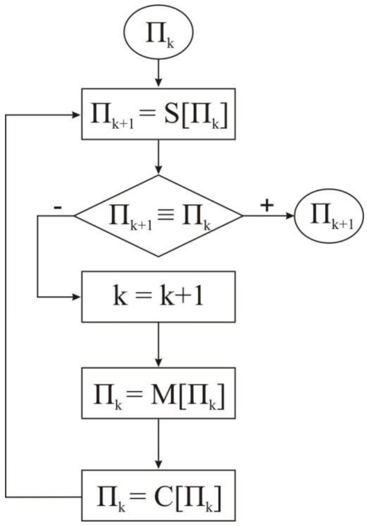


Рис.1. Простейший генетический алгоритм.

Теорема 1. Если случайная последовательность $r = (r_0, r_1, \ldots, r_m, \ldots)$, задающая оператор мутации $M[\Pi]$, распределена равномерно, то в ПГА с сильным эволюционным критерием не убывает численность особей, удовлетворяющих этому критерию, причем $\frac{13}{9}n \le N_C \le \frac{17}{9}n$, где n – число особей после отбора в исходной популяции, N_C – число особей после отбора в новом поколении.

Теорема 1 устанавливает сходимость ПГА.

Генетический алгоритм с произвольными мутациями. Модифицируем ПГА на случай произвольных мутаций (см. рис. 2).

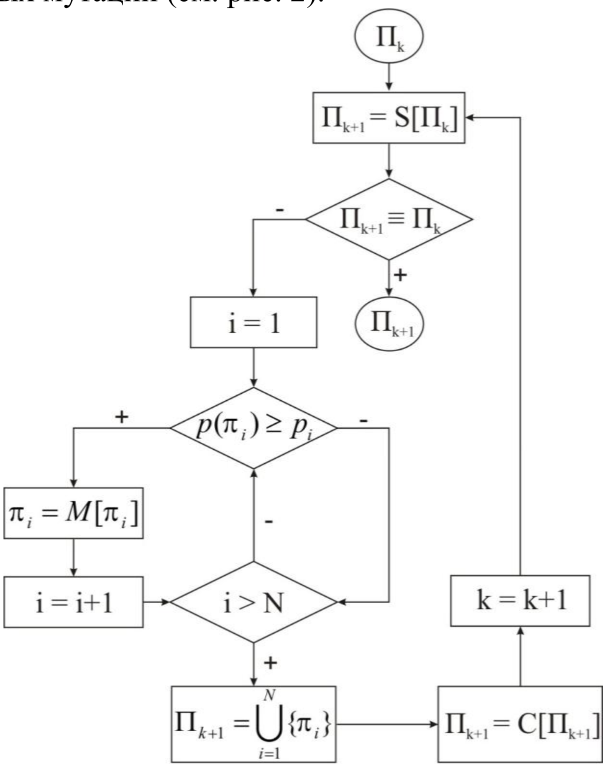


Рис. 2. Генетический алгоритм с произвольными мутациями.

Зададим точность приближения ε, произвольную начальную популяцию $\Pi_0 = \{\pi_k\}_{k=1}^N \subset \Lambda$ и случайный набор чисел $\{p_i\}_{i=1}^N$, $p_i \in [0,1]$, $i = \overline{1,N}$, которые определяют вероятность мутации для каждой особи. Может случиться, что все особи Π_0 удовлетворяют критерию (17), т.е. $S[\Pi_0] \equiv \Pi_0$. Тогда эта популяция и есть искомое приближенное решение. Если это условие не выполняется, запустим цикл, в котором каждой особи $\pi_i \in \Pi_0$ ставится в соответствие некоторое случайное число $p(\pi_i) \in [0,1]$ – вероятность мутации. Если эта вероятность не ниже заданного порогового значения, т.е. $p(\pi_i) \geq p_i$, то на особь действует оператор мутации $M[\pi_i]$, в противном случае цикл переходит к следующей особи π_{i+1}. Когда значение индекса i становится больше числа особей N, цикл завершается. К полученной популяции применяется оператор скрещивания $S[\Pi_{k+1}]$, после чего повторяется описанный процесс.

Заметим, что оператор мутаций $M[\pi_i]$ также действует избирательно на каждый ген. Его блок-схема представлена на рисунке 3.

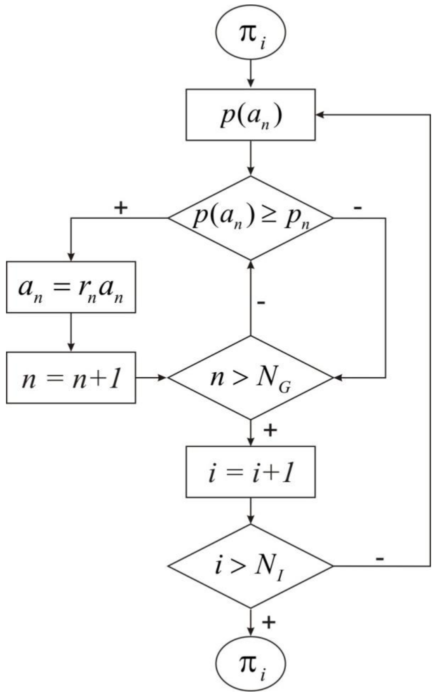


Рис. 3. Модифицированный оператор мутации.

На рисунке 3 через N_I обозначено число особей в популяции, N_G – число генов каждой особи, $p(a_n)$ – вычисляемая в цикле вероятность мутации n-ного аллеля, p_n – заранее заданное пороговое значение этой вероятности, r_n – n-ная компонента случайной последовательности $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots)$, определяющей мутации.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. В настоящей работе предложен новый метод для решения прямой спектральной задачи, основанный на эволюционном подходе. В рамках данного подхода разработан генетический алгоритм и доказана его сходимость. В дальнейшем планируется развить предложенный подход, проведя численные расчеты для некоторых классов дифференциальных операторов, и расширив его на новые классы задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ландау Л.Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория /Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., Наука, 1963. –703 с.
2. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М.: УРСС, 2001. – 320 с.
3. Наноматериалы. Нанотехнологии. Наносистемная техника. Мировые достижения за 2005 г. / Сб. под ред. проф. П.П. Мальцева. – М.: Техносфера, 2006. – 152 с.
4. Gustavson F.G. On construction formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point / F.G. Gustavson // Astron. J. –1966. – Vol.71, No.8. – P.670-686.
5. Чеканов, Н.А. Квантование нормальной формы Биркгофа-Густавсона / Н.А. Чеканов // ЯФ – 1989. – Т.50, Вып.8. – С.344–346.
6. Флоринский В.В. Собственные значения ангармонического осциллятора / В.В. Флоринский // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия «Математика, прикладная математика и механика». – 2007. – № 790. – С. 83–88.
7. Artifical Intelligence Through Simulated Evolution/ L.J. Fogel, A.J. Owens, M.J. Walsh. – New York: Wiley, 1966.
8. Adaptation in Natural and Artifical Systems/ John H. Holland.– The MIT Press, 1992.
9. Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы/ В.М. Курейчик // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1999. –№1. – С. 144-160.
10. Комарцова Л.Г. Двухэтапный алгоритм обучения нейронной сети на основе генетического поиска/ Л.Г. Комарцова// Нейрокомпьютеры. Разработка и применение. –М.:Радиотехника. – 2001.– №1. – С. 3–9.
11. Береснев В.Л. Экстремальные задачи стандартизации/ В.Л. Береснев, Э.Х. Гимади, В.Т. Дементьев. – Новосибирск: Наука, 1978.

ФЛОРИНСКИЙ Вячеслав Владимирович – к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и механики Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование, генетические алгоритмы, спектральная задача, дифференциальные уравнения, теория динамических систем.

ФЛОРИНСКИЙ Владимир Вячеславович – к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование, генетические алгоритмы, дифференциальные уравнения, математическая теория оптимального управления.

ЧЕКАНОВ Николай Александрович – д.ф.-м.н., заведующий кафедрой физики Старооскольского технологического института (филиал) Национального исследовательского университета «МИСиС».

Научные интересы:

– классическая и квантовая механика, динамический хаос, дифференциальные уравнения, спектральная задача, уравнение Шредингера, математическое моделирование.

УДК 519.6

А.Н. Хомченко

ТЕЛА ПЛАТОНА И НЕСИММЕТРИЧНЫЕ БЛУЖДАНИЯ ПО СФЕРАМ

Постановка проблемы. После появления одношаговых схем блужданий по симплексам был совершен большой скачок в развитии наших представлений о схемах Брауна-Мюллера блужданий по сферам. Сегодня можно с уверенностью сказать, что блуждания по сферам, сами не будучи одношаговыми, стимулировали поиски одношаговых схем блужданий. За счет существенного сокращения истории блужданий Брауну и Мюллеру удалось сократить число операций и объём необходимой памяти в эффективных алгоритмах методов Монте-Карло. Специфика классической схемы блужданий по сферам состоит в том, что точка старта частицы непременно совпадает с центром сферы (эксцентриситет недопустим), а расчетные узлы размещены равномерно на поверхности сферы.

Ниже приводятся примеры блужданий по сферам, в которых эксцентриситет вычислительного шаблона не влияет на работоспособность алгоритма монте-карловского усреднения граничных потенциалов. Оказалось, что в качестве вычислительных шаблонов удобно использовать тела Платона: тетраэдр, куб, октаэдр. Привлекательность перечисленных тел не столько в том, что они легко вписываются в сферу, сколько в том, что только для них удалось получить априорные переходные вероятности в одношаговых схемах со случайным стартом. К тому же тела Платона упрощают доказательство важного факта независимости переходной вероятности от конфигурации и длины “броуновской” траектории частицы.

Анализ публикаций по теме исследования. Правила одношаговых блужданий впервые были сформулированы на симплексах (треугольник, тетраэдр). Симплекс-шаблоны стали основой предложенного автором способа вращения симплекса (СВС), который со временем трансформировался в метод барицентрического усреднения (МБУ). Успешное применение МБУ обусловлено замечательными свойствами барицентрических координат симплексов. Ключевые идеи МБУ описаны в [1-4]. Понятно, что с помощью симплексов (тетраэдров) можно моделировать блуждания по сферам. При этом точку старта можно выбирать произвольно, а граничные узлы не обязательно распределять равномерно. Как видим, тетраэдр со скользящими по сфере вершинами освобождает схему Брауна-Мюллера от врожденных недостатков. При этом на каждом “стоп-кадре” реализуется 4-маршрутная одношаговая схема блужданий. Равномерно расположенные 6 граничных узлов на сфере ассоциируются с октаэдром, а 8 равномерно расположенных узлов совпадают с вершинами вписанного куба. В последнем случае (8 маршрутов) в роли априорных переходных вероятностей выступают трилинейные базисные функции [5,6]. А 6-маршрутную схему обслуживают недавно полученные базисы октаэдра [7].

Цель статьи. С помощью тел Платона изучить возможность децентрализации блужданий по сферам. На примере централизованной схемы дать простое доказательство независимости переходной вероятности от конфигурации и протяженности “броуновской” траектории.

Заметим, что децентрализованные схемы блужданий позволяют исследовать стационарное температурное поле шара, созданное присоединенными к поверхности шара термоэлементами. В [8] задача Дирихле для шара решается с помощью функций Грина в сферических координатах. Недостатки интеграла Пуассона для шара общеизвестны.

Основная часть. Мы начнем с простого доказательства независимости переходной вероятности от формы “броуновской” траектории и её длины. Именно этот важный факт позволяет вместо многошаговых зигзагоподобных блужданий частицы моделировать её “скачок” из точки старта непосредственно в поглощающий граничный узел. Фактически мы имеем дело с законом больших чисел об устойчивости относительной частоты поглощения частиц в граничном узле. Понятно, что этот закон можно подтвердить с помощью аккуратно поставленных компьютерных экспериментов с многократными и многошаговыми блужданиями по пространственным решеткам. Именно так были протестированы барицентрические координаты тетраэдра как априорные переходные вероятности в одношаговых 4-маршрутных схемах блужданий. Накопленный опыт экспериментирования со случайными блужданиями в тетраэдре и кубе позволил подметить отчетливые закономерности. Здесь мы попытаемся распространить их на другие правильные многогранники с целью упрощения схемы блужданий. Мы пользуемся приёмом частичной детерминизации стохастического процесса, когда некоторая характеристика статистического ансамбля заменяется математическим ожиданием. По мнению Б.А.Кордемского [9], внесение в создаваемую вероятностную модель некоторых элементов предвзятости математики к недозволенным приёмам не относят. Такой приём позволяет хаотические многошаговые зигзагоподобные блуждания заменить блужданиями по барицентрам конструктивных элементов тела Платона. Это резко сокращает историю блужданий за счёт радикального уменьшения числа зигзагов. Известно, что чем короче история блужданий, тем эффективнее алгоритм метода Монте-Карло. Траектории (кусочно-линейные) начинаются в барицентре тела Платона, проходят через барицентры граней и/или рёбер и заканчиваются в вершинах тела. При этом частицы достигают поглощающей вершины за 2 или 3 шага. Это свойство имеют все, без исключения, тела Платона. Если для тела Платона найден базис, удовлетворяющий интерполяционной гипотезе типа Лагранжа, мы получим одношаговую схему блужданий с априорными переходными вероятностями и произвольно выбранным стартом.

На рис.1 показаны тела Платона.

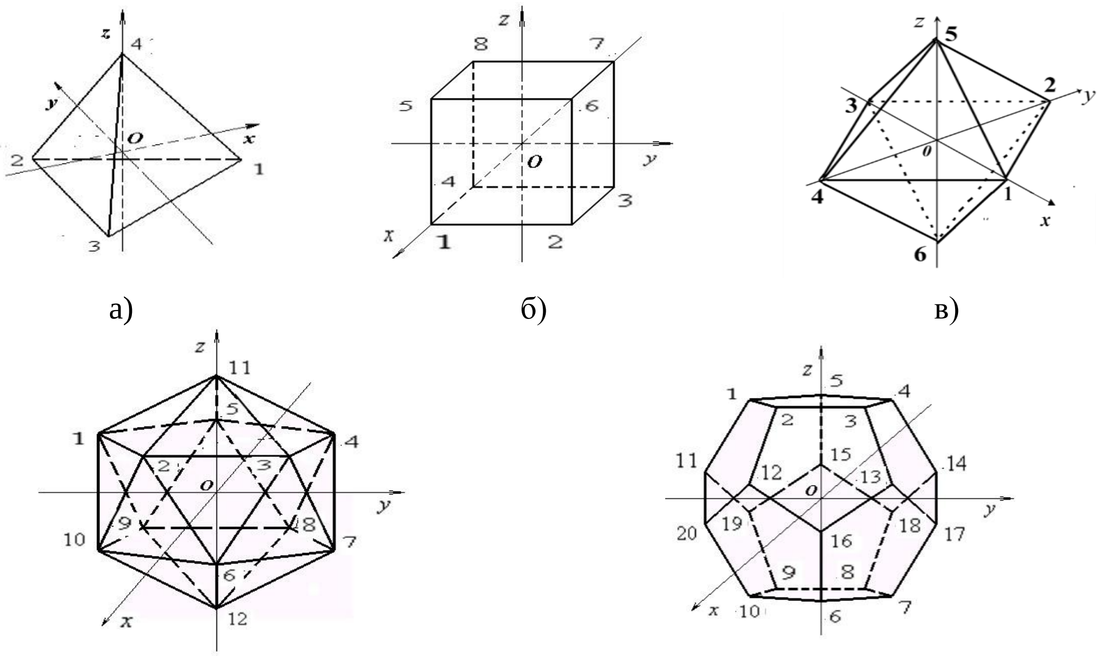


Рис.1. Тела Платона: а) – тетраэдр; б) – куб; в) – октаэдр; г) – икосаэдр; д) – додекаэдр

Заметим, что для икосаэдра подходящий базис пока не найден. Поэтому децентрализация 12-маршрутной одношаговой схемы блужданий по сферам – задача на перспективу. Поиски базиса икосаэдра уже ведут заинтересованные специалисты. То же можно сказать о додекаэдре (20 маршрутов).

Теперь покажем, что вероятность перехода частицы из барицентра тела Платона в любую вершину i не зависит от выбора маршрута и равна $\frac{1}{N}$, где N - число вершин многогранника. Обозначим искомую вероятность через p_{0i} и подсчитаем её значения для каждого тела (рис.1) и каждой из схем (2 шага, 3 шага).

<u>Тетраэдр</u> (вершин – 4, граней – 4, рёбер - 6).

Трёхшаговая схема:

$p_{0i} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, где $\frac{3}{4}$ - вероятность перехода частицы из барицентра тетраэдра в барицентр грани, содержащей узел i; $\frac{2}{3}$ - вероятность перехода частицы из барицентра грани с узлом i в барицентр ребра с узлом i; $\frac{1}{2}$ - вероятность перехода частицы из барицентра ребра с узлом i в узел i.

Двухшаговая схема (первый вариант):

$p_{0i} = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, где $\frac{3}{6}$ - вероятность перехода частицы из барицентра тетраэдра в барицентр ребра с узлом i; $\frac{1}{2}$ - вероятность перехода частицы из барицентра ребра в узел i.

Двухшаговая схема (второй вариант):

$p_{0i} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, где $\frac{3}{4}$ - вероятность перехода частицы из барицентра тетраэдра в барицентр грани с вершиной i; $\frac{1}{3}$ - вероятность перехода частицы из барицентра грани в узел i. В остальных случаях вычисления аналогичны, поэтому мы опускаем подробности. Их легко восстановить, анализируя формулы.

<u>Куб</u> (вершин – 8, граней – 6, рёбер - 12).

Трёхшаговая схема: $p_{0i} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Двухшаговая схема (первый вариант): $p_{0i} = \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Двухшаговая схема (второй вариант): $p_{0i} = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

<u>Октаэдр</u> (вершин – 6, граней – 8, рёбер - 12).

Трёхшаговая схема: $p_{0i} = \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Двухшаговая схема (первый вариант): $p_{0i} = \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Двухшаговая схема (второй вариант): $p_{0i} = \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

<u>Икосаэдр</u> (вершин – 12, граней – 20, рёбер - 30).

Трёхшаговая схема: $p_{0i} = \frac{5}{20} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Двухшаговая схема (первый вариант): $p_{0i} = \frac{5}{30} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Двухшаговая схема (второй вариант): $p_{0i} = \frac{5}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

<u>Додекаэдр</u> (вершин – 20, граней – 12, рёбер - 30).

Трёхшаговая схема: $p_{0i} = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$.

Двухшаговая схема (первый вариант): $p_{0i} = \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$.

Двухшаговая схема (второй вариант): $p_{0i} = \frac{3}{30} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$.

Чтобы записать в явном виде базисы для куба и октаэдра, нужно выбрать удобную систему координат. Пусть оси прямоугольной системы координат проходят через барицентры противоположных граней стандартного куба ($2 \times 2 \times 2$). Вершины стандартного октаэдра совпадают с барицентрами граней стандартного куба ($|x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1$). Все расчетные узлы находятся в вершинах тел Платона. Достаточно записать базисную функцию для какой-либо одной вершины тела. Например, для вершины куба $1(-1,-1,-1)$ имеем:

$$N_1(x, y, z) = \frac{1}{8}(1 - x)(1 - y)(1 - z). \tag{1}$$

Остальные функции базиса легко получить из (1). Такой базис реализует блуждания со случайным стартом в шаре $R = \sqrt{3}$ (8 маршрутов). Для вершины октаэдра $1(1,0,0)$ имеем кусочно-линейную функцию:

$$N_1(x, y, z) = \frac{1}{6}\left(1 + 2|x| + 3x - |y| - |z|\right) \tag{2}$$

или квадратичную

$$N_1(x, y, z) = \frac{1}{6}\left(1 + 2x^2 + 3x - y^2 - z^2\right). \tag{3}$$

Остальные функции кусочно-линейного и квадратичного базисов октаэдра легко получить соответственно из (2) и (3). Эти базисы моделируют 6-маршрутные одношаговые блуждания со случайным стартом в шаре $R = 1$.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Интерполяционные базисы тел Платона позволяют установить новые правила блужданий по сферам с учётом случайного выбора точки старта. Представляет интерес распространение полученных результатов на икосаэдр и додекаэдр.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Нигора В.М. Спосіб обертання симплексу в дослідженні задач автоматизованого проектування / В.М. Нигора, А.Н. Хомченко // Наукові праці Українського державного університету харчових технологій. – К.: УДУХТ, 1997. – С. 40–41.
2. Хомченко А.Н. Про точність способу обертання симплекса / А.Н. Хомченко, Б.А. Хомченко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 1998. - Т. 3. – С. 108–110.
3. Валько Н.В. Збіжність методу барицентричного усереднення для рівняння Лапласа в центрі круга / Н.В. Валько, А.Н. Хомченко // Вісник Запорізького державного університету. – 2000. – №2. – С. 24–26.
4. Хомченко А.Н. Ортотропные модели барицентрического усреднения граничных потенциалов в областях сложной геометрии / А.Н. Хомченко, Б.А. Хомченко, П.М. Зуб // Вестник Херсонского государственного технического университета. – 2000. - №1(7). – С. 24–28.
5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 464с.
6. Козуб Н.А. От равномерного распределения случайных точек к базису трилинейной интерполяции / Н.А. Козуб, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2006. – №1(24). – С. 99–102.
7. Мотайло А.П. Базисы шестиузлового октаэдра [Электронный ресурс] / А.П. Мотайло. – Материалы. междунар. науч.-практ. конф. "Перспективные научные исследования - 2011" (17-25 февр. 2011 г.). – София, Болгария. - Режим доступа: http://www.rusnauka.com/6_PNI_2011/Mathematics/4_79999.doc.htm
8. Левин В.И. Методы математической физики / В.И. Левин. – М.: Учпедгиз, 1956. – 243с.
9. Кордемский Б.А. Математика изучает случайности / Б.А. Кордемский. – М.: Просвещение, 1975. – 223с.

ХОМЧЕНКО Анатолий Никифорович – д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

– вероятностные схемы случайных блужданий, методы восстановления гармонических функций, принцип барицентрического усреднения.

УДК 534.1 + 631.316.02

Ю.В.Човнюк, М.Г.Діктерук, Ю.О.Гуменюк, О.Б.Тисленко, А.І. Дитюк

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ФУР'Є ТА Я.Г.ПАНОВКА У АНАЛІЗІ СУБ-/СУПЕРГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ Й РЕЗОНАНСІВ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ КУЛЬТИВАТОРІВ З ПРУЖНОЮ ПІДВІСКОЮ РОБОЧИХ ОРГАНІВ. І.

Постановка проблеми. Ефективність виробництва продукції рослинництва пов'язана з підвищенням якості обробки ґрунту. Підвищення ефективності технологічних процесів і розробка енергозберігаючих технологій для потреб сільськогосподарського виробництва, у свою чергу, можливі лише завдяки впровадженню новітніх (інноваційних) технологій, що базуються на використанні глибоких знань про фізичну природу явищ, які виникають при обробці грунту тими чи іншими робочими органами сільськогосподарських машин (зокрема, механічних коливань робочих органів лап культиваторів з пружною підвіскою). Результати, отримані у машинно-випробувальних станціях, показують переваги культиваторів саме з пружною підвіскою робочих органів. Застосовуючи останню, можна покращити (причому суттєво!) ефективність всього технологічного процесу обробки ґрунту й знизити тяговий опір грунтообробних машин. При дослідженні пружної підвіски культиватора виявлено зниження тягового опору й покращення агротехнічних показників: 1) зменшення гребінчастості поверхні; 2) зменшення ерозійно небезпечних часточок ґрунту на поверхні поля; 3) зменшення щільності ґрунту; 4) знищення зали паня та охоплення робочих органів; 5) підвищення продуктивних запасів вологи.

Всі відомі сучасні конструкції культиваторів мають ідентичний робочий орган - стрільчату лапу з пружною підвіскою, яка допускає поздовжні коливання робочого органу при роботі агрегату. У той же час суттєва різниця у величині тягового опору вказує на велике значення правильного вибору параметрів самої підвіски. Встановлено, що найбільше зменшення тягового зусилля спостерігається при наявності пружних стійок.

Конструкція, яка дозволяє реалізувати коливний процес при обробці ґрунту, складається з одного чи кількох пружних елементів. Найбільш широке розповсюдження отримали робочі органи, які складаються з двох чи трьох пружних елементів, одним з котрих є С-видна стійка й вертикально чи горизонтально поставлена циліндрична пружина.

Для аналізу виникаючих у таких механічних системах коливань перш за все необхідно мати пружну характеристику (цієї системи). Якщо у конструкції кілька пружних елементів, тоді виникає нелінійна залежність між прикладеним навантаженням (F_H) та переміщенням (q). Використання нелінійної пружної характеристики системи, зокрема, кусково-лінійної, покращує енергетичні та агротехнічні показники пружної підвіски при обробці ґрунту.

Відповідні параметри підвіски можна обирати, використовуючи теорію параметричних коливань. Проте, на думку авторів даної роботи, у подібних механічних системах (які є, по суті, суттєво-нелінійними) виникають й інші типи коливань, а саме: суб- та супергармонічні й коливання-резонанси дробового порядку, вивчення яких (умов їх виникнення, стійкості існування, основних параметрів) дозволить у подальшому оптимізувати саму конструкцію робочого органу лапи культиватора з пружною підвіскою та уникнути небажаних резонансних коливань (за допомогою спеціально підібраних амортизаторів).

Аналіз останніх публікацій по темі дослідження. У роботах [1-5] робочі органи культиваторів на пружній підвісці вивчені у межах моделі параметричних коливань, які можливі у досліджуваній механічній системі. Авторам даної роботи невідомі публікації, які б досліджували супер- та субгармонічні коливання у таких системах (а також резонанси дробового порядку).

Мета даної роботи полягає у встановленні основних параметрів, умов збудження та стійкості суб- та супергармонічних коливань (і резонансів дробового порядку) у робочих органах лап культиваторів на пружній підвісці методами, розвинутими у роботах [6-10].

Виклад основного змісту дослідження.

1. Математична модель механічної системи «робочий орган лапи культиватора (на пружній підвісці) – оброблюваний ґрунт».

У роботі [4] наведена математична модель найбільш типового робочого органу на пружній підвісці (лапи культиватора), яка відповідає суттєво нелінійним механічним системам [7]. Вона зводиться до наступного нелінійного диференціального рівняння другого порядку по часу t:

$$m \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + \eta \cdot \frac{dq}{dt} + C(q) \cdot q = +P(t), \tag{1}$$

де m – маса лапи та ґрунту, який на ній знаходиться, а також тієї частини стійки (пружної), яка приймає участь у коливаннях, η - коефіцієнт сили в'язкого опору, q – відхилення стійки від положення рівноваги, C(q) – жорсткість пружної підвіски за нелінійної характеристики відновлюючи сил, а саме:

$$C(q) = \begin{cases} C_I, -\infty < q \le q_1; \\ C_{II}, q \ge q_1; q_1 > 0, \end{cases} \tag{2}$$

$\{+P(t)\}$ - періодична по часу t сила, яка виникає під час роботи робочого органу лапи культиватора на жорсткій підвісці, у процесі якої ґрунт, що обробляється, періодично сколюється. Спочатку ґрунт стискається на ділянці (b) (рис.1) і опір переміщенню лапи збільшується до максимального значення F_{max}, а після сколювання ґрунту – знижується до мінімального його значення F_{min}.

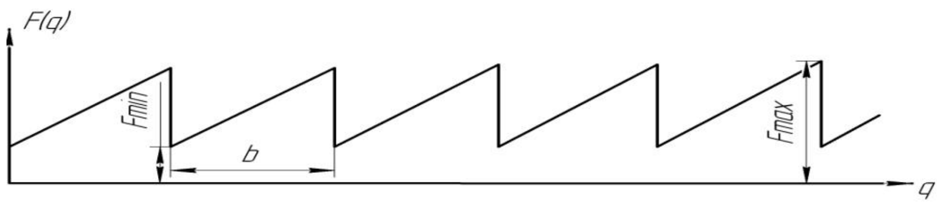


Рис.1. Опір переміщенню жорсткої лапи у ґрунті.

Позначимо $F_{ОП}(t) \equiv -P(t),$ тоді, з урахуванням (рис.1) та результатів роботи [4], можна для $F_{ОП}(t)$ записати:

$$\begin{cases} F_{ОП}(t) = F_{ОП}(t+T); T = \dfrac{b}{V_{агр}}; b \equiv \lambda_{ск}; T = \dfrac{\lambda_{ск}}{V_{агр}}; \\ F_{ОП}(t) = F_{\min} + \dfrac{(F_{\max} - F_{\min})}{T} \cdot t; 0 < t \le T, \end{cases} \tag{3}$$

де $V_{агр}$ – швидкість руху всього агрегату, $\lambda_{ск}$ - довжина хвилі сколювання ґрунту (залежить від глибини обробки й форми робочого органу).

Рівняння (1) переходить у наступне:

$$\ddot{q}+2h\dot{q}+K_0^2\cdot(1\pm\mu)\cdot q+\frac{F_{ОП}(t)}{m}=0, \tag{4}$$

де $h=\dfrac{\eta}{2m}, K_0^2=\dfrac{C_I+C_{II}}{2m}; \mu=\dfrac{C_I-C_{II}}{C_I+C_{II}}$.

Період власних коливань системи T^* (при $F_{ОП}(t)\equiv 0$) визначається з умови:

$$\begin{vmatrix} a_{11}; a_{12}; a_{13}; a_{14}; \\ a_{21}; a_{22}; a_{23}; a_{24}; \\ a_{31}; a_{32}; a_{33}; a_{34}; \\ a_{41}; a_{42}; a_{43}; a_{44}; \end{vmatrix}=0 \quad , \tag{5}$$

$$a_{11}=\sin\left(\frac{k_1^*\cdot T^*}{2}\right); a_{12}=\cos\left(\frac{k_1^*\cdot T^*}{2}\right); a_{13}=-\sin\left(\frac{k_2^*\cdot T^*}{2}\right); a_{14}=-\cos\left(\frac{k_2^*\cdot T^*}{2}\right);$$

$$a_{21}=-h\cdot\sin\left(\frac{k_1^*\cdot T^*}{2}\right)+k_2^*\cdot\cos\left(\frac{k_1^*\cdot T^*}{2}\right); a_{22}=-\left[h\cdot\cos\left(\frac{k_2^*\cdot T^*}{2}\right)+k_1^*\cdot\sin\left(\frac{k_1^*\cdot T^*}{2}\right)\right];$$

де : $$a_{23}=h\cdot\sin\left(\frac{k_2^*\cdot T^*}{2}\right)-k_2^*\cdot\cos\left(\frac{k_2^*\cdot T^*}{2}\right); a_{24}=h\cdot\cos\left(\frac{k_2^*\cdot T^*}{2}\right)+k_2^*\cdot\sin\left(\frac{k_2^*\cdot T^*}{2}\right);$$

$$a_{31}=0; a_{32}=1; a_{33}=-e^{-hT^*}\cdot\sin(k_2^*\cdot T^*); a_{34}=-e^{-hT^*}\cdot\cos(k_2^*\cdot T^*); a_{41}=k_1^*; a_{42}=-h;$$

$$a_{43}=e^{-ht^*}\cdot\left[h\cdot\sin(k_2^*\cdot T^*)-k_2^*\cdot\cos(k_2^*\cdot T^*)\right];$$

$$a_{44}=e^{-ht^*}\cdot\left[h\cdot\cos(k_2^*\cdot T^*)+k_2^*\cdot\sin(k_2^*\cdot T^*)\right];$$

У елементів детермінанту (5) a_{ij}, $(i,j)=(\overline{1,4})$, введені наступні позначення:

$$k_1^*=\sqrt{(1+\mu)\cdot K_0^2-h^2}; k_2^*=\sqrt{(1-\mu)\cdot K_0^2-h^2}; \tag{6}$$

Згідно досліджень, проведених у [7], суб- та супергармонійні коливання формуються на основі вільних коливань системи, котрі підтримуються зовнішньою вимушеною силою. Необхідні умови існування таких коливань для симетричних систем (тобто таких, які мають квазіпружні відновлюючи сили $f(x)$ симетричними відносно початку системи координат: $f(x)=-f(-x)$) розглянуті у [11,12]. Тут розповсюджені отримані результати у цитованих роботах на несиметричні системи (розпушувальна лапа культиватора відноситься саме до такої, якщо має у своєму складі робочий орган на пружній підвісці з т.з. білінійною характеристикою).

Досліджувана коливна система за наявності вільних коливань має амплітудно-частотну залежність (скелетну криву), котра зображена на рис.2. Нехай на частоті $w^*=\dfrac{2\pi}{T^*}$ вільні коливання системи мають період T^* й амплітуду a. Можна вважати також, що вільні коливання системи мають період $k\cdot T^*$, де $k=1,2,3...$

Якщо n періодів малої вимушеної сили опору періоду T приблизно співпадають з l періодами вільних коливань системи, тобто якщо приблизно виконується співвідношення:

$$n\cdot T=l\cdot T^*, \tag{7}$$

тоді у нелінійній (суттєво) коливній системі можливі різноманітні суб- чи супергармонічні коливання, або коливання порядку l/n, котрі будуть близькими до вільних при схожих початкових умовах.

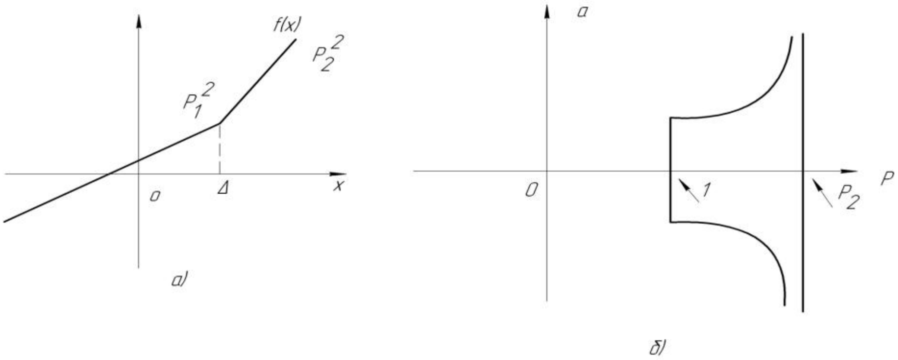


Рис.2. Система з білінійною пружною характеристикою (а) та її амплітудно-частотна (скелетна) крива (б).

На рис.2 введені наступні позначення:

$$p_1^2 = \frac{C_I}{m}; p_2^2 = \frac{C_{II}}{m}; C_{II} > C_I; \Delta \equiv q_1. \tag{8}$$

(Хоча можливі варіанти підвіски, коли $C_{II} < C_I$).

Якщо ввести $w = \frac{2\pi}{T}$, тоді (7) можна подати у вигляді:

$$n \cdot \frac{2\pi}{w} = l \cdot \frac{2\pi}{w^*} \Rightarrow \frac{w}{n} = \frac{w^*}{l}. \tag{9}$$

Хоча за різних значень n та l та близьких початкових умовах будуть у системі підтримуватись одні й ті ж вільні коливання, назви їх зазвичай пов'язують зі співвідношенням $\frac{l}{n}$, тобто кажуть про режими порядку $\frac{l}{n}$. При $l = 1$ - це субгармонічні коливання порядку $\frac{1}{n}$ ($w^* = \frac{w}{n}$); при $n = 1$ й $l \geq 2$ - це супергармонічні коливання ($w^* = w \cdot l$) і т.д. Користь від застосування терміну «режим порядку l/n» пов'язана з інформацією про те, що у формуванні даного періодичного режиму приймають участь l періодів вільних коливань й n періодів вимушеної сили [7]. Недолік цього терміну – приховування тієї обставини, що в основі різних за назвою режимів лежать вільні коливання системи; тому суб- та супергармонічні коливання різного порядку можуть мати, наприклад, досить близькі закони руху.

Слід зазначити, що на одній частоті вимушеної сили може одразу співіснувати кілька різних періодичних режимів.

Як правило, для систем із несиметричними пружними характеристиками частотні області існування субгармонічних коливань можуть бути значно ширшими ніж для симетричних систем [7]. Найбільш значні субгармонічні коливання проявляються на частотах, близьких до кратних частоті вільних коливань.

2. Резонансні явища та самозбудження періодичних коливань у нелінійних коливних системах (якісний аналіз).

У тих випадках, коли невеликі зовнішні сили призводять до великих коливань, говорять про резонанс у системі. Резонансні коливання мають місце у системі при виконанні умови (7). Резонансні коливання суттєво перевищують нерезонансні, особливо при малих дисипативних силах.

У основі формування резонансних коливань лежать вільні коливання системи: при резонансі зовнішнє збудження розвиває відповідну форму вільних коливань і підтримує ці «квазівільні» коливання.

Основний (головний) резонанс має місце в умовах наближення частоти зовнішнього впливу до частоти вільних коливань.

У випадку субгармонічного резонансу у системі виникають великі квазівільні коливання, які підтримуються зовнішніми вимушеними силами, частота котрих у ціле число разів більша частоти вільних коливань. У випадку супергармонічного резонансу мають місце ті ж великі квазівільні коливання, котрі підтримуються зовнішніми силами, частота яких у ціле число разів менша частоти вільних коливань. Хоча при супергармонічних коливаннях період коливань співпадає з періодом вимушеної сили, внесок вищих гармонік у розв'язок досить вагомий. Тому при вивченні цих коливань іноді можна знехтувати низькочастотними складовими розв'язку з частотою вимушеної сили.

Дробові резонанси порядку l/n, котрі відносяться до субгармонічних, також мають місце при виконанні співвідношення (7), тобто й у цьому випадку, як зазначено вище, l-періодів вимушеної сили «підтримують» n-періодів вільних коливань.

Резонансні властивості у нелінійних коливних системах проявляють себе також у явищі самозбудження.

За певних параметрів пружної характеристики і вимушеної сили у неавтономних коливних системах з одним ступенем вільності руху стійкий основний режим з періодом вимушеної, наприклад, гармонічної, сили стає нестійким, причому у системі на цій частоті можуть взагалі бути відсутніми стійкі основні режими. У свою чергу, нестійкий основний режим (нестійке положення рівноваги) призводить до «народження» іншого нестійкого періодичного режиму, період котрого відрізняється від періоду вимушеної сили. Це явище самозбудження відоме у неавтономних системах з несиметричними пружними характеристиками [13-15]. Воно проявляє себе у вигляді самозбудження субгармонічних коливань, котрі можуть бути єдиними можливими стійкими коливаннями.

Явище самозбудження, мабуть, тісно пов'язане з проявом синхронізації зовнішнього збудження й внутрішніх коливних властивостей динамічних систем і відноситься до резонансних явищ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Краснощеков Н.В. К обоснованию жесткости упругой стойки рабочих органов противоэрозионного культиватора КПЭ-3.8 / Н.В.Краснощеков, П.М.Котов // Труды ВИСХОМа. – 1970. – Вып.27.
2. Рябцев Г.А. Технологические показатели работы культиваторов с упругой подвеской. / Г.А.Рябцев // Вестник сельскохозяйственной науки. – 1970. – №12.
3. Рябцев Г.А. Работа культиватора с упругой подвеской лап на повышенных скоростях. / Г.А.Рябцев // Техника в сельском хозяйстве. – 1974. – №6.
4. Кушнарев А.С. К вопросу снижения тягового сопротивления и улучшения агротехнических показателей культиваторов с упругой подвеской рабочих органов. / А.С.Кушнарев, Л.Н.Волков, В.П.Базаров // Научные основы проектирования сельскохозяйственных машин. – Ростов-на-Дону: Рост. ИСХМ, 1980. – С.77–84.
5. Базаров В.П. Дополнительный упругий элемент и его влияние на упругую подвеску. / В.П.Базаров // Конструирование и технология производства сельскохозяйственных машин. – 1980. – №10. – С.9–11.
6. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 272с.
7. Закржевский М.В. Колебания существенно-нелинейных механических систем. / М.В.Закржевский. – Рига: Зинатне, 1980. – 190с.

8. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Под ред.В.Н. Челомея. – Т.2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. – М.: Машиностроение, 1979. – 351с.
9. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. / Я.Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320с.
10. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1991. – 256с.
11. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов с двигателями внутреннего сгорания. / В.Л. Вейц, А.Е. Кочура. – Л.: Машиностроение, 1976. – 384с.
12. Вульфсон И.И. Нелинейные задачи динамики машин. / И.И.Вульфсон, М.З. Коловский. – Л.: Машиностроение, 1968. – 382с.
13. Фейгин М.И. О несимметрических периодических режимах в симметричной системе с ударным взаимодействием. / М.И. Фейгин // Известия вузов. Радиофизика. – 1967. – Т.10. – №3. – С.389–392.
14. Хвингия М.В. Вибрация пружин. / М.В. Хвингия. – М.: Машиностроение, 1969. – 287с.
15. Хвингия М.В. и др. Колебания и устойчивость упругих систем машин и приборов. / М.В. Хвингия и др. – Тбилиси: Мецниереба, 1974. – 284с.

ЧОВНЮК Юрий Васильевич – к.т.н., доцент кафедры конструирования машин Национального университета биоресурсов и природопользования Украины, г.Киев.
Научные интересы:
– математические модели в нелинейной динамике машин.

ДИКТЕРУК Михаил Гаврилович – к.т.н., доцент кафедры строительных машин Киевского национального университета строительства и архитектуры.
Научные интересы:
– компьютерное моделирование в нелинейной динамике машин.

ГУМЕНЮК Юрий Олегович – ассистент кафедры сельскохозяйственных машин Национального университета биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев.
Научные интересы:
– математическое моделирование задач динамики сельскохозяйственных машин.

ТИСЛЕНКО Александр Борисович – аспирант кафедры конструирования машин Национального университета биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев.
Научные интересы:
– математическое и компьютерное моделирование динамики машин сельскохозяйственного предназначения.

ДИТЮК Анатолий Иванович – соискатель кафедры конструирования машин Национального университета биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев.
Научные интересы:
– математическое и компьютерное моделирование производственных процессов и машин сельскохозяйственного предназначения.

УДК 532.595

Г.А. Шелудько, Т.В. Емельянов, О.В. Науменко, Е.А. Стрельникова

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Постановка проблеми. Исследование динамического взаимодействия упругих конструкций с жидкостью представляет достаточно сложную проблему, решению которой посвящена обширная литература [1-5]. В работах [4], [5] предложен подход, основанный на использовании метода граничных интегральных уравнений, для решения задачи о собственных колебаниях оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. В настоящей работе этот подход развит применительно к изучению деформированного состояния пластин, совершающих колебания в сжимаемой жидкости.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую шарнирно-опертую пластинку. Предположим, что жидкость идеальная, сжимаемая, а ее течение, индуцированное колебаниями пластинки, является безвихревым. При этих условиях существует потенциал скоростей $\phi(x,y,z,t)$, удовлетворяющий следующему волновому уравнению

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где c_l - скорость звука в жидкости.

Уравнение колебаний пластинки в жидкости запишем в векторном виде

$$\boldsymbol{LU} + \boldsymbol{M\ddot{U}} = \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ – операторы упругих и массовых сил; $\boldsymbol{U} = (u,\ v,\ w)$ – вектор-функция перемещений срединной поверхности пластинки, $P = (0,0,p)$ – перепад давления жидкости на пластинку.

Приходим к следующей краевой задаче относительно неизвестных перемещения w и потенциала скоростей ϕ:

$$\boldsymbol{LU} + \boldsymbol{M\ddot{U}} = \left(0,0,-\rho_l\left(\dot{\phi}^+ - \dot{\phi}^-\right)\right), \tag{3}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \dot{w},\ P_0 \in S, \tag{5}$$

$$\mathrm{grad}\phi\,\big|_{\infty} = 0. \tag{6}$$

Здесь w – нормальная составляющая перемещений пластинки, S – поверхность пластинки, ρ_l – плотность жидкости.

Разложение по собственным формам. Будем искать решение задачи (3)–(6) в виде разложения по собственным формам $u_k(x,y,z)$ колебаний пластинки в вакууме

$$\boldsymbol{U}(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{u}_k(x,y,z)\,c_k(t), \tag{7}$$

где $c_k(t)$ – неизвестные коэффициенты. Отметим, что для собственных векторов справедливы следующие соотношения [4]:

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_k = \omega_k^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_k, \qquad (\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{kj} \;, \tag{8}$$

где ω_k – k-я частота собственных колебаний оболочки в вакууме.

Из условия (5) следует, что

$$\phi(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{m} \phi_k(x,y,z)\,\dot{c}_k(t) \,. \tag{9}$$

Рассмотрим задачу о малых гармонических колебаниях упругой пластинки. Представим вектор $\boldsymbol{U}$ в форме $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}e^{i\Omega t}$, где Ω – частота, а $\boldsymbol{u}$ – собственная форма колебаний рассматриваемой пластинки в жидкости. Тогда для определения функций $\phi_k\left(k=\overline{1,m}\right)$ можно сформулировать следующие краевые задачи:

$$\nabla^2\phi_k + \frac{\Omega^2}{c_l^2}\phi_k = 0\,, \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial n} = w_k \,, \;\; P_0 \in S\,, \tag{10}$$

Решение краевых задач для уравнения Гельгольца (10) осуществляется методом граничных интегральных уравнений с использованием метода граничных элементов в его численной реализации [6]. После определения $\phi_k\left(k=\overline{1,m}\right)$ подставляем выражения (7), (9) в уравнение (3)

$$\boldsymbol{L}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k \boldsymbol{u}_k\right) + \boldsymbol{M}\left(\sum_{k=1}^{m} \ddot{c}_k \boldsymbol{u}_k\right) = -\rho_L \sum_{k=1}^{m} \ddot{c}_k \left(\phi_k^+ - \phi_k^-\right).$$

Умножая последнее уравнение скалярно на u_j и учитывая свойства (8), приходим к системе дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов c_k

$$\ddot{c}_j + \omega_j^2 c_j = -\rho \sum_{k=1}^{m} \ddot{c}_k \left(\left(\phi_k^+ - \phi_k^-\right), w_j\right), \quad j = \overline{1,m}\,. \tag{11}$$

В случае гармонических колебаний получим матричное уравнение

$$\left(\omega + \Omega^2 \boldsymbol{E}\right)c = -\Omega^2 \rho \boldsymbol{H} c\,, \tag{12}$$

где ω - диагональная матрица, на диагонали которой находятся квадраты собственных частот колебаний пластины в вакууме, $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица, $\boldsymbol{H}$ – матрица присоединенных масс.

Придадим уравнению (12) вид

$$\omega\left(\boldsymbol{E} + \rho_l \Omega^2 \boldsymbol{H}\right)^{-1} c = \Omega^2 c\,.$$

Тогда нахождение собственных значений сводится к вычислению корней определителя

$$\det\left[\omega\left(\boldsymbol{E} + \rho_l \Omega^2 \boldsymbol{H}\right)^{-1} - \Omega^2 \boldsymbol{E}\right] = 0\,. \tag{13}$$

Вычисление матрицы присоединенных масс. Для решения краевой задачи (10) применим метод интегральных уравнений. Будем искать решение этой задачи в виде потенциала двойного слоя:

$$\phi_k\left(P_0\right)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \gamma_k\left(P\right)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\cos\left(\Omega^2\left|P-P_0\right|/c_l^2\right)}{\left|P-P_0\right|}\right]dS\,. \qquad (14)$$

по поверхности пластинки.

Потенциал (14) удовлетворяет первому из уравнений в (10), исчезает на бесконечности, а удовлетворение граничному условию приводит к гиперсингулярному уравнению вида

$$\boldsymbol{G}\gamma=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_0}\iint_S \gamma_k\left(P\right)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\cos\left(\Omega^2\left|P-P_0\right|/c_l^2\right)}{\left|P-P_0\right|}\right]dS=w_k\left(P_0\right). \qquad (15)$$

Для решения гиперсингулярного интегрального уравнения (15) применим проекционный метод [7]. Для шарнирно-опертой пластинки собственными формами будут

$$w_{lj}=\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b},\quad k=k\left(l,j\right),\quad k\left(1,1\right)=1,\quad k\left(1,2\right)=2,\quad k\left(2,1\right)=3,\quad k\left(2,2\right)=4. \quad (16)$$

Частоты колебаний пластинки в вакууме вычисляются по формуле

$$\omega_{lj}=\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)\rho_p}\frac{h^2\pi}{12}\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)^2,$$

где E – модуль упругости, a,b - размеры пластинки, h- толщина пластинки, ρ_p- плотность материала пластинки.

При применении проекционного метода для решения уравнения (15) используем разложение неизвестной плотности потенциала в ряд по функциям (16)

$$\gamma_k\left(P\right)=\sum_{i=1}^{n}C_k^i w_i\left(P\right).$$

Это приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно C_k^i

$$\sum_{i=1}^{n}C_k^i\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_i,w_j\right)=\left(w_k,w_j\right),\quad j=\overline{1,n}\,.$$

Матрица, обратная к $\left(\boldsymbol{G}w_i,w_j\right)$, представляет собой матрицу присоединенных масс $\boldsymbol{H}$, фигурирующую в соотношении (13).

Определение собственных частот. Собственные частоты определяются из уравнения (13) с помощью гибридного адаптивного метода, описанного в [8,9]. Применяется следующая формула для приближения корня характеристического уравнения (13):

$$\Omega_{p+1}=\frac{1}{2}\left[A+C-\frac{2\left(f_C-f_A\right)}{\Delta_{BCA}\left(\Omega_p-A\right)}\right],$$

где

$$\Delta_{ABC}=2\left(\Delta_{AB}-\Delta_{AC}\right)/\left(B-A\right),\quad \Delta_{AB}=\left(f_B-f_A\right)/\left(B-A\right).$$

Здесь

$$f = f(\Omega) = \det\left[\omega\left(\boldsymbol{E} + \rho_l \Omega^2 \boldsymbol{H}\left(\Omega^2\right)\right)^{-1} - \Omega^2 \boldsymbol{E}\right]$$

представляет собой трансцендентную функцию, определяемую формулой (13).

Численный анализ свободных колебаний прямоугольной шарнирно-опертой пластинки. Рассматривалась прямоугольная шарнирно-опертая пластинка размерами a = 1м; b = 1м, толщиной h = 0.1м.

Модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны E = 2.1×10^6н/м^2; ν = 0.3. Плотности материала пластинки и жидкости равны ρ_p = 7900 *кг*/м^3; ρ_l =1000 *кг*/м^3, скорость звука в жидкости c_l =1500м./сек.

На рис. 1 показаны четыре собственные формы колебаний пластинки.

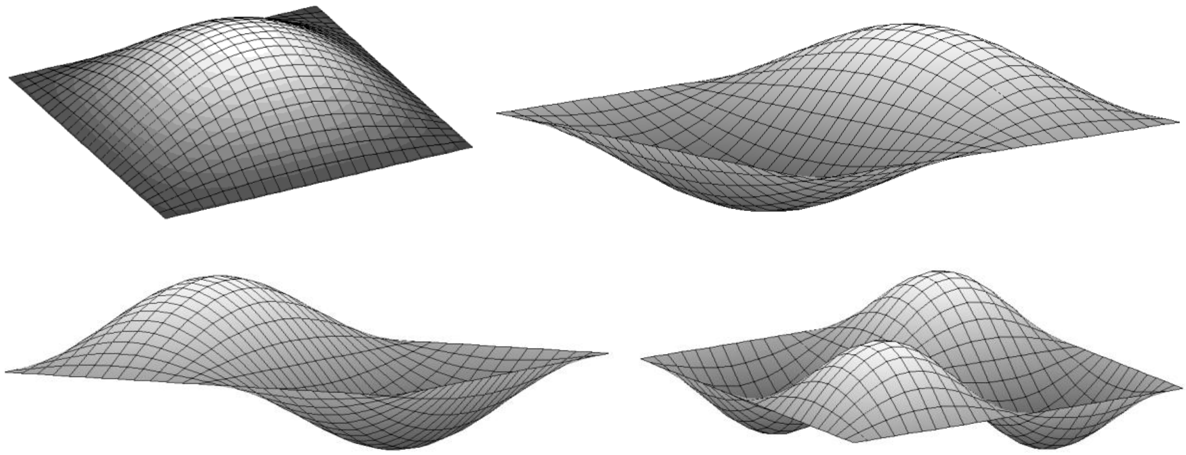


Рис. 1. Собственные формы колебаний пластинки.

В табл.1 приведены соответствующие частоты колебаний в вакууме и жидкости.

Таблица 1.

Частоты колебаний шарнирно-опертой пластинки			
Номер частоты	В вакууме	Без учета сжимаемости	С учетом сжимаемости
k(1,1)=1	94.848	78.319	78.398
K(1.2)=2	213.408	189.719	189.798
K(2,1)=3	213.408	189.719	189.798
K(2,2)=4	379.392	346.005	346.129

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что влияние сжимаемости несущественно на низших частотах. Для рассмотренных форм частоты колебаний в жидкости приблизительно на 20% меньше соответствующих частот в вакууме.

Выводы. Разработан метод определения собственных частот и форм колебаний пластин в сжимаемой жидкости. Метод основан на применении сингулярных интегральных уравнений для определения давления жидкости на пластину. Собственные частоты определяются как корни трансцендентного уравнения, для решения которого применен гибридный адаптивный метод. Изучено влияние сжимаемости на частоты колебаний.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Белоцерковский С.М. Исследование на ЭВМ аэродинамических и аэроупругих характеристик винтов вертолетов / С.М. Белоцерковский, Б.Е. Локтев, М.И. Ништ. – М.: Машиностроение, 1992. – 220 с.
2. Kubenko V.D. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid / V.D. Kubenko, P.S. Koval'chuk // Intern. Appl. Mech. – 2000. – 36, N.4. – P. 421–448
3. Kumar, V. Dynamic analysis of conical shells conveying fluid / V. Kumar, N. Ganesan // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol. 310. – I. 1–2. – P. 38–57.
4. Еселева Е.В. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью / Е.В. Еселева, В.И. Гнитько, Е.А. Стрельникова // Пробл. машиностроения – 2006. – № 1. – С. 105–118.
5. Ventsel E. S. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid / E. S. Ventsel, V. Naumenko, E. Yeseleva, E. Strelnikova // Engineering analysis with boundary elements. – 2010. – №34. – P. 856–862.
6. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
7. Кантор Б.Я. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды / Б.Я. Кантор, Е.А. Стрельникова. – Харьков: Новое слово, 2005. – 252 с.
8. Шелудько Г.А. Гибридизация вычислительных процессов. Т. 1. / Г.А. Шелудько, Е.А. Стрельникова. – Харьков: Новое слово, 2006. – 212 с.
9. Шелудько Г.А. Гибридизация вычислительных процессов. Т. 2. / Г.А. Шелудько, Е.А. Стрельникова. – Харьков: Новое слово, 2007. – 182 с.

ШЕЛУДЬКО Гелий Артемович – научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

– методы оптимального проектирования конструкций, гибридные и адаптивные поисковые методы оптимизации, численные методы алгебры и анализа.

ЕМЕЛЬЯНОВ Тимофей – студент Харьковского национального политехнического университета «ХПИ».

Научные интересы:

– гидроупругость, численные методы механики сплошной среды, компьютерное моделирование.

НАУМЕНКО Ольга Васильевна – к.ф.-м.н., доцент кафедры физики Харьковского национального аэрокосмического университета «ХАИ».

Научные интересы:

– применение сингулярных интегральных уравнений в механике сплошной среды, методика преподавания фундаментальных дисциплин в высшей школе.

СТРЕЛЬНИКОВА Елена Александровна – д.т.н., ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

– сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, гидроупругость, метод граничных элементов, метод дискретных особенностей, оптимальное проектирование конструкций..

УДК656.612

В.Г. Шерстюк

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПОДОБИЯ ДВУХ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

Постановка проблемы. В сложных динамических системах (СДС) зачастую возникает необходимость решения задачи диагностики либо предсказания нежелательных (критических или аварийных) ситуаций. Состояние СДС и поведение объектов в ней, как правило, оценивается в процессе непрерывных наблюдений (мониторинга), при этом исходная информация о состоянии СДС представляет собой упорядоченную во времени последовательность событий. Каждое событие интерпретируется как составной объект, состоящий из множества количественных или качественных оценок параметров, получаемых путем прямых либо косвенных измерений. Присутствие или отсутствие во временной последовательности событий определенного класса может быть основанием для выводов о возможном переходе СДС в то или иное состояние, о вероятных будущих событиях или поведении объектов.

Однако, ограниченная точность средств измерений в системах реального времени, наличие препятствий, нескольких независимых каналов наблюдения, присутствие шумов и искажений приводят к неполноте, неточности и противоречивости информации о событии. Как следствие, в наблюдаемом потоке событий могут присутствовать шумовые события, пропуски событий, искажения их параметров и т.д.

Выявление причинно-следственных зависимостей между событиями и комбинациями событий в СДС является нетривиальной задачей, и зачастую возможно только после наработки определенной статистики наблюдений, при этом требуется непрерывное участие человека – оператора или эксперта. Снизить зависимость от «человеческого фактора» можно путем автоматизации процессов диагностики и предсказания ситуаций в СДС с использованием интеллектуальных систем (ИС).

Применение ИС, основанных на правилах либо на моделях, по причине невозможности априорного построения адекватных систем правил и моделей, а также ввиду необходимости верификации знаний, неосуществимой во многих открытых предметных областях, например при управлении подвижными объектами, для решения поставленной задачи практически невозможно [1]. Наиболее подходящим инструментом могли бы стать ИС, основанные на прецедентах, действующие на основе принципов: а) «ситуациям свойственно повторяться» и б) «в подобных ситуациях могут быть приняты подобные решения» [2]. Однако, напрямую использовать существующие модели прецедентных ИС невозможно, поскольку они требуют четко заданных статичных прецедентов с четко обозначенными границами, реализация же динамических прецедентных ИС требует соответствующего теоретического обоснования.

Анализ публикаций по теме исследования. Основой принятия решений по прецедентам является выявление подобия между текущей ситуацией и прецедентами, хранимыми ИС. Существует значительное число работ, посвященных исследованию методов оценки подобия объектов, систематический их обзор дан в [3]. Все рассмотренные декларативные и процедурные методы оценки подобия основаны на принципе попарного сопоставления объектов. Между тем, нам требуется оценивать подобие не пар, а последовательностей объектов (событий).

В [4] предложен метод сравнения последовательностей, основанный на подсчете расстояния Левенштайна, практическая реализация которого затруднительна ввиду значительной вычислительной сложности. В [5] для сравнения последовательностей предложен нелинейный метод, представляющий собой генетический алгоритм. В [6] также рассматривался ряд подходов к решению задачи сравнения последовательностей, неадаптивных к условиям неточной и противоречивой информации. Идея динамической оценки подобия последовательностей предложена в [7], однако практического воплощения она не получила.

Единственной реализацией метода оценки подобия последовательностей в условиях неполной и неточной информации является метод динамического подсчета вхождений [8]. В то же время, метод разработан для весьма узкой и специфической задачи обнаружения вторжений в компьютерные сети, где при оценке подобия отдают приоритет слабо схожим редко встречающимся последовательностям впротивовес сильно схожим часто встречающимся последовательностям, что препятствует использованию данного метода в других предметных областях.

Таким образом, динамическая оценка подобия последовательностей событий представляет собой недостаточно исследованную область, актуальной задачей является разработка метода динамической оценки подобия потоков событий, пригодного для использования в ИС автоматизации процессов диагностики и предсказания ситуаций в СДС в условиях неполной и неточной информации.

Цель данной работы состоит в разработке метода динамической оценки подобия двух потоков событий в условиях неполной и неточной информации, пригодного для практической реализации в прецедентной ИС реального времени.

Основная часть. Примем за основу метод динамического подсчета вхождений и формализуем базовые понятия модели аналогично [8].

Событийную *модель* A представим упорядоченной парой:

$$\mathrm{A} = \langle \upsilon, \Sigma \rangle, \tag{1}$$

где υ - множество переменных;
Σ - сигнатура.

Сигнатура Σ есть кортеж:

$$\Sigma = \langle C, P, \perp, \prec \rangle, \tag{2}$$

где C - множество классов событий;
P - множество параметров событий;
$\prec$ - частичный порядок на C;
$\perp$ - наименьший элемент последовательности $\prec$.

Отношение $\prec$ является по определению отношением информационной упорядоченности, поэтому $c_1 \prec c_2$ означает, что c_1 несет меньше информации, чем c_2. Таким образом, c_1 является абстракцией c_2, а c_2 – конкретизацией c_1, т.е. отношение $\prec$ задает на C таксономическую иерархию классов.

Минимальный элемент $\perp$ порядка $\prec$ имеет семантику «любой» и выражает минимум информации, т.е. $\forall c \in \Sigma.C \ \perp \prec c$. Если значение некоторого параметра неизвестно либо недоступно ИС, будем присваивать ему значение $\perp$.

Событие может быть представлено как:

$$\psi ::= X : c[p_1 \doteq \Psi_1, \ldots p_n \doteq \Psi_n], \tag{3}$$

где X - переменная, $X \in \upsilon$;
c - класс события, $c \in C$;
$p_1, \ldots p_n$ - параметры события, $p_1, \ldots p_n \in P$;
Ψ - переменные либо связанные события другого уровня абстракции.

Переменную X назовем *начальной точкой* события ψ.

При $n = 0$ событие не имеет параметров. Множество переменных, изменяющихся при возникновении события ψ, обозначим υ_{ψ}. Зададим также функцию $root(\psi)$, возвращающую класс начальной точки события.

В заданной модели A *путь* $\rho(X, p_i)$ является последовательностью, ведущей от начальной точки X к значению параметра p_i. Два пути $\rho(X, p_i)$ и $\rho(Y, p_i)$ являются эквивалентными, если они приводят к одному и тому же значению p_i.

В заданной модели A *поток событий* $\vec{S}$ представляет собой упорядоченную совокупность событий вида:

$$\vec{S} = [\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n], \tag{4}$$

такую, что для всех $\vec{S}_i \in \mathrm{A}$ существует по крайней мере один общий параметр $t \in \Sigma.P$, значения которого полностью упорядочены, т.е. $\psi_1.t \le \psi_2.t \le \ldots \le \psi_n.t$.

Длина потока событий $\vec{S}$ (обозначается $\left|\vec{S}\right|$) определяется его мощностью (n). Любые два потока событий могут быть связаны посредством оператора $\bullet$.

В заданной модели A *поток классов* $\vec{T}$ представляет собой упорядоченную совокупность классов вида:

$$\vec{T} = [c_1, c_2, \ldots c_n], \tag{5}$$

такую, что $\vec{T}_i \in \mathrm{A}.\Sigma.C$.

Длина потока классов $\vec{T}$ (обозначается $\left|\vec{T}\right|$) определяется его мощностью (n). Любые два потока классов могут быть связаны посредством оператора $\circ$.

Для любого заданного потока событий $\vec{S}$ может быть определен соответствующий поток классов $\vec{T}$, такой что $\vec{T}_i = root(\vec{S}_i)$.

Пусть заданы модель A и потоки классов $\vec{U} = [u_1, u_2, \ldots u_n]$ и $\vec{V} = [v_1, v_2, \ldots v_m]$, $\forall i\ u_i \in \mathrm{A}.\Sigma.C$, $\forall j\ v_j \in \mathrm{A}.\Sigma.C$, $n = \left|\vec{U}\right|$, $m = \left|\vec{V}\right|$, $m \le n$. Поток классов $\vec{U}$ *включает* поток классов $\vec{V}$ (обозначается $\vec{U} \subseteq \vec{V}$), если существует последовательность индексов $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$, такая что $u_1 \prec v_{i_1}, u_2 \prec v_{i_2}, \ldots u_m \prec v_{i_m}$.

Пусть заданы модель A и потоки событий $\vec{S} = [\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n]$ и $\vec{R} = [\psi'_1, \psi'_2, \ldots \psi'_m]$, $n = \left|\vec{S}\right|$, $m = \left|\vec{R}\right|$, $m \le n$. Поток событий $\vec{S}$ *включает* поток событий $\vec{R}$ (обозначается $\vec{S} \subseteq \vec{R}$), если для потоков классов $\vec{U} = root(\vec{S})$ и $\vec{V} = root(\vec{R})$ выполняется условие $\vec{U} \subseteq \vec{V}$. Поток событий $\vec{R}$ *входит* в поток событий $\vec{S}$, если $\vec{S} \subseteq \vec{R}$.

Представленное определение вхождения потоков позволяет далее ввести понятие совмещения потоков событий, необходимое для сопоставления потоков событий и их фрагментов в случае неполного (частичного) совпадения.

Пусть задана модель A, а в ней потоки событий $\vec{S} = [\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n]$ и $\vec{R} = [\psi'_1, \psi'_2, \ldots \psi'_m]$, $\vec{S}, \vec{R} \in \Sigma$. *Совмещением* потоков $\vec{S}$ и $\vec{R}$ является пара $\left\langle \vec{S}', \vec{R}' \right\rangle$, полученная вставкой пустых элементов ($\perp$) в оба потока таким образом, что $\left|\vec{S}'\right| = \left|\vec{R}'\right|$ и для всех $1 \le i \le \left|\vec{S}'\right|$ элемент $\vec{S}'[i]$ совмещен с элементом $\vec{R}'[i]$, при $\vec{S}'[i] \ne \perp$ и $\vec{R}'[i] \ne \perp$.

Для потока событий $\vec{S} = [\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n]$ длины n, заданного на модели A, *сегментация* $\mathbf{S}(\vec{S}, m)$ степени m представляет собой последовательность из $m+1$ точек разрыва в диапазоне $[1, n]$, таких что:

$$\mathbf{S}(\vec{S}, m) = [s_1, s_2, \ldots s_m, s_{m+1}], \\ 1 = s_1 < s_2 < \ldots < s_m < s_{m+1} = n+1. \tag{6}$$

Очевидно, что m-сегментация приводит к разбиению потока $\vec{S}$ на m сегментов $\left[\vec{S}^1, \vec{S}^2, \ldots \vec{S}^m\right]$:

$$[\![\psi_1, \ldots, \psi_{s_2 - 1}]\!] \bullet [\![\psi_{s_2}, \ldots, \psi_{s_3 - 1}]\!] \bullet \ldots \bullet [\![\psi_{s_m}, \ldots, \psi_n]\!] = [\![\psi_{s_i}, \ldots, \psi_{s_{i+1}}]\!]_{i=1}^{m}, \tag{7}$$

таких что $\Sigma_{i=1}^{m}\left|S^i\right| = n$. В общем случае, для любого заданного потока событий может быть определено множество возможных сегментаций.

Обозначим символом $\approx$ сходство сегментов, а символом $\not\approx$ - их различие.

Пусть $\vec{S}$ представляет собой входной (наблюдаемый) поток событий, а $\vec{R}$ - поток событий прецедента, содержащегося в хранилище ИС. Произведем k-сегментацию потока $\vec{S}$ и l-сегментацию потока $\vec{R}$. Тогда сопоставляемые потоки событий можно представить как совокупности сегментов $\vec{S}^k$ и $\vec{R}^l$ трех типов:

а) *совместимых*, когда сопоставимые элементы (события) занимают одинаковые позиции в обоих сегментах:

$$\left\{\left(\vec{S}^k[i] \equiv \vec{R}^l[i]\right)\right\}_{0 < i < \min\left(\left|\vec{S}^k\right|, \left|\vec{R}^l\right|\right)} : \vec{S}^k \approx_C \vec{R}^l; \tag{8}$$

б) *совмещаемых*, когда сопоставимые элементы встречаются в обоих сегментах, но в различных позициях:

$$\left\{\left(\vec{S}^k[i] \equiv \vec{R}^l[j]\right)\right\}_{0 < i \le \left|\vec{S}^k\right|, 0 < j \le \left|\vec{R}^l\right|, i \ne j} : \vec{S}^k \approx_A \vec{R}^l; \tag{9}$$

в) *несовмещаемых*, когда элементы, присутствующие в сегменте одного потока, отсутствуют в сегменте другого потока:

$$\left\{\left(\vec{S}^k[i]\right)\right\}_{0 < i \le \left|\vec{S}^k\right|} : \forall j\, \vec{S}^k[i] \ne \vec{R}^l[j] \cup \left\{\left(\vec{R}^l[j]\right)\right\}_{0 < j \le \left|\vec{R}^l\right|} : \forall i\, \vec{R}^l[j] \ne \vec{S}^k[i] : \vec{S}^k \not\approx \vec{R}^l. \tag{10}$$

Оценка подобия совместимых сегментов может быть принята за 1, т.е. $\vec{S}^k \approx_C \vec{R}^l : \mathbf{SIM}\left(\vec{S}^k, \vec{R}^l\right) = 1$, соответственно для несовмещаемых сегментов $\vec{S}^k \not\approx \vec{R}^l : \mathbf{SIM}\left(\vec{S}^k, \vec{R}^l\right) = 0$. Оценка подобия совмещаемых сегментов может быть вычислена при выполнении совмещения, для чего используются две предопределенные операции:

- *вставки события* ψ в сегмент $\vec{S}^k$ в позицию i: $Inject\left(\vec{S}^k, \psi, i\right)$;

- *отбрасывания события* ψ из позиции i сегмента $\vec{S}^k$: $Ignore\left(\vec{S}^k, \psi, i\right)$.

С помощью первой операции поток дополняется «пропущенными» событиями, с помощью второй – фильтруются из потока «шумовые» события.

Введем оценку затрат на выполнение операции вставки $Q^{Inject}(\psi)$ и операции отбрасывания $Q^{Ignore}(\psi)$:

$$Q^{Inject}(\psi) = -\sum_{\psi' \in C : root(\psi) \sqsubseteq \psi'} \pi(\psi'), \\ Q^{Ignore}(\psi) = -1 / \pi(\psi'), \\ \pi(\psi) = Ind\left(\psi, \vec{S}\right) / Ind\left(\psi, \vec{R}\right), \tag{11}$$

где $\pi(\psi')$ - оценочная функция затрат, рассматривающая событие ψ и все абстрактные $\psi' \in C : root(\psi) \subseteq \psi'$ таксономической иерархии C;

$Ind(\psi, \vec{S})$ - число вхождений события ψ во входной поток событий $\vec{S}$;

$Ind(\psi, \vec{R})$ - число вхождений события ψ в поток событий $\vec{R}$ прецедента.

Отметим, что чем с более абстрактной позиции в C рассматривается событие, тем большей получается оценка затрат на совмещение сегментов – и, соответственно, тем меньшим становится значение оценки подобия.

При оценке подобия совмещаемых сегментов производится поиск возможных совмещений суффикса сегмента $\vec{S}^k$ входного потока с префиксом сегмента $\vec{R}^l$ потока событий прецедента ИС.

Сумма затрат Λ на выполнение совмещения сегментов определяется с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\Lambda(0,0) = 0,\ \Lambda(i,0) = \Lambda(i-1,0),$$
$$\Lambda(0, j) = \Lambda(0, j-1) + Q^{Inject}\left(\vec{R}^l[j]\right),$$
$$\Lambda(i, j) = \max\begin{cases}\Lambda(i-1, j) + Q^{Ignore}\left(\vec{S}^k[i]\right)\\ \Lambda(i, j-1) + Q^{Inject}\left(\vec{R}^l[j]\right)\\ \Lambda(i-1, j-1) + Q^{Subst}\left(\vec{S}^k[i], \vec{R}^l[j]\right)\end{cases}, \quad (12)$$

где $Q^{Subst}(\psi_i, \psi_j)$ - оценка затрат на выполнение замены события ψ_i событием ψ_j. Данная оценка должна учитывать место обоих событий в таксономической иерархии классов и подобие событий, определяемое традиционно подобием значений их параметров [3], поэтому

$$Q^{Subst}(\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} SIM(\psi_i, \psi_j) \text{ если } i \prec j \\ 0 \text{ во всех остальных случаях}\end{cases}, \quad (13)$$

где $SIM(\psi_i, \psi_j)$ - статическая функция подобия двух событий.

Динамическая оценка подобия сегментов $\vec{S}^k$ и $\vec{R}^l$ может быть получена по принципу максимально возможного совмещения (в отличие от [8]) с использованием суммы затрат Λ:

$$\mathbf{SIM}\left(\vec{S}^k, \vec{R}^l\right) = \max_{1 \le j \le \left|\vec{R}^l\right|} \Lambda\left(\left|\vec{S}^k\right|, j\right), \quad (14)$$

Если известны оценки подобия всех сегментов k-сегментированного входного потока событий $\vec{S}$ и l-сегментированного потока событий прецедента $\vec{R}$, *динамическая оценка подобия потоков событий* $\vec{S}$ и $\vec{R}$ может быть вычислена как:

$$\mathbf{SIM}\left(\vec{S}, \vec{R}\right) = \prod_{j=1}^{l} \max_{1<i<k} \mathbf{SIM}\left(\vec{S}^i, \vec{R}^j\right), \quad (15)$$

Ввиду мультипликативности (15), присутствие во входном потоке $\vec{S}$ несовмещаемых сегментов относительно $\vec{R}$ приводит к $\mathbf{SIM}\left(\vec{S}, \vec{R}\right) = 0$.

Для дальнейшего использования в ИС полученное значение требуется нормировать к числовому диапазону $[0,1]$, например, ограничив его максимально возможной величиной подобия (т.е. $\mathbf{SIM}\left(\vec{S}, \vec{R}\right) = \mathbf{SIM}\left(\vec{S}, \vec{R}\right) / \mathbf{SIM}\left(\vec{R}, \vec{R}\right)$).

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Предложенный метод оценки подобия двух потоков событий, основанный на принципе максимально возможного совмещения потоков, имеет оценку вычислительной сложности $O(m \times n)$, где $m = \left|\vec{S}\right|, n = \left|\vec{R}\right|$ т.е. зависит исключительно от длин сравниваемых потоков. Кроме того, метод работоспособен в условиях неполной и неточной информации. Предложенный метод достаточно эффективен для реализации в ИС реального времени диагностики и предсказания в СДС.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Hellerstein J.L. Discovering Actionable Patterns in Event Data / J. L. Hellerstein, S. Ma, C. S. Perng. // IBM Systems Journal. – 2002. – Vol. 41. – №3. – P. 475-492.
2. Aamodt A. Case-based reasoning: foundational issues, methodological variations, and system approaches / A. Aamodt, E. Plaza // AI Communications. – 1994. – Vol. 7. – №1. – P. 39-59.
3. Pal S. K. Foundation of Soft Case-Based Reasoning / S. K. Pal, S. C. K. Shiu. – New Jersey: J. Viley & Sons, 2004. – 274 p.
4. Levenshtein V. I. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals / V. I. Levenshtein // Cybernetics and Control Theory. – 1966. – Vol. 10. – №8. – P. 707-710.
5. Schrodt P. A. Pattern Recognition of International Crises using Hidden Markov Models / P. A. Schrodt // Political Complexity: Nonlinear Models of Politics. – University of Michigan Press, 2000. – P. 296-328.
6. Gusfield D. Algortithms on Strings, Trees, and Sequences / Dan Gusfield. – Cambridge: Cambridge University Press Syndicate, 1997. – 381 p.
7. Keane M. T. Dynamic Similarity: A Processing Perspective on Similarity / M. T. Keane, B. Smyth // Similarity and Categorisation. – Oxford: Oxford University Press, 2001. – 296 p.
8. Martin F. J. Case-Based Sequence Analysis in Dynamic, Imprecise, and Adversarial Domains / F. J. Martin: Tesi doctoral by Universitat Politecnica De Catalunya, 2004. – 285 p.

ШЕРСТЮК Владимир Григорьевич – к.т.н., доцент кафедры информационных технологий Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

– интеллектуальные системы принятия решений реального времени, принятие решений на основе прецедентов, логико-когнитивные модели.

УДК: 539.12

V.T.Lazurik, V.M. Lazurik, G. Popov, Yu. Rogov

SIMULATION OF DOSE MAPPING IN A MULTI PRODUCT PALLETIZED X-RAY FACILITY USING MONTE CARLO METHOD

Introduction. Today, the intensive increase of integration the radiation technologies in various industry branches worldwide is observed. Sterilization of medical devices and pharmaceuticals, polymer cross-linking of tubes, cables, packaging materials, tire component curing, irradiation of selected food items (spices, seafood) are established technologies. An implementation of radiation technologies in various fields of industry is accompanied by magnification of amount of industrial radiation facilities, expansion of assortment of products treated by ionizing radiation, and development of new methods of product irradiation.

Main types of radiation sources of ionizing energy for industrial radiation processing are accelerated electrons, X-rays (bremsstrahlung) emitted when high-energy electrons are stopped by a heavy metal targets (X-ray converter) and gamma rays from radioactive nuclide Cobalt-60. The preferred type of radiation source is usually determined by practical process requirements, such as the minimum and maximum absorbed doses (D_{min}, D_{max}), dose uniformity (DUR= D_{man}/D_{mix}) and dose rate, material thickness, density and shape, production rates, capital and operating costs, and ease of use. The use of electron accelerators for generation of X-ray beams represents major commercial interest in the field of radiation technologies.

High-energy ~ 10MeV (Megaelectronvolt), high-power electron beams (EB) can process thin materials at high speeds, but their penetration is limited to a 10 cm in a product with density about 1g/cm^3. Gamma rays emitted by cobalt-60 sources are mainly used to irradiate larger packages of medical devices and foods at slower processing rates. High-energy X-rays generated by electrons with kinetic energies greater than 3.0 MeV are more penetrating than such gamma rays. In contrast to gamma rays, which are emitted in all directions from a cobalt-60 source, high-energy X-rays are concentrated in the direction of the incident electron beam, and their angular dispersion decreases as the electron energy increases. Recent increases in the available X-ray power and in the price of Co-60 sources have made X-rays a viable alternative to gamma-rays for radiation processing [1,2].

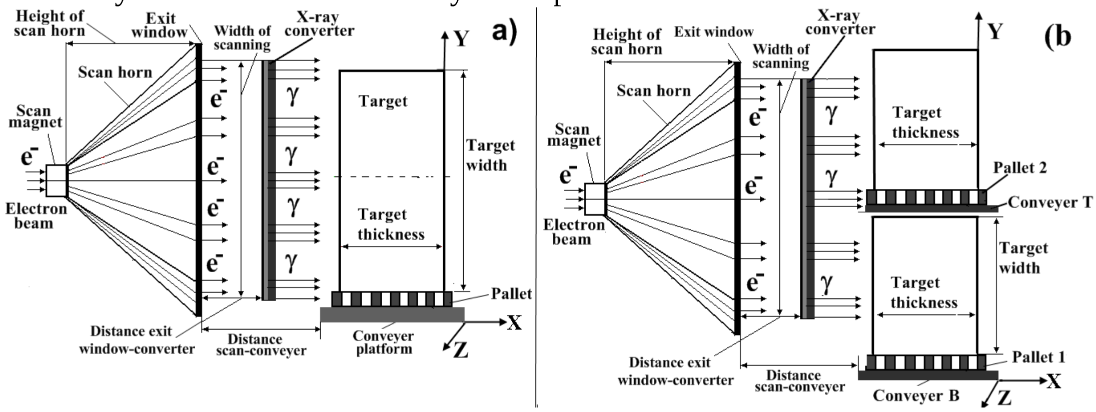
Success of application of X-ray beams in radiation processing depends largely on development of theoretical notions, semi-empirical models and computer codes for simulation of irradiation processes based on X-ray radiation facility [3, 4]. The results of the computer simulation using Monte Carlo (MC) method of the absorbed dose mapping in the products irradiated with X-ray beams are discussed in the report.

Geometrical models of X-ray facility. Today there are industrial radiation facilities with high-power X-ray capability in Europe, Japan and North America. In all these facilities the method of product irradiation is based on principle that size of X-ray converter in scan direction overlap the size of irradiated packing box with product [1,2].

State-of-the-art pallet-X-ray facility for sterilization of medical devises based on the Rhodotron, IBA's high-power, high-energy accelerator was built by LEONI Studer Hard AG, Switzerland [2, 5]. In this facility the method of product irradiation is based on principle that size of irradiated packing box with product in scan direction overlaps the size of X-ray converter.

Schematic representation of the EB facilities with X-ray converter, cooling system, moving conveyer and the packing box with product related to above 2 methods are shown in Figs. 1a, 1b. X-ray radiation facility with product is oriented horizontally. X-ray converter consists of a tungsten front plate, a cooling channel with water and a stainless steel back plate. Boxes with product were placed on the wooden pallets and on the conveyor platforms.

In the method 1 the size of X-ray converter in scan direction overlaps the size of packing box with product, see Fig.1a. In this method the product was irradiated with X-ray from two opposite sides by two passes in front of X-ray converter to obtain the acceptable value of X-ray absorbed dose uniformity in the product.



Figs.1a, b. Geometrical arrangement of X-ray radiation facility based on the horizontally oriented EB accelerator with X-ray converter, cooling system, moving conveyer with product located on pallets. Non-divergent scanned EB.
a) size of X-ray converter in scan direction overlaps the packing box with product. b) size of two packing boxes with product overlaps the size of X-ray converter. The pallet 1 with product located on the bottom conveyer, the pallet 2 with product located on the top conveyer.

In the method 2 the size of two packing boxes with product overlaps the size of X-ray converter, see Fig. 1b. It is reached due to disposition of two packing boxes with product and with two pallets vertically under each other in EB scan direction. The pallets with product are located on two horizontal conveyer lines. Two packing boxes with product and with pallets will be designated as the stack of two pallets – bottom pallet and top pallet. In this method the stack was irradiated with X-ray from two opposite sides by four passes in front of X-ray converter.

Stack of two pallets is rotated on their vertical axis between each pass. The top and bottom pallets of a stack are swapped after two passes. A full dose delivered to the product is divided on some “dose increment”. A “dose increment” is accomplished by 4 passes of the pallet through the X-ray field: front-top, back-top, front-bottom, back-bottom.

Simulation of complicated methods of product irradiation with X-ray. In practice on radiation facility with big power irradiators the multipass, multilevel and multisided methods irradiation of product are used for improvement of quality and dose uniformity in product irradiated with EB, X-ray and gamma ray. The comparative analysis of the absorbed dose mapping in the products irradiated with X-ray was performed using the programs ModeStXR and RT-Builder developed by authors. The software ModeStXR was designed on the base of the RT-Office modules specially for MC simulation of industrial radiation processes and calculation of the absorbed dose distribution within products irradiated with stationary or scanned X-ray beams on radiation facility that is based on the pulsed or continuous type of electron accelerators in the energy range from 0.1 to 50 MeV [6]. Irradiated product is represented in form of stack of plates located in containers. Simulation of X-ray dose mapping in multi-layer targets was performed with MC method in a 3-dimensional (3D) geometrical model.

A source of electron beam, a scanner, the X-ray converter with cooling system, a conveyor line, an irradiated product and a package are considered in uniform self-consistent geometrical and physical models. The features of realization of a physical and mathematical models for X-ray processing in the software ModeStXR are as follows:

- the use of a forced method for process of producing X-ray on each step of design of electron track in a construction of the X-ray converter;
- the automatic choice of self-consistent parameters is used for simulation of an electron - photon shower. The choice is based on determination a minimum machine time for obtaining given accuracy. These parameters are the following: cutoff energy for modeling of an electron track, threshold energy of catastrophic electron-electron collisions, cutoff energy for modeling of a photon track, threshold angle of grouping electron collisions for modeling of scattering;
- the use of both a simple estimation (collision method) and the special estimation (method of crossing area) for the dose calculation.

These features allow to reduce the running time of MC simulation for receiving of the end results in about hundreds time. At simulation the X-ray dose mapping the program ModeStXR takes into account in detail a construction of the radiation facility and requirements to regimes of irradiation in each specific radiation-technological process.

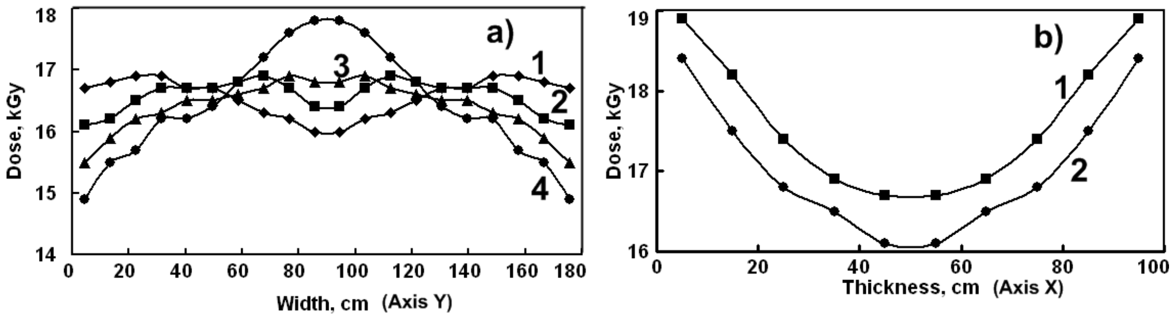
The software ModeStXR calculates the dose values into one pass X-ray irradiated product. In the complicated variant of products irradiation which is realized in the X-ray processing, the special program RT-Builder summarizes the absorbed doses distributions calculated with software ModeStXR in the 3D product for one/two/four pass/side/level irradiations.

Results and discussions. The computer simulation using Monte Carlo (MC) method of the dose mapping into irradiated product with X-ray for two methods of product irradiation was performed. High-energy X-rays are ideal for sterilizing large packages and pallet loads of medical devices. The product density range (0.1-0.5) g/cm^3 is typical for the irradiation process of medical devices sterilization. The product was located in a typical European pallet of 100x120x180cm with 15cm wood frame.

X-ray beam was generated by scanned electron beam with electron energy 7 MeV in the tungsten converter. Optimal converter construction includes the tungsten target plate with thickness 1.1 mm, the cooling water channel -1.3mm, and the stainless steel backing plate - 1.0 mm. The efficiency for converting EB power to X-ray power in the forward direction is approximately 12.9%. This relatively low efficiency can be compensated by using high-power EBs to produce X-ray dose rates sufficient for industrial radiation processing.

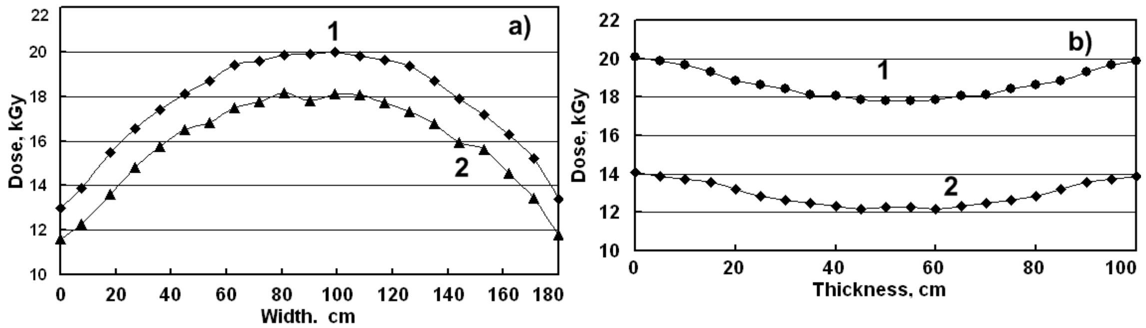
Irradiation regimes of the polyethylene target with density in the range (0.1-0.5) g/cm^3 were as follows: EB energy - 7 MeV; EB current – 100 mA; target thickness -100 cm (axis X); target width in direction of X-ray scanning -180 cm (axis Y); target length in direction of conveyer travel - 120cm (axis Z); X-ray scan width (W_{scan}) - in the range (160-230)cm; non-diverging X-ray scanning regime; size of wooden pallets in scan direction – 15cm; conveyer speed - 1cm/s.

Figs. 2 a, b represent the absorbed dose profiles in the pallet with polyethylene product of density 0.15 g/cm^3 irradiated with scanned X-ray beam. The pallet irradiated by 4 passes through the X-ray field in accordance with geometrical model in Fig.1b. Fig.2a shows the strong dependence in the X-ray dose uniformity from value of X-ray scan width W_{scan} in vertical direction. For the scan width W_{scan} =200cm the minimal value of dose uniformity ratio DUR = D_{max}/D_{min} = 1.06 in the product center (X=50cm) is observed. The same tendency is observed for the dose profile in the center of incident surface (Y, Z) along scan direction. For horizontal X-ray absorbed dose profiles in the cross section (X,Y) in the product center Z=60cm the dose uniformity DUR is 1.18, see Fig.2b. As can be seen from Figs.2a, b, in all volume of irradiated product at scan width W_{scan} =200cm the dose uniformity did not exceed the value DUR=1.2.



Figs. 2 a, b. Vertical and horizontal X-ray absorbed dose profiles in the pallet with polyethylene product, irradiation by 4 passes through the X-ray field. a) X-ray vertical absorbed dose profiles in the center (X=50cm) of polyethylene product for various values of scanning width W_{scan} in the range of (160-230)cm. 1- W_{scan} =190cm. 2- W_{scan} =200cm. 3- W_{scan} =210cm. 4- W_{scan} =230cm. b) X-ray horizontal absorbed dose profiles in the cross section (X, Y), Z=60cm. Curve1, Y=90cm. Curve 2, Y=0cm. Scan width W_{scan} = 200 cm.

Figs. 3 a, b represent the absorbed dose profiles in the pallet with polyethylene product irradiated with scanned X-ray beam by 2 passes from opposite sides through the X-ray field. (See Fig.1a.) Product size is 100cm (axis X), 180 cm (axis Y), 120 cm (axis Z). Product density is 0.15g/cm^3. Figs. 3 a, b have shown that vertical and horizontal X-ray absorbed dose profiles are similar to dose profiles on the Figs. 2 a, b. The value of dose uniformity ratio DUR=1.7 in all volume of irradiated product was calculated using the values of D_{max} and D_{min} on Figs. 3 a, b. It is greater in comparison with 4 passes irradiated product, where DUR=1.2.



Figs. 3 a, b. Vertical and horizontal X-ray absorbed dose profiles in the pallet with polyethylene product, irradiation by 2 passes through the X-ray field. a) Vertical X-ray absorbed dose profiles in the product in scan direction: Curve 1 – product center (X=50cm). Curve 2 – product surface (X=0cm). b) Horizontal X-ray absorbed dose profiles in the cross section (X, Y), Z=60cm. Curve1, Y=90cm. Curve 2, Y=0cm. Scan width W_{scan} =184 cm.

Dependence of dose uniformity ratio in the polyethylene product irradiated with X-ray as function of the product density in the range of (0.1-0.6) g/cm^3 is shown in Fig.4. Curve 1 relates to product irradiated by 4 passes through the X-ray field. Curve 2 relates to product irradiated by 2 passes from opposite sides.

Fig.4 shows the strong dependence of the DUR values as function of product density in the range of (0.1-0.6) g/cm^3. As it is seen from Fig.4 for values of dose uniformity ratio DUR$\leq$ 2, the range of product densities (0.1-0.4) g/cm^3 irradiated with scanned X-ray beam by four passes is greater in comparison with the range of product densities (0.1-0.2) g/cm^3 irradiated by two passes.

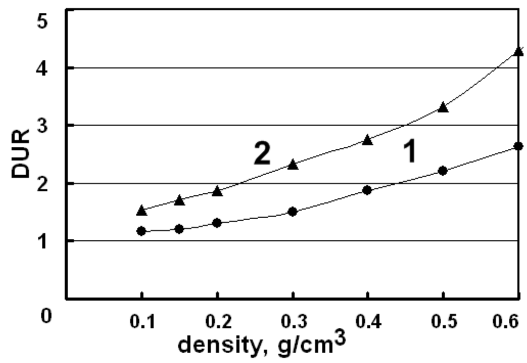


Fig.4. Dependence DUR as function of product density.

The computer simulation of the dose mapping into X-ray irradiated product which consists of two pallets containing different products with different densities 0.15 and 0.3g/cm³ was performed for two cases: 1) two pallets were located on two horizontal layers under each other; 2) two pallets were located on one horizontal layer with 10 cm lateral air gap between products. Analysis of simulation results have shown that method of product irradiation by 4 passes allows to irradiate simultaneously the pallets containing different products with different densities and still achieve excellent DUR.

Conclusion. The MC computer simulations of the absorbed dose mapping in the products irradiated with X-ray of various methods such as 2 and 4 product passes in front of X-ray irradiator were performed. The following features in the X-ray the absorbed dose mapping were observed:

• the strong dependence of the X-ray dose uniformity as function of X-ray scan width W_{scan} in the vertical direction;

• the minimum value of dose uniformity ratio for certain value of X-ray scan width, $W_{scan.opt}$. $W_{scan.opt}$ can be used as optimal value for X-ray processing;

• the strong rising dependence of the DUR values as function of product density in the range of (0.1-0.6) g/cm^3;

• for values of dose uniformity ratio DUR$\leq$ 2, the range of product densities (0.1-0.4) g/cm^3 irradiated with scanned X-ray beam by four passes is greater in comparison with the range of product densities (0.1-0.2) g/cm^3 irradiated by two passes;

• the method of product irradiation by 4 passes allows to irradiate simultaneously the pallets containing different products with different densities and still achieve excellent DUR.

Detailed analysis of simulation results obtained with the program ModeStXR have shown that the program ModeStXR can be used as predictive tool:

• for optimization X-ray irradiator construction on stage of design the X-ray radiation facility;

• for X-ray dose mapping and various methods of product irradiation;

• on stage of commissioning of new X-ray radiation facility based on EB accelerator;

• on stage of optimization of radiation facility parameters and regimes irradiation in the specific X-ray processing;

• at interpretation of predictions for processing results of dosimetric data;

• at performance of actions and procedures prescribed with X-ray dosimetric standards and the standards for process of radiation sterilization;

• for advanced training and educating of the qualified specialists and students in the fields of the transport of ionizing radiation through heterogeneous objects, in the industrial EB, X-ray radiation technologies and in the computational EB and X-ray dosimetry.

REFERENCES:

1. Meissner J., Abs M., Cleland M., Herer A., Jongen Y., Kuntz F., Strasser A. X-ray treatment at 5 MeV and above. Radiation Physics and Chemistry. –2000. –Vol. 57, –P.647–651.
2. Ion Beam Applications Company. Belgium. - Producer of the Rhodotron EB and X-ray facility. http:www.iba.com.
3. Lazurik V.T., Lazurik V.M., Popov G., Rogov Yu. Simulation Tool for Scanning X-Ray Beams Irradiator. Proceedings of the Particle Accelerator Conference (PAC-2003), Portland. OR.USA. – 2003. – P.1080–1082.
4. Lazurik V.T., S.A. Pismenesky, Popov G., Rudychev D.V., Rudychev V.G. An increase of utilization efficiency of X-ray beam. Radiation Physics and Chemistry. –2007. –Vol. 76, No. 11. –P. 1787–1791.
5. LEONI Studer Hard AG Company, Switzerland. Owner of the world's first x-ray sterilization plant that uses IBA's new Rhodotron TT-1000 system. http:www.leoni-studerhard.com
6. Lazurik V.T., Lazurik V.M., Popov G., Rogov Yu., Modeling of processes of an irradiation for industrial technologies. Journal of Kharkiv University. Mathematical modeling. Information technologies series. –N.605.–2004. Issue 2.–P.72–89.

ЛАЗУРИК Валентин Тимофеевич – д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, заведующий кафедрой моделирования систем и технологий факультета компьютерных наук Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина.

Научные интересы:

– развитие моделей и вычислительных методов для компьютерного моделирования физических явлений.

ЛАЗУРИК Валентина Михайловна – старший преподаватель кафедры искусственного интеллекта и программного обеспечения факультета компьютерных наук, Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

Научные интересы:

– разработка и реализация компьютерных систем и технологий для обработки и когнитивного представления научных данных.

ПОПОВ Геннадий Федорович – к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, доцент кафедры моделирования систем и технологий факультета компьютерных наук, Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина.

Научные интересы:

– компьютерное моделирование процессов облучения в радиационных технологиях.

РОГОВ Юрий Викторович – к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, доцент кафедры искусственного интеллекта и программного обеспечения факультета компьютерных наук, Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина.

Научные интересы:

– математическое моделирование переноса излучения в гетерогенных системах.

УДК 004.932.2:519.6

V.V. Moroz, O.O. Savkov

EFFECTIVE LOSSLESS AND NEAR-LOSSLESS COMPRESSION ALGORITHM FOR MEDICAL IMAGES

Introduction. The advanced medical imaging technologies, such as computerized tomography (CT), magnetic resonance imaging (MRI), ultrasonic and traditional radiology are fundamental tools for providing more efficient and effective healthcare systems and services. The digital representation of images is the motivation to spread of these technologies. Digital medical images have potential benefits in terms of achieving and probability. In addition they offer versatility, enabling or expanding its applications in medical imaging [1].

Image compression techniques take advantage of redundancy that occurs. There are different types of redundancy: spatial, temporal and spectral. Each compression methodology will exploit one of these redundancies. The research presented here will focus on the first of these three types of redundancies although the techniques can be used in the others also. It will make use of spatial redundancies since static spatial X-rays will be used. These are still the most dominant type of medical imaging data used today.

There are lossy and lossless techniques for image compression. Lossless techniques allow the perfect reconstruction of image after compression, i.e. decompressed back to the original state of the image without any loss of data. These methods are sometimes called reversible compression methods. Compression rates for lossless techniques vary typically in the range 2–3 times. Other lossy techniques do not allow the perfect reconstruction of the original image once it has been compressed. These methods are sometimes called irreversible compression methods. Compression rates for lossless techniques allow exceed 100 and more times. At high quality lossy levels (10–20 times), compression rates much greater than those obtained by lossless methods can be obtained while achieving visually indistinguishable results. That is, the human eye cannot detect a difference between the original image and the compressed-then-decompressed image with the lossy compression method. This technique called as near-lossless compression. However, the medical community has been very reluctant to adopt lossy algorithms in clinical practice. There is insufficient clinical research on the use of lossy compression applied to medical images. The new compression approach, which will be proposed here utilising a hybrid lossless/near-lossless method, can be made all lossless or all near-lossless.

The transformation coding is one of the most effective techniques among the existing compression algorithms. There are two more known transformation as DCT (Discrete Cosine Transform) and DWT (Discrete Wavelet Transform) which have been widely using in various applications for medical image manipulation for reducing the size of medical images. The most popular compression algorithms in use today in the medical community are lossless JPEG (Joint Photographic Experts Group) [2] and lossless Wavelet. JPEG has been adopted by the Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM) group in their widely adopted DICOM image file format, but the wavelet compression algorithm is gaining ground [3], [4], [5]. In fact, the DICOM Working Group added support for the JPEG 2000 standard into the DICOM format in November of 2001. It has also been adopted by ISO as a standard. JPEG 2000 is based on DWT.

After the transformation, the image data in spatial domain will be transformed into spectral domain to attain higher compression ratio. Based on the quantization strategy, coefficients of low frequency fields in the transformed domain are discarded and significant coefficients are preserved to increase the compression ratio without inducing salient distortion. Further employment of coding technique yields lesser number of bits per pixel.

Considerable research efforts have been made for their efficient compression to facilitate storage and transmission. Indicative examples include wavelet-based applications for medical images compression [6], [7].The existent universal standard image compression algorithms not always result to effective compression for medical images. Therefore are developing a new compression algorithm [8], [9].

The subject of this investigation is the compression algorithm for gray-scale medical image using DICOM standard. The paper objective is a design and development of more effective compression algorithm for such image in comparison with existent.

Redundancy of medical images. Image compression and coding techniques explore three types of redundancies: *coding* redundancy, *interpixel* (spatial) redundancy, and *psychovisual* redundancy. The way each of them is explored is briefly described below.

Coding redundancy consists in using variable-length code words selected as to match the statistics of the original source, in this case, the image itself or a processed version of its pixel values. This type of coding is always reversible and usually implemented using look-up tables (LUTs). Examples of image coding schemes that explore coding redundancy are the Huffman codes and the arithmetic coding technique.

Interpixel redundancy is type of redundancy (sometimes called spatial redundancy, interframe redundancy, or geometric redundancy) exploits the fact that an image very often contains strongly correlated pixels. In other words, there are large regions whose pixel values are the same or almost the same. This redundancy can be explored in several ways, one of which is by predicting a pixel value based on the values of its neighboring pixels. In order to do so, the original 2-D array of pixels is usually mapped into a different format, e.g., an array of differences between adjacent pixels. If the original image pixels can be reconstructed from the transformed data set the mapping is said to be reversible. Examples of compression techniques that explore the interpixel redundancy include: Constant Area Coding (CAC), (1-D or 2-D) Run-Length Encoding (RLE) techniques, and many predictive coding algorithms such as Differential Pulse Code Modulation (DPCM).

Concerning the psychovisual redundancy, many experiments on the psychophysical aspects of human vision have proven that the human eye does not respond with equal sensitivity to all incoming visual information; some pieces of information are more important than others. The knowledge of which particular types of information are more or less relevant to the final human user have led to image and video compression techniques that aim at eliminating or reducing any amount of data that is psychovisually redundant. The end result of applying these techniques is a compressed image file, whose size and quality are smaller than the original information, but whose resulting quality is still acceptable for the application at hand. The loss of quality that ensues as a byproduct of such techniques is frequently called *quantization,* as to indicate that a wider range of input values is normally mapped into a narrower range of output values thorough an irreversible process. In order to establish the nature and extent of information loss, different fidelity criteria (some objective such as root mean square (RMS) error, some subjective, such as pairwise comparison of two images encoded with different quality settings) can be used. Most of the image coding algorithms in use today exploit this type of redundancy, such as DCT-based (Discrete Cosine Transform) algorithm at the heart of the JPEG encoding standard. And so JPEG is most used in DICOM files for medical image compression.

However these images have high level of entropy and so they are very hard to compression. For example, DICOM MRI image is grayscale image with 12 or 16 bit per pixel and its side length mainly equal a power of two. Another important distinctive feature of MR images is that not always whole image contains significant information. MR scanners capture image as circular area. The negative of MRI image is presented on Fig. 1.

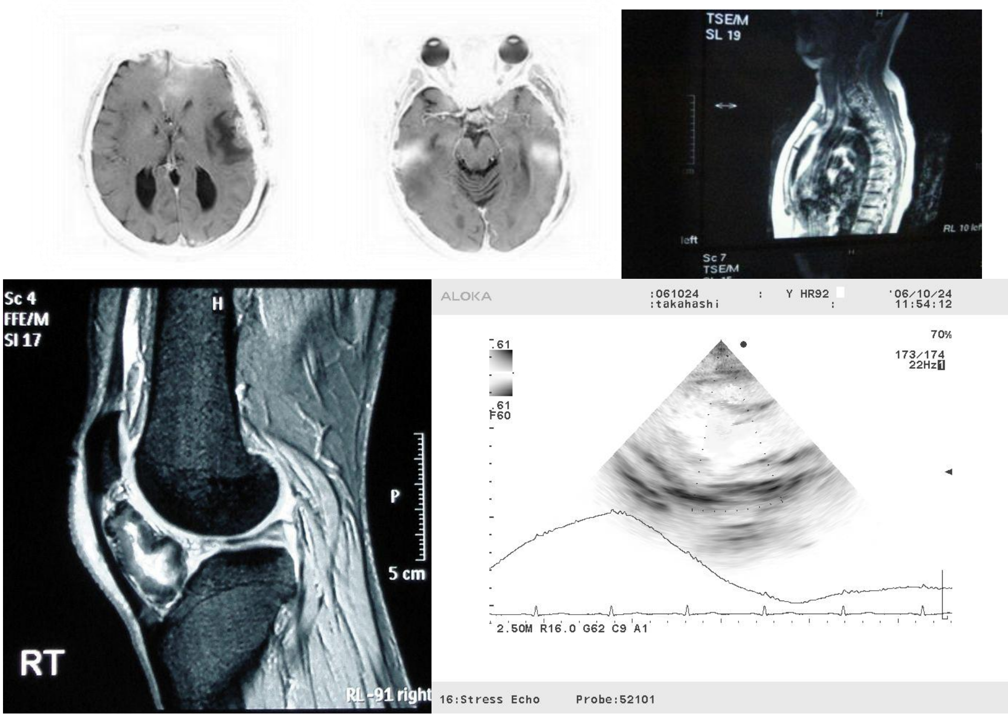


Fig. 1. Typified MRI and ultrasonic images.

This specific feature can be used for compression of MRI images with more efficiency.

X-Ray image has the same feature, but it's region of interest may vary from circular. The negatives of X-Ray images are presented on Fig. 2.

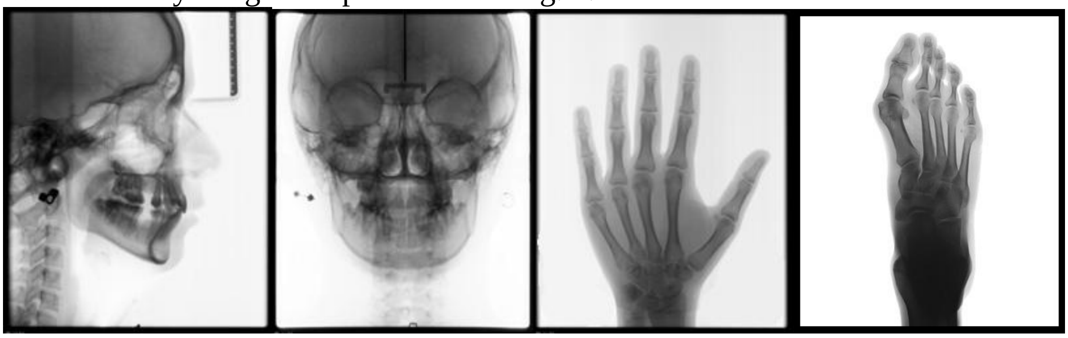


Fig. 2. Typified X-Ray images.

This feature allows more effective image compression, using non-significant information.

Quad-tree based compression algorithm. This algorithm was created for lossless compression of grayscale 16-bit depth MR DICOM images, but it could be used for radiology, ultra-sonic and other types of the medical images. It also may be easy modified for near lossless compression.

Let I is a grayscale 16-bit depth image with 2^N linear dimensions. Quad-tree decomposition for this image is presented on Fig. 3.

If I has the same brightness level then it may be encoded as coordinates (x, y) of upper left corner, a length of quads side and current level of brightness. If I have different levels of brightness I is divided into four squares with 2^{N-1} linear dimension.

In case of near-lossless compression I is divided into four squares when a brightness level differs on more than l levels, where l is given integer value. This value is depended on psychovisual system of human and it influences on a quality of reconstructed image. In this situation rounded to integer average brightness level of square is stored. It is a kind of two-dimensional quantization. This process repeats until whole image is divided by squares or until the linear dimensions of squares will be less than 2^n. The result of this step is quad-tree with size of quads more than 2^n.

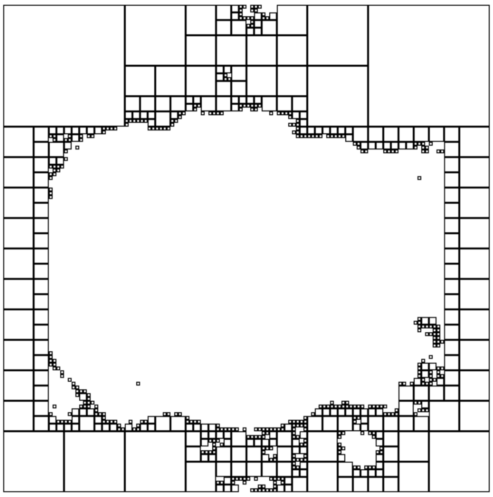


Fig. 3. Quad-tree decomposition of MRI of the brain.

Thus we will have the array of vectors P and each vector has elements ($Coord1,\ Coord2,\ S,\ Value$), where:

$Coord1$, $Coord2$ – coordinates of the left top corner;

S – power of two for size of square;

$Value$ – brightness value;

for all squares with size more $2^n,\ n > 0$.

The array of vectors is compressed by Arithmetic coding. The arrays of unprocessed pixels U are compressed by Huffman coding as it is more effective for large capacity of data.

A decoding process is presented on the Fig. 4.

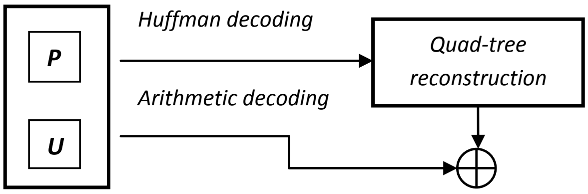


Fig. 4. Decoding process of compressed image.

The current quad-tree is using for construction of logical mask for processed pixels. It is needs for further construction of array of unprocessed pixels. For near-lossless compression mode, a brightness array is quantized. These pixels form array that is compressing by arithmetic encoder.

If size of image I differs from 2^N, an image is supplemented to 2^N by adding zero rows and columns. Computational complexity of this algorithm is asymmetric, because quad-tree decomposition is created only for compression.

Experimental results. The proposed algorithm BTCA was tested on large quantity of test MRI images and compared with other lossless compression algorithms as JPEG, 7z (LZMA Ultra). The size of DICOM's files is 515 KB for all images. Besides mentioned algorithms also JPEG2000-Lossless was tested (it is not presented here). As expected, the algorithms what based on decorrelation transform do not good result. The explanation of this is in the structure of such images. Results are presented in Table 1. (an image size is in KB).

CR (compression ratio) varies within 3.79−7.25 but the proposed algorithm gives a better result for all test images. A fee for high CR is a growth of computational complexity. Nevertheless the time encoding is not critical value for DICOM storage system. An exception is for communication system.

TABLE 1: LOSSLESS ALGORITHM COMPARISON.

Image	*JPEG*	*LZMA Ultra*	*BTCA*	*CR*
0001	97	83	71	7.25
0002	110	99	83	6.20
0003	122	113	96	5.36
0004	132	123	105	4.90
0005	138	129	111	4.64
0006	142	134	115	4.48
0007	144	139	118	4.36
0008	146	140	120	4.29
0009	150	144	124	4.15
0010	155	148	127	4.06
0011	156	151	130	3.96
0012	157	151	131	3.93
0013	158	154	132	3.90
0014	160	156	134	3.84
0015	161	156	136	3.79
0016	159	154	133	3.87
0017	158	152	130	3.96
0018	158	152	130	3.96
0019	157	150	129	3.99
0020	55	147	127	4.06
0021	154	146	126	4.09
0022	152	145	125	4.12

Conclusion. In the paper new compression algorithm was presented. There are several popular approaches for encoding as Huffman encoding, Lempel-Ziv encoding, arithmetic encoding and run-length encoding, but better result is possible only on the assumption of maximal extraction of inter-pixel correlation. It showed that Lempel-Ziv encoding methods achieve higher compression than compression ratios resulting from using Huffman encoding. However quad-tree decomposition with Huffman encoding for large array and arithmetic encoding for short one is more effective. The received results confirm that.

The near-lossless compression eliminates the redundant and high frequency data from an image, which is usually outside the range of human visual perception. This results in much higher compression ratios, typically more 10 or greater, but with some irretrievable data loss.

REFERENCES:

1. Rafael C. *Digital Image Processing*/ C. Rafael Gonzalez and E. Richard //Pearson Education. – Delhi, 2002.
2. Wallace G.K. The JPEG still picture compression standard/ G.K. Wallace// *Communications of the ACM.* –1991.–Vol. 34, No. 4. – P.30–44.

3. Zukoski M.J. A novel approach to medical image compression / M.J. Zukoski, T. Boult and T. Iyriboz// *Int. J. Bioinformatics Research and Applications*. – 2006.– V. 2, No. 1. – P. 89–103.
4. Iyriboz T.A. A comparison of wavelet and joint photographic experts group lossy compression methods applied to medical images / T.A. Iyriboz , M.J. Zukoski., K.D. Hopper and P. L. Stagg // *Journal of Digital Imaging*, May. – 1999.–12.– P.14–17.
5. Said A. A new, fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees/ A Said and W.A. Pearlman // *IEEE Transaction on Circuits system for video Technology*. – 1996.– 6.– P. 243-250.
6. Kai X. *HVS-based medical image compression* / X. Kai, Y. Jie, Z. Y. Min, and L. X. Liang // European Journal Radiology. – 2005.– 55, No.1.– P. 139–145.
7. Wang J.Z. *Wavelets and imaging informatics: A review of the literature/* J.Z. Wang // J. Biomed. Inf. –2001. – Vol. 34, No. 2. – P. 129–141.
8. Wu X. L^{∞} Constrained High-Fidelity Image Compression via Adaptive Context Modelling/ X. Wu and P. Bao // *IEEE Transactions on Image Processing*.–2000.– 9, No. 4. – P.536–542.
9. Weinberger M. The LOCO-I Lossless Image Compression Algorithm: Principles and Standardization into JPEG-LS/ M. Weinberger, G. Seroussi and G. Sapiro // *IEEE Transactions on Image Processing*.–2000.– 9, No.8, P.1309-1324.

Moroz V. V. is with the Computational Mathematics Department, Odessa National University.

Scientific interests:

– image and video processing, mathematical modeling.

Savkov O. O. is an undergraduate of the Institute of Mathematics, Economy and Mechanics, Odessa National University.

Scientific interests:

– image processing and data compression, wavelet analysis.

АННОТАЦИИ

Численное моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье / Аббасов И.Б. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 9 – 13: ил. 1. – Библиогр.: 12 назв.

В работе рассматриваются вопросы численного моделирования рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях мелководных заливов. Дискретная модель построена на основе нелинейных уравнений мелкой воды. Представлен профиль поверхностной гравитационной волны при подходе к берегу.

Формирование зоны внутреннего окисления при малой свободной энергии формирования окислов / Абрамов Г.С., Абрамов М.Г. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 14 – 20. – Библиогр.: 5 назв.

Проведено моделирование процесса формирования зоны внутреннего окисления при быстрой релаксации пересыщения и малой энергии образования окисла. Результаты численного моделирования процесса сопоставлены с теоретическими моделями Вагнера-Киркалди и экспериментальными данными.

Математическая модель формирования и отражения ударных волн в сети горных выработок / Агеев В.Г., Зинченко И.Н., Греков С.П. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 21 – 27: ил. 3. – Библиогр.: 7 назв.

Разработана математическая модель динамики ударных волн в вентиляционных сетях горных выработок угольных шахт с учетом наличия и устойчивости изоляционных сооружений. Предложен численный метод решения.

Применение математического пакета MAPLE к интегрированию систем дифференциальных уравнений с переменной структурой / Аматов М.А., Аматова Г.М. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 28 – 32: ил. 2. – Библиогр.: 8 назв.

В работе приведен комплекс программ SODEVS для аналитического, графического и численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменной структурой. Приведен пример, иллюстрирующий работу программ.

Аналитическое определение температуры частиц порошка при плазменном напылении композиционных покрытий / Андрейцев А.Ю., Крюков Н.Н., Крижановская Т.В., Семененко Т.Н. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 33 – 37. – Библиогр.: 7 назв.

Рассмотрены математические модели для аналитического определения температуры частиц вдоль дистанции напыления с учетом изменения их агрегатных состояний. Проведен сравнительный анализ моделей для частиц оксидов и металлов с целью оптимизации режимов напыления и фракционного состава

Отображение особенностей электрокардиограмм как яркостных изображений в пространстве ядер второго порядка модели Вольтерра / Ахметшин А.М., Ахметшин К.А.// Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 38 – 43: ил. 4. – Библиогр.: 5 назв.

Описан новый метод классификации ЭКГ на основе виртуального синтеза и визуализации ядер модели Вольтерра второго порядка. Представлены экспериментальные результаты, демонстрирующие информационные возможности метода.

Анализ изображений в пространстве параметров адаптивной модели линейного предсказания локального распределения яркостей / Ахметшин А.М., Степаненко А.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 44 – 49: ил. 6. – Библиогр.: 6 назв.

Описан новый метод анализа слабоконтрастных изображений в пространстве параметров модели линейного предсказания распределения яркостей. Представлены экспериментальные результаты, демонстрирующие информационные возможности метода.

Применение критериев качества группирования для повышения чувствительности модифицированного алгоритма гибридной нечеткой кластеризации / Ахметшина Л.Г., Егоров А.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 50 – 55: ил. 2. – Библиогр.: 8 назв.

В статье рассмотрено применение показателей нечеткости и Ксие-Биени для повышения чувствительности модифицированного алгоритма гибридной нечеткой кластеризации sFCM. Информационные возможности предложенного метода показаны на примере сегментации медицинских изображений.

Мультимодельный метод нечеткой интерполяции пространственных данных на неравномерной сетке / Ахметшина Л.Г., Ямнич Т.С. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 56 – 61: ил. 3. – Библиогр.: 7 назв.

Рассмотрен мультимодельный метод нечеткой интерполяции пространственных данных на неравномерной сетке и его информационные возможности. Представлены результаты применения метода на тестовых и реальных данных.

Выбор сетки дискретизации распределения поглощенного заряда в задаче восстановления спектра электронов / Баев А.Ю., Лазурик В.Т. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 62 – 66: ил. 4. – Библиогр.: 5 назв.

В работе рассмотрены проблемы влияния количества детектирующих слоев дозиметра на точность методов искусственного интеллекта в задаче реконструкции спектра электронов по измеренному распределению поглощенного заряда. Исследования позволили определить параметры измерительного прибора, для которых выбранная нейронная сеть определяет энергетическое распределение с наименьшей ошибкой. Найдены оптимальные конфигурации измерительного прибора, для которых точность восстановления спектра методами, использующими нейронную сеть, максимальна и превосходит точность традиционных методов.

Про один взгляд на классификацию моделей марковского типа / Баклан И. В., Степанкова А. А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 67 – 73: ил. 3. – Библиогр.: 30 назв.

В статье предложен взгляд на классификацию скрытых марковских моделей и их место в общей классификации вероятностных моделей. Были определены основные классификационные признаки, по которым и был выполнен классификационный анализ.

Стохастическая интерпретация неоднородной популяционной модели Лесли / Балакирева А.Г., Бутенко Н.С., Михайлов Е.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 74 – 77. – Библиогр.: 4 назв.

В данной работе рассматривается неоднородная популяционная модель Лесли и исследуются ее асимптотические свойства. Устанавливается, что данная модель обладает свойством слабой эргодичности. Показывается возможность эквивалентного перехода от детерминированной неоднородной модели Лесли к стохастической модели. Приводятся условия, при которых предельные распределения указанной модели можно стабилизировать в окрестности эргодического распределения.

Построение поверхности вращения с меридианом полуциклоиды в точечном исчислении / Бездитный А.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 78 – 81: ил. 4. – Библиогр.: 5 назв.

В работе рассматривается задача построения поверхности вращения, образующей которой является полуциклоида, в точечном исчислении.

К задаче об обтекании шпунта Жуковского / Береславский Э.Н. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 82 – 86: ил. 2. – табл. 2. – Библиогр.: 12 назв.

В гидродинамической постановке решается задача о плоской установившейся фильтрации под шпунтом Жуковского через орошаемый грунтовой массив, подстилаемый сильнопроницаемым пластом, не содержащим напорных грунтовых вод, левая полубесконечная часть кровли которого моделируется непроницаемым включением. Рассматривается случай течения, когда скорость обтекания на конце шпунта равна бесконечности, что приводит к двулистности области комплексной скорости.

Моделирование теплових процессов в неоднoридних средах с мягкими границами методом гибридного дифференциального оператора Фурье – Эйлера – Фурье на полярной оси / Блажевский С.Г., Ленюк М.П. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 87 – 92. – Библиогр.: 7 назв.

Операционным методом получено интегральное изображение точного аналитического решения задачи о диффузионных процессах в неоднородных средах с мягкими границами в случае, когда моделирование диффузионных процессов осуществлено методом гибридного дифференциального оператора Фурье – Эйлера – Фурье на полярной оси.

MAPLE программа символьно-численных вычислений нормальной формы и интегралов движения гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы / Богачев В.Е., Чеканов Н.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 93 – 98. – Библиогр.: 13 назв.

В работе представлены разработанные алгоритм и программа символьно-численных вычислений нормальной формы и приближенных интегралов движения по методу Биркгофа-Густавсона в математическом пакете MAPLE. Приведены результаты расчетов для некоторых гамильтоновых систем.

Последовательный контроль и его математическая модель / Болычевцев А.Д., Болычевцева Л.А., Быстрицкая Л.Б., Любимова Н.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 99 – 103. – Библиогр.: 8 назв.

Рассмотрена контролирующая система, построенная по схеме последовательного контроля. Получены аналитические зависимости характеристик этой системы как функций характеристик ее составных частей.

Математическое моделирование процессов разорения в присутствии нормальных возмущений / Бондарь А.В., Мазманишвили А.С. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 104 – 108: ил. 3. – Библиогр.: 5 назв.

Рассмотрена вероятностная задача об определении характеристик случайного времени достижения некоторого заданного уровня процессом на выходе инерционного детектора накопительного типа. Применена модель аддитивной смеси детерминированного положительного сигнала и шума. Получено аналитическое выражение для плотности распределения случайного времени достижения заданного уровня, приведены результаты численного моделирования процесса разорения. Данные расчета и их сравнение с аналитической моделью свидетельствуют об достаточно хорошем их соответствии. Предложенный подход возможно применять и для других моделей шумов и трендов финансовых потоков.

Некоторые аспекты построения обводов утолщенных профилей лопаток осевых турбин / Борисенко В.Д., Котляр Д.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 109 – 114: ил. 4. – Библиогр.: 8 назв.

В работе предлагается комплексный подход к геометрическому моделированию криволинейных обводов утолщенных профилей охлаждаемых лопаток осевых турбин, который базируется на сочетании преимуществ кривых Безье относительно моделирования плавных плоских линий и графического способа построения параболических кривых за известными углами наклона касательных к ним, что предоставляет возможность определять координаты узловых точек характеристических ломаных Безье.

Применение математического пакета MAPLE для расчета собственных значений и функций уравнения Матье / Булавина И. В., Кириченко И. К., Чеканова Н. Н., Чеканов Н.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 115 – 118. – Библиогр.: 9 назв.

В среде MAPLE разработана программа символьно-численного интегрирования уравнения Матье методом диагонализации и представлены полученные результаты.

Использование чебышёвских приближений при решении смешанных задач для уравнений в частных производных / Вакал Л.П., Каленчук-Порханова А.А., Вакал Е.С. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 119 – 123. – Библиогр.: 6 назв.

Рассмотрен метод решения смешанной задачи с использованием наилучших чебышевских приближений для аппроксимации начальных условий. Приведены примеры решения задач.

Нелинейные лагранжевы скалярные поля с особенностью на пространственно подобной прямой / Вирченко Ю.П. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 124 – 128. – Библиогр.: 2 назв.

В рамках теории нелинейных лагранжевых полей на пространстве Минковского изучается задача о типах полевых особенностей. Рассматриваются особенности скалярного поля φ без затравочной массы, сосредоточенные на пространственно подобных кривых. Для уединённой особенности в виде прямой, которая расположена внутри светового конуса, показывается, что, в зависимости от вида лагранжевой плотности L, решения могут обладать конечной полной собственной энергией. Отмечено, что в случае многолистностной зависимости L могут существовать несколько качественно различных решений.

Частные одноинтервальные распределения случайных множеств с марковскими измельчениями в R / Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 129 – 132. – Библиогр.: 3 назв.

В работе разработан алгоритм вычисления одноинтервальной функции распределения для случайных множеств с марковским измельчениями в R при произвольном параметре дробления ν.

Моделирование нестационарного потока в ирригационном канале / Воцелка С.А., Рожков С.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 133 – 140: ил. 5. – Библиогр.: 8 назв.

Рассмотрены вопросы моделирования нелинейной модели бьефа ирригационного канала, которая позволяет оценивать переходные процессы при изменении нагрузки.

Моделирование динамического поведения оболочки с жидкостью при сейсмическом воздействии / Гнитько В.И., Марченко У.Е., Науменко В.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 141 – 144: ил. 3. – Библиогр.: 5 назв.

Предложен метод расчета динамических характеристик оболочек вращения с жидкостью, подверженных действию кратковременных импульсных нагрузок. Метод основан на сведении задачи об определении давления жидкости к системе сингулярных интегральных уравнений. Связанная задача теории упругости решается с помощью комбинации МКЭ и МГЭ. Дифференциальные уравнения нестационарной задачи решаются численно методом Рунге-Кутта 4-го и 5-го порядка.

Дискретизация трехмерных областей, заданных R-функциями, на шестигранные конечные элементы / Гоменюк С.И., Чопоров С.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 145 – 152: ил. 9. – Библиогр.: 15 назв.

В работе рассмотрена проблема дискретизации сложных трехмерных областей, заданных R-функциями, на шестигранные конечные элементы. Предложена методика построения равномерной сетки шестигранных элементов функциональной геометрической модели.

Алгоритм термодинамического моделирования массопереноса в системе «газ - твердое тело» / Горбенко В.И. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 153 – 157: ил. 3. – Библиогр.: 8 назв.

Для применения равновесной термодинамики к моделированию взаимодействий газовых частиц с твердотельными веществами в открытых системах предложено учитывать изменения материального баланса. Приводится алгоритм расчета материального баланса. Проведено моделирование изменений состава системы H-O-In-P, открытой для массопереноса газовых компонент.

Инволютивность пространств аффинной связности / Гребенюк М.Ф., Терехова М.В., Макаров В.И // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 158 – 162. – Библиогр.: 12 назв.

Статья посвящена проблемам геометрического моделирования многомерных многообразий проективных пространств. Получен закон инволютивности пространств аффинной связности, построенных ранее с помощью оснащения Э.Картана на регулярной гиперполосе, заданной в неевклидовом пространстве.

Моделирование контактного взаимодействия эластомерных элементов конструкции / Гребенюк С.Н., Решевская Е.С., Тархова В.М. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 163 – 167: ил. 5. – Библиогр.: 11 назв.

Предложена методика учета контактного взаимодействия эластомерных элементов на основе моментной схемы метода конечных элементов. Исследовано напряженно-деформированное состояние конструкций в условиях контактных взаимодействий.

Оценка левитационного движения экипажа электродинамической транспортной системы вдоль плоской путевой структуры упрощенной конструкции / Дзензерский В.А., Кузнецова Т.И., Радченко Н.А., Хачапуридзе Н.М. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 168 – 171. – Библиогр.: 3 назв.

Описана конструктивная схема электродинамической транспортной системы с одним рядом токопроводящих контуров на плоской путевой структуре. Оценено левитационное движение экипажа этой системы вдоль прямолинейных и криволинейных участков пути.

Компьютерное моделирование разветвления транспортных потоков / Диденко Е. В., Лазурик В. Т., Рогов Ю.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 172 – 176: ил. 2. – табл. 1. – Библиогр.: 8 назв.

В стохастической модели проведено математическое моделирование взаимодействия потока с базовым компонентом транспортной сети - разветвлением. Компьютерное моделирование процесса разветвления потоков проводится методом Монте-Карло с использованием специально разработанного программного обеспечения SFMS. Получены результаты, представляющие интерес для анализа потоков в сложных транспортных системах.

Проблемы возникновения и подавления хаоса / Дмитришин Д.В., Усов А.В., Дмитришина А.Д., Билоус Е.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 177 – 180. – Библиогр.: 4 назв.

Рассмотрены свойства функциональных уравнений с распределенным запаздыванием. Установлено, что качественная картина таких уравнений отличается от известных бифуркационных сценариев. Указаны направления использования полученных результатов, в том числе и методы подавления хаоса в динамических системах.

Построение математических моделей для исследования оболочки произвольной кривизны с несквозными трещинами / Довбня Е.Н., Гордиенко Н.Н., Штакина М.А., Яртемик В.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 181 – 185: ил. 5. – Библиогр.: 9 назв.

В статье обобщены модель линейных пружин и аналог δ_c-модели на случай системы двух коллинеарных несквозных трещин в тонкой изотропной оболочке произвольной кривизны, которая находится под действием симметричной нагрузки. Построены системы сингулярных интегральных уравнений для исследования напряженного состояния оболочки с системой трещин в рамках обеих моделей.

Моделирование двумерных тепловых и влажностных полей в пористой среде с учетом фазовых переходов / Дреус А. Ю., Лысенко Е. Е. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 186 – 190: ил. 5. – Библиогр.: 8 назв.

Приведена математическая модель процесса промерзания криогенно–гравийного фильтра для двумерного случая и приведен пример расчета.

Математическая модель многозондового СВЧ преобразователя интерференционного измерителя параметров вибраций / Дробахин О. О., Доронин А.В., Привалов Е.Н. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 191 – 195: ил. 1. – Библиогр.: 5 назв.

На основе математической модели микроволнового многозондового измерителя вибраций, учитывающей собственные отражения зондов, показано, что одно- двухзондовые измерители не позволяют проводить измерения. Четырехзондовые измерители обеспечивают измерения с удовлетворительной точностью.

Особенности реализации метода Прони при оценке комплексных показателей экспонент при наличии импульсных помех / Дробахин О.О., Лебедев С.Г. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 196 – 199: ил. 4. – Библиогр.: 6 назв.

Разработана модификация метода Прони для нахождения частоты сигнала, состоящего из одной затухающей косинусоиды, при наличии как импульсных помех, так и гауссовского шума.

Моделирование устойчивости трехслойной пологой оболочки с легким заполнителем, которая подкреплена продольными ребрами жесткости /Емельянова Т.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 200 – 203: ил. 3. – Библиогр.: 4 назв.

В работе исследована устойчивость трехслойной пологой оболочки с легким заполнителем, которая подкреплена продольными ребрами жесткости, с учетом действия продольных сил в срединных плоскостях внешних слоев и ребрах.

Математические модели оптимизационных задач с унарными нечеткими числами / Емец О.А., Середа О.Н. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 204 – 209. – Библиогр.: 5 назв.

Введено понятие унарного нечеткого числа. Предложено операции сложения, умножения, деления и сравнения двух унарных нечетких чисел. Построено примеры математических моделей с использованием таких чисел.

Анализ различных конфигураций трещин в элементах гидротурбинного оборудования / Зайденварг О.Л. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 210 – 214: ил. 3. – табл. 2. – Библиогр.: 9 назв.

В работе определены коэффициенты интенсивности напряжений в пластине с различными часто встречающимися дефектами, проведено сравнение таких дефектов и предложены некоторые уточнения технических требований к сварно-литым конструкциям.

Критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с произвольным запаздыванием / Зевин А.А., Пославский С.Ю // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 215 – 221: ил. 1. – Библиогр.: 15 назв.

Рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений с заданной линейной частью и переменным сосредоточенным и распределенным запаздываниями. Найдены двусторонние оценки наибольшего показателя Ляпунова. Полученные результаты дают достаточные (а в некоторых случаях и необходимые) условия экспоненциальной устойчивости системы, инвариантные относительно запаздывания.

Математическая модель «спрос-предложение» для рынка спортивной парашютной продукции / Иванов П.И., Корнилецкий Д.Д. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 222 – 227: ил. 4. – Библиогр.: 5 назв.

Детально исследуются некоторые виды математических моделей «спрос-предложение», адаптируемых для рынка парашютной продукции

Предельно упрощенный формат программы управления полетом планирующей парашютной системы при дальнем наведении / Иванов П.И., Купавский И.С. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 228 – 232: ил. 1. – Библиогр.: 3 назв.

Разработана блок-схема алгоритма и программа для предельно упрощенного формата управления полетом планирующей парашютной системы при дальнем наведении.

Анализ влияния изменения аэродинамического качества планирующей парашютной системы на точность ее приземления / Иванов П.И., Куянов А.Ю. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 233 – 237: ил. 5. – Библиогр.: 2 назв.

Рассмотрена одна из причин рассеивания точки приземления системы груз-парашют, связанная с возможными изменениями аэродинамических характеристик парашютной системы на больших высотах. Приведены оценки рассеивания.

О математической модели динамики магнетиков со спином s=1 / Ковалевский М.Ю., Логвинова Л.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 238 – 243. – Библиогр.: 10 назв.

Установлены нелинейные диссипативные уравнения динамики магнетиков со спином $s=1$. Введены два типа обменных гамильтонианов, соответствующих инвариантам Казимира группы $SU(3)$, и найдены спектры коллективных возбуждений. Дано обобщение уравнения Блоха и изучено влияние магнитного поля на спектральные характеристики. Найдены релаксационные потоки, обусловленные обменной симметрией гамильтониана.

Моделирование переходных процессов в упругом трубопроводе с жидкостью при осевом импульсном нагружении / Коваленко А.П. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 244 – 247. – Библиогр.: 10 назв.

Рассматривается упругий трубопровод с жидкостью как гидроупругая система “полубесконечная цилиндрическая оболочка-жидкость” при продольном импульсном нагружении. Применяется интегральное преобразование по времени и метод итераций. Показано, что предложенный подход позволяет построить решение в пространстве изображений.

Методы математического моделирования в исследовании задачи Пуассона-Больцмана / Колосов А.И. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 248 – 250. – Библиогр.: 4 назв.

Предлагается метод исследования задач теории электростатического потенциала, основанный на методах и результатах теории нелинейных операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах.

Принятие решений при оценивании альтернатив по качественному критерию / Крючковский В.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 251 – 256. – Библиогр.: 11 назв.

В работе рассматривается метод принятия решений на основе экспертного оценивания альтернатив по качественному критерию с учетом ситуаций неопределенности.

Вывод разностных соотношений из вариационных методов для кубического конечного элемента системы FORTU / Лаврик В. В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 257 – 260. – Библиогр.: 7 назв.

В данной статье представлен вывод формулы потенциальной энергии системы для кубического конечного элемента методом моментных схем. Проведён сравнительный анализ существующих методов расчёта напряжённо-деформированного состояния обьектов и метода моментных схем и перспективы дальнейшего развития системы FORTU

Математическое моделирование динамических режимов работы автономных энергосистем с матричными преобразователями / Лебеденко Ю.А., Рудакова А.В. / Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 261 – 265: ил. 3. – Библиогр.: 8 назв.

Статья посвящена компьютерному моделированию автономной энергосистемы с матричным преобразователем в динамических режимах работы. Осуществлен анализ влияния несимметрии и наброса нагрузки на формы кривых напряжений и токов преобразователя. Показана высокая эффективность управления системой преобразования по минимумам искажений входных токов.

Интегральное преобразование, порожденное дифференциальным оператором Эйлера на сегменте полярной оси / Ленюк М.П., Никитина О.М. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 266 – 269. – Библиогр.: 4 назв.

Методом дельта подобной последовательности (ядро Дирихле) введено интегральное преобразование, порожденное дифференциальным оператором Эйлера с разными характеристическими индексами на сегменте полярной оси $[0, R_3]$ с двумя точками сопряжения.

Суммирование функциональных рядов по собственным элементам гибридного дифференциального оператора Эйлера-Бесселя- (Конторовича-Лебедева)/ Ленюк М.П., Шинкарик М.И. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 270 – 275. – Библиогр.: 7 назв.

Методом сравнения решений, построенных на полярной оси с двумя точками сопряжения для сепаратной системы из дифференциальных уравнений Эйлера, Бесселя и Конторовича-Лебедева, методом функций Коши и методом соответствуещего гибридного интегрального преобразования, просуммировано полипараметрическое семейство функциональных рядов.

Многопараметрические базисы триквадратичного конечного элемента /Литвиненко Е.И. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 276 – 284: ил. 8. – табл. 2. – Библиогр.: 19 назв.

В работе конструктивно доказано существование многопараметрических базисов на триквадратичном конечном элементе серендиповой семьи. Впервые построены базисные функции СКЭ-20, которые содержат 24 и 26 параметров в интерполяционном полиноме.

Статистика фотоотсчетов гауссового излучения, образованная компонентами поляризации при наличии статистической связи между ними / Мазманишвили А.С., Шовкопляс О.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 285 – 289: ил. 1. – Библиогр.: 8 назв.

В работе аналитически описано формирование статистики фотоотсчетов неполяризованного гауссового оптического излучения для случая, когда между модами поляризации существует статистическая связь. Получено аналитическое выражение для производящей функции фотоотсчетов рассматриваемого излучения. Показано, что статистическая связь между модами поляризации приводит к уширению в целом распределения фотоотсчетов при неизменном его первом моменте.

Численное моделирование нерегулярных ветровых волн в задачах волновой энергетики / Мартиновский И.М., Сердюченко А.М. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 290 – 295: ил. 7. – Библиогр.: 10 назв.

Рассмотрены линейное и нелинейное приближения в моделировании гидродинамических характеристик нерегулярных ветровых волн на временных интервалах квазистационарности волновых режимов. Модели предназначены для дальнейших численных расчетов работы волновых энергогенераторов под действием волн.

Моделирование распределения температуры на поверхности холодного катода в источниках электронов высоковольтного тлеющего разряда / Мельник И.В., Тугай С.Б. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 296 – 301: ил. 5. – Библиогр.: 8 назв.

В статье рассматриваются методы расчета пространственного распределения температуры на поверхности охлаждаемого катода в источниках электронов высоковольтного тлеющего разряда. Предлагаются как аналитические, так и численные методы решения уравнения теплопроводности, в зависимости от конструкции системы охлаждения и накладываемых физических ограничений. Численное решение уравнения теплопроводности осуществлялось с использованием средств системы MatLab.

Алгоритмы синтеза адекватных математических описаний физических процессов / Меньшиков Ю.Л. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 302 – 306. – Библиогр.: 8 назв.

В работе рассмотрены алгоритмы синтеза адекватных математических описаний физических процессов, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравняниями. Предложено несколько возможных алгоритмов решения указанной проблемы. Получены объективные критерии адекватности.

Моделирование аэродинамики измерителей направления ветра / Миргород В.Ф., Гвоздева И.М. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 307 – 312: ил. 2. – табл. 1. – Библиогр.: 8 назв.

В работе предложены математические модели статики и динамики проектируемых измерителей направления ветра аэродинамического типа, что позволяет осуществить предварительную оценку их характеристик и выбор оптимального сочетания параметров.

Экспресс-анализ состояния иммунной системы на основе информационных технологий / Нечепуренко О. И., Григорова Т.А., ЛяшенкоВ.П. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 312 – 316: ил. 2. – Библиогр.: 11 назв.

Разработана информационно вычислительная система для проведения диагностики иммунной недостаточности в виде интерфейсной версии и клиент-серверного WEB-приложения. Предложена концепция построения математической модели для формирования соответствующих рекомендаций по воздействию тепловым излучением на кожный покров.

Синтез структуры новых гидроочистных устройств на базе морфологического анализа / Нигора В.Н., Билецкий И.Н. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 317 – 322: ил. 1. – табл. 2. – Библиогр.: 7 назв.

Разработана универсальная методика синтеза структуры новых гидроочистных устройств, которые обеспечивают прогнозирование рациональных конструктивных схем их базовых функциональных элементов в условиях ограниченной информации к техническим показателям аналогов.

Дискретные модели аппроксимации гармонической функции в областях невыпуклой формы / Николаенко С.В., Моисеенко С.В., Зычкова Е.Э. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 323 – 327: ил. 4. – табл. 1. – Библиогр.: 7 назв.

В статье представлены математические модели, аппроксимирующие решение уравнения Лапласа с граничными условиями типа Дирихле в области невыпуклой формы. Представлены результаты применения моделей на тестовых данных.

Прогнозирование структуры и динамики ресурсного обеспечения корпоративного управления/ Ю.Т. Олейник // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 328 – 332. – Библиогр.: 7 назв.

В работе представлены новые подходы и математический инструментарий расчета основных прогнозных характеристик ресурсного обеспечения корпоративного управления.

Уравнения упругих перемещений в подъемных канатах, наматываемых на барабан, с учетом сил трения / Остапенко В.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 333 – 337: ил. 1. – Библиогр.: 7 назв.

Выведены уравнения упругих перемещений в подъемных канатах, наматываемых на барабан с учетом сил трения. Рассмотрены варианты вязкого и сухого трения. Сформулированы условия непрерывной стыковки решений на границе участков каната, описываемых различными уравнениями. Учтена подвижность границы и указаны метода решения таких задач.

Взаимодействие жесткого штампа с ортотропным прямоугольником / Павленко А.В., Щербина И.В., Сясев А.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 338 – 342: – табл. 1. – Библиогр.: 6 назв.

Рассматривается задача о действии жесткого штампа с плоским основанием на свободную грань ортотропного прямоугольника. Считается, что две противоположные кромки прямоугольника закреплены, учитывается трение при контакте штампа с прямоугольником. Для решения задачи используется асимптотический метод.

Теоретико-игровые модели для определения сетевого мошенничества в системе контекстной рекламы / Павлов Д.Г., Александрова М.В., Чертов О.Р. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 343 – 347. – Библиогр.: 11 назв.

Рассмотрены существующие теоретико-игровые модели поведения участников процесса Интернет-рекламы, а также возможности их дальнейшего использования для определения сетевого мошенничества.

Теоретические основы статистического моделирования технологических процессов / Пигнастый О.М. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 348 – 353. – Библиогр.: 7 назв.

Представлены теоретические основы и концептуальные положения статистического моделирования технологических процессов производственно-технических систем. Показана связь микро- и макроуровней описания технологических процессов.

Адаптационные аспекты динамики магнитолевитирующего поезда / Поляков В. А., Хачапуридзе Н. М.// Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 354 – 358. – Библиогр.: 5 назв.

Детально рассмотрена проблема приспособляемости динамики магнитолевитирующего поезда к эксплуатационным условиям. Показано, как задача такой приспособляемости может быть решена с применением методов структурной адаптации, а также теории игр, то есть подхода, базирующегося на концепции гарантированного результата.

Математическое моделирование диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора / Редчиц Д.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 359 – 365: ил. 7. – Библиогр.: 3 назв.

Разработан подход к моделированию диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора в подвижной сплошной среде. Предложенная методика учитывает физические особенности рассматриваемого класса задач и обладает высокой вычислительной эффективностью. На основе разработанного подхода выполнено моделирование воздействия диэлектрического барьерного разряда при работе плазменного актуатора на находящийся в покое воздух. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Показаны широкие возможности применения данного подхода к моделированию динамики низкоскоростных потоков жидкости и газа при наличии электростатического поля.

Методы дополнительной триангуляции / Романюк А. Н., Обідник Н. Д. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 366 – 371: ил. 4. – Библиогр.: 6 назв.

В статье разработано методы дополнительной триангуляции, которые обеспечивают сбалансированную загрузку шейдерных процессоров для задачи закраски.

Контактное взаимодействие слоя и упругого цилиндра с начальными (остаточными) напряжениями / Рудницкий В. Б., Ярецкая Н. А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 372 – 377. – Библиогр.: 4 назв.

В статье в рамках линеаризованной теории упругости рассмотрена смешанная задача о давлении упругого цилиндрического штампа на слой с начальными (остаточными) напряжениями. Исследования выполнены в общем виде для теорий больших начальных деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

Явная схема для численного интегрирования уравнений Эйлера на неструктурированных сетках / Русанов А.В., Косьянов Д.Ю. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 378 – 384: ил. 4. – Библиогр.: 6 назв.

Выполнено обобщение явной разностной схемы высокого порядка точности для численного интегрирования уравнений Эйлера на неструктурированных сетках при моделировании невязких течений сжимаемого газа. Приведены результаты апробации предложенного метода при решении задач с гладкими и разрывными полями.

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами первого порядка / Самойленко В.Г., Самойленко Ю.И. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 385 – 387. – Библиогр.: 5 назв.

Рассмотрено линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка с переменными коэффициентами, которое возникает при построении асимптотического решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега-де Фриза. Получены достаточные условия, при которых решение задачи Коши для указанного выше уравнения существует.

Моделирование эмиссии тормозного излучения для различных спектров электронных пучков / Саруханян Г.Э., Лазурик В. Т., Батраков А. Б. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 388 – 392: ил. 3. – табл. 3. – Библиогр.: 4 назв.

Получены результаты компьютерного моделирования генерации тормозного излучения электронного пучка. Изучены зависимости коэффициента преобразования энергии электронов в энергию излучения от параметров моделей спектра электронного пучка.

Моделирование температурно-временного режима ионно-плазменного плакирования порошков/ Смирнов И. В., Мельник И. В., Андрейцев А. Ю. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 393 – 398: ил. 3. – Библиогр.: 7 назв.

Проведено математическое моделирование температурных и временных режимов плакирования порошков с учетом мощности ионно-плазменного испарителя, материала и размера частиц порошка. Предложены зависимости, позволяющие определить время, необходимое для достижения на поверхности частиц порошка заданной температуры и получения оболочки необходимой толщины.

Решение уравнений Навье-Стокса з использованием компьютерных технологий / Сохацкий А.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 399 – 404: ил. 5. – Библиогр.: 7 назв.

Для расчета аэродинамических характеристик высокоскоростных транспортных средств разработано методику и численный алгоритм. При построении дискретного аналога уравнений Навье-Стокса применен метод контрольных объемов. Приводятся результаты расчета параметров обтекания транспортного аппарата.

Вычисление несобственных интегралов по собственным элементам гибридного дифференциального оператора Ейлера-Лежандра на полярной оси / Тарновецкая О.Ю.// Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 414 - 418. – Библиогр.: 4 назв.

Методом сравнения решений, построенных на полярной оси с двумя точками сопряжения для сепаратной системы дифференциальных уравнений Ейлера и Лежандра методом функций Коши и методом соответственного гибридного интегрального преобразования, вычислено полипараметрическое семейство несобственных интегралов.

Использование хеширования по нескольким сигнатурам для очистки и объединения словарей данных на примере названий географических объектов / Тодорико О.О., Добровольский Г.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С.419 - 423. – Библиогр.: 8 назв.

В работе описано применение разработанных словарных алгоритмов поиска по сходству для решения задачи очистки-объединения словарей с учетом лексической несогласованности. Предложенные методы предварительной фильтрации позволяют существенно сократить количество трудоемких операций вычисления близости строк. Вычисленные показатели точности и полноты подтверждают высокое качество работы метода.

Трилинейный гармонический базис октаэдра / Тулученко Г.Я., Хомченко А.Н., Мотайло А.П. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 424 - 429: ил. 5. – табл. 2. – Библиогр.: 8 назв.

Построен новый гармонический базис для октаэдра как конечного элемента. Проведено сравнение характеристик построенного базиса с уже известными базисами этого элемента.

Анализ напряженно-деформированного состояния гибких цилиндрических панелей / Тумашова О.В., Костенко И.С. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 430 - 433: табл. 2. – Библиогр.: 6 назв.

В данной работе предложен подход к численному решению двумерных нелинейных краевых задач, который базируется на применении приближенного аналитического метода Власова-Канторовича, метода линеаризации одномерных нелинейных краевых задач и численного метода дискретной ортогонализации решения линейных краевых задач. Исследуется достоверность результатов решения данного класса задач с целью апробации метода Власова-Канторовича.

Модель размещения объектов на плоскости с евклидовой метрикой в задачах организации материально-технического обеспечения МЧС / Убайдуллаев Ю.Н., Караев Д.С. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 434 - 438. – Библиогр.: 8 назв.

Рассматривается формирование каждой задачи планирования и размещения объектов по основным показателям, которые могут быть использованы для классификации задач получения оптимальных вариантов осуществления автомобильных перевозок.

Математическое моделирование некоторых задач восстанавления деталей судовых механизмов / Усов А. В., Воробьева Л. А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 439 - 444. – Библиогр.: 7 назв.

Нанесение на рабочие поверхности деталей износостойких покрытий часто сопровождается появлением между покрытием и рабочей поверхностью технологических дефектов типа трещин. Последующая размерная механическая обработка таких деталей может вызвать «скалывание» покрытия. Построенная математическая модель позволяет аналитически определить величины нагрузок на покрытие, при которых будет происходить скалывание покрытия.

Моделирование термомеханических процессов при шлифовании деталей из феррокерамики / Усов А.В., Богданова Е.Н. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 445 - 449: ил. 1. – Библиогр.: 3 назв.

Разработана модель, описывающая термомеханические процессы в изделиях из феррокерамики при обработке их шлифованием. Предложены критериальные соотношения для выбора технологических параметров обработки, позволяющие устранить дефекты типа трещин и сколов на обрабатываемых поверхностях.

Геометрическое моделирование переходной кривой с применением кубического распределения кривизны / Устенко С.А., Диданов С.В. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 450 - 454: ил. 5. – Библиогр.: 7 назв.

Предлагается геометрическая модель переходной кривой с применением кубического распределения кривизны и учетом граничных условий, предупреждающих возникновение скачкообразного углового ускорения при выходе из линейного и при входе на круговой участок железной дороги. Проведен анализ полученного распределения кривизны.

Математическое моделирование температурного поля цилиндрического потока смеси жидкостей / Филиппов А.И., Ахметова О.В., Рогов В.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 455 - 459: ил. 5. – Библиогр.: 5 назв.

Найдены выражения для температуры цилиндрического потока смесей жидкостей. Произведена оценка условий применимости развитой модели. На основе полученных в изображениях решений численно построены графики зависимостей температуры от пространственно-временных координат.

Гидродинамика слоя жидкости на ленточном адгезионном нефтесборщике / Филиппов А.И., Ишмуратов Т.А. Султанова Л.М., Янбекова А.И. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 460 - 463: ил. 3. – Библиогр.: 2 назв.

Развита теория стационарных, гидродинамических процессов при течении вязкой жидкости на ленточном транспортере. Найдены выражения для оценки толщин слоев жидкости, а также поля скоростей нефтебитума на движущимся ленточном транспортере. На основе полученных решений найдены зависимости физических и геометрических параметров для нефтесборщика.

Неизотермическая фильтрация растворов радиоактивных веществ / Филиппов А.И., Михайлов П. Н. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 464 - 468: ил. 3. – Библиогр.: 6 назв.

Асимптотическим методом решена задача о температурном поле в пласте и окружающих породах при фильтрации радиоактивных растворов в пористом пласте с учетом теплообмена с окружающими породами и осаждения радиоактивных элементов на скелет пласта. Определена и описана динамика зон загрязнения, теплового возмущения и чистой воды в зависимости от различных параметров.

Генетические алгоритмы решения прямой спектральной задачи / Флоринский В.В.(ст), Флоринский В.В.(мл), Чеканов Н.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 469 - 474: ил. 3. – Библиогр.: 11 назв.

Предложено применение генетических алгоритмов для решения задач на собственные значения. Разработаны и построены примеры таких алгоритмов.

Тела Платона и несимметричные блуждания по сферам / А.Н. Хомченко // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 475 - 479: ил. 1. – Библиогр.: 9 назв.

Несимметричные блуждания по сферам моделируются с помощью интерполяционных базисов тел Платона.

Применение методов Фурье и Я.Г. Пановко в анализе суб-/ супергармонических колебаний и резонансов дробного порядка культиваторов с упругой подвеской рабочих органов.I. / Човнюк Ю.В., Диктерук М.Г., Гуменюк Ю.О., Тисленко А.Б., Дитюк А.И. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 480 - 485: ил. 2. – Библиогр.: 15 назв.

Рассмотрены методы Фурье и Я.Г. Пановко в анализе колебаний, резонансов (суб- / супергармонических), в т.ч. дробного порядка, для культиваторов с упругой подвеской рабочих органов. Установлены их основные параметры (амплитуда, частота), условия возбуждения.

Метод интегральных уравнений в задаче о свободных колебаниях пластин в сжимаемой жидкости / Шелудько Г.А., Емельянов Т.В., Науменко О.В., Стрельникова Е.А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 486 - 490: ил. 1. табл. 1. – Библиогр.: 9 назв.

Предложен метод расчета частот и форм свободных колебаний пластин в сжимаемой жидкости, основанный на применении граничных интегральных уравнений. Разработан алгоритм численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения для определения давления на пластинку со стороны жидкости. Для нахождения собственных частот и форм колебаний пластины применен гибридный адаптивный метод поиска корней трансцендентного уравнения .

Динамическая оценка подобия двух потоков событий / Шерстюк В.Г. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 491 - 496. – Библиогр.: 8 назв.

Представлена формальная модель событийной системы, предложен метод динамической оценки подобия двух потоков событий, основанный на принципе максимально возможного совмещения потоков. Показана эффективность данного метода, его адаптивность к условиям неполной и неточной исходной информации, позволяющая его использовать в ИС реального времени

Моделирование карты дозы в много-пакетном рентгеновском оборудовании с использованием метода Монте Карло / Лазурик В.Т., Лазурик В.М., Попов Г.Ф., Рогов Ю.В // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 502 - 507: ил. 4. – Библиогр.: 6 назв.

Использование мощных ускорителей электронов для генерации пучков тормозного излучения (ТИ) представляет большой коммерческий интерес в области промышленных радиационных технологий. Успех применения пучков ТИ в радиационных технологиях существенно зависит от развития теоретических представлений, полу-эмпирических моделей и компьютерных программ для моделирования транспорта ТИ в облучаемых объектах. Результаты компьютерного моделирования методом Монте Карло поля поглощенной дозы в объектах, облучаемых сканирующими пучками ТИ, обсуждаются в работе.

Эффективный lossless и near-lossless алгоритм сжатия медицинских изображений / Мороз В. В., Савков А. А. // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 503–508: ил. 4. – табл. 1. – Библиогр.: 9 назв.

В работе предложен адаптивный к структуре алгоритм сжатия медицинских изображений. Анализ результатов показывает его более высокую эффективность в сравнении с существующими алгоритмами. Открытость и гибкость стандарта DICOM позволяет интеграцию предложенного алгоритма в стандарт.

АНОТАЦІЇ

Формування зони внутрішнього окислення при малій вільній енергії формування окислів /Г.С. Абрамов, М.Г. Абрамов// Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 14 – 20. – Бібліогр.: 5 назв.

Проведене моделювання процесу формування зони внутрішнього окислення при швидкій релаксації пересичення і малій енергії утворення окисла. Результати чисельного моделювання процесу зіставлені з теоретичними моделями Вагнера-Кіркалді і експериментальними даними.

Математична модель формування і відбиття ударних хвиль в мережах гірничих виробок / Агєєв В.Г., Зінченко І.М., Греков С.П. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 21 – 27: іл. 3. – Бібліогр.: 7 назв.

Розроблена математична модель динаміки ударних хвиль в вентиляційних мережах гірничих виробок вугільних шахт з врахуванням наявності і стійкості ізоляційних споруд. Запропоновано числовий метод рішення.

Аналітичне визначення температури частинок порошку при плазмовому напиленні композиційних покриттів/ Андрейцев А.Ю., Крюков М.М., Крижановська Т.В., Семененко Т.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 33 – 37. – Бібліогр.: 7 назв.

Розглянуто математичні моделі для аналітичного визначення температури частинок вздовж дистанції напилення з урахуванням зміни їх агрегатних станів. Проведено порівняльний аналіз моделей для частинок оксидів та металів з метою оптимізації режимів напилення і фракційного складу.

Відображення особливостей електрокардіограм як яскравих зображень у просторі ядер моделі Вольтерра другого порядку /Ахметшин О.М., Ахметшин К.О.// Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 38 – 43: іл. 4. – Бібліогр.: 5 назв.

Описано новий метод класифікації ЕКГ на підставі віртуального синтезу і візуалізації ядер моделі Вольтерра другого порядку. Представлені експериментальні результати, що демонструють інформаційні можливості методу.

Аналіз зображень у просторі параметрів адаптивної моделі лінійного передбачення локального розподілу яскравістей /Ахметшин О.М., Степаненко О.О.// Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 44 – 49: іл. 6. – Бібліогр.: 6 назв.

Описано новий метод аналізу низько контрастних зображень у просторі параметрів моделі лінійного передбачення розподілу яскравістей. Представлені експериментальні результати, що демонструють інформаційні можливості методу.

Застосування критеріїв якості групування для підвищення чутливості модифікованого алгоритму гібридної нечіткої кластеризації / Ахметшина Л.Г., Єгоров А.О. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 50 – 55: іл. 2. – Бібліогр.: 8 назв.

В статті розглянуто застосування показників нечіткості та Ксіє-Бієні для підвищення чутливості модифікованого алгоритму гібридної нечіткої кластеризації sFCM. Інформаційні можливості запропонованого методу показано на прикладі сегментації медичних зображень.

Мультимодельний метод нечіткої інтерполяції просторових даних на нерівномірній сітці / Ахметшина Л.Г., Ямнич Т.С. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 56 – 61: іл. 3. – Бібліогр.: 7 назв.

Розглянуто мультимодельний метод нечіткої інтерполяції просторових даних на нерівномірній сітці та його інформаційні можливості. Представлені результати застосування методу на тестових та реальних даних.

Вибір сітки дискретизації розподілення поглиненого заряду в задачі відновлення спектру електронів / Баєв О.Ю., Лазурик В.Т. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 62 – 66 : іл. 4. – Бібліогр.: 5 назв.

В роботі розглянуті проблеми впливу кількості детектуючих шарів дозиметру на точність методів штучного інтелекту в задачі реконструкції спектру електронів за виміряному розподіленню поглиненого заряду. Дослідження дозволили з'ясувати параметри вимірювального приладу, для яких обрана нейронна мережа визначає енергетичне розподілення з найменшою похибкою. Знайдені оптимальні конфігурації вимірювального прибору, для яких точність відновлення спектру методами, що використовують нейрону мережу, максимальна і перевищує точність традиційних методів.

Про один погляд на класифікацію моделей марковського типу / Баклан І. В., Степанкова Г. А. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 67 – 73: іл. 3. – Бібліогр.: 30 назв.

В статті запропонований погляд на класифікацію прихованих марковських моделей та їх місце в загальній класифікації імовірнісних моделей. Були визначені основні класифікаційні ознаки, за якими і був виконаний класифікаційний аналіз.

Стохастична інтерпретація неоднорідної популяційної моделі Леслі / Балакірєва О.Г., Бутенко Н.С., Михайлов Е.О.// Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 74 – 77. – Бібліогр.: 4 назв.

В цій роботі розглядається неоднорідна популяційна модель Леслі та досліджуються її асимптотичні властивості. Встановлюється, що ця модель має властивість слабкої ергодичності. Показується можливість еквівалентного переходу від детермінованої неоднорідної моделі Леслі до стохастичної моделі. Наводяться умови, за яких граничний розподіл зазначеної моделі можливо стабілізувати в околиці ергодичного розподілу.

Побудова поверхні обертання з меридіаном напівциклоїди у точковому численні / Бездітний А.О. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 78 – 81: іл. 4. – Бібліогр.: 5 назв.

У роботі розглядається задача побудови поверхні обертання, твірною якої є напівциклоїда, у точковому численні.

Моделювання теплових процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Фур'є – Ейлера – Фур'є на полярної осі / Блажевський С.Г., Ленюк М.П. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 87 – 92. – Бібліогр.: 7 назв.

Операційним методом одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі про дифузійні процеси в неоднорідних середовищах з м'якими межами у випадну, коли моделювання дифузійних процесів здійснено методом гібридного диференціального оператора Фур'є – Ейлера – Фур'є на полярній осі.

Послідовний контроль та його математична модель / Боличевцев О.Д., Боличевцева Л.О., Бистрицька Л.Б., Любимова Н.О. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 99 – 103. – Бібліогр.: 8 назв.

Розглянуто контролююча система, яка побудована за схемою послідовного контролю. Отримано аналітичні залежності характеристик цієї системи як функцій характеристик її складових частин.

Математичне моделювання процесів розорення в присутності нормальних збурень / Бондар О.В., Мазманішвілі О.С. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 104 – 108: іл. 3. – Бібліогр.: 5 назв.

Розглянута ймовірнісна задача про визначення характеристик випадкового часу досягнення деякого заданого рівня процесом на виході інерційного детектора накопичувального типу. Застосовано модель адитивної суміші детермінованого позитивного сигналу та шуму. Отримано аналітичний вираз для густини розподілу випадкового часу досягнення заданого рівня, приведено результати чисельного моделювання процесу розорення. Дані розрахунку та їх порівняння з аналітичною моделлю вказують про досить гарну їх відповідність. Запропонований підхід можна застосовувати і для інших моделей шумів и трендів фінансових потоків.

Деякі аспекти побудови обводів потовщених профілів лопаток осьових турбін / Борисенко В.Д., Котляр Д.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 109 – 114: іл. 4. – Бібліогр.: 8 назв.

У роботі пропонується комплексний підхід до геометричного моделювання криволінійних обводів потовщених профілів охолоджуваних лопаток осьових турбін, який базується на поєднанні переваг кривих Безьє щодо моделювання плавних плоских ліній та графічного способу побудови параболічних кривих за відомими кутами нахилу дотичних до них, що надає можливість визначати координати вузлових точок характеристичних ламаних Безьє.

Застосування чебишовських наближень до розв'язання мішаних задач для рівнянь з частинними похідними / Вакал Л.П., Каленчук-Порханова А.О., Вакал Є.С. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 119 – 123. – Бібліогр.: 6 назв.

Розглянуто метод розв’язання мішаної задачі з використанням найкращих чебишовських наближень для апроксимації початкових умов. Наведені приклади розв’язання задач.

Нелінійні лагранжеві скалярні поля з сінгулярністю на просторово подібній прямій / Вірченко Ю.П. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 124 – 128. – Бібліогр.: 2 назв.

У рамках теорії нелінійних лагранжевих полів на просторі Мінковського вивчається проблема про типи польових сінгулярностей. Розглядається сінгулярності скалярного поля φ без попередньої маси, які зосереджені на просторово подібних кривих. Для однієї сінгулярності у вигляді прямої, яка лежить у світовому конусі, демонструється, що існують лагранжеві густини L такі, для яких розв’язки польового рівняння можуть мати скінченну повну енергію. У випадку багатолистної залежності густини L можуть існувати декілька суттєво різних рішень.

Часткові одноінтервальні розподіли випадкових множин з марковськими подрібненнями в R / Вірченко Ю.П., Шпілінська О.Л. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 129 – 132. – Бібліогр.: 3 назв.

В роботі розроблено алгоритм обчислювання одноінтервальної функції розподілу для випадкових множин з марковськими подрібненнями у R при довільному параметрі подрібнення ν.

Моделювання нестаціонарного потоку в іригаційному каналі / Воцелка С.О., Рожков С.О. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 133 – 140: іл. 5. – Бібліогр.: 8 назв.

Розглянуто каскадну модель керування магістральним каналом. Для поліпшення динамічних характеристик системи керування запропоновано використовувати додатковий канал зворотного зв'язку.

Моделювання динамічної поведінки оболонки з рідиною при сейсмічному впливі / Гнитько В.І., Марченко У.Є., Науменко В.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 141 – 144: іл. 3. – Бібліогр.: 5 назв.

Запропоновано метод розрахунку динамічних характеристик оболонок обертання з рідиною під впливом короткочасного імпульсного навантаження. Метод заснований на зведенні задачі о визначенні тиску рідини до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Зв’язана задача теорії пружності вирішується за допомогою комбінації МСЕ та МГЕ. Диференціальні рівняння нестаціонарної задачі вирішуються чисельно методом Рунге-Кутта 4го та 5го порядку.

Дискретизація тривимірних областей, заданих R-функціями, на шестигранні скінчені елементи / Гоменюк С.І., Чопоров С.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 145 – 152: іл. 9. – Бібліогр.: 15 назв.

В роботі розглянута проблема дискретизації складних тривимірних областей, заданних R-функціями, на шестигранні скінчені елементи. Запропонована методика побудови рівномірної сітки шестигранних елементів функціональної геометричної моделі.

Алгоритм термодинамічного моделювання масопереносу в системі «газ-тверде тіло» / Горбенко В.І. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 153 – 157: іл. 3. – Бібліогр.: 8 назв.

Для застосування рівноважної термодинаміки до моделювання взаємодій газових частинок з твердотілими речовинами у відкритих системах запропоновано враховувати зміни матеріального балансу. Наведено алгоритм розрахунку матеріального балансу. Проведено моделювання змін складу системи H-O-In-P, відкритої для масопереносу газових компонент.

Інволютивність просторів афінної зв′язності / Гребенюк М.Ф., Терехова М.В., Макаров В.І. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 158 – 162. – Бібліогр.: 12 назв.

Стаття присвячена проблемам геометричного моделювання багатовимірних різноманіть проективних просторів. Отримано закон інволютивности просторів афінної зв'язності, побудованих раніше за допомогою оснащення Е. Картана на регулярній гіперсмуге, заданої в неевклидовому просторі.

Моделювання контактної взаємодії еластомірних елементів конструкції / Гребенюк С.М., Решевська К.С., Тархова В.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 163 – 167: іл. 5. – Бібліогр.: 11 назв.

Запропоновано методику врахування контактної взаємодії еластомірних елементів на основі моментної схеми методу скінченних елементів. Досліджено напружено-деформівний стан конструкцій в умовах контактних взаємодій.

Оцінка левітаційного руху екіпажу електродинамічної транспортної системи вздовж плоскої шляхової структури спрощеної конструкції / Дзензерський В.А., Кузнецова Т.І., Радченко М.О., Хачапурідзе М.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 168 – 171. – Бібліогр.: 3 назв

Описана конструктивна схема електродинамічної транспортної системи з одним рядом токопровідних контурів на плоскій шляховій структурі. Оцінено левітаційний рух екіпажу такої системи вздовж прямолінійних і криволінійних ділянок шляху.

Комп'ютерне моделювання розгалуження транспортних потоків / Діденко Є. В., Лазурик В. Т., Рогов Ю.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 172 – 176: іл. 2. – табл. 1. – Бібліогр.: 8 назв.

В межах стохастичної моделі проведено математичне моделювання взаємодії потоку з базовим компонентом транспортної мережі - розгалуженням. Комп'ютерне моделювання процесу розгалуження потоків проводиться методом Монте-Карло з використанням спеціально розробленого програмного забезпечення SFMS. Отримані результати представляють інтерес для аналізу потоків у складних транспортних системах.

Проблеми виникнення і придушення хаосу / Дмитришин Д.В., Усов А.В., Дмитришина А.Д., Білоус О.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 177 – 180. – Бблiогр.: 4 назв.

Розглянуто властивості функціональних рівнянь з розподіленим запізненням. Встановлено, що якісна картина таких рівнянь відрізняється від відомих біфуркаційних сценаріїв. Вказано напрями використання отриманих результатів, у тому числі й методи придушення хаосу в динамічних системах.

Побудова математичних моделей для дослідження оболонки довільної кривини з ненаскрізними тріщинами / Довбня К.М., Гордієнко М.М., Штакіна М.О., Яртемик В.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 181 – 185: іл. 5. – Бібліогр.: 9 назв.

У статті узагальнені модель лінійних пружин і аналог δ_c - моделі на випадок системи двох колінеарних ненакрізних тріщин в тонкій ізотропній оболонці довільної кривини, яка знаходиться під дією симетричного навантаження. Побудовані системи сингулярних інтегральних рівнянь для дослідження напруженого стану оболонки з системою тріщин в рамках обох моделей.

Моделювання двовимірних теплових та вологісних полів в пористому середовищі з урахуванням фазових перетворень / Дреус А. Ю., Лисенко К. Є. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 186 – 190: іл. 5. – Бібліогр.: 8 назв.

Наведено математичну модель процесу промерзання кріогенно–гравійного фільтру для двовимірного випадку та наведено приклад розрахунку.

Математична модель багатозондового НВЧ перетворювача интерференцфйного вимірювача параметрів вібрацій / Дробахін О. О., Доронін О.В., Привалов Є.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 191 – 195: іл. 1. – Бібліогр.: 5 назв.

На основі математичної моделі мікрохвильового багатозондового вимірювача вібрацій, яка враховує власні відбиття зондів, показано, що одно- двох зондові вимірювачі не дозволяють проводити відповідні вимірювання. Чотирьохзондові вимірювачі забезпечують вимірювання з задовільною точністю.

Особливості реалізації методу Проні при оцінці комплексних показників експонент при наявності імпульсних завад / Дробахін О.О., Лебедєв С.Г. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 196 – 199: іл. 4. – Бібліогр.: 6 назв.

Розроблена модифікація методу Порні для знаходження частоти сигналу, що складається з однієї затухаючої косинусоїди при наявності як імпульсних завад, так і Гаусівського шуму.

Моделювання стійкості тришарової пологої оболонки з легким заповнювачем, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості / Ємельянова Т.А. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 200 – 203: іл. 3. – Бібліогр.: 4 назв.

В роботі досліджена стійкість тришарової пологої оболонки з легким заповнювачем, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості, з урахуванням дії поздовжніх сил в серединних площинах зовнішніх шарів та ребрах.

Математичні моделі оптимізаційних задач з унарними нечіткими числами / Ємець О.О., Середа О.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 204 – 209. – Бібліогр.: 5 назв.

Введено поняття унарного нечіткого числа. Запропоновано операції додавання, добутку, частки та порівняння двох унарних нечітких чисел. Побудовано приклади математичних моделей з використанням таких чисел.

Аналіз різних конфігурацій тріщин в елементах гідротурбінного обладнання / Зайденварг О.Л. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 210 – 214: іл. 3. – табл. 2. – Бібліогр.: 9 назв.

В роботі визначено коефіцієнти інтенсивності напружень у пластині різними дефектами, що часто зустрічаються, проведено порівняння таких дефектів та запропоновано деякі уточнення технічних вимог до зварно-литих конструкцій.

Критерії експоненціальної стійкості нелінійних систем з довільним запізнюванням / Зевін О.А., Пославський С.Ю. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 215 – 221: іл. 1. – Бібліогр.: 15 назв.

Розглянуто систему нелінійних диференціальних рівнянь із заданою лінійною частиною і змінним зосередженим і розподіленим запізнюваннями. Знайдені двосторонні оцінки найбільшого показника Ляпунова. Отримані результати дають достатні (а в деяких випадках і необхідні) умови експоненціальної стійкості системи, інваріантні щодо запізнювання.

Математична модель "попит-пропозиція" для ринку спортивної парашутної продукції / Іванов П.І., Корнілецький Д.Д. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 222 – 227: іл. 4. – Бібліогр.: 5 назв.

Детально досліджуються деякі види математичних моделей "попит-пропозиція" адаптуємих для ринку парашутної продукції.

Гранично спрощений формат програми керування польотом планувальної парашутної системи при далекому наведенні / Іванов П.І., Купавський І.С. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 228 – 232: іл. 1. – Бібліогр.: 3 назв.

Розроблено блок-схему алгоритму і програму для гранично спрощеного формату керування польотом планувальної парашутної системи при далекому наведенні.

Аналіз впливу зміни аеродинамічної якості планувальної парашутної системи на точність її приземлення / Іванов П.І., Куянов О.Ю. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 233 – 237: іл. 5. – Бібліогр.: 2 назв.

Розглянуто одна з причин розсіювання крапки приземлення системи вантаж-парашут, зв'язаная з можливими змінами аеродинамічних характеристик парашутної системи на великих висотах. Приведено оцінки розсіювання.

Моделювання перехідних процесів в пружному трубопроводі з рідиною при осьовому імпульсному навантаженні / Коваленко А.П.// Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 244 – 247. – Бібліогр.: 10 назв.

Розглядається пружний трубопровід з рідиною як гідропружна система "напівнескінченна циліндрична оболонка-рідина " при поздовжньому імпульсному навантаженні. Застосовується інтегральне перетворення по часові і метод ітерацій. Показано, що запропонований підхід дозволяє побудовати розв'язок в просторі зображень.

Методи математичного моделювання в дослідженні задачі Пуассона-Больцмана / Колосов А.І. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 248 – 250. – Бібліогр.: 4 назв.

Пропонується метод дослідження задач теорії електростатичного потенціалу, який ґрунтується на методах та результатах теорії нелінійних операторних рівнянь в напівупорядкованих просторах.

Прийняття рішень при оцінюванні альтернатив по якісному критерію / Крючковський В.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 251 – 256. – Бібліогр.: 11 назв.

В роботі розглядається метод прийняття рішень на основі експертного оцінювання альтернатив по якісному критерію з урахуванням ситуацій невизначеності.

Виведення різницевих співвідношень з варіаційних методів для кубічного елементу системи FORTU / Лаврик В. В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 257 – 260. – Бібліогр.: 7 назв.

У даній статті представлено виведення формули потенційної енергії системи для кубічного скінченного елементу методом моментних схем. Проведено порівняльний аналіз існуючих методів розрахунку напружено-деформованого стану об'єктів і методу моментних схем та перспективи подальшого розвитку системи FORTU.

Математичне моделювання динамічних режимів роботи автономних енергосистем з матричними перетворювачами / Лебеденко Ю. О., Рудакова Г. В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 261 – 265: іл. 3. – Бібліогр.: 8 назв.

Стаття присвячена комп'ютерному моделюванню автономної енергосистеми, що містить матричний перетворювач, в динамічних режимах роботи. Здійснено аналіз впливу несиметрії та накиду навантаження на форми кривих напруг та струмів перетворювача. Доведено високу ефективність керування системою перетворення електричної енергії за мінімумом спотворень вхідних струмів.

Інтегральне перетворення, породжене диференціальним оператором Ейлера на сегменті $[0, R_3]$ полярної осі / Ленюк М.П., Нікітіна О.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 266 – 269. – Бібліогр.: 4 назв.

Методом дельта подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено інтегральне перетворення, породжене диференціальним оператором Ейлера з різними характеристичними індексами на сегменті $[0, R_3]$ полярної осі з двома точками спряження.

Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера-Бесселя-(Конторовича-Лєбєдєва) / Ленюк М.П., Шинкарик М.І. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 270 – 275. – Бібліогр.: 7 назв.

Методом порівняння розв’язків, побудованих на полярній осі з двома точками спряження для сепаратної системи з диференціальних рівнянь Ейлера, Бесселя і Конторовича-Лєбєдєва, методом функцій Коші і методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів.

Багатопараметричні базиси триквадратичного скінченного елемента /Литвиненко О.І. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 276 – 284: іл. 8. – табл. 2. – Бібліогр.: 19 назв.

У роботі конструктивно доведено існування багатопараметричних базисів на триквадратичному скінченному елементі серендипової сім’ї. Вперше побудовані базисні функції ССЕ-20, що містять 24 і 26 параметрів в інтерполяційному поліномі.

Статистика фотовідліків гауссового випромінювання, утворена компонентами поляризації при наявності статистичного зв’язку між ними / Мазманішвілі О.С., Шовкопляс О.А. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 285 – 289: іл. 1. – Бібліогр.: 8 назв.

В роботі аналітично описано формування статистики фотовідліків неполяризованого гауссового оптичного випромінювання для випадку, коли між модами поляризації існує статистичний зв’язок. Отримано аналітичний вираз для твірної функції фотовідліків випромінювання, що розглядається. Показано, що статистичний зв’язок між модами поляризації приводить до розширення в цілому розподілу фотовідліків при незмінному його першому моменті.

Чисельне моделювання нерегулярних вітрових хвиль в задачах хвильової енергетики / Мартиновський І.М., Сердюченко А.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 290 – 295: іл. 7. – Бібліогр.: 10 назв.

Розглянуто лінійне та нелінійне наближення у моделюванні гідродинамічних характеристик нерегулярних вітрових хвиль на часових інтервалах квазістаціонарності хвильових режимів. Моделі призначені для подальших чисельних розрахунків роботи хвильових енергогенераторів під дією хвиль.

Моделювання розподілу температури на поверхні холодного катоду у джерелах електронів високовольтного тліючого розряду / Мельник І.В., Тугай С.Б. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 296 – 301: іл. 5. – Бібліогр.: 8 назв.

У статті розглядаються методи розрахунку просторового розподілу температури на поверхні охолоджуваного катода у джерелах електронів високовольтного тліючого розряду. Запропоновані як аналітичні, так і чисельні методи розв’язування рівняння теплопровідності, в залежності від конструкції системи охолодження та від фізичних обмежень, які накладаються. Чисельне розв’язування рівняння теплопровідності здійснювалось з використанням засобів системи MatLab.

Алгоритми синтезу адекватних математичних описань фізичних процесів / Меньшиков Ю.Л. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 302 – 306. – Бібліогр.: 8 назв.

В роботі розглянуто алгоритми синтезу адекватних математичних описань фізичних процесів, поведінка яких описується звичайними диференціальними рівняннями. Запропоновано декілька можливих алгоритмів розв’язання цієї проблеми. Отримані об’єктивні критерії адекватності.

Моделювання аеродинаміки вимірювачів напряму вітру / Миргород В.Ф., Гвоздева І.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 307 – 312: іл. 2. – табл. 1. – Бібліогр.: 8 назв.

У роботі запропоновані математичні моделі статики і динаміки вимірювачів напряму вітру аеродинамічного типу, що дозволяє здійснити попередню оцінку їх характеристик і вибір оптимального поєднання параметрів.

Експрес-аналіз стану імунної системи на основі інформаційних технологій / Нечепуренко О. І., Григорова Т.А., ЛяшенкоВ.П.// Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 313 – 316: іл. 2. – Бібліогр.: 11 назв.

Створена інформаційно обчислювальна система для проведення діагностики імунної недостатності у вигляді інтерфейсної версії та клієнт-серверного Web-додатку. Запропонована концепція побудови математичної моделі для відповідних рекомендацій щодо дії тепловим випромінюванням на шкіру.

Синтез структури нових гідроочищувальних пристроїв на базі морфологічного аналізу / Нигора В.М., Білецький І.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 317 – 322: іл. 1. – табл. 2. – Бібліогр.: 7 назв.

Розроблена універсальна методика синтезу структури нових гідроочищувальних пристроїв, що забезпечує прогнозування раціональних конструктивних схем їхніх базових функціональних елементів в умовах обмеженої інформації щодо технічних показників аналогів.

Дискретні моделі апроксимації гармонічної функції в областях неопуклої форми / Ніколаєнко Ю.І., Моісеєнко С.В., Зичкова О.Е. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 323 – 327: іл. 4. – табл. 1. – Бібліогр.: 7 назв.

В статті представлені математичні моделі, що апроксимують розв'язок рівняння Лапласа з граничними умовами типу Діріхле для в області неопуклої форми. Представлені результати застосування моделей на тестових даних.

Прогнозування структури і динаміки ресурсного забезпечення корпоративного управління / Ю.Т. Олійник// Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 328 – 332. – Бібліогр.: 7 назв.

У роботі представлені нові підходи і математичний інструментарій розрахунку основних прогнозних характеристик ресурсного забезпечення корпоративного управління.

Рівняння пружних зміщень в підіймальних канатах, які намотуються на барабан, з урахуванням сил тертя. / Остапенко В.А. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 333 – 337: іл. 1. – Бібліогр.: 7 назв.

Виведені рівняння пружних зміщень в підіймальних канатах, які намотуються на барабан, з урахуванням сил тертя. Розглянуті варіанти в'язкого і сухого тертя. Сформульовано умови неперервної стиковки розв'язків на межі ділянок каната, які описуються різними рівняннями. Врахована рухомість границь і зазначені методі розв'язку таких задач.

Взаємодія жорсткого штампу з ортотропним прямокутником/ Павленко А.В., Щербина І.В., Сясев А.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 338 – 342: – табл. 1. – Бібліогр.: 6 назв.

Розглядається задача про дію жорсткого штампу з плоскою основою на вільну грань ортотропного прямокутника. Вважається, що дві протилежні кромки прямокутника закріплено, враховується тертя при контакті штампу з прямокутником. Для розвязання задачи використовується асимптотичний метод.

Теоретико-ігрові моделі для визначення мережевого шахрайства в системі контекстної реклами / Павлов Д.Г., Александрова М.В., Чертов О.Р. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 343 – 347. – Бібліогр.: 11 назв.

Розглянуто існуючі теоретико-ігрові моделі поведінки учасників процесу Інтернет-реклами, а також можливості їх подальшого використання для визначення мережевого шахрайства.

Теоретичні основи статистичного моделювання технологічних процесів / Пігнастий О.М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 348 – 353. – Бібліогр.: 7 назв.

Представлено теоретичні основи та концептуальні положення статистичного моделювання технологічних процесів виробничо-технічних систем. Показано зв'язок мікро- та макрорівні опису технологічних процесів.

Адаптаційні аспекти динаміки магнітолевітуючого потяга / Поляков В.О., Хачапурідзе М. М. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 354 – 358. – Бібліогр.: 5 назв.

Детально розглянута проблема пристосовності динаміки магнітолевітуючого потяга до експлуатаційних умов. Показане, як задача такої пристосовності може бути вирішена із застосуванням методів структурної адаптації, а також теорії ігор, тобто підходу, що базується на концепції гарантованого результату.

Математичне моделювання діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора / Редчиць Д.О. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 359 – 365: іл. 7. – Бібліогр.: 3 назв.

Розроблено підхід до моделювання діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора в суцільному середовищі, що рухається. Запропонована методика враховує фізичні особливості розглянутого класу задач і має високу обчислювальну ефективність. На основі розробленого підходу виконане моделювання впливу діелектричного бар'єрного розряду при роботі плазмового актуатора на повітря, що перебуває в спокої. Отримані результати задовільно погоджуються з експериментальними даними. Показано широкі можливості застосування даного підходу до моделювання динаміки низькошвидкісних потоків рідини й газу при наявності електростатичного поля.

Методи додаткової тріангуляції / Романюк О. Н., Обідник М. Д. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 366 – 371: іл. 4. – Бібліогр.: 6 назв.

У статті розроблено методи додаткової тріангуляції, які забезпечують збалансоване завантаження шейдерних процесорів для задач зафарбовування.

Контактна взаємодія шару і пружного циліндра з початковими (залишковими) напруженнями / Рудницький В. Б., Ярецька Н. О. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 372 – 377. – Бібліогр.: 4 назв.

В статті у рамках лінеаризованої теорії пружності, розглянуто змішану задачу про тиск пружного циліндричного штампа на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження виконано в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Явна схема для чисельного інтегрування рівнянь Ейлера на неструктурованих сітках / Русанов А.В., Косьянов Д.Ю. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 378 – 384: іл. 4. – Бібліогр.: 6 назв.

Узагальнено явну різницеву схему високого порядку точності для чисельного інтегрування рівнянь Ейлера на неструктурованих сітках при моделюванні нев'язкої течії стисливого газу. Наведено результати апробації запропонованого методу при розв'язанні задач із гладкими та розривними розподілами невідомих.

Задача Коші для лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами першого порядку / Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 385 – 387. – Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуто лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами, яке виникає при побудові асимптотичного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза. Отримано достатні умови, при яких розв'язок задачі Коші для згаданого вище рівняння існує.

Моделювання емісії гальмівного випромінювання щодо різних спектрів електронних пучків / Саруханян Г. Е., Лазурик В. Т., Батраков О. Б. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 388 – 392: іл. 3. – табл. 3. – Бібліогр.: 4 назв.

Отримано результати комп'ютерного моделювання генерації гальмівного випромінювання електронного пучка. Вивчено залежності коефіцієнта перетворення енергії електронів на енергію випромінювання від параметрів моделей спектру електронного пучка.

Моделювання температурно-тимчасового режиму іонно-плазмового плакування порошків / Смирнов І. В., Мельник І. В., Андрейцев А. Ю. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 393 – 398: іл. 3. – Бібліогр.: 7 назв.

Проведено математичне моделювання температурних та тимчасових режимів плакування порошків з врахуванням потужності іонно-плазмового випарника, матеріалу і розміру частинок порошку. Запропоновані залежності, що дозволяють визначити час, необхідний для досягнення на поверхні частинок порошку заданої температури та отримання оболонки потрібної товщини.

Розв'язування рівнянь Нав'є-Стокса з використанням комп'ютерних технологій / Сохацький А.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 399 – 404: ил. 5. – Бібліогр.: 7 назв.

Для розрахунку аеродинамічних характеристик високошвидкісних транспортних засобів розроблено методику та чисельний алгоритм. При побудові дискретного аналогу рівнянь Нав'є-Стокса застосовувався метод контрольних об'ємів. Наведено результати розрахунків параметрів течії навколо транспортного апарату.

Пневмогідравлічне кавітаційне очищення води від біологічного забруднення / Старчевський В.Л., Шевчук Л.І., Афтаназів І.С. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 405 - 413: іл. 3. – Бібліогр.: 3 назв.

Приведено опис нового методу пневмогідравлічного кавітаційного очищення води від біологічного забруднення, його технологічна схема промислового використання та конструктивна схема кавітатора. Обертання збурюючим кавітацію лопатям тут надають подачею в робочу зону пульсуючого газу.

Метод відрізняється високою продуктивністю, економічною ефективністю та придатністю для промислового використання.

Обчислення невласних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера-Лежандра на полярній осі / Тарновецька О.Ю. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 414 - 418. – Бібліогр.: 4 назв.

Методом порівняння розв'язків, побудованих на полярній осі з двома точками спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Лежандра методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів.

Використання хешування по декількох сигнатурах для очищення і об'єднання словників даних на прикладі назв географічних об'єктів / Тодоріко О.О., Добровольський Г.А. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 419 - 423. – Бібліогр.: 8 назв.

В роботі показано застосування розроблених словникових алгоритмів пошуку за схожістю для вирішення завдання очищення-об'єднання словників з врахуванням лексичної неузгодженості. Запропоновані методи попередньої фільтрації дозволяють істотно скоротити кількість трудомістких операцій обчислення близькості рядків. Обчислені показники точності і повноти підтверджують високу якість роботи методу.

Трилінійний гармонічний базис октаедра / Тулученко Г.Я., Хомченко А.Н., Мотайло А.П. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 424 - 429: іл. 5. – табл. 2. – Бібліогр.: 8 назв.

Побудований новий гармонічний базис для октаедра як скінченного елемента. Порівняно характеристики побудованого базису із вже відомими базисами цього скінченного елемента.

Аналіз напружено-деформованого стану гнучких циліндричних панелей / Тумашова О.В., Костенко І.С. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 430 - 433: табл. 2. – Бібліогр.: 6 назв.

В даній роботі запропоновано підхід до чисельного розв'язку двовимірних нелінійних крайових задач, який базується на застосуванні наближеного аналітичного методу Власова-Канторовича, методу лінеаризації одновимірних нелінійних крайових задач та чисельного методу дискретної ортогоналізації розв'язку лінійних крайових задач. Досліджується достовірність результатів розв'язку даного класу задач з метою апробації методу Власова-Канторовича.

Модель розміщення об'єктів на площині з евклідовою метрикою в задачах організації матеріально-технічного забезпечення МНС / Убайдуллаєв Ю.Н., Караєв Д.С. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 434 - 438. – Бібліогр.: 8 назв.

Розглядається формування кожного завдання планування і розміщення об'єктів з основними показниками, які можуть бути використані для класифікації завдань отримання оптимальних варіантів здійснення автомобільних перевезень.

Математичне моделювання деяких задач відновлення деталей суднових механізмів / Усов А. В., Воробйова Л. О. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 439 - 444. – Бібліогр.: 7 назв.

Нанесення на робочі поверхні деталей зносостійких покриттів часто супроводжується появою між покриттям і робочою поверхнею технологічних дефектів типу тріщин. Подальша розмірна механічна обробка таких деталей може викликати «сколювання» покриття. Побудована математична модель дозволяє аналітично визначити величини навантажень на покриття, при яких відбуватиметься розкриття відшаровування, що приводить до сколювання покриття.

Моделювання термомеханічних явищ при шліфуванні деталей із феррокераміки / Усов А.В., Богданова О.Н. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 445 - 449: іл. 1. – Бібліогр.: 3 назв.

Розроблена модель, яка описує термомеханічні явища у виробах із феррокераміки при обробці їх шліфуванням. Запропоновані критеріальні співвідношення для вибіру технологічних параметрів, які дозволяють усунути дефекти типу тріщин та сколів на оброблюваних поверхнях.

Геометричне моделювання перехідної кривої із застосуванням кубічного розподілу кривини / Устенко С.А., Діданов С.В. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 450 - 454: іл. 5. – Бібліогр.: 7 назв.

Пропонується геометрична модель перехідної кривої із застосуванням кубічного розподілу кривини та врахуванням граничних умов, що попереджують виникнення стрибкоподібного кутового прискорення при виході з лінійної та при вході на колову ділянку залізничного шляху. Проведено аналіз отриманого розподілу кривини.

Тіла Платона та несиметричні блукання по сферах / А.Н. Хомченко // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 475 – 479: іл. 1. – Бібліогр.: 9 назв.

Несиметричні блукання по сферах моделюються за допомогою інтерполяційних базисів тіл Платона.

Застосування методів Фурє та Я.Г.Пановка у аналізі суб- та супергармонічних коливань й резонансів дробового порядку культиваторів з пружною підвіскою робочих органів.I. / Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Гуменюк Ю.О., Тисленко О.Б., Дитюк А.І. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 480 - 485: іл. 2. – Бібліогр.: 15 назв.

Розглянуті методи Фур'є та Я.Г.Пановка у аналізі коливань, резонансів (суб- та супергармонічних), у т.ч. дробового порядку, для культиваторів з пружною підвіскою робочих органів. Встановлені їх основні параметри (амплітуда, частота), умови збудження.

Метод інтегральних рівнянь в задачі вільних коливань пластини в стислій рідині / Шелудько Г.А., Ємел'янов Т.В., Науменко О.В., Стрельнікова О.О. // Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 486 - 490: іл. 1. табл. 1. – Бібліогр.: 9 назв.

Запропоновано метод розрахунку частот та форм коливань пластин в стислій рідині, що заснований на застосуванні методу граничних інтегральних рівнянь. Розроблено алгоритм чисельного розв'язку гіперсингулярного інтегрального рівняння для визначення тиску з боку рідини. Для знаходження власних частот та форм коливань пластини застосовано гібридний адаптивний метод пошуку коренів трансцендентного рівняння.

Моделювання карти дози щодо багатопакетного рентгенівського обладнання з використанням методу Монте Карло /Лазурик, В.Т., Лазурик В.М., Попов Г.Ф., Рогов Ю. В.// Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 502 - 507: іл. 4. – Бібліогр.: 6 назв.

Використання потужних прискорювачів електронів для генерації гальмівного випромінювання (ГВ) представляє великий комерційний інтерес в області промислових радіаційних технологій. Успіх використання пучків ГВ в радіаційних технологіях суттєво залежить від розвитку теоретичних уявлень, полу-емпірічних моделей і компьютерних програм для моделювання транспорту ГВ в опромінюємих об'єктах. Результати компьютерного моделювання методом Монте Карло для поглиненої дози в об'єктах, які опромінюються скануючими пучками ГВ, обговорюються в роботі.

Ефективний lossless та near-lossless алгоритм стиску медичних зображень / Мороз В. В., Савков О. О.// Вісник ХНТУ. – 2011. – № 3(42). – С. 503 - 508: іл. 4. - табл. 1. – Бібліогр.: 9 назв.

У роботі запропоновано адаптивний до структури алгоритм стиску медичних зображень. Аналіз результатів показує його більшу ефективність в порівнянні з існуючими алгоритмами. Відкритість та гнучкість стандарту DICOM дозволяє інтеграцію алгоритму в стандарт в режимах стиску без візуальних втрат якості.

SUMMARY

Numerical simulation of refraction of nonlinear surface gravity waves under shallow-water conditions / Abbasov I.B. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 9 – 13: Pic. 1. – Ref.: 12 title.

This work considers the problems of numerical simulation of refraction of nonlinear surface gravity waves under shallow bay conditions. The discrete model is based on shallow-water nonlinear equations. The profile of a surface gravity wave is presented at the approach to coast.

Forming of area of internal oxidization at small free energy of forming of oxides / Abramov G.S., Abramov M.G. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 14 – 20. - Ref.: 5 title.

The design of process of forming of internal oxidization area at rapid relaxation of oversatiation and small energy of oxide formation is conducted. The results of numeral design of process are confronted with the theoretical models of Vagner-Kirkaldi and experimental information.

The mathematical model of formation and repulse of shock waves in the network of mine workings / Ageyev V.G., Zinchenko I.N., Grekov S.P. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 27 - 27: Pic. 3. – Ref.: 7 title.

The mathematical model of dynamics of shock waves in the ventilation network of the mine workings of coal mines with regard for availability and stability of insulating constructions is worked out. The numerical technique is proposed.

The Use of MAPLE Computer Algebra System for Integrating Systems of Ordinary Differential Equations with Variable Structures /Amatov M.A., Amatova G.M. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 28 - 32: Pic. 2. – Ref.: 8 title.

The paper presents a set of SODEVS computer programs package for analytical, graphic and numerical integration of systems of ordinary differential equations with variable structures. An example illustrating the programs' performance is given.

Analytical determinating of temperature of powders particles for plasma spraying of composition coatings/ Andrejtsev A.Yu., Kryukov N.N., Kryzhanovska T.V., Semenenko T.N.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 33 - 37. – Ref.: 7 title.

Mathematical models for analytical determinating of temperature of particles along a distance of a spraying taking into account change of their modular conditions are considered. The comparative analysis of models for particles of oxides and metals for the purpose of optimization of conditions of a spraying and fractional structure is carried out.

ECG characteristic mapping as a brightness image in a kernel space of second order Volterra model/ Akhmetshin A.M., Akhmetshin K.A.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 38 - 43: Pic. 4. – Ref.: 5 title.

A new method ECG classification on base virtual synthesis and visualization kernels of second order Volterra model is outlined. Experimental results testing of method's information possibilities are presented.

Image analysis in a space adaptive model linear prediction parameters of local brightness distribution / Akhmetshin A.M., Stepanenko A.A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 44 - 49: Pic. 6. – Ref.: 6 title.

A new method low contrast image analysis in a space adaptive model linear prediction parameters of local brightness distribution is outlined. Experimental results testing of method's information possibilities are presented.

The application of grouping quality criteria for sensitivity improvement of the hybrid fuzzy clustering algorithm / Akhmetshina L.G., Yegorov A.A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 50 - 55: Pic. 2. – Ref.: 5 title.

This article deals with the application of fuzziness and Xie-Bieni coefficients for sensitivity improvement of modified hybrid fuzzy clustering algorithm sFCM. The information abilities of proposed method were shown by way of example of medical images segmentation.

Multimodeling method of the spatial data fuzzy interpolation on a non-uniform grid / Akhmetshina L.G., Iamnych T.S.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 56 - 61: Pic. 3. – Ref.: 7 title.

Multimodeling method of the spatial data fuzzy interpolation on a non-uniform grid and it's informative possibilities are considered. Modeling results of test and real data are presented.

Discretization grid of depth-charge curve selecting for electrons beam spectrum reconstruction problem. / Baiev O.U., Lazurik V.T.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 62 - 66: Pic. 4. – Ref.: 5 title.

In the work the dependencies between artificial intelligence methods accuracy and count of dosimeter detecting films was considered for the problem of reconstruction of electrons beam by measurement of the depth-charge curve. The research allowed to define parameters of measurer for which the selected neural networks reconstructs the beam energy distribution with the least error. The optimal configuration of the dosimeter for which the accuracy of reconstruction of the spectrum of methods using a neural network is maximum and exceeds the accuracy of traditional methods.

About one view at the classification of Markov models / Baklan I. V., Stepankova G. A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 67 - 73: Pic. 3. – Ref.: 30 title.

The authors propose a view at the classification of hidden Markov models and the place in the general classification of probabilistic models. One has identified major classification traits and made classification analysis based on them.

The stochastic interpretation of inhomogeneous population Leslie model / Balakireva O.G., Butenko N.S., Mikhaylov I. A.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 74 - 77. – Ref.: 4 title.

In this work the inhomogeneous population Leslie model is considered and it's asymptotic properties are investigated. It is ascertained that this model has weak ergodicity property. The feasibility of the equivalent transformation from deterministic inhomogeneous Leslie model to stochastic model is shown. The conditions in which limit distribution of this model can be stabilized in the neighborhood of ergodic distribution are adduced.

The construction of rotation's surface with semicycloid meridian in a dot calculation / Bezditniy A. A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 78 - 81: Pic. 4. – Ref.: 5 title.

We consider the problem of construction of rotation surface's involute, formative of which is a semicycloid, in a dot calculation.

On the problem about flow round a rabbet Zhukovsky / Bereslavskij E.N. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 82 - 86: Pic. 2. – tabl. 2. – Ref.: 12 title.

In hydrodynamic statement a solved task about the flat established seepage under a rabbet Zhukovsky through the irrigated array spread by strongly nontight layer, not containing pressure head ground waters, the left semi-infinite which part of a roof is modelled by impenetrable initialization. The current case when velocity of a flow on the rabbet extremity is equal to infinity that leads to two-sheeted area of complex velocity is considered.

Design of thermal processes in heterogeneous environments with soft limits by the method of hybrid differential operator Fourier – Euler – Fourier on polaxis / Blazhevskiy S.G., Lenyuk M.P. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 87 – 92. – Ref.: 7 title.

An operating method is get the integral image of exact analytical decision of task about diffusive processes in heterogeneous environments with soft limits in falling out, when the design of diffusive processes is carried out the method of hybrid differential operator Fourier – Euler – Fourier on polar axis.

A MAPLE program for symbol-numerical calculation of the normal form and integrals of motion for Hamiltonian system with any numbers of degree of freedom / Bogachev V.E., Chekanov N.A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 93 – 98. – Ref.: 13 title.

In the paper the developed algorithm and program for symbol-numerical calculation the Birkhoff-Gustavson normal form and approximate integrals of motion by means of mathematical package MAPLE are presented. For example, the calculations for some Hamiltonian systems are performed.

Consecutive control and its mathematical model / Bolychevtsev A. D., Bolychevtseva L. A., Bystritskaya L. B., Lyubimova N.A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 99 – 103. – Ref.: 8 title.

The compound monitoring system built on the model control is considered of the successive. The analytical dependences of the system characteristics originated from its components ones are obtained.

Mathematical modeling of ruin in the presence of normal perturbations /Bondar A.V., Mazmanishvili A.S.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 104 – 108: Pic. 3. – Ref.: 5 title.

The probability problem of the characteristics of a random time to reach a given level of process at the output of the inertial detector of an accumulative type is considered. The model of the additive mixture of a deterministic positive signal and noise is applied. The analytical expression for the density distribution of a random time to reach a predetermined level is obtained. The results of numerical simulation of ruin are given. These calculations and their comparison with the analytical model indicate their good correspondence. The proposed method may be used for other models of noise and trends in financial flows.

Some aspects of thickened profile outline development of axial turbine blades / Borisenko V.D., Kotlyar D.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 109 – 114: Pic. 4. – Ref.: 8 title.

The new complex approach of geometrical modeling of curvilinear outlines of thickened profiles for development of axial turbine cooled blades is offered. The approach consists in application of the Bezier curves advantages relative to modeling of smooth lines and graphics based method of the parabolic curve construction using tangent to them, which apply to define nodal points of the characteristic Bezier polygons.

Calculations the eigenvalues and functions for Mathieu equation by means of the MAPLE mathematical package / Bulavina I.A., Kirichenko I.K., Chekanova N.N., Chekanov N.A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 115 – 118. – Ref.: 9 title.

The MAPLE program for symbolic-numerical integration the Mathieu equation by diagonalization method is developed and obtained results are presented.

Using Chebyshev approximations for solving mixed boundary value problems for partial differential equations / Vakal L.P., Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal E.S. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 119 – 123.. – Ref.: 6 title.

A method for solving mixed boundary value problem using the best Chebyshev (uniform) approximants for initial conditions approximation is considered. Examples of problems solutions are given.

Nonlinear Lagrange scalar fields with the singularity on space-fold straight line / Virchenko Yu.P.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 124 – 128. – Ref.: 2 title.

In frameworks of the theory of nonlinear Lagrange fields on the Minkovsky space the problem of field singularities is studied. Singularities of the scalar field φ without the seed mass, which are concentrated on space-fold curves. For the unique singularity that is the straight line being in the light cone, it is shown that there are some solutions with the finite total energy. When the L-dependence is manyshift there are some qualitatively different solutions.

Particular one-interval probability distribution of random sets in R /Virchenko Yu.P., Shpiliskaya O.L.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 129 – 132. – Ref.: 3 title.

The algorithm for calculation of the one-interval distribution function of random sets with markovian refinements in R at an arbitrary refinement number ν is proposed.

Simulation of unsteady flow in an irrigation canal / Vocelka S.A., Rozhkov S.A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 133 – 140: Pic. 5. – Ref.: 8 title.

The problems of modeling the nonlinear model tail water irrigation canal, which allows you to evaluate the transient load changes.

Modelling of dynamic behaviour of the shell filled with the liquid under seismic load / Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 141 – 144: Pic. 3. – Ref.: 5 title.

The method to evaluate dynamic behaviour of the shells of revolution filled with the liquid under impulsive load is developed. The approach is based on the reduction the problem about definition of pressure of a liquid to system of singular integral equations. Coupled problem of elasticity theory solves by means of combination FEM and BEM. Differential equations of nonstationary problem are solved numerically by Runge-Kutta method 4^{th} and 5^{th} order.

Discretization of three-dimensional regions defined by R-functions on hexahedral finite elements / Gomenyuk S.I., Choporov S.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 145 – 152: Pic. 9. – Ref.: 15 title.

The problem of discretization of complex three-dimensional regions defined by R-functions on hexahedral finite elements is described in the work. Authors propose method for generation of a uniform hexahedral mesh of functional geometrical model.

The algorithm of thermodynamic simulation of mass-transfer in "gas – solid states" system / Gorbenko V.I. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 153 – 157: Pic. 3. – Ref.: 8 title.

For using of equilibrium thermodynamics to the simulation of the gases particles interaction with solid states in an open system the materials balance equation has been modified. The materials balance calculation algorithm has been proposed. The composition changes in H-O-In-P system which was open for gases components mass exchanges have been simulated by proposed method.

Involution rule for spaces of affine connecyion / Grebenyuk M.F, Terekhova M.V., Makarov V.I. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 158 – 162. – Ref.: 12 title.

The article deals with the problems of geometric modeling of multidimensional manifolds in projective spaces. Involution rule for spaces of affine connection is obtained using the E.Cartan equipment for regular hyper-zone defined in non-Euclidian space.

Modeling of contact interaction of elastomer construction elements / Grebenjuk S.N., Reshevskaja E.S., Tarhova V.M // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 163 – 167: Pic. 5. – Ref.: 11 title.

There is offer the technique of the account of contact interaction elastomer elements on a basis moment schemes of a method of final elements. The intense-deformed condition of designs in the conditions of contact interactions is investigated.

Evaluation of motion of electrodynamically levitated vehicle along simplified plain track structure / Dzenzersky V.A., Kuznetcova T.I., Radchenko N.A., Khatchapuridze N.M. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 168 – 171. – Ref.: 3 title.

New scheme for an electrodynamical transport system with plain track structure, two rows of ground coils and a row of superconducting magnets is propsed. Stability of rectilinear and curvilinear motion of the levitating vehicle is investigated.

Computer simulation of the traffic flow crossroads / Didenko I.V., Lazurik V.T., Rogov Yu.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 172 – 176: Pic. 2. tabl. 1. – Ref.: 8 title.

This paper presents the results of an analysis of the mathematical modeling of flow interaction with the branching which is a basic transport network component in the stochastic model. The simulation of the branching flow was carried with the help of the Monte-Carlo method, using specially developed software SFMS.

The results of our investigation are of great interest for traffic flow analysis in the complex transport systems.

Problems arise and the suppression of chaos / Dmitrishin D.V., Usov A.V., Dmitrishin A.D., Bilous E.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 177 – 180. – Ref.: 4 title.

Consider the properties of functional equations with distributed delay. Established that the qualitative picture of these equations differs from the known bifurcation scenarios. Indicate the direction of the results, including methods for the suppression of chaos in dynamical systems.

Construction of mathematical models to study the shell of arbitrary curvature with part-trough cracks / Dovbnya E.N., Gordienko N.N., Shtakina M.A., Yartemyk V.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 181 – 185: Pic. 5. – Ref.: 9 title.

The article summarized a line-springs model and analog δ_c -model to the case of two collinear part-trough cracks in thin isotropic shell of arbitrary curvature, which is under symmetrical load. Were built a system of singular integral equations for studying the stress state of the shell with a system of cracks under both models.

Simulation of two–dimensional heat and moisture fields in the gravel puck with phase transfer process taking into account / Dreus A. J., Lysenko K. Ye. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 186 – 190: Pic. 5. – Ref.: 8 title.

The mathematical model of the freezing process of cryogenic gravel puck for two–dimensional case and the results of numerical calculation are present.

The mathematical model of microwave multyprobe transducer of the vibration parameter meter / Drobakhin O.O., Doronin A.V., Privalov Ye. N. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 191 – 195: Pic. 1. – Ref.: 5 title.

Using mathematical model of microwave multyprobe meter of vibration taking into account own probe reflections, the meters with single probe or with two or four probes are under consideration. In contrast to the meters with single probe or with two probes the 4-probe meter provides possibility of satisfactory accuracy.

Features of realisation of Prony method while estimating complex exponents of signals with impulse noise. / Drobakhin O. O., Lebedev S. G. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 196 – 199: Pic. 4. – Ref.: 6 title.

The modification of Prony method has been developed. The modification allows one to estimate frequencies of damped cosinusoidal signal corrupted by impulse and Gauss noise.

Design of stability of the three-layered declivous shell with easy filler, which is supported the longitudinal ribs of inflexibility / Yemelyanova T. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 200 – 203: Pic. 3. – Ref.: 4 title.

Stability of the three-layered declivous shell with an easy filler, which is supported the longitudinal ribs of inflexibility, is investigational, with taking into account the action of the longitudinal forces in the middle planes of the outer layers and ribs.

Mathematical models of optimization problems with unary fuzzy numbers / Yemets O.O., Sereda O.M. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 204 – 209. – Ref.: 5 title.

The noun of unary fuzzy number is introduced. Operations of addition, multiplication, division and comparison with unary fuzzy numbers are suggested. Examples of mathematical models with using of unary fuzzy numbers are constructed.

Analysis of various configurations of cracks in elements of hydroturbine equipment / Zaydenvarg O.L// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 210 – 214: Pic. 3. tabl. 2. – Ref.: 9 title.

In the present work we determine the stress intensity factors for a plate with various commonly encountered defects, we conduct a comparison of such defects, and suggest certain refinements of the technical requirements for cast and welded designs.

Conditions for exponential stability of nonlinear systems with arbitrary delay / Zevin AA, Poslavskiy S.Y. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 215 – 221: Pic. 1. – Ref.: 15 title.

Systems of nonlinear differential equations with given linear part and arbitrary varying concentrated and distributed delays are considered. Bilateral estimates for the largest Lyapunov exponent are found. The obtained results provide sufficient (and in some cases necessary) conditions for exponential stability of the systems.

Mathematical model "demand-offer" for the market of sport parachute product / Ivanov P.I., Korniletski D.D. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 222 – 227: Pic. 4. – Ref.: 5 title.

Some types of mathematical models "demand-offer", adapted for the market of parachute products, are explored in detail.

Utmost simplified format of the program by flight control of planning parachute system at distant guidance / Ivanov P.I., Kupavsky I.S. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 228 – 232: Pic. 1. – Ref.: 3 title.

Designed block diagram of algorithm and program for at most simplified format of flight control planning parachute system at distant guidance.

Analysis of influence of changing a planning parachute system aerodynamic quality on precision of its landing / Ivanov P.I., Kuyanov A.Y. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 233 – 237: Pic. 5. – Ref.: 2 title.

One of the reasons of diffusing of a cargo-parachute system impact point connected with possible changes of the aerodynamic features of the parachute system on greater heights is considered. Estimations of diffusing are presented.

A mathematical model of dynamics of spin - 1 magnets / Kovalevsky M.Y., Logvinova L.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 238 – 243. - Ref.: 10 title.

Set of nonlinear dissipative dynamical equations of spin – 1 magnets are established. Two types of exchange Hamiltonians corresponding to Kazimir invariants of SU(3) group are introduced and spectra of collective excitations are found. A generalization of the Bloch equation and the effect of magnetic field on the spectral characteristics are presented. Relaxation flows due to the exchange symmetry of the Hamiltonian are introduced.

Modeling the transient processes in elastic pipeline with fluid under axial impulse loading / Kovalenko A.P. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 244 – 247. – Ref.: 10 title.

The elastic pipeline with fluid is considered as the hydroelastic system “semi-infinite cylindrical shell – fluid” under the longitudinal impulse loading. An integral transform in time and the iteration method are used. It is shown that the offered method permits to build the solution in the image space.

The methods of mathematical modeling in the investigation of the Poisson-Boltzman problem / Kolosov A.I. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 248 – 250. – Ref.: 4 title.

We propose the method of analysis of the problems of theory of electrostatic potential, which is based on the methods and results of the nonlinear operator equations theory in partially ordered spaces.

Decision making while evaluating alternatives according to the quality criterion / Kruchkovsky V.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 251 – 256. – Ref.: 11 title.

The work deals with decision making on the basis of expert’s evaluation of alternatives according to the quality criterion taking into consideration situation of uncertainty.

Conclusion difference parities from variation methods for a cubic final element of system FORTU / Lavrik V.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 257 – 260. – Ref.: 7 title.

In given article the conclusion of the formula of potential energy of system for a cubic final element by a method moment schemes is presented. The comparative analysis of existing methods of calculation of the is intense-deformed condition objects and a method moment schemes and prospect of the further development of system FORTU is carried out.

Modeling of the dynamic modes of operations of autonomous grids with matrix transformers / Lebedenko Yu.A., Rudakova A.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 261 – 265: Pic. 3. – Ref.: 8 title.

The article is devoted the computer design of autonomous grid which contains matrix transformer, in dynamic office hours. The analysis of influence of unsymmetry and outlining of loading is carried out on the form of the crooked tensions and currents of transformer. High efficiency of management the system of transformation after a minimum of distortions of entrance currents is well-proven.

Integral transformation, descendant the differential operator of Euler on the segment of polaxis / Lenyuk M.P., Nikitina O.M.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 266 – 269. – Ref.: 4 title.

By a method delta of similar sequence (kernel of Dirikhle) integral transformation is inculcated descendant the differential operator of Euler with different characteristic indexes on the segment $[0, R_3]$ of polaxis double-dot interface.

Summating of the functional series by own elements of the hybrid differential operator of Euler-Bessel-(Kontorovich-Lebedev) / Lenyuk M.P., Shynkaryk M.I. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 270 – 275. – Ref.: 7 title.

By the method of comparison of solutions obtained on the polar axis with two contact points for the separate system of differential equations Euler, Bessel and Kontorovich-Lebedev, by the method of Cauchy functions and method of appropriate hybrid integral transform the polyparametric family of functional series is summed.

Multiparameter basises of Triquadratic Finite Element / E.I. Litvinenko// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 276 – 284: Pic. 8. tabl. 2. – Ref.: 19 title.

The existence of multiparameter basises on the triquadratic finite element of serendipity family is constructively proved in the work. For the first time the SFE-20 basis functions containing 24 and 26 parameters in interpolational polynomial are built.

Photocounts statistics of nonpolarized Gaussian optical radiation / Mazmanishvili A.S., Shovkoplyas O.A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 285 – 289: Pic. 1. – Ref.: 8 title.

In the work we analytically describe the formation of photocounts statistics of nonpolarized Gaussian optical radiation for the case when the modes of polarization are statistically linked. An analytical expression for the generating function of photo counts of the radiation under consideration has been obtained. It is shown that the statistical relationship between the modes of polarization leads to broadening the whole distribution of photocounts with the first moment unchanged.

Numerical models for irregular wind waves in the wave energy extraction problems / Martynovsky I.M., Serdjuchenko A.N. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 290 – 295: Pic. 7. – Ref.: 10 title.

Both linear and nonlinear approaches in the modeling of hydrodynamic characteristics of irregular wind waves on the quasi stationary time intervals of wave motions have been considered. The models ware developed for the further numerical calculations of the energy extraction wave generators actions under the wave's action.

Simulation of temperature distribution on the surface of cold cathode in a high voltage glow discharge electron sources / Melnyk I.V., Tugay S.B. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 296 – 301: Pic. 5. – Ref.: 8 title.

The methods of calculation of space temperature distribution on the surface of cold cathode in a high voltage glow discharge electron sources are considered in this article. Both analytical and numerical methods of solving of thermodynamic equation, dependence on cooling system construction and overlaid physical restrictions, are proposed. Numerical solving of thermodynamic equation is realized by using tools of MatLab system.

Synthesis algorithms of the adequate mathematical descriptions of physical processes / Menshikov Yu.L. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 302 – 306. – Ref.: 8 title.

In paper the algorithms of synthesis of the adequate mathematical descriptions of physical processes are considered, the motion of which is described by ordinary differential equations. Some possible algorithms of the solution of the specified problem are offered. The objective criteria of adequacy are received.

Modelling of aerodynamics of measuring devices of wind direction / Mirgorod V.F., Gvozdeva I.M. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 307 – 312: Pic. 2. tabl. 1. – Ref.: 8 title.

The mathematical models of statics and dynamics of the designed projectible measuring devices of wind direction of aerodynamic type, that allows to carry out the preliminary estimation of their characteristics and choice of optimum combination of parameters are offered.

Express-analysis of immune system state on basis of information technologies / Nechepurenko O.I., Hryhorova T.A., Lyashenko V.P. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 312 – 316: Pic. 2. – Ref.: 11 title.

Information computer system is created for diagnostics realization of immune insufficiency as an interface version and client-server WEB-application. Conception of construction of mathematical model is offered for forming of the proper recommendations for the thermal radiation affecting on a skin cover.

Sinthesis of structure new hydropurification mechanisms on base morfologation analysis. / Nigora V.M., Biletskiy I.M. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 317 – 322: Pic. 1. tabl. 2. – Ref.: 7 title.

Universal methed of sintnesis of structure new hydropurification mechanisms is developed, which provide forecast of retional construction systems and their basic function elements in conditions of limited information to technical indicator of analogs.

The discrete models for approximation of harmonic function in the area not protuberant form / Nikolaenko S.V., Moiseenko S.V., Zychkova E.E. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 323 – 327: Pic. 4. tabl. 1. – Ref.: 7 title.

The mathematical models, approximating decision of equation Laplace with border conditions of the type Dirihle for in the area of not protuberant form, are considered. Modeling results of test are presented.

Predicting structure and dynamics of resource support of corporate management/ Oleynik Yu.T. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 328 – 332. – Ref.: 7 title.

The paper presents new approaches and mathematical tools of calculating the basic characteristics of predicting resource support of corporate management.

The equations of elastic displacements in the elevating ropes which are reeled up on a drum with account of friction forces / Ostapenko V.A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 333 – 337: Pic. 1. – Ref.: 7 title.

The equations of elastic displacements in the elevating ropes which are reeled up on a drum with account of friction forces are deduced. Variants of viscous and dry friction are considered. Conditions of continuous joining of solutions on border of sites of the rope described by the various equations are formulated. Mobility of border is taken into account and are specified a method for the solution of such problems.

Cooperating of hard stamp with the orthotropical rectangle/ Pavlenko A.V., Scherbina I.V. Syasev A.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 338 – 342: tabl. 1. – Ref.: 6 title.

A task is examined about the action of hard stamp flat-based on the free verge of orthotropical rectangle. It is considered that two opposite edges of rectangle are envisaged, a friction is taken into account at the contact of stamp with a rectangle. For the decision of task an asymptotic method is used.

Game-theoretic models for identifying fraud in contextual advertising system / Pavlov D.G., Aleksandrova M.V., Chertov O.R. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 343 – 347. – Ref.: 11 title.

Existing game-theoretical models of the Internet-advertising system participants' behavior are investigated. These models further use for the on-line fraud detection is proposed.

The theoretical basis of statistical modeling processes / Pignasty OM // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 348 – 353. – Ref.: 7 title.

The theoretical foundations and conceptual principles of statistical modeling of technological processes of production and technical systems. The connection between micro and macro descriptions of technological processes

Adaptive aspects of the magnetic levitated train's dynamics / Polyakov V. A., Kachapuridze N. M. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 354 – 358. – Ref.: 5 title.

The problem of the magnetic levitated train's dynamics adaptability to operational conditions is considered in details. It is shown, how the problem of such adaptability can be solved with application of structural adaptation methods and games theory, which are based on the concept of guaranteed result.

Mathematical simulation of dielectric barrier discharge at plasma actuator operation / Redchyts D.O. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 359 – 365: Pic. 7. – Ref.: 3 title.

The approach to simulation of dielectric barrier discharge at plasma actuator operation in the fluid continuum is developed. The offered technique takes into account physical features of a considered class of problems and possesses high computing efficiency. On the basis of the developed approach simulation of influence of the dielectric barrier discharge at plasma actuator operation in quiescent air is executed. The obtained results are in satisfactory agreement with experimental data. Ample opportunities of application of the given approach to dynamics simulation of low-speed streams of a liquid and gas in the presence of an electrostatic field are shown.

Additional methods of triangulation / Romanyk O. N., Obidnyk M. D. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 366 – 371: Pic. 4. – Ref.: 6 title.

Additional methods of triangulation, which provide balanced load of shader processors for the task of coloring, are proposed in this article.

Contact interaction of die and elastic cylindrical die with initial (residual) tension / Rudnitsky V. B., Yaretska N. A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 372 – 377. – Ref.: 4 title.

The article deals with the mixed type task of measuring pressure of an elastic cylinder die upon a layer with initial (residual) stresses within the framework of linear elasticity theory. In general, the research was carried out for the theory of great initial deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.

The explicit scheme for numerical integration of Euler equations on unstructured grids / Rusanov A.V., Kosyanov D.U. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 378 – 384: Pic. 4. – Ref.: 6 title.

The explicit high order finite volume scheme is generalized for numerical integration of Euler equations on unstructured grids. The numerical approbation of scheme is demonstrated for several problems with smooth and discontinuous solutions.

Cauchy problem for linear differential equation with variable coefficients of the first order / Samoylenko V.Hr., Samoylenko Yu.I. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 385 – 387. – Ref.: 5 title.

The paper deals with linear partial differential equation of the first order with variable coefficients arising from constructing asymptotic solution to singularly perturbed Korteweg-de Vries equation. Sufficient conditions of existence solution to Cauchy problem for mentioned above equation are proposed.

Simulation of deceleration radiation for different electron beam spectrum /Sarukhanian G., Lazurik V., Batrakov A.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 388 – 392: Pic. 3. tabl. 3. – Ref.: 4 title.

The results of computer simulation of electron beam deceleration radiation have been obtained. The dependence of coefficient of electron beam energy conversion into X-ray energy from parameters of electron beam spectrum models has been studied.

Simulation of a temperature-time mode for ionic-plasma cladding of powders / Smirnov I. V., Melnyk I. V., Andrejtsev A. J. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 393 – 398: Pic. 3. – Ref.: 7 title.

Mathematical simulation of temperature and time modes for cladding of powders with taking into account capacity of the ionic-plasma evaporator, as well as a kind of material and the size of a powder particles is provided. Proposed dependence allows defining the time, necessary for achievement on a surface of powder's particles of the required temperature and obtaining of a necessary cover thickness.

Solve of Navier-Stokes equations with computational technology / Sokhatsky A.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 393 – 398: Pic. 5. – Ref.: 7 title.

For calculation of aerodynamic characteristics of high-speed vehicles it designed a procedure and numerical algorithm. At build-up of discrete analog of equations Navier-Stokes of the method of control volumes is applied. Outcomes of calculation parameters of flow vehicle.

The calculation of infinite integrals by own elements of the hybrid differential operator of euler – lezhandra on the polar axis / Tarnovetska O.Yu. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 414 - 418. – Ref.: 4 title.

By the method of comparison of decisions, built on the arctic landmark with the two point of interface for the separate system of differential equalizations of Euler and Lezhandra by the method of functions Koshi and by the method of the proper hybrid integral transformation, polyparametric family of known integrals is calculated.

Application of the Multiple Signature Search Index to Record Linkage in Geographical Names Dictionary / Todoriko O., Gennadij G. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 419 - 423. – Ref.: 8 title.

In this paper we present a new technique for improving the efficiency and scalability of record linkage. The algorithm constructs a hash set for each dictionary record attribute in such way that slight variations of attribute value cause small changes in the hashes. That kind of a hash set allows a fast detection of most of the unmatched records. The measured effectiveness of the algorithm proves high quality of a proposed method.

Trilinear harmonic basis of the octahedron / Tuluchenko G.Ya., Khomchenko A.N., Motailo A.P. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 424 - 429: Pic. 5. – tabl. 2. – Ref.: 8 title.

The new harmonic basis for the octahedron as a finite element is constructed. The comparative analysis of characteristics constructed basis with known bases of the element is completed.

Analysis of the stress-strain state of flexible cylindrical panels / Tumashova O. V., Kostenko I. S. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 430 - 433: tabl. 2. – Ref.: 6 title.

In this paper we propose an approach to the numerical solution of two-dimensional nonlinear boundary value problems based on the use of an approximate analytical method for the Vlasov-Kantorovich, linearization method of one-dimensional nonlinear boundary value problems and the numerical method of discrete ortogonalization for solving linear boundary value problems. The main point is to investigate the reliability of the results of solving this class of problems to test Vlasov-Kantorovich method.

Model of placing objects on the plane with Euclidean metrics in the problems of logistics MOE / Ubaydullayev Y., Karaev D. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 434 - 438. – Ref.: 8 title.

The formation of each task of planning and deployment of the main indicators that can be used for classification tasks optimum ways of carrying out road transport.

Mathematical design of some tasks of restoration details of ship mechanisms / Usov A. V., Vorob'eva L. A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 439 - 444. – Ref.: 7 title.

Causing on the workings surfaces of details of wearproof coverages is often accompanied appearance between coverage and working surface of technological defects of type of removing a layer by a layer or cracks. The subsequent size tooling of such details can cause «splitting» off of coverage. The built mathematical model allows analytically to define the sizes of loadings on coverage, which opening of removing a layer by a layer, resulting in splitting off of coverage will be at.

Simulation of thermomechanical processes during grinding of parts from ferrokeramiki / Usov A.V., Bogdanova E.N. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 445 - 449: Pic. 1. – Ref.: 3 title.

A model describing the thermomechanical processes in products from ferrokeramiki handling their grinding. Proposed criterial relations for the selection of technological parameters of processing, allowing to remove defects such as cracks and chips on the surface

Geometric modelling of the transition curve using the cubic distribution of curvature / Ustenko S.A., Didanov S.V. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 450 - 454: Pic. 5. – Ref.: 7 title.

It is proposed geometric model of the transition curve using the cubic distribution of curvature and the boundary conditions that prevent the occurrence of an abrupt angular acceleration when leaving the line and at the entrance to the circular section of the railway. The analysis of the resulting distribution of curvature.

Mathematics simulation of the temperature field of a cylindrical flow of mixtures of liquids/ Filippov A.I., Ahmetova O.V., Rogov V.A. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 455 - 459: Pic. 5. – Ref.: 5 title.

Expression are found for the temperature values of a cylindrical flow of liquid mixtures. The assessment of the conditions of legitimacy of the given model. On the basis of the received images decisions are numerically constructed graphics temperature dependences of the space-time coordinates.

Hydrodynamics of the liquid layer to the tape Adhesion Oil skimmer / Filippov A.I., Ishmuratov T.A. Sultanov L.M., Yanbekova A.I. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 460 - 463: Pic. 3. - Ref.: 2 title.

Developed the theory of stationary hydrodynamic processes in a viscous fluid on the conveyor belt. The expressions for estimating the layer thickness of the liquid and the velocity field of bitumen on a moving conveyor belt. Based on the obtained solutions are found depending on the physical and geometrical parameters for the skimmer.

Nonisothermal Filtration of radioactive solutions / Filippov A.I., Mikhailov P.N. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 464 - 468: Pic. 3. - Ref.: 6 title.

Asymptotic method to solve the problem of the temperature field in the reservoir and sur-distorting rocks when filtering radioactive solutions in porous layer with allowance for heat exchange with the surrounding rocks and deposition of radioactive elements on the skeleton formation. Identified and described the dynamics of zones of contamination, thermal perturbation and clean water, depending on various parameters

Genetic algorithms for solving direct spectral problem /Florinsky V.V.(senior), Florinsky V.V.(junior), Chekanov N.A.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 469 - 474: Pic. 3. – Ref.: 11 title.

The application of the genetic algorithms for solving the eigenvalue problem is proposed. Samples of the genetic algorithms are developed.

Body of Platon and asymmetric random walks on spheres / A.N. Khomchenko // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 475 - 479: Pic. 1. – Ref.: 9 title.

Asymmetric random walks on spheres are modeled using the interpolation bases of body Platon.

Application of methods Fourier and Y.G. Panovko in an analysis sub-/ superharmonic vibrations and resonances of fractional order of cultivators with the resilient suspension of working organs. I. / Chovnyuk Y.V., Dikhteryuk M.G., Gumenyuk Y.O., Tyslenko A.B., Dityuk A.I.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 480 - 485: Pic. 2. – Ref.: 15 title.

The methods of Fourier and Y.G. Panovko are considered in the analysis of vibrations, resonances (sub- / superharmonic), including fractional order, for cultivators with the resilient suspension of working organs. Their basic parameters (amplitude, frequency), the excitation conditions are established as well.

Integral equation method in free vibration problem for the plate in the compressible fluid. Sheludko G.A., Emeljanov T.V., Naumenko O.V., Strelnikova E.A.//Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 486 - 490: Pic. 1. tabl. 1. – Ref.: 2 title.

The method to evaluate natural modes and frequencies of the plate interacting with the compressible fluid is developed. The approach is based on the boundary equation method. The numerical algorithm is elaborated for defining the liquid pressure using the hypersingular integral equation. The hybrid and adaptive procedure for defining the roots of transcendental equation was elaborated. It was used furthermore for evaluating the natural frequencies.

Dynamic similarity evaluation for two event streams / Sherstyuk V.G. // Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 491 - 496. – Ref.: 8 title.

The event system formal model is presented, the method of dynamic similarity evaluation for two event streams is offered. This method is based on principle of maximally possible alignment of event streams. The efficiency of this method and his adaptiveness to incomplete and imprecise initial information allowing to use it in the real time intelligent systems.

Simulation of dose mapping in a multi product palletized x-ray facility using Monte Carlo method/ Lazurik V. T., Lazurik V.M., Popov G., Rogov Yu.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 502 - 507: Pic. 4. – Ref.: 6 title.

Utilization of high-power electron beam accelerators for generation of X-rays (bremsstrahlung) represents the large commercial interest in the area of industrial radiation technologies. Success of application of X-ray beams in radiation processing depends largely on development of theoretical notions, semi-empirical models and computer codes for simulation of irradiation processes based on X-ray radiation facility. The results of the computer simulation using Monte Carlo method of the absorbed dose mapping in the products irradiated with scanned X-ray beams are discussed in the report.

Effective lossless and near-lossless compression algorithm for medical images. / Moroz V.V., Savkov O.O.// Bulletin of KNTU. – 2011. – № 3(42). – P. 503 - 508: Pic. 4. tabl. 1. – Ref.: 9 title.

The paper proposes an adaptive compression algorithm to the structure of medical images. Analysis of the results shows its higher efficiency compared with existing algorithms. Openness and flexibility of a DICOM enables the integration of the proposed algorithm in the standard.